



변조지수가 2/3인 PCM/FM

구영모¹

PCM/FM With Modulation Index of 2/3

Young Mo Gu¹

Inha Technical College

ABSTRACT

PCM/FM with a modulation index of 0.7 is widely used in the telemetry field. If the modulation index is slightly changed to 2/3, it can be interpreted as 3-PSK with a state number of 3 in phase transition trellis and can be received with a simple Viterbi decoder. As a result of computer simulation, the E_b/N_0 performance in the AWGN channel is about 8.3 dB when the BER is 10^{-5} , which is close to the theoretical limit.

초 록

텔레메트리 분야에서 많이 사용되는 PCM/FM은 변조지수가 0.7인데 이를 2/3로 변경하면 3-PSK로 해석이 가능하며 위상 변화 트렐리스 상태수가 3이 되어 간단한 비터비 복호기로 수신 가능하다. 컴퓨터 모의실험한 결과 AWGN 채널에서 E_b/N_0 수신 성능은 BER이 10^{-5} 일 때 약 8.3dB로 이론적 한계값에 근접한다.

Key Words : PCM/FM, Modulation Index(변조지수), Telemetry(원격측정), Trellis(트렐리스), Viterbi Decoder(비터비 복호기)

1. 서 론

PCM/FM(Pulse Code Modulation/Frequency Modulation)은 CPM(Continuous Phase Modulation)의 일종으로 비선형 증폭기를 사용할 수 있어 전력 효율이 좋아 텔레메트리(telemetry) 분야에서 가장 많이 사용되고 있는 변조 기법이다. 수신기 성능은 FM 복조기를 이용하여 단일 심벌로 판별할 경우에는 BER(Bit Error Rate)이 10^{-5} 일 때 비트 당 에너지 대 잡음비(E_b/N_0)가 약 11.8dB로 약 9.5dB인 BPSK(Binary Phase Shift Keying)보다 성능이 떨어지지만 다중 심벌로 판별(Multi-symbol detection)할 경우에는 BPSK와 성능이 유사하고, 이론적인 한계값은 약 8.3dB로 알려져 있다[1].

CPM은 송신기 주파수 임펄스 필터(frequency impulse filter)의 주파수 펄스(frequency pulse)의 길이에 따라 한 심벌인 경우를 full response로, 두 심벌 이상인 경우를 partial response로 분류하는데 전자를 특히 CPFSK(Continuous Phase Frequency Shift Keying)라고 하며 PCM/FM은 주파수 펄스의 길이가 두 심벌 또는 세 심벌인 partial response CPM이다.

CPFSK의 성능은 변조지수가 0.715일 때 가장 우수한데 변조지수가 2/3(≈ 0.67)인 경우 송신기 출력 신호는 3-PSK(Phase Shift 201-Keying)로 해석이 가능하며 송신기에 입력은 2진수(binary)이지만 출력은 3진수(ternary)인 부호기를 추가하여 부호화 이득을 얻을 수 있다[2].

† Received : July 29, 2021 Revised : September 24, 2021 Accepted : October 8, 2021

¹ Professor

¹ Corresponding author, E-mail : ymgu@inhac.ac.kr, ORCID 0000-0002-3605-783X

변조지수가 0.7인 PCM/FM은 CPM의 일종이므로 동기(coherent) 복조한 후 비터비(Viterbi) 수신기로 최적의 성능을 얻을 수 있지만[3] 이 경우 주파수 펄스의 길이에 따라 송신기 트렐리스 다이어그램의 상태수가 20 또는 40이고, 송신 신호도 20-PSK 또는 40-PSK이므로 비터비 수신기의 구현 복잡도가 크다. 변조지수를 2/3로 변경하면 기존의 단일 심벌 또는 다중 심벌 수신기로 수신이 가능하면서[2] 송신기 트렐리스 다이어그램의 상태수가 3으로, 송신 신호도 3-PSK가 되어 상태수에 비례하는 비터비 수신기의 구현 복잡도가 약 1/7 또는 1/14로 크게 감소하는데 본 논문에서는 송신기 트렐리스 다이어그램과 신호 성상도(signal constellation)를 분석하고 이를 기반으로 하는 비터비 수신기의 수신 성능을 평가한다.

II. 변조지수가 2/3인 PCM/FM

2.1 PCM/FM 송신기

진폭을 편의상 1로 가정하면 CPM 변조기의 출력 신호 $s(t)$ 는 시간 구간 $[nT, (n+1)T]$ 에서 식 (1), (2)와 같이 쓸 수 있다. 식 (2)에서 h 는 변조지수, T 는 심벌 구간, a_n 은 변조기의 입력 데이터로 $\{+1, -1\}$ 의 값을 가지고, $f(t)$ 는 주파수 펄스이다.

$$s(t) = e^{j\theta(t)} \quad (1)$$

$$\theta(t) = 2\pi h \int_{-\infty}^t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(\tau - nT) d\tau \quad (2)$$

주파수 펄스 $f(t)$ 를 식 (3)과 같이 한 심벌 T 구간 동안 일정한 값 $1/2T$ 이 되도록 정의하면 출력 신호는 CPFASK가 된다. 식 (3)을 시간 구간 $[0, T]$ 에서 적분하면 $1/2$ 이 되므로 출력 신호의 위상은 심벌 간격 T 마다 $+h\pi$ 또는 $-h\pi$ 만큼 변하는데 특히 변조지수 h 가 2/3인 경우 T 간격으로 출력 신호를 관찰하면 위상이 $\{0, 2\pi/3, 4\pi/3\}$ 이 되어 신호 성상도는 3-PSK가 된다[2].

$$f_{CPFASK}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

PCM/FM의 주파수 펄스는 6차 Bessel 필터의 충격 응답과 매우 유사한 형태로 식 (4)와 같이 L 심벌 구간에 0이 아닌 값을 가지는 RC(raised-cosine) 펄스로 근사할 수 있는데 L 값은 2 또는 3을 사용한다[4-6].

$$f_{PCM/FM}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{LT}\right) \right], & 0 \leq t \leq LT \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

2.2 PCM/FM 수신기

주파수 펄스 $f(t)$ 를 식 (5)와 같이 적분한 것을 위상 펄스(phase pulse) $q(t)$ 로 정의하면 식 (2)는 식 (6)과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$q(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (5)$$

$$\theta(t) = 2\pi h \sum_{i=-\infty}^n a_i q(t - iT) \quad (6)$$

위상 펄스 $q(t)$ 는 $t \geq LT$ 인 구간에서 $1/2$ 이 되므로 식 (6)은 식 (7)과 같이 다시 쓸 수 있다[3,7].

$$\theta(t) = 2\pi h \sum_{i=n-L+1}^n a_i q(t - iT) + \pi h \sum_{i=-\infty}^{n-L} a_i \quad (7)$$

PCM/FM 송신기 출력 신호의 위상은 연속이지만 잡음이 없다는 가정 하에 수신기에서 동기 복조한 수신 신호를 심벌 간격 T 로 표본화하면 수신 신호의 위상은 불연속 위상 θ_n 이 되고 $L=2$ 일 때 식 (7)은 식 (8)과 같이 변환된다.

$$\theta_n = \pi h a_n / 2 + \pi h a_{n-1} + \pi h \sum_{i=-\infty}^{n-2} a_i \quad (8)$$

식 (8)의 우변 둘째 항은 셋째 항과 합칠 수 있으므로 식 (8)은 식 (9)와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\theta_n = \pi h a_n / 2 + \pi h \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i \quad (9)$$

식 (9)로부터 수신 신호의 위상 변화를 트렐리스 다이어그램으로 그릴 수 있는데 식 (9)의 우변 둘째 항은 과거 입력 값을 저장하고 있으므로 상태수를 결정한다. 변조지수 h 를 $2q/p$ (p 와 q 는 서로소)로 정의하면 트렐리스의 상태수는 p 가 된다[3,7]. 변조지수 h 가 $0.7 (= 2 \times 7 / 20)$ 인 경우에는 p 가 20이므로 트렐리스 상태수는 20이 되고, 식 (9)의 우변 둘째 항이 가질 수 있는 위상값은 $\{0, 7\pi/10, 14\pi/10, \dots, 133\pi/10\}$ 로 20가지이다. 변조지수 h 가 2/3인 경우에는 p 가 3이므로 Fig. 1과 같이 트렐리스 상태수는 3으로 간단해지고 상태 위상값은 $\{0, 2\pi/3, 4\pi/3\}$ 이 된다. 수신 신호의 성상도는 Fig. 2(a)와 같고, θ_n 의 값은 식 (10)에 의해 $\{\pi/3, \pi, 5\pi/3\}$ 이 된다. 비터비 수신기의 구현 복잡도는 위상 변화 트렐리스 다이어그램의 상태수에 비례하는데 변조지수 h 를 0.7에서 2/3으로 변경한 경우 상태수가 20에서 3으로 감소하므로 구현 복잡도는 약 1/7로 감소한다.

$$\theta_n = \frac{\pi}{3} a_n + \frac{2\pi}{3} \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i \quad (10)$$

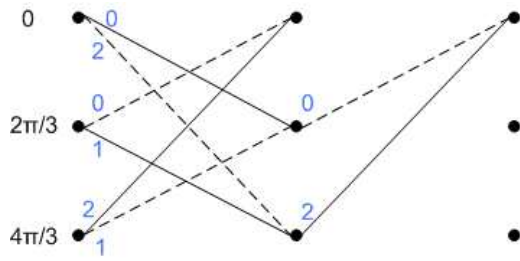


Fig. 1. 3-state trellis diagram ($h=2/3$)

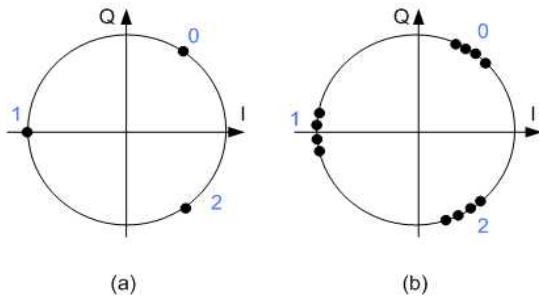


Fig. 2. Receiver signal constellation ($h=2/3$) without noise, (a) $L=2$, (b) $L=3$

Figure 1과 Fig. 2(a)로부터 트렐리스 상에서 두 경로 간의 최소 제곱 유클리드 거리를 계산하면 6으로 BPSK의 4와 비교하면 1.76dB의 E_b/N_0 이득 (asymptotic gain)이 있다.

L 이 3인 경우 식 (7)에 대입하면 트렐리스 다이어그램의 상태수는 6이고, 수신 신호의 정상도는 Fig. 2(b)와 같은 12-PSK인데 이를 L 이 2인 경우로 근사하여 트렐리스의 상태수도 3이고 수신 신호 정상도도 Fig. 2(a)의 3-PSK에 약간의 위상 지터(jitter)가 더해진 것으로 해석하면 L 이 2인 경우의 비터비 수신기를 그대로 사용할 수 있다.

2.3 수신 성능 평가

변조지수 h 가 2/3이고 L 이 2일 때 Fig. 1의 상태수 3인 트렐리스 다이어그램을 기반으로 하는 비터비 수신기의 BER 성능을 AWGN (Additive White Gaussian Channel) 채널에서 평가한 컴퓨터 모의실험 결과는 Fig. 3과 같다. 컴퓨터 모의실험은 512비트의 패킷으로 1,000,000 패킷을 수행하였다. 비터비 수신기의 경로 메트릭은 수신 신호와 Fig. 2(a)의 3-PSK 신호점과의 제곱 유클리드 거리를 이용하였다. 수신 성능은 BER이 10^{-5} 일 때 약 8.3dB로 이론적 한계값에 근접하며 BPSK, 기존 다중심별 판별 PCM/FM 수신기 또는 다른 텔레메트리 규격인 SOQPSK-TG (Shaped Offset Quadrature Phase Shift Keying-Telemetry Group)[8]의 수신 성능과 비교하면 약 1dB 이상의 E_b/N_0 성능 이득이 있다. 단, 낮은 E_b/N_0 (<4 dB)에서 BPSK 또는 SOQPSK-TG보다 BER이 높기 때문에 터보부호

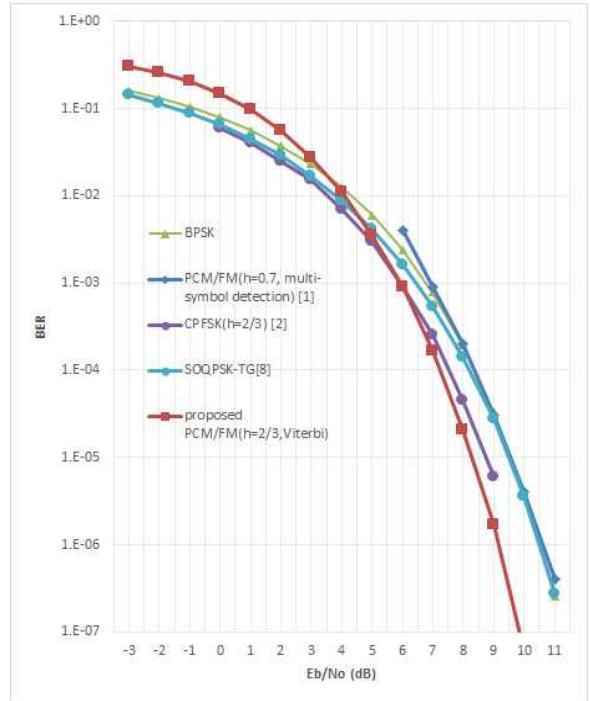


Fig. 3. BER performance comparison

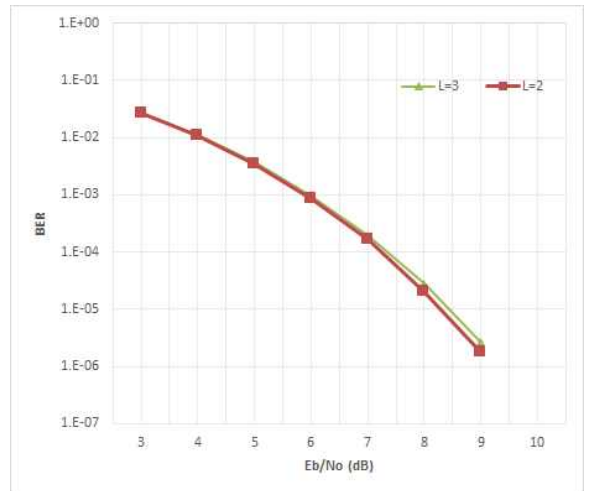


Fig. 4. BER performance comparison between $L=2$ and $L=3$

(Turbo Code)나 LDPC (Low Density Parity Check) 부호와 같이 낮은 E_b/N_0 에서 동작하는 오류 정정 부호와 함께 사용하는 경우에는 부호화 이득이 BPSK 또는 SOQPSK-TG보다 오히려 낮을 것으로 예상된다.

2.2절에서 언급했듯이 송신기의 주파수 펄스 길이 L 이 3일 경우에도 L 이 2인 경우의 비터비 수신기를 그대로 사용할 수 있는데 Fig. 4는 그 성능을 비교한 것으로 송신기의 L 이 2인 경우와 비교하면 성능 열화는 BER이 10^{-5} 일 때 약 0.1dB로 크지 않다.

III. 결 론

PCM/FM은 변조지수로 0.7을 사용하지만 이를 근소한 차이가 있는 2/3로 변경하면 수신기에서 심벌 간격으로 표본화했을 때 신호 정상도는 3-PSK로, 위상 변화 트렐리스 다이어그램의 상태수는 3으로 매우 간단해진다. 이를 기반으로 하는 비터비 수신기의 성능을 AWGN 채널에서 컴퓨터 모의실험으로 평가한 결과 이론적 한계값에 근접한다. 본 논문은 동기 복조를 가정하고 AWGN 채널에서 성능을 평가하였지만 무선 감쇠의 변화가 커서 동기 복조가 어렵거나 페이딩 채널과 같이 채널 변화가 큰 채널에서의 성능은 향후 추가적인 연구가 필요하다.

References

- 1) Telemetry Group Range Commanders Council, *Telemetry Applications Handbook*, Document 119-06, May, 2006, pp. 2~9.
- 2) Punnoose, R. J., "Re-Engineering PCM/FM as a Phase Modulation Scheme," *International Telemetry Conference Proceedings*, Vol. 44, 2008.
- 3) Svensson, A., Sundberg, C.-E. and Aulin T., "A class of reduced-complexity Viterbi detectors for partial response continuous phase modulation," *IEEE Trans. on Commun.*, Vol. 32, October 1984, pp. 1079~1087.
- 4) Othman, R., *Study of reception techniques for aeronautical telemetry modulations*. Signal and Image processing, CentraleSupélec, 2019.
- 5) Kumaraswamy, B., "Applications of PAM representation of CPM," *Master's Thesis*, 2008.
- 6) Geoghegan, M., "Improving the detection efficiency of conventional PCM/FM telemetry by using a multi-symbol demodulator," *International Telemetry Conference Proceedings*, Vol. 36, 2000, pp. 675~682.
- 7) Xingwen, D., Yumin, Z., Hongyu, C. and Ming, C., "Noncoherent demodulation with Viterbi decoding for partial response continuous phase modulation," *Proceedings of the International Telemetry Conference*, Las Vegas, NV, October 2013.
- 8) Gu, Y. M., "Evaluation of the Effect of Differential Encoder on SOQPSK-TG Receiver Performance," *Journal of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 49, No. 7, July, 2021, pp. 589~592.