Journal for History of Mathematics
Vol. 34 No. 5 (Oct. 2021), 165–191
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2021.34.5.165

The Structure of Dayan Qiuyishu Appear in 〈Daeyeon大衍〉《Sanhak Jeongeui算學正義》

《산학정의(算學正義)》〈대연(大衍)〉에 나타난 대연구일술(大衍求一術)의 구조

Kang Min-Jeong 강민정

The simple simultaneous linear congruence equation solution in《Sunzi Suanjing孫子算經》has developed into a systematic general solution in《Shuxue Jiuzhang數書九章》. The most important parts of it is the creation of the Dayan Qiuyishu大衍求一術. The reason why《Sanhak Jeongeui算學正義》deals with the Dayanshu大衍術 which has lost its practicality in the calculation of astronomical calendar, is that one of the best achievement of traditional mathematics cannot be omitted. It is written with an emphasis on the disclosure of the calculation principle. It shows that Nam Byeong-gil南秉吉 and Lee Sang-hyeok李尙爀 had a fairly structural understanding of the Dayan Qiuyishu.

Keywords: Sanhak Jeongeui, Shuxue Jiuzhang, Nam Byeong-gil, Lee Sang-hyeok, Dayanshu, Dayan Qiuyishu, Simultaneous Linear Congruence Equation; 산학정의(算學正義), 수서구장(數書九章), 남병길(南秉吉), 이상혁(李尙爀), 대연술(大衍術), 대연구일술(大衍求一術), 연립일차합동식(聯立一次合同式).

MSC: 01A25, 01A55

1 들어가며

남병길(南秉吉, 1820∼1869)과 이상혁(李尙爀, 1810∼1867 또는 1868)이 공동으로 편찬한《산학정의》(1867년)는 서양수학의 전래와 전통산학의 재조명 이후 조선에서 서양수학과 전통산학이 충분히 경합을 벌인 끝에 편찬된 조선후기 산대셈[1)]의 일대(一大) 정리본(整理本)이다 [7]. 전통산학의 다양한 분야를 총괄한 19세기 조선의 전범(典範)적 산대셈 교재이자 수학전서(數學全書)라고 할 수 있다. 이 책이 기존 자료를 활용하면서도 확고한 방향성 아래 새로운 체제와 서술, 독창적인 예제의 개발, 기존 계산법의 개선 등으로 독자적인 성취를

Kang Min-Jeong: Institute for the Translation of Korean Classics E-mail: kmjih1890@hanmail.net
Received on Oct. 13, 2021, revised on Oct. 25, 2021, accepted on Oct. 31, 2021.

1) 산대는 '계산용 막대(counting-rods)'를 뜻한다. 나무, 대나무, 상아 등 다양한 재질로 만들 수 있다.

이루었음은 앞서의 논문 [7]에서 언급한 대로이다.

본고에서는《산학정의》의 대미를 장식한〈대연〉에서 대연구일술의 구조가 드러난 부분을 살펴보고자 한다. 이는 본서만의 독특한 부분 중 하나로, 본서의 저자들이 대연술을 구조적으로 철저히 이해했음을 시사한다. 이를 위해 우선《산학정의》〈대연〉의 서술 배경과 내용의 개략을 일별하고, 대연술의 기본 알고리즘과《산학정의》〈대연〉의 용어 및 대연술 적용의 조건을 살펴본 후에, 대연구일술의 구조와 이에 대한 저자들의 이해가 드러난 부분을 조명할 것이다.

2 《산학정의》〈대연〉의 서술 배경과 내용의 개략

대연술은 여러 가지 수로 나눈 나머지들을 가지고 원래의 총수를 구하는 계산법으로, 현대수학의 연립일차합동식에서 최소의 양의 정수해를 구하는 것에 해당한다. 그 기원은 중국 고대의 역법(曆法)에서 회귀년, 삭망월, 60간지년의 공통주기를 찾아 역(曆) 계산의 시간적 기점을 정하던 데서 비롯된 것으로 추정되지만, 문헌상의 기록으로는《손자산경(孫子算經)》(4∼5C) 하권 제26문[2]의 '손자 문제' 가 가장 오래되었다.

체계적인 계산법은 남송(南宋) 진구소(秦九韶)의《수서구장(數書九章)》제1권〈대연〉에 처음 보이는데[3], 진구소는 이 계산법 전체를 '대연총수술(大衍總數術)' 또는 '대연수술(大衍數術)' 로 칭하였고, 그중 핵심적인 계산법을 '대연구일술(大衍求一術)' 로 칭하였다. 대연술에서 핵심은 주어진 몇 가지 수에 대해 다른 수들로는 모두 나누어떨어지지만 그 수로 나누면 1이 남는 수를 구하는 대연구일술이다. 진구소는 대연구일술을 일반 해법으로 체계화한 반면에, 이전의 해법은 3, 5, 7, 11 등 몇 가지 수의 조합에 대하여 경험적으로 계산하였다.

'대연' 은 본디《주역(周易)》에서 50가닥의 시초를 조작하여 양효(陽爻 —) 또는 음효(陰爻 – –)를 얻을 때 시초 전체의 개수 50을 지칭하던 말인데, 대연술의 목적이 원래의 전체 수를 구하는 것이며, 시초를 조작할 때 시초 1개를 따로 떼어 두었다가 나중에 합하는 과정 및 시초를 4개씩 일정하게 덜어내고 남은 수를 이용하는 점이 대연술과 상통하기 때문에 붙은 명칭이다.[4]

원(元)·명(明)의 역법인《수시력(授時曆)》과《대통력(大統曆)》은 역법 편찬 시기에 천체의 실제위치를 정밀 측정하고 그 측정 시점을 역원(曆元 역산의 기산점)으로 사용했기 때문에 여러 천체의 공통주기를 계산하여 까마득한 상고시대의 역원을 정할 필요가 없었다. 이렇게 사회적 효용이 떨어짐에 따라 대연술도《산법통종(算法統宗)》(1582년) 제5권의〈물부지총(物不知總)〉및《수리정온(數理精蘊)》(1723년) 하편 제37권의〈난제(難題)〉에 보이는 '손자 문제' 수준의 계산법만 전해지다가 18세기 후반 사고전서(四庫全書)에《수서구장》이 수록될

2) 사고전서본에서는 하권의 제9문이 누락되었기 때문에 제25문에 해당한다.

3) 유럽의 경우, 오일러(L. Euler 1707∼1783)와 가우스(C.F. Gauss 1777∼1855) 등에 의해 비로소 연립일차합동식에 대한 연구가 이루어졌다. [10, 228면]. 오일러의 계산법은 아래에 보인 대연술의 알고리즘과 일치한다. [9, 224면]

4)《수서구장》〈대연〉의 첫 예제가 시초의 조작을 소재로 한 '시괘발미(蓍卦發微)' 이기도 하다.

즈음에야 본격 재조명되기 시작하였다.

이후로 사고전서본《수서구장》(1782년)과 송경창(宋景昌)의《수서구장찰기(數書九章札記)》(1842년)는 진구소의 문구를 따라가며 교감과 해설을 가하였고, 초순(焦循 1763~1820)의《천원일석(天元一釋)》(1799년)은 이야(李冶)의 천원술과 다른 한 축의 천원술로서 진구소의 대연구일술을 논하였다.[5] 19세기에는 진구소의 대연술을 더욱 체계화한 저작으로 장돈인(張敦仁 1754~1834)의《구일산술(九一算術)》(1803년), 시왈순(時日醇 1807~1880)의《구일술지(九一術指)》(1873년), 황종헌(黃宗憲 1805?~1900?)의《구일술통해(九一術通解)》(1874년) 등이 나왔다 [12, 13, 6, 14, 4].

조선의 산학서에서 대연술을 다룬 것으로는 경선징(慶善徵 1616~1690)의《묵사집산법(默思集算法)》〈인잉구총문(引剩求總門)〉, 홍정하(洪正夏 1684~1727)의《구일집(九一集)》〈물부지총문(物不知總門)〉, 황윤석(黃胤錫 1729~1791)의《산학입문(算學入門)》(1774년)〈천산송(天算頌)〉, 배상열(裵相說 1759~1789)의《서계쇄록(書計瑣錄)》(1786년)〈차분(差分)〉, 남병길의《산학정의》(1867년)〈대연〉등을 들 수 있다. 앞의 네 책은 중국에서 대연술이 본격 재조명되기 이전의 저작으로,《산법통종》과《수리정온》에 전해진 손자 문제의 해법을 벗어나지 않았다 [11, 8, 2, 5, 1].

《산학정의》〈대연〉은 이 같은 상황에서 조선 산학이 대연구일술을 포함한 진구소의 대연술을 도입하여 소화한 처음이자 유일한 저술로, 사고전서 편찬관, 이예(李銳 1769~1817), 심흠배(沈欽裴 18세기 말~19세기 초), 모악생(毛嶽生 1791~1841)의 주석을 수합하고 자신의 의견을 덧붙인 송경창의《수서구장찰기》를 참고하였다. 서설에서는 대연총수술의 계산절차와 원리, 정모(定母)[6]와 연수(衍數) 산출의 유의점, 승률(乘率)의 의미, 대연구일술의 구조와 원리 등 대연술에 대한 전면적인 설명을 적절한 예시와 함께 제시하였고, 예제는 물품 배분과 역법 계산을 소재로 단 2개만 실었다. 대연구일술의 난이도와 생소함을 감안하면 이처럼 단출한 예제 구성이 다소 의아할 수 있다. 그러나 당시의 역법인《시헌력(時憲曆)》에 상고시대의 역원 계산이 필요치 않은 상황에서 실용을 떠나 우수한 산대셈 계산법의 전승을 위해〈대연〉을 저술했다고 본다면, 대연술이 사용되는 대표적인 상황 2가지를 드는 것으로 충분했던 듯싶다.

5) 이야의 천원술은 미지수를 천원 1로 놓아 전개하는 일원고차방정식 산대셈 해법이다. 초순은 진구소의 대연구일술도 구하려는 수의 자리를 정하여 천원 1을 놓는 것으로 계산을 시작하기 때문에 천원술의 한 종류라고 하였다. 이야의 천원술은 구하려는 미지수를 천원 1로 놓아 가감승제의 연산 과정에 끌어들이는, 말하자면 산대 배열의 공간적 위치를 이용한 대수(代數)적 계산법인 데 비하여, 대연구일술은 호제법(互除法)의 첫 몫을 곱할 곱하임수[被乘數]이자 첫 몫과 둘째 몫의 곱을 더할 더하임수[被加數]의 역할을 차례로 수행하는 숫자 1과 그 공간적 위치를 설정하여, 이 숫자에 누진적으로 이루어지는 곱셈과 덧셈의 결과값을 해로 취하는 산술적 알고리즘이다. 대연구일술의 천원 1은 소정의 자리에 단 한 차례 놓은 산대 하나가 '4. 3)(2)' 항에 보인 연분수의 모든 분자 1들의 역할을 수행하게 된다.

6) 대연술의 용어에 대해서는 아래의 '3. 2' 항에 밝혔다.

3 《산학정의》의 대연술

《산학정의》의 대연술을 이해하려면 우선 대연술의 기본 알고리즘에 대한 이해가 선행되어야 하고, 다음으로 《산학정의》〈대연〉에 사용된 대연술의 용어 및 대연술 적용을 위한 조건을 살펴보아야 한다.

3.1 대연술의 기본 알고리즘

대연술의 기본 알고리즘을 이해하는 데에는 '손자 문제' 가 도움이 된다.

(1) 손자 문제

《손자산경》 하권 제26문의 문제와 답은 다음과 같다.

> 문: 지금 물건의 총수를 모르는데, 셋씩 세면 둘이 남고, 다섯씩 세면 셋이 남고, 일곱씩 세면 둘이 남는다. 물건의 총수는 얼마인가?
>
> 답: 23개

현대 수학기호로 나타내면 연립일차합동식 $\begin{cases} N \equiv 2 \pmod 3 \\ N \equiv 3 \pmod 5 \\ N \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$[7]이 되는데, 전통적인 풀이 과정은 다음의 네 단계를 거친다.

① 각 수로 나누면 1이 남고 나머지 수들로는 나누어떨어지는 수를 경험적으로 구하기

- 5와 7로는 나누어떨어지고 3으로 나누면 1이 남는 수

$$5\times7 = 35 = (3\times11) + 2, (5\times7)\times2 = 70 = (3\times23) + 1 \Rightarrow 70$$

- 3과 7로는 나누어떨어지고 5로 나누면 1이 남는 수

$$3\times7 = 21 = (5\times4) + 1 \Rightarrow 21$$

- 3과 5로는 나누어떨어지고 7로 나누면 1이 남는 수

$$3\times5 = 15 = (7\times2) + 1 \Rightarrow 15$$

② 각 수로 나눈 나머지가 문제의 조건과 같도록 ①의 결과를 조정한 수 구하기

- 5와 7로는 나누어떨어지고 3으로 나누면 2가 남는 수

$$70\times2 = (3\times23 + 1)\times2 = (3\times46) + 2 \Rightarrow 140$$

7) 양의 정수 m, 정수 N과 r에 대하여 $N \equiv r \pmod m$은 "N을 m으로 나누면 나머지가 r이다."를 뜻하며 "N과 r은 법(法 modulus) m에 대하여 합동이다."라고 읽는다. 이때 $(N - r)$은 m의 배수가 된다.

- 3과 7로는 나누어떨어지고 5로 나누면 3이 남는 수

$$21\times3 = (5\times4+1)\times3 = (5\times12)+3 \Rightarrow 63$$

- 3과 5로는 나누어떨어지고 7로 나누면 2가 남는 수

$$15\times2 = (7\times2+1)\times2 = (7\times4)+2 \Rightarrow 30$$

③ '②' 의 결과를 모두 합하면 문제의 조건을 만족함.

$$140+63+30 = 233 \equiv 2(\mathrm{mod}3) \equiv 3(\mathrm{mod}5) \equiv 2(\mathrm{mod}7)$$

④ '③' 의 결과를 3, 5, 7의 최소공배수 105로 나누어 최소의 양의 정수 구하기

$$233 = (105\times2)+23 \Rightarrow 23$$

(2) 손자 문제 해법의 확장

손자 문제의 해법을 확장하여 유추한 일반 연립일차합동식

$$\begin{aligned} N &\equiv r_1 \,(\mathrm{mod}\, m_1) \\ N &\equiv r_2 \,(\mathrm{mod}\, m_2) \\ N &\equiv r_3 \,(\mathrm{mod}\, m_3) \\ &\vdots \\ N &\equiv r_n \,(\mathrm{mod}\, m_n) \end{aligned}$$

의 최소 양의 정수해 해법은 $i \neq j$ 인 m_i와 m_j가 서로소일 때 다음과 같이 계산된다.

모든 $m_i(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$의 최소공배수 $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$에 대하여 다음을 정의하면,

$$\begin{aligned} \frac{M}{m_i} &= M_i \\ A_i &\equiv M_i(\mathrm{mod}\, m_i) \\ M_iF_i \equiv A_iF_i &\equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i) \end{aligned}$$

M_i는 m_i를 제외한 모든 m_j로 나누어떨어지는 수이고, A_i는 M_i를 m_i로 나눈 나머지이며, F_i는 M_i의 배수 또는 A_i의 배수를 m_i로 나누었을 때 나머지가 1이 되도록 조정해주는 곱수이다. 마지막 식의 M_iF_i는 m_i를 제외한 모든 m_j로는 나누어떨어지고 m_i로 나누면 1이 남는 수이다. A_i가 1인 경우는 $A_iF_i \equiv 1 \times F_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i)$로부터 $F_i = 1$이 되므로 M_i가 곧 M_iF_i가 된다. 위 식 양변에 r_i를 곱하면 m_i를 제외한 모든 m_j로는 나누어떨어지고 m_i로 나누면 나머지가 r_i인 수가 된다.

$$M_iF_ir_i \equiv r_i(\mathrm{mod}\, m_i)$$

따라서 각 항의 이 수들을 모두 합하면 원래 주어진 연립일차합동식을 모두 만족하는 N이

구해지는데, 최소의 양의 정수해는 m_i 의 최소공배수 M 으로 나눈 나머지이므로, 다음과 같이 표현된다.

$$N \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i F_i r_i (\mathrm{mod}\, M)$$

r_i 가 0인 항은 $M_i F_i r_i = 0$ 이므로 M_i 와 F_i 도 구할 필요가 없다. 만약에 모든 r_i 가 0이라면 $N \equiv 0(\mathrm{mod}\, M)$ 이 되므로 M 이 해가 된다.

대연술의 관건은 F_i 를 구하는 것인데, 손자 문제에서는 이를 경험적으로 구했지만 복잡한 수에서는 체계적이고 일반적인 계산법이 필요하다. 아래에 보인 진구소의 대연구일술이 바로 그것이다.

3.2 《산학정의》 대연술의 용어

위에 보인 일반 연립일차합동식의 최소 정수해 해법에서 각 요소들을 지칭하는 대연술의 용어는 다음과 같다. 《산학정의》는 진구소의 용어를 그대로 계승하였다.

① m_i: 정모(定母), 정수(定數), 정(定).

원래 주어진 법들의 최소공배수는 변함이 없으면서 쌍마다 서로소가 되도록 조정한 새로운 법.

② M: 연모(衍母).

모든 정모들의 곱($m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$).

원래 주어진 법들의 최소공배수.

③ M_i: 연수(衍數), 연(衍).

연모를 그 정모로 나눈 수($M \div m_i$).

다른 정모들($m_j, i \neq j$)로는 모두 나누어떨어지고

그 정모(m_i)로는 나누어떨어지지 않는 수.

④ A_i: 기수(奇數).

연수를 정모로 나눈 나머지($M_i \equiv A_i (\mathrm{mod}\, m_i)$).

⑤ F_i: 승률(乘率).

기수에 곱하여 정모로 나누면 나머지가 1이 되도록 하는 수($A_i F_i \equiv 1 (\mathrm{mod} m_i)$).

⑥ Y_i: 용수(用數).

승률을 연수에 곱한 수($M_i F_i$).

다른 정모들($m_j, i \neq j$)로는 모두 나누어떨어지고

그 정모(m_i)로 나누면 1이 남는 수($Y_i = M_i F_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m_i)$).

⑦ r_i: 잉수(剩數), 잉(剩).

원래 주어진 법들로 나누었을 때 남는 수들.

원래의 법들을 쌍마다 서로소가 되도록 정모로 변화한 후에도 각 항의 원래 잉수를 그대로 사용한다.

⑧ Z_i: 총수(總數), 총(總).

용수에 잉수를 곱한 수($Y_i r_i$).

다른 정모들($m_j, i \neq j$)로는 모두 나누어떨어지고

그 정모(m_i)로 나누면 잉수가 남는 수($Z_i = Y_i r_i \equiv r_i (\bmod m_i)$).

⑨ $\sum_{i=1}^{n} Z_i$: 병총(幷總).

각 총수들의 합.

각 정모들로 나누면 각 잉수들이 남는 수.

$(\sum_{i=1}^{n} Z_i \equiv r_1 (\bmod m_1) \equiv r_2 (\bmod m_2) \cdots \equiv r_n (\bmod m_n))$

⑩ $\sum_{i=1}^{n} Z_i (\bmod M)$: 율실(率實).

병총을 연모로 나눈 나머지.

각 정모들로 나누면 각 잉수들이 남는 수들 중 최소의 양의 정수.

구하려는 원래의 총수.

3.3 대연술 적용을 위한 조건: 정모가 쌍마다 서로소일 것

대연술의 일반 해법을 적용하기 위해서는 정모 $m_i, m_j\ (i \neq j)$가 쌍마다 모두 서로소여서 '모든 정모의 곱이 곧 연모'가 되는 $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$이 성립해야 한다. 문제에 주어진 수들이 이 조건을 충족하지 않는 경우는 최소공배수가 변하지 않으면서 어떤 두 정모 사이에도 공약수가 존재하지 않도록 조정해 주어야 한다. 《산학정의》〈대연〉은 이 점을 강조하고 반례를 들었는데, 정리하면 아래와 같다.

(1) 모든 정모는 반드시 쌍마다 서로소일 것

만약에 정모들 중에 서로소가 아닌 두 정모 $m_i = \mu_i g, m_j = \mu_j g\ (i \neq j, (\mu_i, \mu_j) = 1, g \neq 1)$가 존재한다면, 연모가 $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times \mu_i g \times \cdots \times \mu_j g \times \cdots \times m_n$이 되므로 연수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} M_i = \frac{M}{m_i} &= \frac{m_1 \times m_2 \times \cdots \times \mu_i g \times \cdots \times \mu_j g \times \cdots \times m_n}{\mu_i g} \\ &= m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_{i-1} \times m_{i+1} \times \cdots \times \mu_j g \cdots \times m_n \end{aligned}$$

따라서 정모 $m_i = \mu_i g$로 나누었을 때 나머지가 1이 되고 그밖의 정모들로는 나누어떨어지는 수를 구하려면 다음의 식을 만족하는 승률 F_i를 구해야 한다.

$$M_i F_i \equiv (m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_{i-1} \times m_{i+1} \times \cdots \times \mu_j g \times \cdots \times m_n) \times F_i \equiv 1 (\bmod \mu_i g)$$

그런데 일차합동식 $ax \equiv r(\bmod b)$의 해가 존재하기 위한 조건이 $(a,b) \mid r$이므로8), 위 식을 만족하는 F_i가 존재하려면 '$(m_1 \times m_2 \times \cdots \times \mu_j g \times \cdots \times m_n, \mu_i g) \mid 1$' 이 성립해야 한다. 그러나 $(m_1 \times m_2 \times \cdots \times \mu_j g \cdots \times m_n, \mu_i g) = g \neq 1$이므로 위 식을 만족하는 F_i가 존재하지 않는다. 이것이 《산학정의》〈대연〉에 "정모에 공약수가 있으면……정모로 나누었을 때 1이 남는 용수를 구할 수 없다.[定母有等數, 則··· 無以求餘一之用數。]" 라고 한 뜻이다.

(2) 정모가 쌍마다 서로소가 아니면 대연술 계산이 불가능함을 보인 예시9)

$m_1 = 4, m_2 = 6$을 그대로 정모로 사용하면

$$\begin{aligned}&\text{연모}M = m_1 \times m_2 = 4 \times 6 = 24\\ &\text{연수}M_1 = M \div m_1 = 6, M_2 = M \div m_2 = 4\\ &\text{기수}A_1 \equiv M_1(\bmod m_1) = 2, A_2 \equiv (\bmod m_2) = 4\end{aligned}$$

이므로, 승률 F_i은 다음을 만족하는 정수여야 하는데,

$$\begin{aligned}&A_1F_1 \equiv 1(\bmod m_1)\\ &2F_1 \equiv 1(\bmod 4)\\ &2F_1 = 4N+1\end{aligned}$$

$2F_1$과 $4N$이 모두 짝수이므로 위 식을 만족하는 정수 F_1은 존재하지 않는다.

또, 승률 F_2는 다음을 만족하는 정수여야 하는데,

$$A_2F_2 \equiv 1(\bmod m_2)$$

8) 두 수 a와 b의 최대공약수를 (a,b)로 나타내고 m이 a의 약수임을 $m \mid a$로 나타낸다. 두 정수 a와 $b(a > b)$의 최대공약수를 유클리드 호제법으로 구하는 과정을 아래 표의 좌열에, 각각을 나머지 r_i에 대해 정리한 식을 중간 열에, a와 b의 계수를 순서쌍으로 우열에 나타내었다. 나머지가 0이 될 때 나눗수인 r_n이 최대공약수 (a,b)가 된다.

$a = q_1 b + r_1$	$r_1 = 1a - q_1 b$	$(1,\ -q_1)$
$b = q_2 r_1 + r_2$	$r_2 = 1b - q_2 r_1$ $= 1b - q_2(a - q_1 b)$ $= -q_2 a + (1 + q_1 q_2)b$	$(-q_2,\ 1 + q_1 q_2)$
$r_1 = q_3 r_2 + r_3$	$r_3 = r_1 - q_3 r_2$ $= (1a - q_1 b) - q_3(-q_2 a + (1 + q_1 q_2)b)$ $= (1 + q_2 q_3)a - (q_1 + q_3 + q_1 q_2 q_3)b$	$\{1 + q_2 q_3,$ $-(q_1 + q_3 + q_1 q_2 q_3)\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$	$r_n = r_{n-2} - q_n r_{n-1} = xa + yb$	$(x,\ y)$
$r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0$	$\Rightarrow\ r_n = (a,b)$	

위 표에서 최대공약수는 $r_n = xa + yb$와 같이 선형결합의 형태로 표현됨을 알 수 있다. 바꾸어 말하면 두 정수 a와 b의 최대공약수가 g일 때 $xa + yb = g$가 성립하는 정수 x, y가 반드시 존재한다. $ax \equiv r(\bmod b)$를 나타낸 방정식 $ax - by = r$도 이와 동일한 선형결합의 형태이므로 r이 a와 b의 최대공약수이거나 그 배수라야 해가 존재한다.

9) 《산학정의》의 원문은 다음과 같다. "如甲數四、乙數六, 有等數二, 而不約, 各爲定母, 則衍母爲二十四……六爲甲之衍數, 去定母四, 餘奇數爲二。而遞加幾次迄, 無減定母四餘一之數。四爲乙之奇數, 而遞加幾次迄, 無減定母六餘一之數"

$$4F_2 \equiv 1 (\bmod 6)$$
$$4F_2 = 6N' + 1$$

$4F_2$ 와 $6N'$ 이 모두 짝수이므로 위 식을 만족하는 정수 F_2 는 존재하지 않는다. 따라서 더 이상 대연술 계산을 진행할 수 없다.

3.4 대연술의 정모 구하기

《산학정의》〈대연〉에 그 방법이 세 가지로 제시되었는데10), 이들은 서로소가 아닌 원래의 법 m_i 를 서로소인 정모 μ_i 로 변환시켜도 원래의 연립합동식과 동치가 된다는 전제에 기반한다. 연립일차합동식에 관한 다음의 세 가지 기본 사항이 기초가 된 것이다.

(1) 연립일차합동식에 관한 세 가지 기본 사항

① 연립일차합동식이 해를 가질 조건

연립일차합동식 $x \equiv r_1 (\bmod m_1)$, $x \equiv r_2 (\bmod m_2)$, $\cdots$, $x \equiv r_k (\bmod m_k)$ 가 해를 가질 조건은 모든 $i \neq j$ 에 대하여 $(m_i, m_j) \mid (r_i - r_j)$ 인 것이다. 그 까닭은 다음과 같다.

위 연립일차합동식의 해를 a 라 하면 모든 i 에 대하여 $a \equiv r_i (\bmod m_i)$ 이고 따라서 $m_i \mid (a - r_i)$ 이다. 그리고 $i \neq j$ 일 때 $(m_i, m_j) \mid m_i, (m_i, m_j) \mid m_j$ 이므로 다음이 순차적으로 성립한다.

$$(m_i, m_j) \mid (a - r_i), \quad (m_i, m_j) \mid (a - r_j)$$
$$(m_i, m_j) \mid \{(a - r_i) - (a - r_j)\}$$
$$(m_i, m_j) \mid (r_i - r_j)$$

이때 해 a 는 법 $[m_1, m_2, \cdots, m_k]$11)에 대하여 유일하게 존재한다.

② 법이 mn 인 합동식과 법이 m, n 인 연립일차합동식 두 양의 정수 m, n 과 두 정수 a, b 에 대하여 $m \mid a$ 이고 또 $n \mid a$ 이면 $[m, n] \mid a$ 이다. 따라서 연립일차합동식 $\begin{cases} a \equiv b\,(\bmod m) \\ a \equiv b\,(\bmod n) \end{cases}$ 에 따라 $\begin{cases} m \mid (a - b) \\ n \mid (a - b) \end{cases}$ 이면 $[m, n] \mid (a - b)$ 와 $a \equiv b\,(\bmod mn)$ 이 성립하고, 역으로 $a \equiv b\,(\bmod mn)$ 이면 $\begin{cases} a \equiv b\,(\bmod m) \\ a \equiv b\,(\bmod n) \end{cases}$ 도 성립하여 두 식이 동치이다. 법이 $m_i = \mu_i \times g$ 인

10) 청나라 말엽에 대연술을 재정리한 황종헌(黃宗憲)의 《구일술통해(九一術通解)》(1874년)는 원래의 법들을 '소인수분해[析母]' 하여 각 소인수의 최고 차수만 남기고 나머지는 버리며, 최고 차수가 두 수 이상에 존재할 때는 임의의 한 수에만 남기고 나머지는 버리는 방법으로 정모를 구하였다. 이 책은 서두에 100 미만의 소수(素數 prime number)를 열거한 '소수표[根數表]' 도 싣고 있다. 《산학정의》의 방법은 소수 개념이 도입되기 전에 《수서구장》에 기반하여 정리한 것이다.

11) 정수 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 의 최소공배수를 $[m_1, m_2, \cdots, m_k]$로 나타낸다.

연립일차합동식에 이를 연장하면 다음의 두 연립일차합동식이 동치가 된다.

$$\begin{cases} x \equiv r_1 (\mathrm{mod}\ m_1) \equiv r_1 (\mathrm{mod}\ \mu_1 g) \\ x \equiv r_2 (\mathrm{mod}\ m_2) \equiv r_2 (\mathrm{mod}\ \mu_2 g) \\ \vdots \\ x \equiv r_n (\mathrm{mod}\ m_n) \equiv r_n (\mathrm{mod}\ \mu_n g) \end{cases} \text{ 와 } \begin{cases} x \equiv \begin{cases} r_1 (\mathrm{mod}\ \mu_1) \\ r_1 (\mathrm{mod}\ g) \end{cases} \\ x \equiv \begin{cases} r_2 (\mathrm{mod}\ \mu_2) \\ r_2 (\mathrm{mod}\ g) \end{cases} \\ \vdots \\ x \equiv \begin{cases} r_n (\mathrm{mod}\ \mu_n) \\ r_n (\mathrm{mod}\ g) \end{cases} \end{cases} \text{ 는 동치.}$$

그런데 이 연립일차합동식이 해를 가지려면 위 오른쪽 식의

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 (\mathrm{mod}\, g) \\ x &\equiv r_2 (\mathrm{mod}\, g) \\ &\vdots \\ x &\equiv r_n (\mathrm{mod}\, g) \end{aligned}$$

에서 모든 $i \neq j$에 대하여 $(g, g) = g \mid (r_i - r_j)$가 되어야 한다. 따라서 $r_i \equiv r_j (\mathrm{mod}\, g)$, 곧 모든 $r_1, r_2, \cdots, r_n$이 법 g에 대하여 합동이므로 이 n개의 식 중 하나만 남기고 나머지는 생략해도 된다. 법 $m_i = \mu_i \times g$에 남기기로 하면 결국 원래의 연립일차합동식은 동치인 다음의 식으로 변환된다.

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 (\mathrm{mod}\, \mu_1) \\ x &\equiv r_2 (\mathrm{mod}\, \mu_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv r_i (\mathrm{mod}\, \mu_i g) \\ &\vdots \\ x &\equiv r_n (\mathrm{mod}\, \mu_n) \end{aligned}$$

말하자면 연립일차합동식의 법들이 공약수를 가지는 경우에 하나의 식을 제외한 모든 식의 법에서 그 공약수를 약분해 버리고 계산해도 된다.

③ 2개 이상 합동식의 법에 소수 p의 제곱수가 약수로 포함된 연립일차합동식의 변환

만약 법 m_i에 약수로 포함된 소수 p의 최고차 제곱수가 p^s이고 $s \geq t$, $i \neq j$인 $p^t \mid m_j$이면 $p^t \mid (m_i, m_j)$이다. 그리고 이 연립일차합동식이 해를 가질 조건이 모든 $i \neq j$에 대하여 $(m_i, m_j) \mid (r_i - r_j)$이므로 $p^t \mid (r_i, r_j)$와 $r_i \equiv r_j (\mathrm{mod}\, p^t)$가 성립한다. 말하자면 법 p^t에 대하여 r_i와 r_j가 합동이므로, $x \equiv r_i (\mathrm{mod}\, p^t)$와 $x \equiv r_j (\mathrm{mod}\, p^t)$중 하나는 생략해도 된다.

따라서 $x \equiv r_i (\mathrm{mod}\, p^s) \equiv \begin{cases} r_i (\mathrm{mod}\, p^t) \\ r_i (\mathrm{mod}\, p^{s-t}) \end{cases}$ 만 남기고 $x \equiv r_j (\mathrm{mod}\, p^t)$는 생략할 수 있다.

(3) 쌍마다 서로소인 정모 계산법

위 세 가지 기본 사항을 토대로 쌍마다 서로소인 정모 계산법을 정리하면 아래와 같다. 《산학정의》〈대연〉의 이 계산법은 진구소의 방법을 계승한 것이다.

① '모든 수의 최대공약수[總等]'를 구하여, 한 수만 그대로 남기고 나머지 수들은 모두 최대공약수로 나누기[12)]

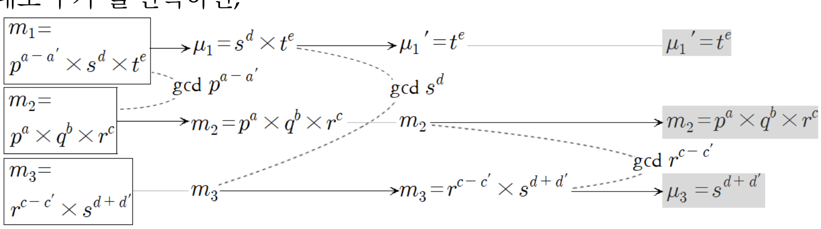
모든 법 m_i의 최대공약수 g가 존재하여 $m_i = \mu_i \times g$이고 μ_i와 $\mu_j (i \neq j)$가 서로소이면 최소공배수는 $M = \mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n \times g$가 된다. 따라서 원래 주어진 법 $m_i = \mu_i \times g$ 대신에 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_i \times g, \cdots, \mu_n$을 정모로 삼아 계산한다. 이때 원래의 법들 중 최대공약수 g를 남길 μ_i를 신중히 선택하여 $\mu_j = \mu_j' \times g (i \neq j)$인 μ_j가 존재하지 않도록 해야 한다. 그렇지 않으면 서로소가 아닌 두 수 $\mu_i \times g$와 $\mu_j = \mu_j' \times g$가 다시 나타나기 때문이다.

② '두 수씩 연이어 최대공약수를 구하여[連環求等]' 한 수만 나누고 다른 한 수는 그대로 두기[13)]

원래 주어진 법들이 각각 다음과 같이 소인수분해되는 경우에[14)]

$$m_1 = p^{a-a'} \times s^d \times t^e$$
$$m_2 = p^a \times q^b \times r^c$$
$$m_3 = r^{c-c'} \times s^{d+d'} \text{(단, } a, b, c, d, e\text{는 모두 양의 정수이고 } a > a', c > c'\text{)}$$

최소공배수는 $M = p^a \times q^b \times r^c \times s^{d+d'} \times t^e$이다. 세 수를 가지고 아래 도시(圖示)와 같은 과정으로 '두 수씩 연이어 최대공약수(gcd)를 구하여 한 수만 나누어 줄이고 다른 한 수는 그대로 두기'를 반복하면,



원래의 법 m_1, m_2, m_3가 μ_1', m_2, μ_3로 변형되는데, 이 새로운 세 법의 최소공배수도 $M = \mu_1' \times m_2 \times \mu_3 = p^a \times q^b \times r^c \times s^{d+d'} \times t^e$가 되므로 이들을 정모로 삼는다. 이때 주의할 점은 m_1, m_2의 최대공약수 $p^{a-a'}$로 나누어 줄이는 쪽을 m_1으로 택해야 변형 후의 μ_1, m_2가 서로소가 되고, μ_1, m_3의 최대공약수 s^d로 나누어 줄이는 쪽을 μ_1으로 택해야 변형 후의 μ_1', m_3가 서로소가 되며, m_2, m_3의 최대공약수 $r^{c-c'}$로 나누어 줄이는 쪽을 m_3로 택해야 변형 후의 m_2, μ_3가 서로소가 되어 정모로 사용할 수 있다는 점이다.[15)]

12) "以各數先求總等, 留一, 遍約。"
13) "連環求等, 一約, 一不約。"
14) 이해의 편의를 위하여 소인수분해를 보였다. 《산학정의》에 소인수분해의 개념은 없다. 이후에도 마찬가지이다.
15) 《산학정의》는 원래의 법 6, 25, 4를 정모 3, 25, 4로 변환하는 예시를 다음과 같이 들어 설명하였다. "如甲數

③ ‘후속 최대공약수[續等]’ 를 구하여, 한 수에는 곱하고 나머지 수들은 나누기[16)]

원래의 법들이 각각 다음과 같이 소인수분해되는 경우에

$$m_1 = p^{2a} \times q^b \times r^{c-c'}$$
$$m_2 = p^a \times r^c$$
$$m_3 = p^{3a} \times r^{c-c'}(\text{단}, a, b, c, c'\text{는 모두 양의 정수이고 } c > c')$$

최소공배수는 $M = p^{3a} \times q^b \times r^c$ 이다. 세 법의 최대공약수 $p^a \times r^{c-c'}$ 가 존재하므로 우선 앞의 ①항을 적용하여 새로운 세 수 $\mu_1 = p^a \times q^b$, $m_2 = p^a \times r^c$, $\mu_3 = p^{2a}$ 로 변형하면 최소공배수가 $M' = p^{2a} \times q^b \times r^c$ 로 달라질 뿐만 아니라 최대공약수 p^a 가 여전히 존재하여 세 수가 서로소가 아니다. 그러므로 ‘후속 최대공약수[續等]’ p^a 를 구하여 한 수에는 곱하고 나머지 수들은 나누어 줄이기를 하면 다시 새로운 세 수 $\mu_1' = q^b$, $\mu_2 = r^c$, $\mu_3' = p^{3a}$ 이 나오는데, 이들의 최소공배수는 $M = p^{3a} \times q^b \times r^c$ 로 원래 법들의 최소공배수와 다시 같아졌고 또 서로소이므로 정모로 사용할 수 있다.(A)

중간에 최소공배수가 달라진 까닭을 살펴보면, ①항을 적용할 때 최대공약수 $p^a \times r^{c-c'}$ 를 한꺼번에 처리했기 때문이다. 우선 p^a 만을 가지고 ①항을 적용하여 새로운 세 수를 $\mu_1 = p^a \times q^b \times r^{c-c'}$, $\mu_2 = r^c$, $m_3 = p^{3a} \times r^{c-c'}$ 로 얻고 나서, $r^{c-c'}$ 를 가지고 다시 ①항을 적용하여 다시금 새로운 세 수 $\mu_1' = p^a \times q^b$, $\mu_2 = r^c$, $\mu_3 = p^{3a}$ 를 얻었다면 최소공배수가 $M = p^{3a} \times q^b \times r^c$ 이 되어 변하지 않는다. 다만 이 경우에도 μ_1' 와 μ_3 의 최대공약수 p^a 을 가지고 ②항을 적용하여 또다시 새로운 세 수 $\mu_1'' = q^b$, $\mu_2 = r^c$, $\mu_3 = p^{3a}$ 를 얻어야만 서로소가 되어 정모로 사용할 수 있다.(B)

(A)와 (B)를 비교하면, 모두 ①항을 적용하여 구한 새로운 세 수에 대하여 다시 최대공약수를 구하여 다시 조정을 가하였다. 그런데 다시 구한 최대공약수를 (A)에서만 ‘후속 최대공약수[속등]’ 로 칭하여 ‘한 수에는 곱하고 나머지 수들은 나누는’ 특별한 조치를 취하였다. (A)에서 두 번째로 구한 세 수의 최대공약수 p^a 가 앞서 ①항의 적용 과정에서 이미 동일한 세 수의 최대공약수로 사용한 인수임에 주목하면, 이때 ‘후속 최대공약수’ 는 앞선 최대공약수 조정 과정에서 발생한 최소공배수의 인수의 부족을 도로 보충하기 위한 조치임을 알 수 있다.

《산학정의》의 소주(小註)에 든 두 가지 예시를 가지고 도시(圖示)하면 다음과 같다.

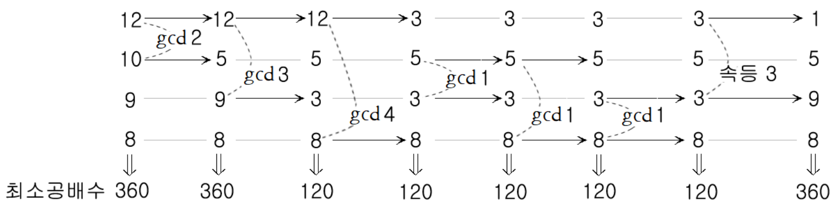
ㄱ. ‘후속 최대공약수 처리법[續等法]’ 의 예시[17)]

六、乙數二十五、丙數四, 則以甲與乙求等, 得一, 無可約; 以乙與丙求等, 亦得一, 無可約。以丙與甲求等, 得二, 以二約甲, 爲三; 而丙仍爲四。是甲三、乙二十五、丙四, 爲定母也。若約丙爲二, 而甲仍爲六, 則仍有等數二。故必約甲, 而不約丙也。”

16) 《산학정의》에는 “求續等, 約彼, 乘此。”라고 하여, 두 수씩 ‘후속 최대공약수[續等]’ 를 구하여 한 수에는 곱하고 다른 한 수는 나누어 줄이는 것으로 되어 있으나, 아래처럼 세 수 이상에도 적용된다.

17) “如甲數十二、乙數十、丙數九、丁數八, 則以甲與乙求等, 得二, 約乙爲五; 以甲與丙求等, 得三, 約丙爲三。是與甲, 猶有等數存焉, 姑置之。又以甲與丁求等, 得四, 約甲爲三。是與丙三等, 亦姑置之。又以乙五, 與各數兩兩求等, 皆得一, 無可約。是連環求等, 約訖, 得甲三、乙五、丙三、丁八也。乃以甲與丙, 求續等三, 約甲三爲一, 而乘丙三爲九。是甲一、乙五、丙九、丁八, 爲定母也。”

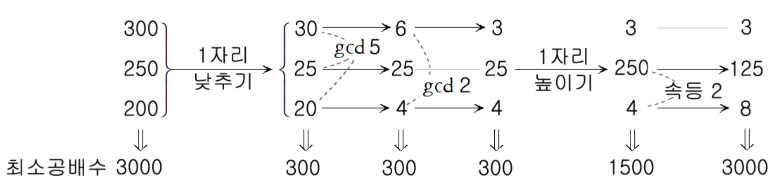
원래의 법 12, 10, 9, 8을 쌍마다 서로소인 정모 1, 5, 9, 8로 변환하는 과정에서 '후속 최대공약수[속등]' 3이 발생하였다. 아래 도시의 맨 아랫줄에 보인 '최소공배수'는 네 개의 숫자가 변환되는 각 단계마다 최소공배수가 어떻게 달라지는지 알아보기 위함이다.



제2열의 12와 9에서 구한 최대공약수 3으로 12를 나누지 않고 9를 나누는 바람에 제3열의 최소공배수가 120으로 줄어들었다가, 제7열의 3과 3에서 구한 '후속 최대공약수[속등]' 3으로 제1행의 3은 나누고 제3행의 3에는 곱한 결과, 제8열의 최소공배수가 도로 360이 되었다. 제1행의 수와 제3행의 수 사이에서 구한 공약수 3으로 인해 발생한 문제를 도로 제1행의 수와 제3행의 수 사이에서 구한 공약수 3을 이용하여 해결하였으며, 둘 중 후자를 '후속 최대공약수'로 지칭함을 볼 수 있다.

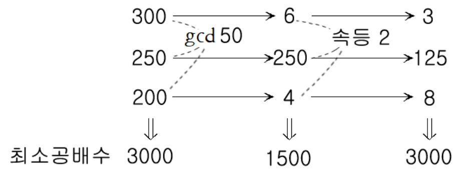
ㄴ. 각 수의 끝자리가 모두 0이면 반드시 '후속 최대공약수[속등]'가 존재함의 예시[18)]

《산학정의》〈대연〉에는 모든 법의 끝자리가 0일 때 정모 구하기의 간편법이 제시되었는데, 이때도 '후속 최대공약수[속등]'의 조정이 나타난다.



원래의 법 300, 250, 200의 끝자리에 공통인 '0'을 일괄적으로 떼어낸 30, 25, 20을 가지고 서로소가 되도록 변환한 3, 25, 4 중의 한 수에 '0'을 다시 붙인 후에 '후속 최대공약수[속등]'를 조정하여, 원래 3000이었던 최소공배수가 1500으로 줄었던 것을 도로 3000으로 되돌린 것이다. 그런데 이 간편법에서는 제5열의 250과 4 사이에 구한 최대공약수 2를 후속 최대공약수로 판단할 근거가 드러나지 않는다. 이보다 앞서 제2행과 제3행의 수 사이에 최대공약수 2를 구하여 조정한 흔적이 보이지 않기 때문이다. 아래에는 세 수 300, 250, 200을 직접 조작하여 정모 3, 125, 8을 구하는 과정을 보였다.

18) "又各數尾位俱空, 則必有續等。如甲數三百、乙數二百五十、丙數二百, 則皆降一位, 命甲爲三十, 命乙爲二十五, 命丙爲二十。連環求等, 約訖, 得甲三、乙二十五、丙四。乃以乙數復陞原降之一位, 得二百五十。與甲求續等, 得一, 無可約; 與丙求續等, 得二, 約乙爲一百二十五, 而乘丙爲八。是甲三、乙一百二十五、丙八, 爲定母也。"



이렇게 보면 제1열의 세 수 300, 250, 200의 최대공약수 $50 = 2 \times 5^2$을 처리하는 과정에서 최소공배수가 인수 2배만큼 줄었으며, 이 때문에 세 수 전체에 다시 나타난 최대공약수 2를 후속 최대공약수로 처리한 것임을 알 수 있다.

ㄷ. '후속 최대공약수[속등]' 조정으로 알 수 있는 정모를 정하기의 유의점: 원래의 법에 포함된 소인수들을 각각의 최고차가 나타난 항에 남겨두어야 함.

대연술의 정모를 정할 때는 원래 법들의 최소공배수가 그대로 유지되어야 하고(조건①) 쌍마다 서로소여야 한다(조건②)는 기본 조건 외에도 유의해야 할 점이 하나 더 있다. 다음의 연립일차합동식을 대연술로 풀이하면 정모를 어떻게 잡느냐에 따라 아래와 같이 결과값이 달리 나오는데,[19)]

$$x \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2^2) \equiv 5(\mathrm{mod}\, 2^2 \times 3^2) \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$$

정모가 $m_1 = 1, m_2 = 2^3 \times 3^2, m_3 = 1$ 일 때 대연술의 결과값은 5.
정모가 $m_1 = 1, m_2 = 2^3, m_3 = 3^2$ 일 때 대연술의 결과값은 29.
정모가 $m_1 = 2^3, m_2 = 3^2, m_3 = 1$ 일 때 대연술의 결과값은 41.
정모가 $m_1 = 2^3, m_2 = 1, m_3 = 3^2$ 일 때 대연술의 결과값은 65.

모든 정모가 조건 ①과 조건 ②를 충족함에도 불구하고 결과값이 이처럼 다르다. 《산학정의》 〈대연〉의 첫째 예제는 다음의 연립일차합동식을 다루었는데 정모를 여러 가지로 정했을 때 대연술의 결과값이 아래와 같다.

$$x \equiv 17(\mathrm{mod}\, 2^2 \times 5) \equiv 9(\mathrm{mod}\, 2^4) \equiv 12(\mathrm{mod}\, 3 \times 5)$$

정모가 $m_1 = 1, m_2 = 2^4, m_3 = 3$
또는 $m_1 = 1, m_2 = 2^4, m_3 = 3 \times 5$ 일 때 대연술의 결과값은 57.
정모가 $m_1 = 2^4 \times 5, m_2 = 1, m_3 = 3$
또는 $m_1 = 2^4, m_2 = 1, m_3 = 3 \times 5$ 일 때 대연술의 결과값은 177.

이 역시 모든 정모가 조건 ①과 조건 ②를 충족함에도 불구하고 결과값이 이처럼 다르다.

결국 대연술 사용을 위한 정모의 조건으로 원래의 법에 포함된 소인수들을 각각의 최고차가 나타난 항에 남겨두어야 한다(조건 ③)는 것이 추가되어야 함을 알수있다. 이는 앞의 3.4항의 '연립일차합동식에 관한 세 가지 기본 사항' 중 ③항에서 언급한 다음의 동치 관계에 기인한다.

$$s \ge t \text{ 일 때 } \begin{cases} x \equiv r_i(\mathrm{mod}\, p^s) \\ x \equiv r_j(\mathrm{mod}\, p^t) \end{cases} \text{는 } x \equiv r_i(\mathrm{mod}\, p^s)\text{와 동치. (단, } s \ge t, i \ne j)$$

19) $(m_i, m_j) \mid (r_i - r_j)$를 만족하므로 법 $[m_1, m_2, m_3]$에 대하여 유일해가 존재한다.

대연술에서 이 동치관계는 정모를 취할 때 각 소인수를 최고차 제곱수가 있는 항에만 남기고 다른 항에서는 소거하는 것으로 활용된다.[20] 위 첫째 예시에서는 2와 3의 최고차 제곱수인 2^3과 3^2를 둘째 항의 정모에 남기고 둘째 예시에서는 2의 최고차 제곱수인 2^4을 둘째 항의 정모에 남겨야만 각 예제의 유일해인 5와 57이 나온다.

4 대연구일술에 대한 남병길·이상혁의 구조적 이해

《산학정의》〈대연〉에는 대연술의 핵심 부분이라 할 수 있는 대연구일술에 대한 저자들의 구조적 이해를 드러낸 부분이 있다. 아래에서는 대연구일술의 연산 알고리즘과 그 내원(來源)을 살펴본 후에 《산학정의》〈대연〉의 해당 부분을 조명해 보았다.

4.1 대연구일술의 연산 알고리즘

대연구일술은 $A_iF_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i)$가 성립하는 승률 F_i를 구하는 계산법으로, 《수서구장》의 대연술이 이전의 '손자 문제' 해법에 비해 비약적으로 발전한 부분이다. 이전의 해법에서는 정모 m_i가 3, 5, 7일 때 용수 M_iF_i는 각각 $_{(35\times2=)}70$, 21, 15, 정모 m_i가 5, 7, 9일 때 용수 M_iF_i는 각각 $_{(63\times2=)}126$, $_{(45\times5=)}225$, $_{(35\times8=)}280$ 등등 연수 M_i에 $1, 2, 3, \cdots$을 차례로 곱해 가면서 정모 m_i로 나누어 1이 남는 용수 M_iF_i를 경험적으로 구하고, 자주 사용되는 정모의 조합에 대해서는 용수를 가결(歌訣)로 만들어 암기하기도 하였다.[21] 대연술을 역산(曆算)의 기산점 계산에 사용하여 10여 자리 이상의 수까지 다룬 《수서구장》은 승률 F_i의 계산을 더 이상 경험적 방법에 의존할 수 없었기 때문에 일반 해법을 창안하였는데, 이것이 대연구일술이다. 그 계산 절차를 도시하면 다음과 같다.

1	A_i
0	m_i

→

$k_1=1$	$R_1=A_i$
$k_2=k_1Q_1$	$R_2=m_i-R_1Q_1$

→

$k_3=k_1+k_2Q_2$	$R_3=R_1-R_2Q_2$
$k_2=Q_1$	$R_2=m_i-Q_1A_i$

→

$k_3=1+Q_1Q_2$	$R_3=A_i-R_2Q_2$
$k_4=k_2+k_3Q_3$	$R_4=R_2-R_3Q_3$

→

$k_5=k_3+k_4Q_4$	$R_5=R_3-R_4Q_4$
$k_4=k_2+k_3Q_3$	$R_4=R_2-R_3Q_3$

→ …… →

$k_n=k_{n-2}+k_{n-1}Q_{n-1}$	$R_n=R_{n-2}-R_{n-1}Q_{n-1}=1$
$k_{n-1}=k_{n-3}+k_{n-2}Q_{n-2}$	$R_{n-1}=R_{n-3}-R_{n-2}Q_{n-2}$

20) 각주 10)에 소개한 황종헌의 방법이 곧 이것이다.

21) 중국의 《산법통종》과 조선의 《묵사집산법》, 《산학입문》 등에 가결이 보인다.

도시의 첫째 단계처럼 우상(右上)에 기수 A_i, 우하(右下)에 정모 m_i, 좌상(左上)에 '천원(天元) 1'을 배열하고 좌하(左下)의 자리는 비워둔 채로(0으로 하여) 계산을 시작한다. 《산학정의》 하권 〈천원일(天元一)〉에서 고차방정식의 산대셈 수치 해법으로 다룬 천원술(天元術)에서 계산을 시작할 때 '某某를 천원 1로 놓는다.' 라고 한 것은 현대 대수학에서 미지수를 x로 나타내는 것과 동일한 의미였다. 따라서 천원술에서는 천원[元 일차항]의 자리에 a, 태(太 상수항)의 자리에 b가 놓여 있으면 $ax+b=0$을 의미하므로 해가 $x=-b\div a$가 되었다. 대연구일술에서 좌상의 자리에 배치하는 '천원 1'의 의미는 이와 달라서 연산 마지막 단계에서 이 천원의 자리에 놓인 수가 그 자체로 해가 되며, 대연구일술을 분석한 아래의 도시에서 연분수의 각 층위에 존재하는 분자 1의 역할을 담당한다.

도시의 둘째 단계는 우상의 기수 $R_1=A_i$로 우하의 정모 m_i를 나눈 몫 Q_1을 좌상의 $k_1=1$에 곱한 $k_2=k_1Q_1$을 좌하에 놓고 나머지 $R_2=m_i-R_1Q_1$으로 우하의 m_i을 대체한 것이다. 이때 좌하에 놓는 수를 귀수(歸數)라고 칭한다. 셋째 단계는 우하의 R_2로 우상의 R_1을 나눈 몫 Q_2를 좌하의 k_2에 곱한 k_2Q_2를 좌상의 k_1에 더하고 나머지 $R_3=R_1-R_2Q_2$로 우상의 R_1을 대체한 것이다. 넷째 단계는 우상의 R_3로 우하의 R_2를 나눈 몫 Q_3를 좌상의 k_3에 곱한 k_3Q_3를 좌하의 k_2에 더하고 나머지 $R_4=R_2-R_3Q_3$로 우하의 R_2를 대체한 것이다. 이와 같이 우상과 우하의 큰 수를 작은 수로 나누면서 좌우 상하의 수를 바꾸기를 반복하다가 우상의 수 $R_n=R_{n-2}-R_{n-1}Q_{n-1}$이 1이 될 때 좌상의 수 $k_n=k_{n-2}+k_{n-1}Q_{n-1}$을 취하면 이것이 곧 승률 F_i가 된다.

대연구일술의 이 알고리즘은 처음 우상과 우하에 놓은 두 수가 서로소인 양의 정수이기만 하면 아무리 큰 수라 하더라도 간단히 승률을 구할 수 있는 일반해법으로, 서양의 방법보다 훨씬 우수한 것으로 평가된다 [3, 22면].

4.2 《산학정의》〈대연〉의 대연구일술 예제

《산학정의》〈대연〉 서설의 소주에는 대연구일술을 사용하여 승률을 구한 예제 3개가 들어 있는데, 대연구일술 알고리즘과 수식으로 정리하면 다음과 같다.

(1) 세 정모가 $m_1=3$, $m_2=5$, $m_3=7$ 일 때 승률 F_1 구하기[22)]

연수 $M_1=35=(m_1\times 11)+2$이므로 기수 $A_1=2$와 정모 $m_1=3$을 가지고 대연구일술을 적용하면,

22) "如甲三、乙五、丙七, 則以甲之定母三, 累減衍數三十五, 餘二, 爲奇數。乃立天元一算於左, 以奇數二, 除定母三, 商得一。與天元一相乘, 得一, 歸之左下, 爲歸數。又以定母所餘一, 除奇數二, 商得一。與歸數一相乘, 得一, 加於天元, 得二, 爲乘率。必以奇數餘一, 爲準也。"

$k_1=1$	$R_1=A_1=2$
0	$m_1=3$

→ (가)

1	2
$k_2=1$	$R_2=1$

→ (나)

$k_3=2$	$R_3=1$
1	1

(가) $m_1 = 3 = (A_1 \times Q_1) + R_2 = (2 \times 1) + 1 \Rightarrow k_2 = 0 + (k_1 \times Q_1) = 1 \times 1 = 1, R_2 = 1$

(나) $A_1 = 2 = (R_2 \times Q_2) + R_3 = (1 \times 1) + 1 \Rightarrow k_3 = k_1 + (k_2 \times Q_2) = 1 + (1 \times 1) = 2, R_3 = 1$

우상의 $R_3 = 1$이므로 이때 좌상의 $k_3 = 2$를 승률 F_1로 취한다. 이 수는 다음 식을 만족하므로 계산이 정확함을 알 수 있다.

$$M_1 F_1 \equiv 1 (\bmod m_1)$$
$$35 \times 2 = (3 \times 23) + 1$$

(2) 정모가 $m = 67$, 기수가 $A = 29$일 때 승률 F 구하기[23)]

$k_1=1$	$R_1=A=29$
0	$m=67$

→ (가)

1	29
$k_2=2$	$R_2=9$

→ (나)

$k_3=7$	$R_3=2$
2	9

→ (다)

7	2
$k_4=30$	$R_4=1$

→ (라)

$k_5=37$	$R_5=1$
30	1

(가) $m = 67 = (A \times Q_1) + R_2 = (29 \times 2) + 9$
$\Rightarrow k_2 = 0 + (k_1 \times Q_1) = 1 \times 2 = 2, R_2 = 9$
(나) $A = 29 = (R_2 \times Q_2) + R_3 = (9 \times 3) + 2$
$\Rightarrow k_3 = k_1 + (k_2 \times Q_2) = 1 + (2 \times 3) = 7, R_3 = 2$
(다) $R_2 = 9 = (R_3 \times Q_3) + R_4 = (2 \times 4) + 1$
$\Rightarrow k_4 = k_2 + (k_3 \times Q_3) = 2 + (7 \times 4) = 30, R_4 = 1$
(라) $R_3 = 2 = (R_4 \times Q_4) + R_5 = (1 \times 1) + 1$
$\Rightarrow k_5 = k_3 + (k_4 \times Q_4) = 7 + (30 \times 1) = 37, R_5 = 1$

우상의 $R_5 = 1$이므로 이때 좌상의 $k_5 = 37$을 승률 F로 취한다. 이 수는 다음 식을 만족하므로 계산이 정확함을 알 수 있다.

$$AF \equiv 1 (\bmod m)$$
$$29 \times 37 = 1073 = (67 \times 16) + 1$$

23) "又如定母六十七、奇數二十九, 則以奇數二十九, 除定母六十七, 商得二。與天元一相乘, 得二, 爲歸數。而定母餘九。又以定母所餘九, 除奇數二十九, 商得三。與歸數二相乘, 得六, 加於天元, 得七。而奇數餘二。又以奇數所餘二, 除定母所餘九, 商得四。與天元七相乘, 得二十八, 加於歸數二, 得三十。而定母餘一。又以定母所餘一, 除奇數所餘二, 商得一。與歸數三十相乘, 得三十, 以加天元七, 得三十七。而奇數餘一, 卽以三十七爲乘率也。"

(3) 정모가 $m=8$, 기수가 $A=5$일 때 승률 F 구하기[24)]

k_1=1	R_1=A=5
0	m=8

→ (가)

1	5
k_2=1	R_2=3

→ (나)

k_3=2	R_3=2
1	3

→ (다)

2	2
k_4=3	R_4=1

→ (라)

k_5=5	R_5=1
3	1

(가) $m=8=(A\times Q_1)+R_2=(5\times 1)+3$

$\Rightarrow k_2=0+(k_1\times Q_1)=1\times 1=1, R_2=3$

(나) $A=5=(R_2\times Q_2)+R_3=(3\times 1)+2$

$\Rightarrow k_3=k_1+(k_2\times Q_2)=1+(1\times 1)=2, R_3=2$

(다) $R_2=3=(R_3\times Q_3)+R_4=(2\times 1)+1$

$\Rightarrow k_4=k_2+(k_3\times Q_3)=1+(2\times 1)=3, R_4=1$

(라) $R_3=2=(R_4\times Q_4)+R_5=(1\times 1)+1$

$\Rightarrow k_5=k_3+(k_4\times Q_4)=2+(3\times 1)=5, R_5=1$

우상의 $R_5=1$이므로 이때 좌상의 $k_5=5$를 승률 F로 취한다. 이 수는 다음 식을 만족하므로 계산이 정확함을 알 수 있다.

$$AF\equiv 1(\bmod m)$$
$$5\times 5=25=(8\times 3)+1$$

4.3 대연구일술의 원리 분석

위와 같은 대연구일술의 알고리즘으로 승률 F가 구해지는 원리를 분석하면 다음과 같다.

(1) 우상(기수 자리)의 수가 1이 될 때 좌상(천원의 자리)의 수가 승률이 되는 까닭

앞의 4.1항에 도시한 대연구일술의 연산 알고리즘에서 k_5, R_5까지 k_i, R_i에 대하여 기수 A와 정모 m 및 우상과 우하를 서로 나눈 몫 Q_i를 드러내어 정리하면 다음 도시와 같다.

---

24) "如定母爲八, 奇數爲五, 則以奇數四次遞加, 與本奇數, 共爲奇數之五倍二十五。以定母三次遞減, 餘爲一。故以遞加次數加餘一, 得五, 卽爲乘率, 而定母遞減次數之三, 卽前法之歸數也。" 이 예시는 남병길과 이상혁이 대연구일술에 대한 구조적 설명을 가하기 위해 든 것이다. 의미는 아래 '4. 4)'항에서 상세히 논하였다.

$k_1=1$	$R_1=A$
$k_0=0$	$R_0=m$

→

$k_1=1$	$R_1=A$
$k_2=k_1Q_1$ $=Q_1$	$R_2=m-R_1Q_1$ $=m-Q_1A$

→

$k_3=k_1+k_2Q_2$ $=1+Q_1Q_2$	$R_3=R_1-R_2Q_2$ $=(1+Q_1Q_2)A-Q_2m$
$k_2=Q_1$	$R_2=m-Q_1A$

→

$k_3=1+Q_1Q_2$	$R_3=(1+Q_1Q_2)A-Q_2m$
$k_4=k_2+k_3Q_3$ $=Q_1+Q_3+Q_1Q_2Q_3$	$R_4=R_2-R_3Q_3$ $=(1+Q_2Q_3)m-(Q_1+Q_3+Q_1Q_2Q_3)A$

→

$k_5=k_3+k_4Q_4$ $=1+Q_1Q_2+Q_1Q_4$ $+Q_3Q_4+Q_1Q_2Q_3Q_4$	$R_5=R_3-R_4Q_4$ $=(1+Q_1Q_2+Q_1Q_4+Q_3Q_4+Q_1Q_2Q_3Q_4)A$ $-(Q_2+Q_4+Q_2Q_3Q_4)m$
$k_4=Q_1+Q_3+Q_1Q_2Q_3$	$R_4=(1+Q_2Q_3)m-(Q_1+Q_3+Q_1Q_2Q_3)A$

→ …… →

$k_n=k_{n-2}+k_{n-1}Q_{n-1}$	$R_n=R_{n-2}-R_{n-1}Q_{n-1}$
$k_{n-1}=k_{n-3}+k_{n-2}Q_{n-2}$	$R_{n-1}=R_{n-3}-R_{n-2}Q_{n-2}$

R_i를 구성하는 수들을 모두 A의 배수와 m의 배수의 차로 나타낼 수 있으며, 이때 A에 곱해지는 수는 그 바로 왼쪽에 놓인 k_i와 절댓값이 같음을 알 수 있다. 그리고 m에 곱해지는 수는 그 왼쪽의 윗칸에 놓인 k_{i-1}과 형태는 동일하지만 k_{i-1}를 구성하는 모든 Q_j가 Q_{j+1}로 바뀌었음을 볼 수 있는데, 이 같이 바뀐 수를 k'_{i-1}으로 나타내기로 한다. 그러면 i의 홀짝에 따라 R_i가 다음과 같이 정리된다.

① i가 홀수일 때 : $R_i = k_iA - k'_{i-1}m$

k_i는 여러 단계에서 나온 몫들의 곱과 합에 1을 더한 수

k'_{i-1}는 여러 단계에서 나온 몫들의 곱과 합

② i가 짝수일 때 : $R_i = k'_{i-1}m - k_iA$

k'_{i-1}는 여러 단계에서 나온 몫들의 곱과 합에 1을 더한 수

k_i는 여러 단계에서 나온 몫들의 곱과 합

대연구일술에서 승률을 취하는 것은 반드시 우상의 '기수' 자리의 수가 1이 될 때를 기준으로 하는데, 이는 곧 i가 홀수일 때 $R_i = k_iA - k'_{i-1}m = 1$이 되면 이때 k_i를 승률로 취한다는

것이다. 이 식을 다음과 같이 고쳐쓰면 k_i가 승률의 정의에 부합함이 드러난다.

$$k_i A = k'_{i-1} m + 1$$

《산학정의》〈대연〉에 이를 두고 "구하려는 것은 곧 기수(A)를 차츰차츰 더한 후에 정모(m)를 채워 덜어내면 1이 남는, 기수의 누가(累加) 회수(k_i)이다.[蓋所求者, 卽奇數遞加, 滿定母去之, 餘一之數。]" 라고 하였다.

(2) $R_i = \pm(k_i A - k'_{i-1} m)$ 의 k_i 와 k'_{i-1} 의 유래

위 (1)항의 k_i, k'_{i-1} 을 구성하는 식은 아래에 보인 것과 같이 '여러 단계에서 나온 몫들을 분모로 하는 연분수' 의 분자 l_i, 분모 j_i와 일치한다. 아래의 음영처리한 부분을 위 (1)항 도시의 음영처리한 부분과 비교하면 어렵지 않게 알 수 있다.

$$\bullet\ Q_1 = \frac{l_1}{j_1} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} l_1 &= Q_1 = k_2 \\ j_1 &= 1 = k_1{}' \end{aligned}$$

$$\bullet\ Q_1 + \frac{1}{Q_2} = \frac{1+Q_1Q_2}{Q_2} = \frac{l_2}{j_2} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} l_2 &= 1+Q_1Q_2 = k_3 \\ j_2 &= Q_2 = k_2{}' \end{aligned}$$

$$\bullet\ Q_1 + \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{1}{Q_3}} = \frac{Q_1+Q_3+Q_1Q_2Q_3}{1+Q_2Q_3} = \frac{l_3}{j_3} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} l_3 &= Q_1+Q_3+Q_1Q_2Q_3 = k_4 \\ j_3 &= 1+Q_2Q_3 = k_3{}' \end{aligned}$$

$$\bullet\ Q_1 + \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{1}{Q_3 + \cfrac{1}{Q_4}}} =$$

$$\frac{1+Q_1Q_2+Q_1Q_4+Q_3Q_4+Q_1Q_2Q_3Q_4}{Q_2+Q_4+Q_2Q_3Q_4} = \frac{l_4}{j_4} \rightarrow \quad \begin{aligned} l_4 &= 1+Q_1Q_2+Q_1Q_4+Q_3Q_4+Q_1Q_2Q_3Q_4 = k_5 \\ j_4 &= Q_2+Q_4+Q_2Q_3Q_4 = k_4{}' \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\bullet\ Q_1 + \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{1}{Q_3 + \dots \cfrac{1}{Q_n}}} = \frac{l_n}{j_n} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} l_n &= k_{n+1} \\ j_n &= k_n{}' \end{aligned}$$

단, $l_{-1}=0,\ l_0=1,\ l_1=Q_1, \quad j_{-1}=1,\ j_0=0,\ j_1=1$

$l_{n+1}=Q_{n+1}l_n+l_{n-1}, \quad j_{n+1}=Q_{n+1}j_n+j_{n-1}$

(3) k_i, k'_{i-1} 가 도출된 연분수의 유래

R_i 의 앞 몇 항에 대하여 $R_i = 1$ 일 때 $R_j(i > j)$ 식에 포함된 R_{j-1} 을 대입법으로 소거하기를 반복하여, $R_{i-1}, R_{i-2}, \cdots, R_1$ 을 차례로 나타내면 다음과 같다.

① $R_2 = 1$ 일 때,

$$R_1 = \frac{m - R_2}{Q_1} = \frac{m-1}{Q_1}$$

양변에 Q_1 을 곱하고 $R_1 = A$를 대입하면,

$$Q_1 A = m - 1 \qquad \cdots (가)$$
$$m - Q_1 A = 1 \qquad \cdots (나)$$

(가)식 좌변의 Q_1 이 4.3의 (2)항에서 보인 $\frac{l_1}{j_1}$ 이고, (나)식 좌변이 4.3의 (1)항에 보인 도시의 R_2 이다.

② $R_3 = 1$ 일 때,

$$R_2 = \frac{R_1 - R_3}{Q_2} = \frac{R_1 - 1}{Q_2}$$

$$R_1 = \frac{m - R_2}{Q_1} = \frac{m - \frac{R_1 - 1}{Q_2}}{Q_1}$$

양변에 Q_1 을 곱하고 $R_1 = A$을 대입하면,

$$Q_1 A = m - \frac{A}{Q_2} + \frac{1}{Q_2}$$

$$(Q_1 + \frac{1}{Q_2})A - m = \frac{1}{Q_2} \qquad \cdots (다)$$
$$(1 + Q_1 Q_2)A - Q_2 m = 1 \qquad \cdots (라)$$

(다)식 좌변의 연분수가 4.3의 (2)항에서 보인 $\frac{l_2}{j_2}$ 이고, (라)식의 좌변이 4.3의 (1)항에 보인 도시의 R_3 이다.

③ $R_4 = 1$ 일 때,

$$R_3 = \frac{R_2 - R_4}{Q_3} = \frac{R_2 - 1}{Q_3}$$

$$R_2 = \frac{R_1 - R_3}{Q_2} = \frac{R_1 - \frac{R_2 - 1}{Q_3}}{Q_2}$$

양변에 Q_2 를 곱하고 R_2 에 대해 정리한 후 다시 R_1 식에 대입하면,

$$(Q_2 + \frac{1}{Q_3})R_2 = R_1 + \frac{1}{Q_3}$$

$$R_2 = \frac{R_1 + \frac{1}{Q_3}}{Q_2 + \frac{1}{Q_3}}$$

$$R_1 = \frac{m - R_2}{Q_1} = \frac{m - \dfrac{R_1 + \dfrac{1}{Q_3}}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3}}}{Q_1}$$

양변에 Q_1을 곱하고 $R_1 = A$를 대입하면,

$$Q_1 A = m - \frac{A}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3}} - \frac{\dfrac{1}{Q_3}}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3}}$$

$$Q_1 A = m - \frac{A}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3}} - \frac{\dfrac{1}{Q_3}}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3}}$$

$$m - \left(Q_1 + \frac{1}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3}}\right) A = \frac{\dfrac{1}{Q_3}}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3}} \quad \cdots(\text{마})$$

$$m - \frac{Q_1 + Q_3 + Q_1 Q_2 Q_3}{1 + Q_2 Q_3} A = \frac{1}{1 + Q_2 Q_3}$$

$$(1 + Q_2 Q_3)m - (Q_1 + Q_3 + Q_1 Q_2 Q_3)A = 1 \quad \cdots(\text{바})$$

$$m - \frac{Q_1 + Q_3 + Q_1 Q_2 Q_3}{1 + Q_2 Q_3} A = \frac{1}{1 + Q_2 Q_3}$$

(마)식 좌변의 연분수가 4.3의 (2)항에서 보인 $\dfrac{l_3}{j_3}$이고, (바)식의 좌변이 4.3의 (1)항에 보인 도시의 R_4이다.

④ $R_5 = 1$ 일 때,

$$R_4 = \frac{R_3 - R_5}{Q_4} = \frac{R_3 - 1}{Q_4}$$

$$R_3 = \frac{R_2 - R_4}{Q_3} = \frac{R_2 - \dfrac{R_3 - 1}{Q_4}}{Q_3}$$

양변에 Q_3를 곱하고 R_3에 대해 정리한 후 다시 R_2의 식에 대입하면,

$$(Q_3 + \frac{1}{Q_4})R_3 = R_2 + \frac{1}{Q_4}$$

$$R_3 = \frac{R_2 + \dfrac{1}{Q_4}}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}$$

$$R_2 = \frac{R_1 - R_3}{Q_2} = \frac{R_1 - \dfrac{R_2 + \dfrac{1}{Q_4}}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}}{Q_2}$$

양변에 Q_2를 곱하고 R_2에 대해 정리한 후 다시 R_1의 식에 대입하면,

$$(Q_2 + \frac{1}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}})R_2 = R_1 - \frac{\dfrac{1}{Q_4}}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}$$

$$R_2 = \frac{R_1 - \dfrac{\dfrac{1}{Q_4}}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}}$$

$$R_1 = \frac{m - R_2}{Q_1} = \frac{m - \dfrac{R_1 - \dfrac{\dfrac{1}{Q_4}}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}}}{Q_1}$$

양변에 Q_1을 곱하고 $R_1 = A$를 대입하여 정리하면,

$$Q_1 A = m - \frac{A}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}} + \frac{\dfrac{\dfrac{1}{Q_4}}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}}$$

$$(Q_1 + \frac{1}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}})A - m = \frac{\dfrac{\dfrac{1}{Q_4}}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}}{Q_2 + \dfrac{1}{Q_3 + \dfrac{1}{Q_4}}} \quad \cdots(\text{사})$$

$$\frac{1 + Q_1 Q_2 + Q_1 Q_4 + Q_3 Q_4 + Q_1 Q_2 Q_3 Q_4}{Q_2 + Q_4 + Q_2 Q_3 Q_4} A - m = \frac{1}{Q_2 + Q_4 + Q_2 Q_3 Q_4}$$

$$(1 + Q_1 Q_2 + Q_1 Q_4 + Q_3 Q_4 + Q_1 Q_2 Q_3 Q_4)A - (Q_2 + Q_4 + Q_2 Q_3 Q_4)m = 1 \quad \cdots(\text{아})$$

(사) 식 좌변의 연분수가 4.3의 (2)항에서 보인 $\dfrac{l_4}{j_4}$ 이고, (아) 식의 좌변이 4.3의 (1)항에 보인 도시의 R_5 이다.

4.4 대연구일술에 대한《산학정의》〈대연〉의 분석적 언급

《산학정의》〈대연〉 서설의 소주에는 다음과 같이 대연구일술에 대한 분석적 언급이 들어있다.

> "왼쪽에 천원 1을 놓고, 기수 2로 정모 3을 나누면 몫으로 1이 나온다. 몫 1을 천원 1과 서로 곱하면 1이 나오는데, 이 수를 왼쪽 아래에 귀속시켜 귀수로 삼는다. 또 정모에 남은 1로 기수 2를 나누어 몫으로 1을 취한다. 몫 1을 귀수 1과 서로 곱하면 1이 나오고, 이 수를 천원에 더하면 2가 되는데, 이를 승률로 삼는다. 천원을 승률로 삼는 것은 반드시 기수에 1이 남을 때를 기준으로 한다.……구하려는 것은 곧 기수를 차츰차츰 더한 후에 정모를 채워 덜어내면 1이 남는, 기수의 누가(累加) 회수이다. 따라서 기수를 차츰차츰 더한 회수를 나머지 1과 서로 더하여도 승률이 나온다. 예컨대 정모가 8, 기수가 5인 경우, 기수를 차츰차츰 4회 더하고 그 기수와 합하면 기수의 5배인 25가 되는데, 정모를 차츰차츰 3회 덜어내면 1이 남는다. 따라서 기수를 차츰차츰 더한 회수에 1을 더해 나온 5가 곧 승률이 된다. 이때 정모를 차츰차츰 덜어낸 회수인 3은 곧 앞 단계의 귀수에 해당한다.[25)]

위 인용문 중 "구하려는 것은 곧 기수(A)를 차츰차츰 더한 후에 정모(m)를 채워 덜어내면 1이 남는, 기수의 누가 회수이다." 라는 말은 승률(F)의 정의, 곧 $AF \equiv 1(\operatorname{mod} m)$ 을 제시한 것이고, "천원(좌상의 수)을 승률로 삼는 것은 반드시 기수(우상의 수)에 1이 남을 때를 기준으로 한다." 라는 말은 반드시 i가 홀수이고 $R_i = k_iA – k'_{i-1}m = 1$이 될 때 k_i 를 취하여 승률로 삼는다는 대연구일술 운용상의 유의점을 짚은 것이다. 이때 $k_iA = k'_{i-1}m + 1$이 되므로 k_i 를 승률로 삼는 것이 정당함을 4.3의 (1)항에서 살펴보았다.

"기수를 차츰차츰 더한 회수를 나머지 1과 서로 더하여도 승률이 나온다." 라는 말은 4.3의 (1)항에 보인 대로 i가 홀수일 때 $R_i = 1 = k_iA – k'_{i-1}m$의 k_i가 곧 승률이 되는데, 이 k_i는 '호제법의 여러 단계에서 나온 몫들의 곱과 합에다 1을 더한 수' 임을 뜻한다. 여기서 '기수(A)를 차츰차츰 더한 회수' 는 예컨대 4.3의 (1)항에 보인 도시 중 $k_3 = 1+Q_1Q_2$의 Q_1Q_2, 그리고 $k_5 = 1 + Q_1Q_2 + Q_1Q_4 + Q_3Q_4 + Q_1Q_2Q_3Q_4$의 $Q_1Q_2 + Q_1Q_4 + Q_3Q_4 + Q_1Q_2Q_3Q_4$

25) "立天元一算於左, 以奇數二, 除定母三, 商得一。與天元一相乘, 得一, 歸之左下, 爲歸數。又以定母所餘一, 除奇數二, 商得一。與歸數一相乘, 得一, 加於天元, 得二, 爲乘率。必以奇數餘一, 爲準也。……蓋所求者, 卽奇數遞加, 滿定母去之, 餘一之數。以遞加次數, 與餘一相加, 亦得乘率。如定母爲八, 奇數爲五, 則以奇數四次遞加, 與本奇數, 共爲奇數之五倍二十五。以定母三次遞減, 餘爲一。故以遞加次數加餘一, 得五, 卽爲乘率, 而定母遞減次數之三, 卽前法之歸數也。"

등을 가리킨다. 4.3의 (3)항에 보인 (라)식에서 보듯이 k_3은 $R_3 = 1$일 때 승률이며 이 식에서 Q_1Q_2는 기수 A의 곱수, 곧 기수 A를 차츰처츰 더한 회수이다. 또 4.3의 (3)항에 보인 (아)식에서 보듯이 k_5는 $R_5 = 1$일 때 승률이며 이 식에서 $Q_1Q_2 + Q_1Q_4 + Q_3Q_4 + Q_1Q_2Q_3Q_4$ 역시 기수 A의 곱수, 곧 기수 A를 차츰처츰 더한 회수이다.

정모(m)가 8, 기수가 5에 대한 대연구일술의 연산 과정에서는 4.3의 (3)항에 도시한 것과 같이 $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 1$이다. 따라서 $R_5 = (1 + Q_1Q_2 + Q_1Q_4 + Q_3Q_4 + Q_1Q_2Q_3Q_4)A–(Q_2 + Q_4 + Q_2Q_3Q_4)m = \underline{(1+4) \times 5}–3 \times 8 = 1$이 된다. 여기서 밑줄친 부분을 두고 위 인용문에서 “기수(5)를 차츰차츰 4회 더하고 그 기수(5)와 합하면 기수의 5배인 25가 된다” 라고 표현하였다. 그리고 이때 $k_5 = 1 + Q_1Q_2 + Q_1Q_4 + Q_3Q_4 + Q_1Q_2Q_3Q_4 = 1 + 4 = 5$가 승률이 된다는 것을 “따라서 기수를 차츰차츰 더한 회수에 1을 더해 나온 5가 곧 승률이 된다.” 라고 표현하였다.

i가 홀수인 $R_i = k_iA–k'_{i-1}m = 1$에서 승률 k_i는 기수(A)의 곱수, 다시 말하면 기수의 누가 회수이며, 그 수치가 ‘호제법의 여러 단계에서 나온 몫들의 곱과 합에다 1을 더한 수’ 인데 ‘호제법의 여러 단계에서 나온 몫들의 곱과 합’ 은 연산의 각 단계에서 차츰차츰 덧붙어나간 수이기 때문에 ‘기수를 차츰차츰 더한 회수’ 로 칭하였다. 이 수에 더하는 상수 1을 ‘나머지 1’ 로 지칭하여 “기수를 차츰차츰 더한 회수를 나머지 1과 서로 더하여도 승률이 나온다.” 라고 한 것은 수치가 동일하게 1임에 기댄 단순한 표현으로 보아야 한다. 4.3의 (3)항에 보인 분석에서 승률 k_i에 포함된 상수 1의 유래를 추적해 보면 나머지 1이 아니라 $R_1 = A$, 곧 기수 자체이다.

말하자면 《산학정의》 〈대연〉의 거듭된 표현 중에 ‘그 기수와 합하면’ 이라는 말은 기수에 곱하는 승률 k_i에 포함된 상수 1에 대한 분석적 표현이고, ‘나머지 1’ 이라는 말은 전통산학에서 흔히 그러하듯이 논리적 맥락을 떠나 기억의 용이성을 위한 방편으로 보아야 한다.

또 위 인용문에서 $R_5 = (1 + Q_1Q_2 + Q_1Q_4 + Q_3Q_4 + Q_1Q_2Q_3Q_4)A–(Q_2 + Q_4 + Q_2Q_3Q_4)m = (1 + 4) \times 5–\underline{3} \times 8 = 1$의 밑줄친 ‘3’ 을 두고 “이때 정모를 차츰차츰 덜어낸 회수인 3은 곧 앞 단계의 귀수에 해당한다.” 라고 하였다. 여기서 3도 ‘여러 단계에서 나온 몫들의 곱과 합’ 인 $Q_2 + Q_4 + Q_2Q_3Q_4$이기 때문에 ‘차츰차츰…회수’ 로 지칭한 것이다. 다만, 이것이 ‘앞 단계의 귀수’ 에 해당한다는 것은 이 예시에 한정된 말로 보아야 한다. i가 홀수인 $R_i = k_iA–k'_{i-1}m$에서 k'_{i-1}는 4.3의 (1)항에서 보였듯이 k_{i-1}과 형태는 동일하지만 k_{i-1}을 구성하는 모든 Q_j가 Q_{j+1}로 바뀐 것이기 때문이다. 예컨대 4.3의 (3)항에서 $R_5 = 1$인 경우에 ‘앞 단계의 귀수’ 는 4.3의 (1)항에 보인 도시의 $k_4 = Q_1 + Q_3 + Q_1Q_2Q_3$이지만 ‘정모를 차츰차츰 덜어낸 회수’ 는 $k'_4 = Q_2 + Q_4 + Q_2Q_3Q_4$이다. 정모가 8, 기수가 5인 예시는 특수하게 $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 1$이기 때문에 ‘정모를 차츰차츰 덜어낸 회수$(k'_4 = 3)$’ 가 ‘앞 단계의 귀수$(k_4 = 3)$’ 와 일치하는 것이다.

그렇지만, 이를 일반적인 언급으로 볼 수는 없기는 하나 k'_4를 구성하는 식이 k_4의 그것과

동일한 형태임을《산학정의》의 저자들은 간파하고, 문자를 사용한 수식의 전개와 기록이 원활하지 않은 제한된 조건에서 이 점을 드러내기 위하여 특수한 예시를 든 것으로도 생각해 볼 수 있다. 대연구일술의 연산 과정을 보이는 데는 4.2항의 예제 3개 중 앞의 2개로 충분한데도 대연구일술에 대한 분석적 언급을 위하여 이 특수한 예시를 추가하였기 때문이다.

5 나가며

이상에서《산학정의》〈대연〉의 서술 배경과 내용의 개략을 살펴보고, 대연술의 기본 알고리즘과 용어, 대연술 적용의 조건으로서 쌍마다 서로소인 정모 산출법, 산대의 공간적 배치를 이용한 대연구일술의 계산법과 그 원리에 대한 분석 및 이에 대한 남병길·이상혁의 구조적 이해를 조명해 보았다. 실용적 가치를 중시한 산대셈 수학전서인《산학정의》가 천문역법에서 실용성을 상실한 대연술을 다룬 까닭은 전통산학의 가장 우수한 성과로서 천원술과 쌍벽을 이루는 계산법을 누락할 수 없었기 때문이다.《산학정의》권두의 '산학정의 개요[算學正義提綱]' 에서 본서의 각 장을 순서대로 배치한 의도를 설명하는 막바지에 "입원(立元: 천원, 다원)과 대연은 산학의 극치이므로 그 끝에 놓았다.……오로지 계산 원리의 규명에 중점을 두어 논하였다.[立元及大衍, 則算家之極致, 故以之殿焉。……專論明理。]" 라고 하였다. 따라서 이 부분은 저자들이 파악하고 서술한 계산 원리가 무엇인지를 주의깊게 살펴볼 필요가 있었다. 본고의 고찰 결과 저자들은 대연구일술을 상당히 구조적으로 이해하고 있었음을 알 수 있었다. 이는 대연술을 다룬 다른 어떤 저작에서도 볼 수 없는 독특한 점으로서 남병길·이상혁의 수학적 태도를 시사한다는 점에서도 주목할 만한 가치가 있다.

References

1. Bae Sang-yeol, *Seogyae Swaerok*, Hanguk Gwahak Gisulsa Jaryo Daegye, Suhakpyeon, Vol. 3, Yeogang Pub., 1985, 1～230. 裵相說,《書計瑣錄》, 韓國科學技術史資料大系, 數學編 第4冊, 驪江出版社, 1985, 1～230.
2. Hong Jeong-ha, *Guil Jip*, Hanguk Gwahak Gisulsa Jaryo Daegye, Suhakpyeon, Vol. 2, Yeogang Pub. Co., 1985, 201～693. 洪正夏,《九一集》, 韓國科學技術史資料大系, 數學編 第2冊, 驪江出版社, 1985, 201～693.
3. Hong Yeong-hee, History of Indeterminate Equations, *Journal for History of Mathematics*, 18(3) (2005), 1～24. 홍영희, 不定方程式의 歷史, 한국수학사학회지 제18권 제3호, 2005, 1～24.
4. Huáng Zōng-xiàn, *JiǔyīshùTōngjiě*, Xùxiū Sìkù Quánshū, Vol. 1047, Shanghai Gǔjí Pub. Co., 1995, 667～693. 黃宗憲,《九一術通解》, 續修四庫全書, 第1047冊, 上海古籍出版社, 1995, 667～693.
5. Hwang Yoon-seok, *Sanhak Ipmun*, Hanguk Gwahak Gisulsa Jaryo Daegye, Suhakpyeon, Vol. 3, Yeogang Pub. Co., 1985, 1～216. 黃胤錫,《算學入門》, 韓國科學技術史資料大系, 數學編 第3冊, 驪江出版社, 1985, 1～216.

6. Jiāo Xún, *Tiānyuán Yīshì*, Xùxiū Sìkù Quánshū, Vol. 1045, Shanghai Gǔjí Pub. Co., 1995, 343∼376. 焦循,《天元一釋》, 續修四庫全書, 第1045冊, 上海古籍出版社, 1995, 343∼376.
7. Kang Min-jeong, The Unique Achievement of《Sanhak Jeongeui算學正義》on Kaifangfa with count-wood: The refinement of Zengcheng Kaifangfa through improvement of estimate-value array, *Journal for History of Mathematics* 31(6) (2018), 273–289. 강민정, 산대셈 개방법(開方法)에 대한《산학정의》의 독자적 성취: 어림수[商] 배열법 개선을 통한 증승개방법(增乘開方法)의 정련(精錬), *Journal for History of Mathematics* 31(6) (2018), 273–289.
8. Kyeong Seon-jing, *Muksa Jipsanbeop*, Hanguk Gwahak Gisulsa Jaryo Daegye, Suhakpyeon, Vol. 1, Yeogang Pub. Co., 1985, 1∼368. 慶善徵,《黙思集算法》, 韓國科學技術史資料大系, 數學編 第1冊, 驪江出版社, 1985, 1∼368.
9. Kyeong Seon-jing, *Muksa Jipsanbup* Ji, Gyowoosa, 2006. 경선징 지음, 유인영·허민 옮김,《묵사집산법》地, 교우사, 2006.
10. Li Yan·Du Shi-ran, *A History of Chinese Mathematics*, Yemun Seowon, 2019. 李儼·杜石然 지음, 안대옥 옮김,《중국수학사》, 예문서원, 2019.
11. Nam Byeong-gil, *Sanhak Jeongeui*, Hanguk Gwahak Gisulsa Jaryo Daegye, Suhakpyeon, Vol. 7, Yeogang Pub. Co., 1985. 南秉吉,《算學正義》, 韓國科學技術史資 料大系, 數學編 第7冊, 驪江出版社, 1985.
12. Qín Jiǔ-sháo, *Shùxué Jiǔzhāng*, Wényuāngé Sìkù Quánshū, Vol. 797, Táiwān Shāngwù Yìnshūguǎn, 1983, 323∼613. 秦九韶,《數學九章》, 文淵閣四庫全書 第797冊, 臺灣商務印書館, 1983, 323∼613.
13. Sòng Jǐng-chāng, *Shùshū Jiǔzhāng Zhájì*, Zhōngguó Lìdài SuànxuéJíchéngShàng, Shāndōng Rénmín Pub. Co., 1994. 678∼754. 宋景昌,《數書九章札記》, 中國歷代算學集成 上, 山東人民出版社, 1994. 678∼754.
14. Zhāng Dūn-rén, *Jiǔyī Suànshù*, Xùxiū Sìkù Quánshū, Vol. 1045, Shanghai Gǔjí Pub. Co., 1995, 175∼220. 張敦仁,《九一算術》, 續修四庫全書, 第1045冊, 上海古籍出版社, 1995, 175∼220.