한국학교수학회논문집 제 24 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 24, Number 3, 261-282, September 2021
http://doi.org/10.30807/ksms.2021.24.3.002

중학교 수학 영재아의 수학적 정당화에 대한 인식과 특성에 관한 연구[1)2)]

홍영석[3)] · 손홍찬[4)]

이 연구는 중학교 수학 영재학생의 수학적 정당화에 대한 의미 인식과 수학적 정당화의 특성을 파악하여 정당화 교육을 위한 시사점을 얻고자 한 것이다. 이를 위해 17명의 중학교 수학 영재학생을 대상으로 설문지와 검사지를 투입하여 분석한 결과, 영재학생들은 수학적 정당화에 대하여 입증, 체계화, 발견, 지적 도전과 같은 다양한 의미로 정당화를 인식하였고, 연역적 정당화의 선호도가 높았다. 실제 정당화 활동의 결과, 대수와 기하 문항 모두에서 연역적 정당화가 많았지만 대수 문항에서는 경험적 정당화도 많은 반면 기하 문항에서는 매우 낮음을 알 수 있었다. 연역적 정당화를 완성한 경우, 자신의 정당화에 만족함을 보였지만 수학적 문자와 기호를 사용하여 명제의 일반성을 연역적으로 정당화를 하지 못한 경우에는 불만족을 보였다. 연구 결과는 영재학생들이 경험적 추론의 유용성과 한계를 깨닫고 연역적 정당화를 할 수 있도록 하며 특히 대수적 번역 능력을 향상시킬 수 있는 정당화 교육이 필요함을 시사한다.

주요용어 : 수학 영재, 수학적 정당화, 정당화 인식, 정당화 특성

Ⅰ. 서론

수학을 배우는 중요한 목표 중에 하나는 논리적 사고를 향상시키기 위한 것이다. 논리적인 사고능력은 구체적인 사고의 단계부터 형식적인 단계에 이르기까지 귀납적·연역적 추론 능력과 불가분의 관계를 갖는다. 우리나라의 교육과정에서는 논리적인 사고를 향상시키기 위한 추론 능력을 강조하여 왔다. 2007 개정 수학과 교육과정에서는 논리적 사고 능력 육성을 중요한 목표로 설정하고 있으며, 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 학생 스스로 귀납, 유추 등을 통해 수학적 사실을 추측하고 이를 정당화하거나 증명하는 활동을 강조하고 있다(교육인적자원부, 2007). 또한 2009 개정 수학과 교육과정의 수학적 과정의 수학적 추론 영역에서 '수학적 추측 및 정당화'를 제시하였으며, 2015 개정

*MSC2010분류 : 97E50
1) 이 논문은 2019년 국립대학 육성사업의 지원을 받아 수행되었음.
2) 이 논문은 제1저자의 2021년 석사학위 논문 일부를 재구성한 것임.
3) 전북대학교 대학원생 (youngstein@naver.com)
4) 전북대학교 교수 (hcson@jbnu.ac.kr), 교신저자

수학과 교육과정의 교과 핵심 역량에서 “수학적 추론은 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력이다”라고 언급하며 수학적 추론 능력을 지도 요소로 강조하고 있다(p. 4).

미국의 교육과정에서도 논리적 추론 능력을 향상시키는 것을 중요하게 여기고 있다. NCTM(2000)은 K-12학년에서 요구되는 추론과 증명의 과정 규준에서 학생들은 추론과 증명을 수학의 기초 측면으로 인식할 필요가 있으며 수학적 논증과 증명을 개발하고 평가가 이뤄질 필요가 있다고 언급하고 있다. 현재 미국의 47개 주에서 채택하고 있는 새로운 수학교육과정 규준인 Common Core State Standards for Mathematics(2010)의 수학적 실천, 세 번째 규준에서는 실행 가능한 주장을 구성하고 다른 사람의 추론을 비판하기라는 수학적 실천의 행동 주제를 명시하고 있다. 구체적인 행동 특성으로는 가정, 정의, 증명된 결과를 이해하고 논증 구성하기, 추측하고 그것이 참인지 탐구하기 위해 명제를 논리적으로 전개하기, 자신의 결론을 정당화하고 다른 사람과 의사소통하기, 데이터로부터 귀납적 추론하기 등 논리적 사고와 관련된 행동 특성을 제시하고 있다.

우리나라와 미국의 수학교육과정에서 보듯이 추론 능력의 개발은 수학교육의 중요한 요소로 자리를 잡고 있다. 그러나 수학 성적이 우수한 학생들조차도 증명을 어려워하며 이 학생들 역시 경험적 검증에 의존하려는 경향을 보인다(Healey & Hoyles, 2000). 또 학생들이 경험적 주장과 연역적 주장을 구분하지 못하여 수학적 문제를 해결할 때 경험적 주장을 더 선호하는 경향을 보이며, 연역적 주장을 발견하는 것이 어려울 뿐만 아니라 경험적 정당화와 비교하여 연역적 정당화가 갖는 효력을 이해하지 못한다(Balacheff, 1988).

2007 개정 교육과정에서는 어떤 명제의 가정이 참이면 결론이 참임을 보이는 과정을 증명이라 규정하고 학생들이 증명의 구조와 본질을 이해하기를 기대하였다. 그러나 2009 개정 교육과정에 기반한 수학 교과서에서는 학습자들의 수준과 흥미를 고려한 포괄적인 형태의 증명을 도입하고 추론 영역의 문제를 “～을 증명하여라.”를 “～을 설명하여라.”로 진술 방식을 바꿈으로써 과도기적인 형태로 정당화를 도입하였다. 이어서 2015년 개정 수학과 교육과정에서는 학교 수학의 내용을 대폭 축소한다는 방침에 따라 형식적 증명은 고등학교 수학으로 옮기고, 중학교에서는 명제를 정당화하고 설명하기, 유사성에 근거하여 추론하기와 같은 학생수준에 맞는 다양한 정당화 방법을 활용하기를 권장하고 있다(교육부, 2015). 실제로 평가 방법 및 유의 사항에는 “정확한 용어와 기호의 사용, 복잡한 형식 논리 규칙의 이용을 요구하는 연역적 정당화 문제는 다루지 않는다.”라고 언급하고 있다(p. 35).

이와 같이 우리나라의 교육과정에서는 학생들의 수학학습에 대한 흥미를 고려하여 형식적이고 복잡한 논리의 증명 활동을 축소시키는 방향으로 변화를 꾀하고 있다. 따라서 학교수학에서는 엄밀하게 전개되는 연역적이고 형식적인 방법만이 증명이라고 생각하는 좁은 의미에서 벗어나 증명의 의미와 기능을 보다 포괄적인 관점에서 바라보는 시각을 가질 필요가 있다. 이러한 관점에서는 증명이 정당화의 궁극적인 방법을 넘어서 설명, 의사소통, 지식의 체계화, 발견을 위한 도구임을 인식할 필요가 있다(De Villiers, 1999). 또 학습자의 수준에 따라 증명의 다양한 의미를 인식할 필요가 있음을 강조한 연구(김정하, 2010, 2011; 최수미 & 정영옥, 2010; Harel & Sowder, 1988)에서도 볼 수 있듯이 학생이 엄밀한 증명을 하는 것을 강조하는 것보다 수학적 증명에 대한 이해를 향상시키고, 증명을 자신의 주장을 설명하는 수단으로 볼 수 있어야 하며, 이를 바탕으로 학생들에게 보다 쉬운 증명의 전 단계로써 정당화를 지도할 필요가 있음을 알 수 있다. 또한 학생들이 다양한 유형의 수학적 정당화를 경험하고, 정당화의 필요성을 인식할 수 있게 하는 것이 중요함을 알 수 있다.

한편, 수학 영재학생의 경우, 일반 학생보다 문제를 인식하고 문제의 구조를 파악하는 능력이 뛰어나기 때문에 보다 높은 수준의 정당화 능력을 보인다는 연구 결과가 있다. 송상헌・정영옥・장혜원(2006), 송상헌・이경화・최남광(2007)은 초등학교 수학 영재들이 형식적인 정당화를 할 수 있다는 점

을 밝히고 있으며, 허지연(2006)은 초등학교 5, 6학년 영재학생들의 도형분할 과제를 해결할 때 나타나는 정당화 단계의 특성을 분석하여 수학 영재학생들은 형식적 증명 수준에 근접한 정당화를 하려는 경향이 강하다는 것을 논의하였다. 위 연구들은 소수의 초등 수학 영재학생들을 대상으로 실시되었다는 한계가 있다. 학생들은 중학교 교육과정에서 문자와 식을 학습하고 평면 기하에서 정당화를 경험하게 되므로 보다 형식적인 정당화의 특성은 중학교 학생들을 대상으로 연구할 때 뚜렷하게 나타날 수 있다.

이 연구에서는 2015 수학과 교육과정에서 실험이나 증거에 의한 귀납적 정당화, 유사한 상황을 추론하는 유추적 정당화, 복잡한 형식논리가 아닌 연역적 논증을 학습한 수학 영재학생들을 대상으로, 수학적 정당화의 필요성을 얼마나 폭넓게 인식하고 있는지를 알아보고 대수 및 기하 영역에서 자신이 할 수 있을 것으로 기대하는 정당화 유형에 대한 인식을 조사하였다. 그리고 대수와 기하 문항을 실제로 정당화하는 과정에서 드러난 정당화의 수준이 자신이 기대했던 정당화의 수준과 비교했을 때 나타나는 유형의 차이에서 발생하는 정당화 만족 정도를 알아보고 불만족하는 경우 그 원인을 분석하여 영재학생의 정당화 능력을 향상시키기 위한 지도 방향을 탐색하고자 하였다. 마지막으로 수학적 정당화 과정에서 연구 대상자에게서 공통적으로 나타나는 특징이 무엇인지 규명하고 영재학생들의 정당화 학습에 대한 시사점을 도출하고자 하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 정당화의 의미와 인식

수학적 증명이 무엇을 의미하는가에 대해서는 수학 공동체에서 여전히 논의되고 진화하고 있지만(CadwalladerOlsker, 2011), 대략적으로 증명이란 수학적 명제가 타당함을 보이기 위해 정의와 공리체계 또는 알려진 사실로부터 형식적 논증을 거쳐 결론에 이르는 일련의 절차라고 볼 수 있다. Hersh(1997)는 수학적 증명에 대한 엄격한 정의 외에 비형식적이고 덜 정확한 논증을 실제적 수학적 증명이라고 부르고, 이것이 모두는 아닐지라도 많은 수학자들이 어떤 주장이 참임을 보이기 위해 실제로 수학에서 많이 활용하는 것이라고 하였다.

수학적 정당화는 형식적이고 엄밀한 증명뿐만 아니라, 명제가 참임을 보이기 위해서 경험적 활동과 같은 다양한 방법을 통해 부정확하지만 타당한 설명을 통하여 결론에 이르는 포괄적 과정으로 볼 수 있다. 조완영과 권성룡(2001)은 학교수학에서 학생들의 합의과정에서 증명의 타당성에 대한 기준이 세워지고 학생들의 수학적 지식과 경험의 수준에 따라서 증명의 수준도 향상된다고 하였다. 특히 복잡한 기호를 사용하여 형식적이고 논리적으로 표현한 것만이 증명이라는 인식이 강하기 때문에 형식적 증명과 비형식적 증명을 모두 포함하는 말을 정당화라고 하였다. 또는 다른 사람을 설득하기 위해서 표현하는 모든 방법을 수단으로 수학교실에서 일어나는 모든 의사소통의 과정을 수학적 정당화라고 하였다(조경희, 2003).

수학적 정당화의 의미는 개인적 측면과 사회적인 측면으로 생각해 볼 수 있는데, 개인적 측면에서 정당화는 명제의 진위를 해결할 때 자신을 확신시키는 과정을 말한다. 이러한 관점에서 Bell(1976)은 정당화는 명제가 참임을 보이는 과정이고 입증으로서의 역할을 강조하였다. Harel & Sowder(2007)는 수학적 정당화를 ‘증명 스킴’이라는 용어로 정의하면서, 증명 스킴은 개인의 추측 또는 사실을 확인하는 주장으로 보았다. Marrades & Gutierrez(2000)는 수학적 정당화는 수학 공동체를 설득시키고 확신

시키기 위한 소통과정으로 보며 정당화의 사회적인 측면을 강조하였다.

수학적 정당화 인식에 관한 연구는 주로 일반 학생을 대상으로 실시되어 왔다. 고등학생들의 증명의 인식에 관한 연구에서 McCrone & Martin(2004)은 학생들이 증명의 목적을 개인적인 측면에서만 인식하고 있으며 증명 과정이 타인을 납득시킬 수 있어야 함을 이해하지 못하고 있음을 확인함으로써 고등학생들이 증명에 관하여 매우 국소적으로 인식하고 있다고 주장하였다. 또한 김미향(2019)은 고등학생들이 수학적 정당화의 기능으로 입증과 설명의 기능을 선택한 비율이 높았으며 발견, 의사소통, 지적 도전을 선택한 비율은 매우 낮게 나타났음을 조사하였다. 이 연구의 결과에서도 고등학생들은 수학적 정당화에 대한 인식이 폭넓지 못하고 편협하게 인식하고 있다는 것을 알 수 있다. 그러나 저학년인 초·중학생이 수학적 정당화에 대하여 다양하게 인식하고 있다는 예상외의 연구결과도 있다. 이와 관련하여 김정하(2011)는 초등학생과 중학생을 대상으로 수학적 정당화가 왜 필요한가에 대한 연구결과에 의하면, 학생들은 대부분이 수학적 정당화의 필요성을 느끼고 있는 것으로 나타났고, 수학적 정당화의 역할에 대해서는 자신의 수학적 추측을 확신시키는 심리적인 측면과 수학적 지식을 체계적으로 정리할 수 있는 논리적인 측면, 그리고 선생님이나 친구와 의사소통을 할 수 있는 사회적 측면을 중요한 부분으로 인식하고 있었다.

수학적 정당화의 유형에 대해 어떻게 인식하고 있는지에 대한 연구와 관련하여 Healey & Hoyles(2000)는 수학 성적이 우수한 14세~15세 학생을 대상으로 두 가지 인식에 대하여 조사하였다. 가장 좋은 점수를 받을 것 같은 증명 유형에 대한 인식과 학생 본인에게 가장 설명력이 높을 것 같은 증명 유형에 대한 인식을 조사하였다. 그 결과 학생들은 대수적으로 표현된 증명이 높은 점수를 받는다고 생각했지만 자신에게 가장 확신을 주고 이해하기 쉬운 증명은 대수적 표현이 적은 증명을 선호하는 것으로 나타났다. 이를 통해서 학생들은 경험적 주장의 한계를 인식하고 있지만 학생 스스로 증명을 수행할 때는 지각적이고 경험적인 증명을 선호한다는 사실을 알 수 있다. 김정하(2011)의 연구에서도 유사한 결과를 볼 수 있다. 학생들이 수학적 정당화를 설명해주는 상대에 따라서 정당화의 수준이 다르게 나타났다. 즉, 친구에게는 보다 낮은 수준으로 수학적 정당화를 하고 교사에게는 높은 수준으로 정당화를 설명하려는 경향을 보였다. 이러한 연구들은 학생들이 수학적 정당화 유형에 대한 인식의 양면성을 지니고 있음을 암시하고 있다.

2. 수학적 정당화의 유형 및 수준

수학적인 주장을 포괄적인 의미에서 다양한 방법으로 정당화를 할 때, 학생들은 상대방을 납득시키기 가장 효과적인 표현방법을 사용한다. 이때 수학적 추론 방법과 사용하는 언어, 기호가 다양하게 나타나는데 정당화의 유형과 수준에 대해서 다양한 연구 결과가 축적되어 왔다. 여러 가지 연구 중에서 Balacheff(1988), Harel과 Sowder(1998), Simon과 Blume(1996)의 수학적 정당화 유형 분류를 알아본다.

Balacheff(1988)는 14쌍의 13~14세 학생들의 증명 사례를 분석하면서 학생들의 증명 형태를 '소박한 경험주의(naive empiricism)', '결정적 실험(crucial experiment)', '포괄적인 예(generic example)', '사고 실험(thought experiment)'으로 범주화하였다. 소박한 경험주의는 몇 가지 구체적인 사례를 통하여 증명을 시도하는 것으로 가장 쉬운 단계의 귀납적인 방법이다. 결정적인 실험은 소박한 경험주의와 마찬가지로 사례를 제시하지만 '1000001+1000002=2000003'와 같이 극단적인 사례를 제시함으로써 소박한 경험주의보다 타당성을 더욱 강조하고자 하는 것이다. 포괄적인 예는 특정한 사례를 통하여 타당성을 설명하지만 이때 제시된 사례는 일반화된 규칙을 포함하는 특징이 있다. 마지막으로 사고실

험은 형식적이고 연역적인 형태의 엄밀한 증명을 말한다.

한편 Harel과 Sowder(1998)는 증명 스키마의 개념을 통하여 설명하였으며 스키마가 형성되는 기반을 기준으로 외적 기반을 둔 증명 스키마, 경험적 증명 스키마, 연역적 증명 스키마의 3가지 유형으로 분류하였다. 외적 기반을 둔 증명 스키마는 증명하기 위해서 외부의 스키마를 활용하는 것이다. 예를 들어 교사나 교과서의 권위를 들어 증명의 타당성을 설명하거나 증명의 추론 과정 보다는 서술되는 형식에 치중하는 것이다. 경험적 증명 스키마는 구체적인 사례를 제시하거나 이해를 목적으로 하는 그림을 이용하여 설명하는 것이다. 연역적 증명 스키마는 일반화, 조작적인 사고, 논리적인 추론을 이용하여 증명하는 것을 말한다. Harel과 Sowder(1998)의 증명 유형은 Balacheff(1988)에서는 언급되지 않았던 외부적 정당화의 사례들도 정당화의 유형으로 인정하고 있다는 점에서 정당화의 의미를 보다 포괄적으로 규정했다고 볼 수 있다.

세 번째로 Simon과 Blume(1996)은 Balacheff(1987)를 비롯한 기존의 연구를 바탕으로 대수적 관계에서 일반화를 통해 정당화하는 수준을 제시하였다. 0수준은 정당화가 포함되어 있지 않는 수준이다. 1수준에서 학생은 수학 교사나 교과서와 같은 권위에 근거하여 정당화한다. 2수준에서는 정확하고 특정한 예를 통하여 정당화를 제시하는 경험적인 증거에 의존하여 정당화한다. 3수준에서는 문제 상황을 대표할 수 있는 포괄적인 예를 발견하여 일반성을 이끌어내는 설명을 시도함으로써 정당화한다. 4수준에서는 연역적 정당화가 가능한 단계로서 언제나 참이 되는 연역적인 논증을 제시한다.

3. 수학 영재아의 증명 특성

일반적으로 수학 영재는 수학 분야에서 탁월한 학습 능력을 바탕으로 높은 성취를 보이는 학생을 말한다. 송상헌(1998)은 ‘수학 영재성’이란 선천적으로 타고난 적성과 후천적으로 학습한 수학적 배경지식을 바탕으로 지적, 정의적인 행동특성이 수학적 사고 기능과 조화롭게 작용하여 수학적 과제를 창의적으로 수행해 낼 수 있는 잠재적 가능성이라고 정의하였다.

영재아는 문제를 접했을 때, 분석하고 종합하여 문제를 해결하는 절차가 신속하고 단순한 특징을 보인다. 크루테츠스키(Krutetskii, 1976)는 수학 영재가 문제의 구조를 파악할 때 신속하고 단축된 사고를 하는 분석-종합적 통찰을 사용하여 곧바로 문제를 ‘복합된 전체’로 파악할 수 있다고 말하였다. 김지원(2004)은 수학 영재아는 문제 해결에서 직관적 통찰 능력을 바탕으로 추상화-시각화 능력을 사용하여 핵심내용을 축약시켜 사고과정을 간결하게 하며 이로 인해 빠른 속도로 문제를 해결하려는 특성을 보인다고 하였다. 또한 문제를 해결하고 답을 구하는 것에 그치지 않고 보다 나은 풀이를 찾아보려는 태도를 바탕으로 일반화된 해법을 구하여 발전시키려는 경향을 지녔다고 하였다. 또 일반화 능력을 활용하여 영재아는 주어진 명제를 바탕으로 가설을 설정하고 이를 연역적으로 증명하는 가설 연역적 사고를 하려는 경향이 있다고 하였다.

보통의 학생들은 증명을 전개할 때, 어디서부터 증명을 시작해야 할지, 대수적 표현으로 일반적인 경우를 어떻게 나타내야 할지, 문자와 기호를 사용하여 논리적인 절차에 의해 결론에 도달해야 하는 것을 어려워하는 모습을 볼 수 있다(나귀수, 1997a). 또한 학생들이 기하 증명 과정에서 겪는 어려움으로 명제의 가정과 결론을 혼동하여 참임을 보여야 할 결론을 정당화 과정에서 조건으로 활용하는 경우가 있으며, 증명을 할 때 수학적 기호를 사용해야 한다는 선입견을 지니고 있어서 증명을 전개함에 있어서 어려워한다(나귀수, 1997b). Sharon(2005)은 학생들이 증명을 실행할 때 주어진 정보로 시작해서 순차적으로 주장을 정당화해 나가는 매우 엄격하고 까다로운 것으로 인식하고 있다고 하였다. 이와 같이 보통의 학생들에게 수학적 증명은 어렵다는 것을 알 수 있다.

수학적 정당화 능력에 있어서 영재학생에게서 두드러지게 나타나는 정당화의 특성에 관한 연구에서, Lee(2005)는 32명의 6학년 영재학생들을 대상으로 기하적 추론과 비형식적 증명 구성의 특징을 조사하였는데, 영재학생들은 제시된 모든 문제 상황에서 일관적으로 실제적 추론(pragmatic)과 의미론적 추론(semantic)을 거쳐 지적(intellectual)으로 추론하였으며, 창의적인 비형식적 증명이 나타남을 확인하였다. 즉 영재학생들은 경험적 정당화를 연역적 정당화로 발전시키는 능력이 있음을 밝히고 있으며 비형식적 증명의 가치에 대하여 관심을 기울여할 필요가 있다고 주장하였다. 송상헌 외(2006)는 초등학교 6학년 수학 영재들의 기하 과제 증명에 관한 사례분석에서 증명 수준과 증명의 구성 요소를 조사하였다. 이 연구에서 영재학생들은 약간의 교사의 조력으로 형식적이고 일반적인 증명을 수행할 수 있는 것으로 나타났다. 한편으로 영재학생들은 명제를 연접하여 추론하는 것을, 그림에서 보조선을 그어 증명을 시도하는 것을, 명제의 가정과 결론을 구분하는 것을 어려워하는 경향을 보였다. 그리고 수치적 접근을 선호하는 영재학생은 도형을 통해 알아낸 아이디어를 일반화하는 것을 어려워하는 경우도 있다고 하였다.

이들의 연구에서 영재학생들이 보통의 학생보다는 창의적인 증명 가능성이나 연역적 정당화 가능성이 높다는 것을 짐작할 수 있지만, 보통의 학생과 마찬가지로 증명에서의 어려움을 일정 부분 공유하고 있음을 알 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구를 수행하기 위하여 수학적 정당화 및 영재학생의 특성에 대한 선행연구들을 살펴보았으며, 이를 참고하여 영재학생의 수학적 정당화에 대한 인식과 그 특성을 알아보기 위한 검사지를 개발하였다.

1. 연구 대상자

연구 대상자는 중·소도시에 소재한 A대학교 부설 영재교육원의 중등수학반 17명이다. 중학교 1학년 15명, 2학년 2명으로 이들은 대학교 부설 영재교육원에서 영재성 검사 및 심층 면담을 통하여 선발된 학생들이다.

2. 검사 도구

본 연구의 검사 도구는 수학적 정당화 인식에 관한 설문과 정당화 수행의 실제를 조사하기 위한 것으로 총 9문항으로 구성되어 있다(부록 참조). 검사 문항은 수학교육전문가 1명과 수학교사 2명의 조언을 토대로 중학교 교육과정 범위에서 영재학생의 수준을 고려하여 개발하였다. 1번, 2번, 3번 문항은 수학적 정당화 인식에 관한 설문으로, 먼저 1번 문항은 중학교 영재학생들이 지니고 있는 수학적 정당화의 의미에 대한 인식을 조사하기 위해서 선택형 문항으로 구성하였다. 선택형 문항으로 제작한 이유는 영재학생들이 수학적 정당화의 다양한 의미를 떠올리지 못할 것으로 예상하였기 때문이다. 선택지의 내용은 De Villiers(1990)가 제시한 증명의 기능분류(입증, 설명, 발견, 체계화, 지적 도전)를 바탕으로 학생들의 수준에서 이해할 수 있는 문장으로 작성하였다. 2번과 3번 문항은 각각 대수와 기하 영역에서 자신이 선호하는 정당화 유형을 선택할 수 있도록 선택형 문항으로 제시하였다. 이때 선택

지의 정당화 유형은 Simon과 Blume(1996)의 정당화 수준을 기초로 하되 0수준 정당화 없음을 선택지에서 배제하고 4단계의 수준으로 제시하였다. 4번부터 9번까지는 영재학생들의 정당화 활동의 실제를 조사하기 위해서 대수 영역 3개 문항과 기하 영역 3개 문항을 제시하였다. 각 문항마다 자신이 수행한 정당화에 대한 만족도를 조사하기 위해서 2개의 하위 설문 문항을 제시하였다. 첫 번째 하위 문항은 자신이 수행한 정당화의 만족도를 조사하기 위한 선택형 문항이고, 만일 자신의 정당화에 만족하지 않는다면 두 번째 설문에서 그 이유를 선택할 수 있게 하였다. 이때 선택지의 내용은 서동엽(1999)의 중학교 학생의 증명 능력 분석에서 도출된 증명의 구성 요소를 바탕으로 제시된 문항의 성격에 맞게 선택형으로 재구성한 것이다.

3. 자료 분석

검사 결과는 각 설문 문항에 대한 답변 비율을 바탕으로 영재학생들의 수학적 정당화의 인식에 대한 특징을 분석하였으며 연구 대상자와의 면담, 검사지, 관찰로부터 얻어지는 질적 자료에 근거하여 연구를 진행하였다.

정당화 유형의 분석틀은 Simon & Blume(1966)의 정당화 수준을 기초로 하고, 학생의 검사 결과를 포함할 수 있도록 Nakahara(1994)의 언어적인 비형식적 표현을 4수준에 포함시켜 구성하였다.

1번 문항은 수학 영재학생의 수학적 정당화의 의미에 대한 인식을 조사하기 위한 선택형 설문으로 학생들이 얼마나 다양하게 정당화의 역할을 인식하고 있는지 알아보기 위해서 선택지 중 2개를 선택하도록 하였고 각 선택지에 대한 응답 빈도를 비율로 나타낸 후 분석하였다.

<표Ⅲ-1> 정당화 유형의 분석틀

<table>
<tr><th>정당화 유형</th><th colspan="2">유형의 특징</th></tr>
<tr><td>0수준
(정당화 없음)</td><td colspan="2">반응에 정당화가 포함되어 있지 않음</td></tr>
<tr><td>1수준
(외부 권위)</td><td colspan="2">교과서, 교사와 같은 외적권위에 근거한 정당화</td></tr>
<tr><td>2수준
(경험적 증거)</td><td colspan="2">정확하고 특정한 예를 통해 정당화 제시</td></tr>
<tr><td>3수준
(일반적 예)</td><td colspan="2">특정한 사례를 통해 일반적인 성질을 이끌어 냄으로써 연역적 정당화를 표현</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4수준
(연역적정당화)</td><td>비형식적 표현</td><td>그림이나 글을 사용하여 표현하였으며 연역적인 의미를 포함</td></tr>
<tr><td>형식적 표현</td><td>수학적 기호를 사용하여 표현하였으며 연역적인 의미를 포함</td></tr>
</table>

2번과 3번 역시 선택형 문항으로 학생들의 응답 빈도를 비율로 나타내어 영재 학생들이 대수와 기하 영역에서 선호하는 수학적 정당화 유형을 조사하였다. 그리고 <표Ⅲ-1>의 정당화 유형의 분석틀을 바탕으로 4번부터 9번까지의 실제 정당화 활동을 분석하였다. 이때 학생들의 응답 중 외부 권위(1수준)에 의한 정당화는 관찰되지 않아 분석 유형에서 배제했으며, 정당화를 시도했으나 인식 불가한 답안은 무응답과 함께 분류하였다. 또한 정당화 과정에서 부분적으로 오류가 나타난 답안은 해당 수준의 유형에 포함시켜 분류하였다.

각 문항별 정당화 만족도를 조사하기 위해서 빈도수가 가장 많은 정당화 유형에 대하여 만족, 불만족을 파악하고 그 이유를 분석하기 위해서 <표Ⅲ-2>와 같이 분류하여 정당화의 만족도 결과를 <표Ⅳ-4>와 <표Ⅳ-5>과 같이 제시하였다. 각 유형의 비율은 문항 영역별 3문항의 17명의 51개 답안의 횟수를 계산하여 백분율로 나타냈다.

<표Ⅲ-2> 정당화의 만족도의 분류와 불만족 이유

<table>
<tr><td rowspan="6">정당화
유형분류</td><td colspan="2">연역적 정당화에 만족함</td></tr>
<tr><td colspan="2">연역적 정당화에 만족도가 보통</td></tr>
<tr><td colspan="2">연역적 정당화에 불만족</td></tr>
<tr><td colspan="2">경험적 정당화에 만족</td></tr>
<tr><td colspan="2">경험적 정당화에 만족도가 보통</td></tr>
<tr><td colspan="2">경험적 정당화에 불만족</td></tr>
<tr><td rowspan="4">불만족
이유</td><td>A</td><td>주어진 문제를 이해하지 못함</td></tr>
<tr><td>B</td><td>수학적 문자와 기호를 사용하지 못함</td></tr>
<tr><td>C</td><td>일반적인 경우에 대하여 정당화를 못함</td></tr>
<tr><td>D</td><td>전략적 추론을 하지 못하여 정당화를 못함</td></tr>
</table>

Ⅳ. 연구결과 및 분석

1. 수학 영재학생이 지닌 수학적 정당화의 의미에 대한 인식

설문지 1번 문항은 “수학에서 정당화가 왜 필요하다고 생각합니까?”라는 질문으로, 복수(2개) 선택형 문항으로 구성하였다. 문항의 각 선택지에 대한 영재학생의 응답 결과는 다음과 같다.

<표Ⅳ-1> 정당화의 필요성에 대한 응답 비율

정당화의 역할	빈도(회)	퍼센트(%)
입증(확신)	9	26.4
설명(의사소통)	8	23.5
체계화	5	14.7
발견	5	14.7
지적 도전	5	14.7
기타	2	5.8

이러한 결과는 영재학생들이 수학적 정당화의 역할 중 입증의 기능을 가장 높은 비율로 인식하고

있는 것을 보여주는 것으로, 이는 수학적 추측을 확인하고 입증하는 개인적인 측면에서 정당화를 인식하고 있음을 알 수 있다. 하지만 응답의 비율을 좀 더 자세히 살펴보면 영재학생들의 정당화에 대한 인식이 어느 한 가지의 의미에 치중하지 않고 고르게 나타나고 있음을 알 수 있다. 즉, 수학적 정당화를 통해서 상대방과 의사소통을 할 수 있는 사회적인 측면과 수학적 지식의 체계화를 경험할 수 있는 논리적인 측면까지도 중요하게 인식하고 있음을 알 수 있다. 한편 설문의 응답에서 '발견', '지적 도전'과 같은 의미를 선택한 학생도 다수 존재하였다. 또 '재미있다', '흥미롭다'와 같은 기타 의견을 직접 표현하는 경우가 존재하였다. 이러한 결과는 영재학생들이 수학적 추측을 정당화하는 과정에서 새로운 수학적 지식을 발견하고 도전하는 것을 선호하며 정당화에 흥미를 갖고 있음을 알 수 있다.

2. 수학 영재학생이 지닌 수학적 정당화의 유형에 대한 인식

설문지 2번, 3번 문항은 각각 대수와 기하 영역의 명제에 대하여 자신이 직접 정당화를 한다고 가정할 때, 선택지에 나열된 4가지 단계 정당화 유형을 읽고 자신의 정당화와 가장 근접한 유형을 선택하는 문항으로 구성되어 있다.

<표Ⅳ-2> 수학적 정당화 유형에 대한 응답 비율

정당화 유형	대수 영역		기하 영역	
	빈 도 (회)	퍼센트(%)	빈 도 (회)	퍼센트(%)
1수준 (외부 권위)	0	0	0	0
2수준 (경험적 증거)	4	24	0	0
3수준 (일반적 예)	1	6	4	24
4수준 (연역적정당화)	12	71	13	76

이러한 결과에서 영재학생들은 대수와 기하 영역 모두에서 연역적 정당화를 가장 선호하는 것을 알 수 있다. 다시 말해 다수의 영재학생들은 자신이 수학적 정당화를 한다고 가정했을 때, 문자와 기호를 사용하여 형식적이고 연역적인 정당화를 할 것으로 기대하고 있음을 알 수 있다. 하지만 대수 영역에서 경험적 증거를 선택한 비율이 24%이고 기하 영역에서 일반적인 예를 선택한 비율이 24%로 나타난 것으로 미루어 볼 때, 몇 가지의 사례를 증거로 제시하는 것이 가장 설득력이 높은 정당화라고 인식하고 있는 학생도 상당수 있다는 것을 알 수 있다. 특히 대수 영역에서 명제에 대하여 몇 개의 자연수를 대입하여 그 결과가 성립함을 확인하는 경험적 정당화를 선호한 것에 비하여 기하 영역에서는 특정한 사각형에 대하여 명제가 성립함을 보이는 일반적인 예를 통한 정당화를 선호하는 것을 볼 수 있는데, 이러한 차이는 대수와 기하 문항의 특성이 다르고 이로 인하여 정당화 방법에 차이가 발생하기 때문이라고 볼 수 있다. 이와 관련하여 정영우·김부윤(2015)는 기하 증명이 대수 증명과 대별되는 특징으로 증명에서 사용되는 도형이 대표성을 가진다는 것이다. 그는 학생들이 특정한 도형을 활용한 증명을 통해 정리기술과 증명의 일반성을 이해하도록 지도할 필요가 있다고 강조하였다.

3. 수학 영재학생의 수학적 정당화 수행의 실제

1) 수학적 정당화 수행의 실제에서 나타난 정당화 유형

영재학생들의 대수와 기하 영역의 정당화의 수행에서 나타난 정당화 유형의 결과는 <표Ⅳ-3>과 같다.

<표Ⅳ-3> 수학적 정당화 유형에 대한 응답 비율 (단위: %)

정당화 유형		대수 영역			기하 영역		
		4번	5번	6번	7번	8번	9번
무응답, 인식불가		12	12	18	53	76	12
경험적 증거		30	35	30	12	0	29
일반적인 예		0	5	0	0	0	5
연역적 정당화	형식적	53	35	35	35	24	47
	비형식적	5	12	18	0	0	5

이 결과를 앞의 설문 문항인 2번 문항의 대수 영역 정당화 유형의 선호도와 비교해보면, 영재학생들은 연역적 정당화(4수준)를 선호하면서 실제 정당화 수행에서도 연역적 정당화의 빈도가 가장 많은 것으로 나타났다. 즉 자신이 가장 선호하는 정당화 유형인 연역적 정당화(4수준)를 직접 수행할 수 있는 능력을 갖추었다고 볼 수 있다.

연역적 정당화를 수행한 학생 중에는 언어적 표현과 수학적 기호를 혼용하여 정당화를 하는 학생이 많았다. 이를테면, 모든 자연수에 대하여 명제가 성립함을 보일 때, 이를 대수적으로 표현하지 못하는 경우에는 일반적인 성질을 언어적 표현으로 서술하는 학생들이 다수 존재했다. 또한 대수 영역에서 연역적 정당화의 비율이 가장 높았지만 이에 못지않게 경험적 증거(2수준)의 비율이 상당히 높은 것을 확인할 수 있었다. 이들 중에는 자신이 연역적 정당화(4수준)를 할 수 있을 것으로 기대했지만 주어진 명제에 자연수를 대입하여 몇 개의 사례가 성립함을 보임으로써 정당화를 마무리하고 연역적 정당화로 발전시키지 못하는 경우가 전체 답안의 12% 비율이 존재하였다.

한편, 기하 영역은 대수 영역과 다른 결과를 보이고 있다. 연역적 정당화의 비율이 대수 영역보다 대체로 낮게 나타났으며 무응답의 비율이 높게 나타났다. 앞의 설문인 3번 문항의 기하 영역 정당화 유형의 선호도 조사에서는 일반적인 예(3수준)과 연역적 정당화(4수준)가 각각 24%, 76%로 나타났지만 실제 정당화 수행에서는 일반적인 예(3수준)는 거의 나타나지 않았다. 즉 일반적 예(3수준)를 정당화 유형으로 선호하는 학생이 존재했지만 실제 정당화 수행에서는 연역적 정당화(4수준)를 시도하는 학생이 대부분이었다. 대수 문항에서 경험적 증거를 제시하듯이, 기하 문항에서 대표성을 나타내는 도형의 예를 생성하고 이것으로부터 정당화를 완성하는 경우가 매우 적은 빈도로 나타났으며 이러한 접근조차 못한 경우에는 정당화를 포기하고 무응답으로 제출하는 경우가 많았다.

2) 수학적 정당화 수행의 실제에서 나타난 결과에 대한 만족도

먼저 대수 문항의 먼저 대수 문항의 정당화 만족도에 대한 결과는 <표Ⅳ-4>와 같다.

<표Ⅳ-4> 대수 문항의 정당화 만족도 조사 결과

정당화 유형과 만족도	횟수	비율 (%)	정당화의 불만족 이유			
			A	B	C	D
연역적 정당화에 만족	12	23.5				
연역적 정당화에 보통	11	21.5	·	1회	·	·
연역적 정당화에 불만족	4	7.8	·	4회	·	·
경험적 정당화에 만족	9	17.6				
경험적 정당화에 보통	4	7.8	·	4회	·	·
경험적 정당화에 불만족	3	5.8	·	2회	1회	·

무응답 및 인식불가의 답안은 제외하고 분석하였다. 연역적 정당화(4수준)를 수행한 영재학생들은 대수 문항 전체 답안의 23.5%가 '만족한다'라고, 21.5%가 '보통'이라고 응답하였다. '보통'의 만족도를 보인 답안은 연역적 정당화를 전개하는 과정에서 부분적 오류를 보이며 자신의 답안에 확신을 갖지 못하는 응답이 많았다. 여기서 특이한 점은 경험적 증거(2수준)를 제시한 학생 중 자신의 정당화에 '만족한다'라고 응답한 경우가 전체의 17.6%로 조사되었다. 이들은 2번 설문 문항에서 경험적 증거(2수준)를 선호하였으며, 실제 정당화에서 경험적 정당화를 하였고 자신의 정당화에 만족한다는 일관성 있는 결과를 보였다. 또한 연역적 정당화를 완성하고 '보통'이라고 응답한 11회의 답안 중 5회는 수학적 기호를 적절히 사용하여 연역적 정당화를 완성하고도 다시 숫자를 대입하며 연역적 정당화에 확신을 갖지 못하는 모습을 보였다.

한편, 연역적 정당화를 완성하고도 불만족을 보인 7.8%는 언어적으로 표현한 자신의 정당화에 대하여 수학적 기호를 사용하지 못한 것에 대한 아쉬움을 보였다. 경험적 증거를 제시하고 자신의 정당화에 '보통', '만족하지 않음'이라고 응답한 7.8%와 5.8%의 답안은 자신이 연역적 정당화를 할 수 있을 것으로 기대했지만 '문자와 기호를 사용하지 못하여'라는 이유로 자신의 정당화에 대하여 만족하지 않는 것으로 조사되었다. 또한 '일반적인 경우에 대하여 증명을 하지 못했다'는 불만족의 이유로 응답한 경우도 있었다. 이와 같이 정당화에 불만족을 보인 답안은 연역적으로 엄밀한 형식적 논리를 표현하지 못했다는 공통점을 담고 있다. 기타 의견으로 연역적 정당화(4수준)를 하고도 '정당화 과정의 일부분을 자세히 설명하지 못했다', '식을 너무 지저분하게 썼다'라고 제시한 학생도 있었다.

다음으로 기하 문항의 정당화 만족도에 대한 조사 결과는 <표Ⅳ-5>와 같다.

<표Ⅳ-5> 기하 문항의 정당화 만족도 조사 결과

정당화 유형과 만족도	횟수	비율 (%)	정당화의 불만족 이유			
			A	B	C	D
연역적 정당화에 만족	16	31.3				
연역적 정당화에 보통	1	1.9	·	·	·	·
연역적 정당화에 불만족	2	3.9	·	1회	·	1회
경험적 정당화에 만족	5	9.8				
경험적 정당화에 보통	0	0	·	·	·	·
경험적 정당화에 불만족	2	3.9	·	1회	1회	·

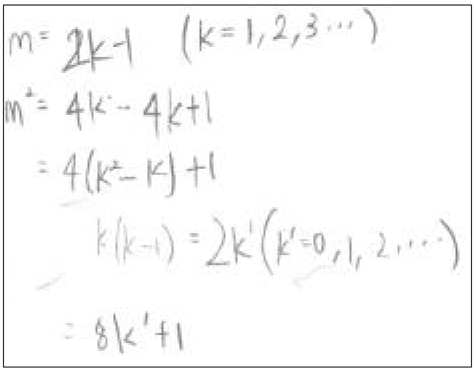
앞서 언급했듯이 기하 문항에서는 무응답 및 인식불가의 답안이 많았고 이러한 정당화의 결과는 대부분이 ‘만족하지 않음’이라고 응답하였다. 그러므로 인식이 가능한 답안을 대상으로 만족도를 분석하였다. 연역적 정당화(4수준)를 수행하고 ‘만족한다’라고 응답한 답안은 기하 문항 전체의 31.3%로 조사되었다. 이들은 모두 3번 설문에서 연역적 정당화(4수준) 또는 일반적인 예(3수준)를 선호하는 것으로 나타났다. 그리고 ‘보통’이라고 응답한 답안은 전체의 1.9%로 대수 문항에서 연역적 정당화 보통의 비율(21.5%)와 비교했을 때, 매우 적은 비율이다. 이러한 결과는 기하 문항에 대하여 연역적 정당화를 할 수 있을 것으로 기대했지만 실제로 그렇지 못한 경우에 영재학생들은 무응답으로 반응하며 대수 문항의 정당화보다 부담스러워함을 알 수 있다. 또한 경험적 정당화의 경우를 살펴보면, 경험적 증거를 제시하고 ‘만족한다’라고 응답한 비율이 전체 답안의 9.8%로 나타났다. 이들 중 3명은 대수 문항에서도 경험적 정당화를 제시한 학생이었다. 경험적 정당화에 보통에 응답한 경우는 없었다. 자신의 경험적 증거에 ‘만족하지 않는다’라고 응답한 답안은 3.9%로 매우 적었으며 이들 역시 ‘수학적 문자와 기호를 사용하지 못하여’, ‘일반적인 경우에 대하여 정당화를 못해서’라는 이유로 불만족을 표현했다.

4. 중학교 수학 영재학생의 수학적 정당화의 특징

영재학생의 정당화 수행에서 구체적으로 어떤 특징이 나타나는지 확인해 보고자 17명 학생의 답안을 대상으로 질적 분석을 하였다. 아래 그림에서 제시된 정당화 사례는 정당화 과정에서 보일 수 있는 평범한 답안과는 달리 영재학생의 우수한 점 또는 정당화 과정에서 범하는 오류와 같은 특이점을 보이는 답안을 분류하여 제시하였다. 유사한 답안지가 동일한 문항에 반복되는 사례가 확인되었지만 지면 관계상 대표사례만 제시하였다. 이때 정당화 사례에 해당하는 분석 대상자를 구분하기 위해서 S1부터 S5로 명명하였으며 S2와 S5는 중학교 2학년이고 나머지 학생은 1학년이다.

1) 수학적 문자와 기호를 사용한 형식적 표현

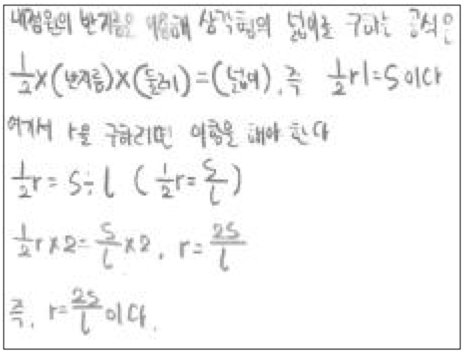
[그림 Ⅳ-1]에서 학생 S1의 4번 문항의 정당화를 살펴보면, 임의의 홀수를 $2k-1$와 같이 대수적으로 표현하고 $k(k-1)$이 짝수임을 나타내기 위해서 또 다른 문자 $2k'$를 사용하고 있다. 이때, k, k' 값의 범위를 정확하게 언급하고 있다. 이처럼 문장제 형태로 표현된 명제를 대수적인 문자를 활용하여 표현하고 표현된 대수식을 바탕으로 논리적인 맥락이 잘 전달되도록 증명을 전개하고 있다. 연구대상자 중 수학적 기호와 대수 문자를 적절히 사용하여 정당화를 전개하는 모습은 다수의 학생에게서 나타났다.



[그림 Ⅳ-1] S1의 4번 문항 정당화 사례

2) 풍부한 수학적 배경지식을 활용하여 정당화를 시도

7번 문항은 중학교 3학년 교육과정의 학습 내용으로 내접원의 성질과 관련한 문항이다. [그림 Ⅳ-2]에서 S2의 7번 문항의 정당화를 살펴보면, '내접원의 반지름을 이용해 삼각형의 넓이를 구하는 공식은'이라는 말을 언급하고 삼각형의 넓이 '$S=\frac{1}{2}rl$' 라고 서술하고 있다. 그리고 등식의 성질을 이용하여 '$r=\frac{2s}{l}$' 라고 결론을 유도하였다. 즉 S2는 중학교 2학년 학생임에도 내접원의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 수학적 지식을 소유하고 있으며 자신의 수학적 배경지식으로 명제의 결론을 유도하는 것을 정당화라고 생각한 것이다. 이러한 양상은 선행학습으로 습득한 다양한 수학적 지식을 정당화에 활용하여 간결하고 경제적으로 정당화를 전개하고 있으며 영재학생의 수학적 능력을 드러내고 있다.

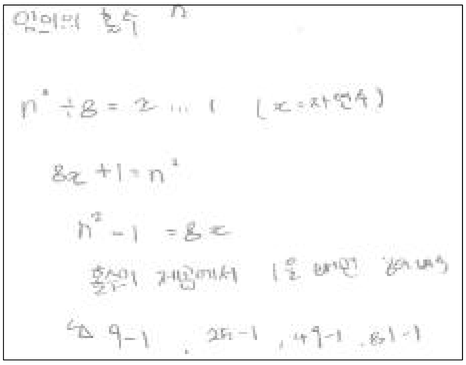


[그림 Ⅳ-2] S2의 7번 문항 정당화 사례

3) 명제의 가정과 결론을 혼동하여 범하는 오류

[그림 Ⅳ-3]에서 4번 문항의 정당화를 살펴보면, S3학생은 '1이 남는다'라는 명제의 결론이 성립함을 인정하고 이를 이용하여 정당화를 시도하고 있다. 즉, 결론을 정당화 과정에서 임의로 이용하는 인지

적 장애를 보이고 있다. 이러한 오류는 S3이외의 다른 몇몇 학생에게서도 볼 수 있었다.

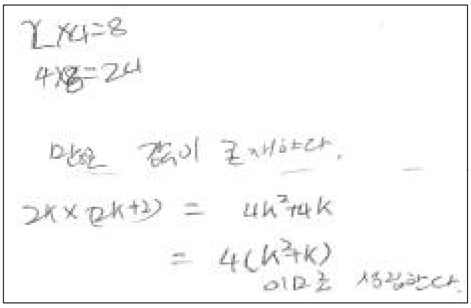


[그림 Ⅳ-3] S3의 4번 문항 정당화 사례

나귀수(1997b)는 중학교 2학년 기하 증명 수업 분석에서 학생이 증명을 해결하는데 겪는 어려움 중에 하나가 가정과 결론을 혼동하여 사용한다고 하였다. 마찬가지로 초등학교 6학년 영재학생을 대상으로 기하 문제의 증명 수준을 조사한 연구에서 송상헌(2006)은 영재학생이 명제의 가정과 결론을 구분하는 것을 어려워하는 경향을 보인다는 유사한 연구 결과를 확인하였다. 일반적으로 학생들이 증명에서 갖는 어려움을 본 연구의 영재학생도 공유하고 있음을 알 수 있다.

4) 구체적인 예로부터 연역적 정당화로 발전

[그림 Ⅳ-4]에서 S4는 6번 문항에서 차이가 2인 두 자연수가 모두 짝수일 때, 두 자연수의 곱이 2의 배수가 되는 몇 개의 사례를 확인하고, $2k\times(2k+2)$와 같이 문자를 사용하여 두 자연수를 표현하였다.

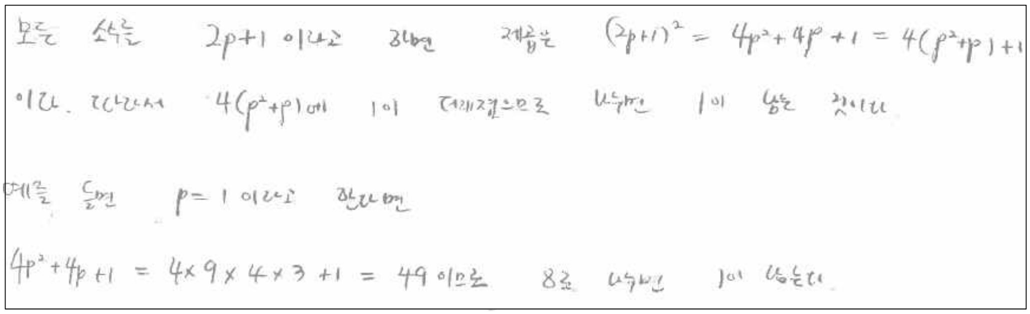


[그림 Ⅳ-4] S4의 6번 문항 정당화 사례

그리고 식을 계산하여 명제의 결과가 성립함을 보이며 연역적 정당화로 발전시키고 있다. 특히, 대수 문항에서 이러한 방식으로 정당화를 한 학생이 약간 명 존재했다. 이러한 모습은 Lee(2005)의 비형식적 증명 구성의 특징에 관한 연구에서 초등학교 6학년 영재학생이 경험적 정당화를 연역적 정당화로 발전시키는 능력이 있음을 보인 결과와 유사함을 확인할 수 있다.

5) 연역적 정당화에 대한 신념

[그림 Ⅳ-5]에서 S5는 대수 문자를 사용하여 연역적 정당화를 시도하고 있다. 그리고 연역적 정당화의 결과에 덧붙여 정당화에서 사용한 문자에 직접 숫자를 대입하여 명제의 성립 여부를 다시 확인하고 있다. Chazan(1988)의 '고등학생의 수학적 정당화에서 경험적 증거와 연역적 증명에 대한 관점'에 관한 연구에서, 연역적 증명을 경험적 예의 한 유형으로 생각하며 연역적 증명이 모든 경우를 입증하는 힘에 대하여 확실한 믿음을 갖지 않는 학생이 존재한다는 연구의 결과가 본 연구의 대상자에게서도 나타났음을 알 수 있다.


모든 소수는 $2p+1$ 이라고 하면 제곱은 $(2p+1)^2 = 4p^2+4p+1 = 4(p^2+p)+1$ 이다. 따라서 $4(p^2+p)$에 1이 더해졌으므로 나누면 1이 남는 것이다

예를 들면 $p=1$ 이라고 한다면

$4p^2+4p+1 = 4\times9\times4\times3+1 = 49$ 이므로 8로 나누면 1이 남는다

[그림 Ⅳ- 5] S5의 4번 문항 정당화 사례

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 중학교 영재학생들을 대상으로 수학적 정당화의 의미에 대한 인식과 정당화 유형의 수준 그리고 영재학생의 정당화에 대한 만족도를 분석하고, 정당화 과정에서 나타나는 특징을 분석하였다. 이를 통해 이들의 정당화 수준을 향상시키기 위한 지도 방향을 탐색하고 수학적 정당화 수업에 대한 시사점을 도출하고자 하였다. 본 연구의 조사에 중학교 1학년 15명, 2학년 2명의 영재학생이 참여하였으며, 수학적 정당화의 의미에 대한 인식과 정당화 유형에 대한 인식, 그리고 실제 정당화 활동을 위한 문항을 담고 있는 설문지를 제시하여 영재학생들의 정당화 수준을 분석하였다. 본 연구의 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

첫째, 영재학생들이 지닌 정당화의 의미에 대한 인식은 비교적 폭넓게 나타났으며, 일반학생과 비교했을 때 차이점을 나타내고 있다. 일반 초·중학생을 대상으로 한 김정하(2011)의 연구에서 학생들은 자신의 답이 맞는지를 확인하기 위한 '입증'으로써 정당화 기능을 가장 많이 선택한 것은 영재학생과 유사한 결과로 조사되었다. 그러나 영재학생은 정당화의 5가지 기능 중 '입증'이외의 나머지 항목에서도 고른 선택을 하였다. 특히, 수업 시간에 자신의 주장을 교사나 친구에게 설명하기 위한 '의사소통'으로써 정당화에 대한 인식이 일반학생보다 높은 비율로 조사되었다. 이를 통해서 영재학생은 정당화가 자신의 답을 확신하기 위한 개인의 심리적인 측면에 있어서 중요한 역할을 할 뿐만 아니라 타인과의 의사소통을 하기 위한 사회적인 측면도 중요하게 여기고 있음을 알 수 있다. 또한 높은 비율은 아니지만 '체계화'라는 연역적인 측면도 정당화의 역할로써 중요하게 생각하고 있었으며, '수학적 발견', '지적 도전'과 같은 인식을 지니고 있다는 것을 알 수 있다.

둘째, 대수 영역에서, 영재학생들은 스스로 연역적 정당화(4수준)를 할 수 있을 것으로 기대하였고 실제 정당화 활동에서도 연역적 정당화의 빈도가 가장 높은 것으로 나타났다. 이러한 결과는 중학교 1학년 일반학생이 대수 문항에서 경험적 사례(2수준)에 의한 정당화를 가장 선호하며, 실제 정당화 활동에서도 경험적 정당화의 비율이 가장 높게 나타났다는 김정하(2011)의 연구와 대비된다. 이를 통해서 영재학생은 상대적으로 연역적 정당화를 선호하는 경향을 보이며, 실제 정당화 활동에서도 높은 수준의 정당화 능력을 지녔음을 알 수 있다. 또한 자신이 수행한 정당화의 만족도에 있어서 연역적 정당화를 수행한 영재학생은 대체로 만족함을 보였지만, 연역적 정당화를 선호하면서 경험적 증거를 제시한 소수의 영재학생들은 자신의 정당화에 불만족하는 결과를 나타냈다. 불만족의 이유는 수학적 문자와 기호를 사용하여 연역적 정당화를 하지 못했기 때문이었다. 또한 선우진·황우형(2016)의 연구에서, 일상적 언어사용을 통한 단순 연역적 정당화를 선호하는 초등 영재학생과 비교했을 때, 중학교 영재학생은 자신의 주장을 수학적 기호를 사용하여 연역적으로 추론하는 능력이 뛰어남을 볼 수 있었다. 그러나 영재학생 중에는 경험적 정당화를 선호하며 경험적 정당화에 만족하는 학생도 상당수 존재함을 확인하였다. 이 학생에게는 경험적 사례의 한계와 보다 일반성을 나타내는 연역적 정당화의 필요성을 인식시킬 필요가 있다. 이상의 대수 영역 연구 결과를 통해서 영재 학생의 정당화 수준을 향상시키고 자신의 정당화에 대한 기대를 충족시키기 위해서는 대수적 번역 능력을 길러서 경험적 사례의 유용성을 바탕으로 형식적이고 연역적인 정당화의 수준으로 향상시킬 필요가 있다.

셋째, 기하 영역에서, 영재학생들은 연역적 정당화(4수준)를 할 것으로 기대하였고 실제 정당화에서도 정당화를 완성한 답안 중에는 연역적 정당화(4수준)의 비율이 대체로 높게 나타났다. 그러나 대수 문항과는 달리 무응답 또는 인식불가로 보이는 답안이 많았다. 학생들은 기하 문항에서 연역적 정당화를 해야 한다는 인식을 지님과 동시에 연역적 정당화에 성공한 경우에 자신의 정당화에 만족하였지만 연역적 정당화를 시도하지 못하는 경우에는 정당화를 포기하였고 자신의 정당화에 만족하지 않았다. 이와 같은 결과는 기하 영역의 정당화 지도에서 연역적이고 종합적인 방식만을 강조할 것이 아니라 분석적인 사고방식으로 정당화를 구성하고 경험적인 정당화 과정을 거쳐 연역적인 추론으로 발전할 수 있도록 지도할 필요가 있음을 시사한다.

한편, 대수 문항과 기하 문항의 정당화를 비교했을 때, 영재학생들은 대체로 검사지에 제시된 기하 문항에서 더욱 저조한 결과를 나타냈다. 이러한 결과는 Healey와 Hoyles(1998)의 연구와 유사한 결과를 보이는데, 이 연구에서 성취도가 높은 상위수준의 10학년 학생을 대상으로 증명 성취 수준을 조사한 결과 대부분의 학생은 증명의 성취에서 낮은 수준을 보였으며 대수 영역보다 기하 영역에서 더욱 저조한 결과를 보였다고 하였다. 이와 함께 학생들에게 익숙하지 않은 증명 형식은 그들의 정당화 능력 향상에 방해가 되므로 증명 과정의 이해와 의미에 초점을 둔 수업이 필요함을 강조하였다. 대수와 기하 문항의 정당화 과정에서 또 다른 차이점은 대수 문항의 정당화를 시도할 때는 몇 개의 예를 관찰하고 이를 통해서 문자를 이용한 연역적 정당화로 발전시키는 모습을 볼 수 있었지만 기하 문항에서는 그러한 사례가 매우 적게 나타났다. 다시 말해 기하 영역의 정당화를 시도할 때는 접근하기 쉬운 특정 도형의 사례를 떠올리지 않고 연역적이고 종합적으로 추론하려는 습관을 갖고 있음을 확인할 수 있었다. 그러나 연역적 정당화만이 바람직하다고 생각하는 인식은 정당화를 포기하는 결과를 초래할 수도 있다. 비형식적이고 덜 정확한 논증을 실제적인 수학적 증명이라고 말한 Hersh(1997)의 주장과 같이 다소 포괄적인 의미의 수학적 정당화의 필요성을 영재학생이 느끼도록 함으로써 증명을 포기하는 것을 방지할 수 있다. 또한 엄밀한 증명이 아닌 이해를 목적으로 명제와 관련된 그림을 그리고 그 그림을 분석하는 지각적 증명 스키마를 활용하여 연역적 증명으로 발전시켜 나아갈 필요가 있다 (Harel & Sowder, 1998).

넷째, 영재학생들은 수학적 기호와 문자를 적절히 사용하여 주어진 명제를 대수적으로 표현하는 능

력과 기하 문항에서 개념적 지식과 절차적 지식을 연관시키며 정당화하는 능력, 풍부한 수학적 배경 지식을 활용하여 정당화의 추론 과정을 생략하려는 습관을 보여주기도 했다. 또한 구체적 예로부터 연역적 정당화로 발전시키는 의미론적 추론을 하는 경우도 다수 있었다. 이러한 뛰어난 정당화 능력을 보여준 반면, 연역적 정당화를 완성하고도 몇 개의 숫자를 대입하여 결과를 다시 확인해 보며 자신이 완성한 연역적 정당화의 힘을 믿지 못하는 사례를 볼 수 있었다. 또한 명제의 가정과 결론을 혼동하며 일반적으로 범하는 오류를 영재학생에게서도 볼 수 있었다.

마지막으로 본 연구에서는 다음과 같은 제한점을 지니고 있기에 이를 보완하여 보다 신뢰도가 높은 연구 결과가 도출될 수 있도록 다음과 같이 제언하고자 한다. 본 연구는 영재학생들의 수학적 정당화에 대한 인식과 정당화의 특성을 조사하기 위하여 한 지역의 특정 대학교 부설 영재교육원에 소속된 영재학생을 대상으로 연구 결과를 도출하였다. 연구 대상자의 규모와 검사 문항을 확대한다면 좀 더 일반적이고 구체적인 연구 결과를 얻을 수 있을 것이다. 그리고 연구 대상자에게 심층면담을 실시했다면 정당화 유형에 대한 인식과 정당화 결과의 인과관계를 좀 더 명확하게 얻을 수 있을 것이다. 또한 특정 집단인 수학 영재학생의 차별화된 정당화 특징을 확인하기 위해서 일반학생과 영재학생을 동시에 연구 대상자로 포함하고 동일한 문항에 대하여 정당화의 결과를 비교한다면 영재학생들의 정당화 활동에서 두드러지는 특성을 보다 구체적으로 파악할 수 있을 것이다.

참고문헌

교육부 (2015). 74호 **2015 수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8].

교육인적자원부 (2007). **2007년 개정 수학과 교육과정**. 교육인적자원부 제 2007-79호 [별책 8].

김미향 (2019). **고등학생의 증명에 대한 인식 및 증명 수행의 실제**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

정영우·김부윤 (2014). 기하 증명에서의 대표성에 관한 연구. **수학교육학연구** 25(2), 225-240.

김정하 (2010). **초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구**. 이화여자대학교 대학원 박사학위 논문.

김정하 (2011). 초등학생과 중학생들의 수학적 정당화에 대한 인식과 단계에 관한 실태 연구. **한국초등수학교육학회지**. 15(2), 417-435.

김지원 (2004). 한 수학영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례연구. **수학교육학연구** 제14권 제1호.

나귀수 (1997a). 기하 개념의 이해와 적용에 관한 소고, **수학교육학연구** 7(2), 349-358.

나귀수 (1997b). 중학교 2학년 기하 증명 수업 분석, **수학교육학연구** 7(2), 293-302.

서동엽 (1999). 중학교 학생의 증명 능력 분석. **수학교육학연구** 9(1), (1999): 183-203.

선우진·황우형 (2016). **초등 수학영재와 일반학생의 수학적 정당화 특성 비교에 관한 연구**. 고려대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

송상헌 (1998). **수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

송상헌·정영옥·장혜원 (2006). 초등학교 6학년 수학 영재들의 기하 과제 증명에 관한 사례 분석. **수학교육학연구**, 16(1), 327-344.

송상헌·이경화·최남광 (2007). 수학 영재들의 아르키메데스 다면체 탐구과정(정당화 과정과 표현과정 중심으로). **학교수학**, 9(4), 487-506.

이지현 (2011). 일상적 정의에서 수학적 정의로의 이행, **수학교육** 50(4), 429-40.

조경희 (2003). **학생들의 수학적 정당화 유형과 논쟁 구조의 관계**. 이화여자대학교 수학교육과 석사 학위 논문.

조완영·권성룡 (2001). 학교 수학에서의 '증명'. **수학교육학연구**, 11(2), 385-402.

허지연 (2006). **초등영재들의 정당화 유형에 관한 사례연구**. 경인교육대학교 수학교육과 석사 학위 논문.

Balacheff, N. (1987). Proving processes and situations for validation. *Educational Studies in Mathematics* volume 18, pages 147–176.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children*. London: Hodder & Stoughton. pp.216-235.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, pp.23-40.

Chazan, D. (1988). 'Proof and measurement: An unexpected misconception', in A. Borbas (ed.), *Proceedings of the Twelfth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Veszprem, Hungary, pp. 207-214.

CadwalladerOlsker T. (2011). What do we mean by mathematical proof?, *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1). 2011. 1-60.

Common Core State Standards Initative(2010). *Common Core State Standards for Mathematics*(CCSSM).

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics, *Pythagoras*, 24, 17-24.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Student′ proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in Collegiate Mathematics Education* III 7, 234-282.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof, In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Healey, L., & Hoyles, C. (1998). Justifying and proving in school mathematics. Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK. University of London: *Research Report Mathematical Sciences*, Institute of Education.

Healey, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, Really?* Oxford University Press, New York.

Krutestki, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schol children*. The Univ. of Chicago Pres.

Lee, K. H. (2005). Mathematically Gifted Students′ Geometrical Reasoning and Informal Prof, In Helen L.C. & Jil, L.V. (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol3. p. 241-248).

Marrades & Gutiérrez (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, (Vol 44, pages 87–125).

McCrone, S, S., & Martin, T. S. (2004). Assessing high school students' understanding of geometric proof. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 4, 223-242.

Nakahara, T. (1994). Study of the Representotional system in Mathematics Education, *Hiroshima journal of Mathematics Education*, 2, 59-67.

NCTM. (2000). *Principle and standard for schol mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1996). Justifcation in the Mathematics classroom : A study of prospective elmentary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 3-31.

A Study on the Recognition and Characteristics of Mathematical Justification for Gifted Students in Middle School Mathematics

Hong, Yong-Suk[3) · Son, Hong-Chan[4)

Abstract

This study identified the meaning of mathematical justification and its characteristics for middle school math gifted students. 17 middle school math gifted students participated in questionnaires and written exams. Results show that the gifted students recognized justification in various meanings such as proof, systematization, discovery, intellectual challenge of mathematical justification, and the preference for deductive justification. As a result of justification exams, there was a difference in algebra and geometry. While there were many deductive justifications in both algebra and geometry questionnaires, the difference exists in empirical justifications: there were many empirical justifications in algebra, but there were few in geometry questions. When deductive justification was completed, the students showed satisfaction with their own justification. However, they showed dissatisfaction when they could not deductively justify the generality of the proposition using mathematical symbols. From the results of the study, it was found that justification education that can improve algebraic translation ability is necessary so that gifted students can realize the limitations and usefulness of empirical reasoning and make deductive justification.

Key Words : gifted students in mathematics, mathematical justification, recognition of mathematical justification, characteristics of mathematical justification

Received August 31, 2021
Revised September 17, 2021
Accepted September 21, 2021

---

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97E50

3) Graduate School, Jeonbuk National University (youngstein@naver.com)
4) Jeonbuk National University (hcson@jbnu.ac.kr), Corresponding Author

〈부록〉 학생설문지

※ 1번 문항은 수학적 정당화의 필요성에 대한 설문 문항이다.

1. 수학적 추측을 정당화하는 과정이 왜 필요하다고 생각하는지 다음 중 2가지를 고르시오.

① 자신의 해결방법이나 답이 참임을 스스로 확인할 수 있다.
② 다른 사람이 나의 해결방법을 이해할 수 있도록 자신의 수학적 논리를 설득시킬 수 있다.
③ 수학적 지식을 여러 가지 정의, 정리 등으로 체계화할 수 있다.
④ 수학적 정당화 활동을 통해서 새로운 수학적 개념을 발견할 수 있다.
⑤ 수학적 정당화 활동을 통해서 만족감과 성취감을 느낄 수 있다.
⑥ 위의 보기 이외의 기타 생각을 서술하시오.

※ 2번 문항은 대수 영역에서 수학적 정당화 유형의 인식에 관한 설문 문항이다.

2. “임의의 두 홀수에 대하여 두 홀수의 합과 차의 곱은 4의 배수이다.”이 참이라는 것을 자신이 직접 정당화한다고 가정할 때, 다음 중 자신이 기대하는 정당화라고 생각하는 것을 한 가지만 고르시오.

①$(3+1)(3-1)=8$, $(5+3)(5-3)=16$, $(7+5)(7-5)=24$와 같은 많은 예가 존재한다.
② 참고서의 설명을 보았거나 수업시간에 선생님의 설명을 들었다.
③ 예를 들어, 두 홀수 7과 5는 2로 나눌 때 1이 남는다. 이 때, 두 수의 합 12와 차 2는 각각 2로 나눌 수 있다. 그러므로 두 수의 합과 차의 곱은 4의 배수가 된다. 다른 임의의 두 홀수에 대해서도 마찬가지다.
④ 임의의 두 홀수를 m,n이라 할 때, $m=2p+1$, $n=2q+1$(p,q는 자연수)라 하자. 이때 두 수의 합과 차의 곱은

$$(m+n)(m-n)=(2p+2q+2)(2p-2q)=4(p+q+1)(p-q)$$

이므로 4의 배수이다.

※ 3번 문항은 기하 영역에서 수학적 정당화 유형의 인식에 관한 설문 문항이다.

3. 다음의 명제 “사각형의 내각의 합은 360°이다.”이 참이라는 것을 자신이 직접 정당화한다고 가정할 때, 다음 중 자신이 기대하는 정당화라고 생각하는 것을 한 가지만 고르시오.

① 직사각형을 하나 그린 후 삼각형 2개로 나눈다. 삼각형 2개의 내각의 합은180° * 2=360° 즉 직사각형의 내각의 합은 360°이다. 모든 사각형은 이와 같으므로 다른 사각형은 조사하지 않아도 된다.
② 사각형의 여러 종류가 있으므로 한 사각형만 조사해서는 안 된다. 여러 종류의 사각형에서 4개의 각을 모두 재본다.
③ 지난 수업 시간 선생님께서 사각형의 내각의 크기의 합은 360°라고 말씀하셨으니 당연히 사각형의 내각의 크기의 합은 360°이다.
④ 임의의 사각형 ABCD 에서 대각선 BD 를 연결하면 두 삼각형 ABD 와 삼각형 BDC 로 나누

어진다. □ABCD 의 내각의 합=(∠ABD+∠ADB+∠BAD)+(∠CDB+∠CBD+∠BCD) =180°+180°=360°

※ 4번에서 6번 문항은 대수 영역의 수학적 정당화의 실제에 관한 문항이다.

4. 모든 홀수의 제곱을 8로 나누면 1이 남는다.

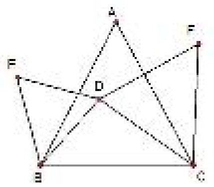
5. 연속하는 세 자연수의 곱은 6의 배수이다

6. 차이가 2인 두 자연수의 곱이 2의 배수이면 그 수는 4의 배수이다.

※ 7번에서 9번 문항은 기하 영역의 수학적 정당화의 실제에 관한 문항이다.

7. 임의의 △ABC의 둘레의 길이를 l, 넓이를 S라 하자. △ABC에서 내접원의 반지름 길이를 r이라 할 때, $r=\frac{2S}{l}$ 이다.

8. 정삼각형 △ABC 의 내부에 임의의 한 점 D를 잡고, $\overline{BD}$와 $\overline{CD}$를 각각 한 변으로 하는 정삼각형을 그린다. 이때, △ABC 밖의 점을 각각 E,F 라 한다. 그렇다면 □AEDF는 평행사변형임



9. n각형의 대각선의 개수는 $\frac{n(n-3)}{2}$ 이다.

(4번 문항에 딸린 하위 문항 예)

4-1. 2번 문항에서 선택한 정당화 수준을 고려할 때, 4번 문항에서 수행한 정당화 수준은 얼마나 만족을 하는지요?

① 만족한다.
② 보통이다.
③ 만족하지 않는다.

4-2. 자신이 기대한 정당화 수준에 대하여 만족하지 않는다면 그 이유는 무엇인가?

① 주어진 문제를 이해하지 못하였다.
② 문제는 이해했지만 수학적 문자와 기호를 사용하여 표현하지 못하였다.
③ 특정한 경우에 대하여 성립함을 보였지만 일반적인 경우에 대하여 정당화를 구성하지 못하였다.
④ 문제를 해결하기 위한 전략적 추론을 하지 못하여 정당화를 못하였다.
⑤ 위의 보기 이외의 기타 생각을 서술하시오.