

# 이차원 탄성 정적 문제를 위한 유한요소법과 경계요소법의 근사 결합 방법

## Approximately Coupled Method of Finite Element Method and Boundary Element Method for Two-Dimensional Elasto-static Problem

송명관<sup>1\*</sup>

Myung-Kwan Song<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Member, Principal Research Engineer, Ph.D, P.E, PMP, Technology Development Center, Saman Corporation, Hanmac Building, 554 Ogeum-ro, Songpa-gu, Seoul 05774, Republic of Korea

### ABSTRACT

In this paper, the approximately coupled method of finite element method and boundary element method to obtain efficient and accurate analysis results is proposed for a two-dimensional elasto-static problem with a geometrically abruptly changing part. As the finite element of a two-dimensional problem, three-node and four-node plane stress element is applied, and as the boundary element of a two-dimensional problem, three-node boundary element is applied. In the modeling stage, firstly, an entire analysis target object is modeled as finite elements, and then a geometrically abruptly changing part is modeled as boundary elements. The boundary element is defined using the nodes defined for modeling finite elements. In the analysis stage, finite element analysis is firstly performed on a entire analysis target object, and boundary element analysis is automatically performed afterwards. As for the boundary conditions at boundary element analysis, displacement conditions and stress conditions, which are the results of finite element analysis, are applied. As a numerical example, the analysis results for a two-dimensional elasto-static problem, a plate with a crack, are presented and investigated.

### 요 지

본 논문에서는 유한요소법과 경계요소법을 결합하여 기하학적으로 급변 부위가 있는 이차원 탄성 정적 문제에 대하여 효율적이고 정확한 해석 결과를 얻기 위한 유한요소법과 경계요소법의 근사 결합 방법을 제시한다. 이차원 문제의 유한요소로서는 3절점, 4절점 평면응력 요소를 적용하고, 이차원 문제의 경계요소로는 3절점 경계요소를 적용한다. 모델링 단계에서는 우선 전체 해석 대상을 유한요소로 모델링한 후에 기하학적 급변 부위를 경계요소로 모델링 하는데, 유한요소의 모델링을 위하여 정의된 절점을 이용하여 경계요소를 정의한다. 해석 단계에서는 전체 해석 대상에 대하여 유한요소 해석을 우선적으로 수행하고, 이후에 경계요소 해석을 자동으로 수행하는데, 경계부에서의 경계조건은 유한요소 해석 결과인 변위 조건과 응력 조건을 적용한다. 수치예제로서 이차원 탄성 정적 문제인 균열이 있는 평판에 대한 해석 결과를 제시하고 고찰한다.

**Keywords** : Two-dimensional elasto-static, Finite element, Boundary element, Coupled method

## 1. 서 론

기하학적 형상이나 하중 상태가 점진적으로 변화하지 않고 급격히 변화하는 경우에 유한요소해석을 통하여 정

확한 해석 결과를 얻고자 할 경우에 그러한 응력 집중 부분에 대하여 유한요소 세분화를 할 필요가 있으며, 전처리 기나 적응적 체분 세분화의 기능을 사용하여 모델링하여야 한다. 이러한 유한요소 세분화가 필요한 영역에 대한 요소의 세분화가 유한요소에 비해 상대적으로 용이한 2차원 탄성 정적문제에 있어서 유한요소해석을 통하여 해석을 수행할 경우에 각 절점에서의 변위를 구할 수 있으며, 요소 내부의 가우스 적분점에서 응력을 구할 수 있다. 이

Received 6 Aug. 2021, Revised 25 Sep. 2021, Accepted 28 Sep. 2021

\*Corresponding author

Tel. Fax: +82-2-408-1925  
E-mail address: megalith@daum.net (M.K. Song)

러한 응력은 균열이 있는 평판 해석 문제의 경우에 주로 절점에 위치하는 균열 선단에서의 응력을 직접 구하지 못하며, 절점으로 외삽하여 구하게 된다. 이러한 외삽을 대체할 수 있는 방법 중에 한가지 방법으로 경계요소와의 근사 결합 방법이 제시될 수 있다. 유한요소법과 경계요소법을 결합하여 변위와 응력 해석을 수행할 때 응력이 집중되는 곳이나 기하학적 형상이 복잡하여 전처리 작업이 복잡한 경우에는 경계요소법을 사용하고, 재질이 이방성이고 비선형인 일부영역을 유한요소법으로 처리한다면 어느 한 방법만으로 사용하는 것보다 좋은 결과를 얻을 수 있을 것이다.

유한요소법과 경계요소법의 결합 방법은 이미 많은 연구자에 의해서 개발되었으며, 여러 가지 결합 방법이 개발되었다. Beer(1983)는 기존의 유한요소 코드에 경계요소를 구현하는 새로운 방법에 대하여 제안하였으며, 유한요소법, 경계요소법, 유한요소법과 경계요소법의 결합에 의한 방법들에 대하여 효율성을 검토하였다. Belytschko et al.(1989)는 변분법을 이용한 유한요소와 경계요소의 결합 방법을 제안하였다. Yazdchi et al.(1999)은 구조물과 근접 지반 영역은 유한요소로 모델링하고, 반무한지반 영역은 경계요소로 모델링하여 두 방법을 결합한 지반-구조물 상호작용 해석 방법을 제안하였다. El-Gebeily et al.(2002)은 3가지의 영역 분리 결합 방법을 제안하였으며, 이에 대한 해의 수렴성을 검토하였다. Aour et al.(2007)은 파괴역학에서의 균열 문제의 해석을 위하여 유한요소법과 경계요소법의 결합에 있어서 경계요소들에 대한 슈퍼요소 개념을 적용하여 유한요소와 경계요소의 인터페이스에서의 변수를 결합시키는 방법을 제안하였다. Chidgzy et al.(2008)은 경계요소와 비례화 유한요소의 결합 방법에 대한 알고리즘을 제안하였다. Boumaiza and Aour(2014)은 비선형 탄소성 해석을 위한 유한요소법과 경계요소법의 결합 방법을 제시하였는데, 소성영역은 유한요소를 적용하고, 탄성영역은 경계요소법을 적용하며, 해석 결과가 수렴할 때까지 인터페이스에서의 변수를 업데이트하는 방법이다. Stephan(2017)은 이제까지 제안된 다양한 유한요소법과 경계요소법의 결합 방법에 대하여 검토하였다. 유한요소와 경계요소는 각각 장점들을 가지고 있으며, 최근 연구들에서는 이러한 장점들을 활용하여 다양한 상호작용 문제 있어서 유한요소법과 경계요소법을 결합한 방법들을 제안하였다. Galvin et al.(2010)은 철도 진동 예측을 위해 유한요소법과 경계요소법을 결합한 2.5차원 해석 방법을

제안하였는데, 반무한 지반의 경계적분방정식의 정식화에 있어서 그린(Green) 함수를 이용하였고, 지반 구조물 동적 상호작용 운동방정식을 변분법을 이용하여 정식화하였다. Kim et al.(2013)은 파랑하중을 받는 선박의 유탄성해석에 있어서 유한요소법과 경계요소법의 완전 결합된 시간이력 해석 방법을 제안하였는데, 유체는 B-스플라인 랭킨 패벌 방법으로 모델링하고, 선박은 유한요소로 모델링하여 유체 구조물 상호작용 해석이 가능한 방법이다. Vasilev et al.(2015)은 지중구조물의 모델링은 유한요소로 모델링하고, 반무한 지반은 경계요소로 모델링하여 지반 구조물 상호작용 해석 방법을 제안하였는데, 반무한 지반의 경계요소들의 자유도를 응축하여, ANSYS 소프트웨어의 매크로 유한요소로 모델링하는 방법이다. Zhao et al.(2019)은 외부 음향과 구조 상호작용 시스템의 위상 최적화를 위한 유한요소법과 경계요소법의 결합의 정식화를 제안하였는데, 음향 영역은 경계요소로 모델링하고, 구조물은 유한요소로 모델링하고, AVM(Adjoint variable method)을 통하여 목적함수의 민감도 해석을 수행하고, FMM(Fast multipole method)을 경계요소의 응답해석에 적용하였다.

기존의 연구들에서 유한요소법과 경계요소법을 결합하는 여러 가지 정식화 방법들이 제안되었고, 이를 이용하여 다양한 상호작용 해석에 적용할 수 있음을 보여주었다. 이러한 정식화 방법들은 유한요소법과 경계요소법의 완전 결합 방법으로서 유한요소와 경계요소의 인터페이스, 즉, 경계부에서의 물리적인 적합성을 만족시킬 수 있도록 복잡한 정식화 방법이 제시되어, 연속체 역학, 변분법 등에 대한 깊이 있는 이해가 필요하였으며, 이러한 분야에 대한 지식이 없는 일반 연구자, 엔지니어들이 유한요소법과 경계요소법의 결합 방법을 이해하고 사용하기에 어려운 점이 있었다.

따라서, 본 연구에서는 유한요소와 경계요소를 결합하는 방법으로서 엄밀한 이론에 의한 복잡한 정식화가 아닌 효율적이고 실용적인 정식화 방법을 제안하고자 한다. 수치 예제로는 간단한 형태의 균열을 가진 평판에 대하여 수치 해석을 수행하였으며, 균열선단의 좌측에서 우측으로의 변위와 응력에 대한 해석 결과를 고찰하였다.

## 2. 본 론

이 장에서는 2차원 탄성 정적 해석을 위한 유한요소법과 경계요소법의 근사 결합 방법의 수식화 과정을 제안한

다. 먼저, 이러한 근사 결합을 위하여 2차원 탄성문제에 있어서의 유한요소법과 경계요소법을 정식화하고, 근사적 결합의 개념에 대하여 제안한다. 2차원 문제는 평면변형률과 평면응력 상태의 해석문제에 해당하며, 본 연구에서는 평면응력 상태에 대하여 국한하여 제안한다.

## 2.1 2차원 탄성 정적해석에서의 유한요소법

2차원 탄성 정적 해석 중에서 평면응력 문제의 해석을 위하여 4절점 등매개변수의 정식화를 적용한다. 무차원 좌표계로부터 4절점 평면응력 요소의 기하학적 형태와 요소내 변위를 표현하는 데 사용하는 형상함수는 다음 식 (1)과 같다.

$$\langle N_c \rangle = \langle N_1 N_2 N_3 N_4 \rangle \quad (1)$$

여기서,  $N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$ ,  $N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$ ,  $N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$ ,  $N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$ 이다.

변형률( $\epsilon$ )과 변위( $u$ )의 관계는 다음과 같다.

$$\{\epsilon\} = [B] \{u\} \quad (2)$$

평면응력 요소의 응력( $\sigma$ )과 변형률( $\epsilon$ )의 관계는 다음과 같다.

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad (3)$$

두께방향으로 단위 길이를 갖는 요소의 미소면적은  $dxdy = |J|d\xi d\eta$ 로 표현할 수 있으므로 요소 강성행렬  $[K_e]$ 은 일반적인 강성행렬의 정식화 과정을 거치면 다음과 같이 쓸 수 있다(Hinton and Owen, 1977).

$$[K_e] = \int_A [B]^T [E] [B] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] |J| d\xi d\eta \quad (4)$$

전체 강성행렬  $[K_A]$ 은 요소 강성행렬  $[K_e]$ 을 조합하여 구성할 수 있다. 따라서, 정적해석에서의 평형방정식은 다음과 같이 선형방정식으로 구성된다.

$$[K_A] \{u\} = \{P\} \quad (5)$$

위의 선형방정식에 경계조건을 적용함으로써 유일한 해를 구할 수 있다(Cook et al., 1989).

## 2.2 2차원 탄성 정적해석에서의 경계요소법

2차원 탄성해석 중에서 평면응력 문제의 해석을 위하여 3절점 등매개변수의 정식화를 적용한다. 무차원 좌표계로부터 4절점 평면응력요소의 기하학적 형태와 요소내 변위를 근사적으로 표현하는 데 사용하는 형상함수는 다음 식 (6)과 같다.

$$\langle N_c \rangle = \langle N_1 N_2 N_3 \rangle \quad (6)$$

여기서,  $N_1 = (2\xi-1)(\xi-1)$ ,  $N_2 = 4\xi(1-\xi)$ ,  $N_3 = \xi(2\xi-1)$ 이다.

베티(Betti)의 상반법칙과 변위에 대한 소말리아나 아이덴티티(Somigliana Identity)를 이용하여 경계점 Q에서의 트랙션과 변위에 의해서 발생하는 내부점 p에서의 변위에 대한 적분 방정식을 유도할 수 있다. 경계적분방정식(Boundary integral equation)은 국지좌표계( $\xi$ )에서 다음과 같이 유도된다(Brebbia et al., 1984).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{xx}(p) & C_{xy}(p) \\ C_{yx}(p) & C_{yy}(p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x(p) \\ u_y(p) \end{Bmatrix} \\ & + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} T_{xx}(p, Q) & T_{xy}(p, Q) \\ T_{yx}(p, Q) & T_{yy}(p, Q) \end{bmatrix} N_c(\xi) \mathcal{J}(\xi) d\xi \begin{Bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{Bmatrix} \\ & = \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} U_{xx}(p, Q) & U_{xy}(p, Q) \\ U_{yx}(p, Q) & U_{yy}(p, Q) \end{bmatrix} N_c(\xi) \mathcal{J}(\xi) d\xi \begin{Bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

즉,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{xx}(p) & C_{xy}(p) \\ C_{yx}(p) & C_{yy}(p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x(p) \\ u_y(p) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^m \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix}_{m,c} \begin{Bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{Bmatrix} \\ & = \sum_{m=1}^m \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

각 절점을 하중 작용점 p로 잡고 위에서의 적분을 수행하면 하나의 선형대수 방정식을 구할 수 있다.  $C_{ij}(p)$ 는  $[A]$  행렬의 대각행렬 성분에만 기여하며, 행렬  $[A]$ ,  $[B]$ 는  $2 \times 2$  행렬이다(Becker, 1992).

$$\begin{bmatrix} [A]_{11} & [A]_{12} & \cdots \\ [A]_{21} & & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B]_{11} & [B]_{12} & \cdots \\ [B]_{21} & & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{t\}_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (9)$$

즉,

$$[A]\{x\} = [B]\{y\} \quad (10)$$

여기서,

$$[A]_{ij} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix}, [B]_{ij} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\{u\}_i = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \{t\}_i = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} \quad (12)$$

### 2.3 근사 결합 방법(Approximately coupled method)

기존의 유한요소법과 경계요소법은 완전 결합 방법(Fully coupled method)으로서 유한요소와 경계요소의 인터페이스에서 변분법을 적용하거나, 연속체의 적합 조건을 만족하도록 복잡한 정식화를 유도하였다. 본 연구에서는 유한요소법과 경계요소법의 근사 결합 방법으로서 복잡합 정식화 과정이 필요없고, 유한요소법과 경계요소법

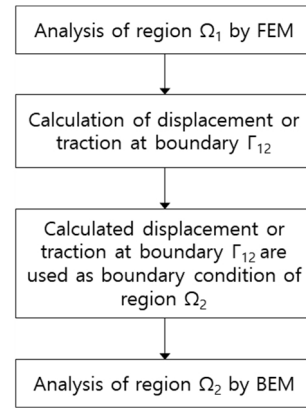


Fig. 1. Flowchart of approximately coupled method

에 대한 선행적인 이해가 있다면 간단하고 효율적이고 실용적인 방법을 제안한다.

Fig. 1에서는 본 연구에서 제안하는 근사 결합 방법의 흐름도를 보여주고 있다. Fig. 2에서는 이러한 근사 결합 방법에 대해 구체적인 단계별 모델링과 해석 방법을 보여주고 있다. 근사 결합 방법의 단계는 크게 세 단계로 나눌 수 있다. 첫번째 단계에서는 Fig. 2(a)와 같이 해석 대상 전체에 대해 유한요소해석을 수행한다. 두번째 단계에서는 Fig. 2(b)와 같이 경계요소법으로 해석하고자 하는 영역과 유한요소법에 의하여 해석을 수행한 영역이 접하는 경계에서의 변위와 응력을 계산한다. 세 번째 단계에서는

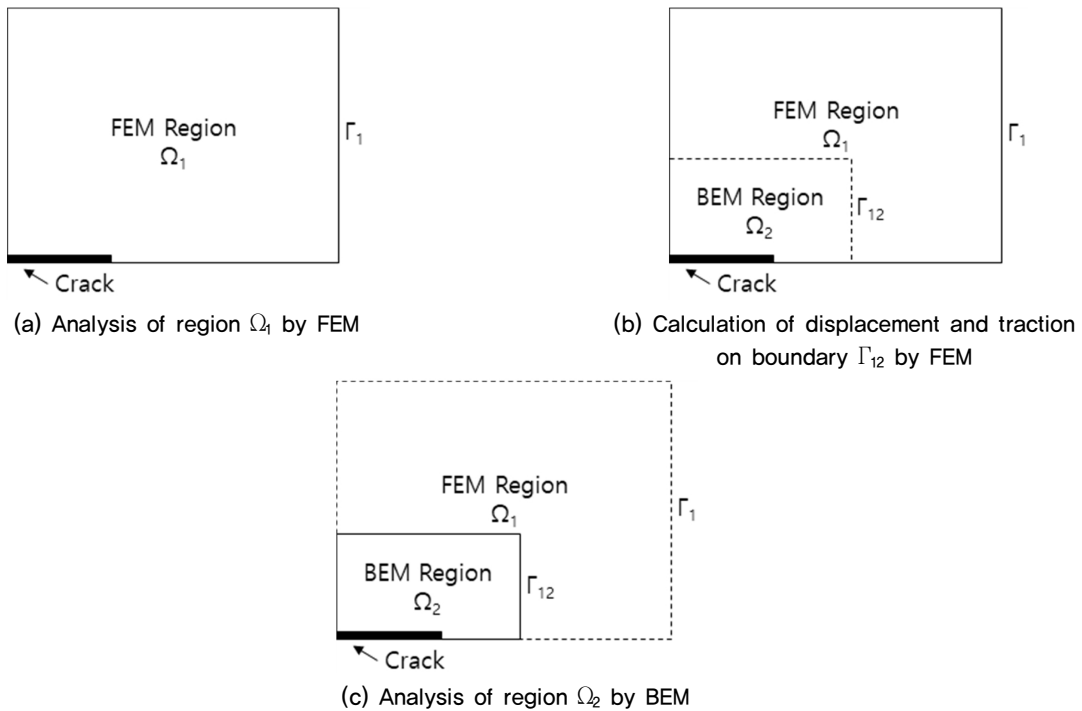


Fig. 2. The concept of approximately coupled method with FEM and BEM

Fig. 2(c)에서와 같이 경계에서 얻은 변위와 응력을 경계 요소 영역의 경계조건으로 입력하고 경계요소법에 의한 해석을 수행한다.

2차원 탄성 정적 문제에 있어서 방정식의 해를 구하기 위하여 표준적인 해석법(Solver)을 사용하여 식 (10)에서의 미지변수는 왼쪽으로, 규정값을 갖는 변수는 오른쪽으로 이동시키면 다음 식과 같은 방정식을 구성할 수 있다.

$$[A^*]\{x\} = [B^*]\{y\} \quad (13)$$

따라서,  $[A^*]\{x\} = \{C\}$ 가 되며 이러한 선형방정식을 풀면 구하고자 하는 유일한 해를 구할 수 있다.

## 2.4 수치 예제 및 고찰

본 연구에서 제안하는 유한요소법과 경계요소법의 근사 결합 방법을 검증하기 위하여 2차원 탄성 정적 문제에 대해 수치 예제를 수행하며, 그 결과를 고찰한다. 등분포하중을 받는 균열이 있는 평판에 대하여 유한요소해석만을 이용하여 해석한 결과와 유한요소법과 경계요소법의 근사 결합 방법을 이용하여 해석한 결과를 비교하고, 고찰한다.

### 2.4.1 균열을 가진 평판-1

본 수치예제는 충분한 수의 유한요소를 이용한 유한요소해석을 통하여 정확해에 근접한 해석 결과를 도출하고, 근사 결합 방법에 의한 해석 결과와 비교하여 근사 결합 방법에 의한 해석 결과가 정확한 해석 결과를 줄 수 있음을 검증하기 위하여 수행한다.

Fig. 3과 같이 균열이 있는 평판에 대해 유한요소해석을 먼저 수행하고, 유한요소법-경계요소법의 근사 결합 방법을 이용하여 해석한다. 균열선단의 좌측에서 우측으로 이동하면서 X-방향 변위, Y-방향 변위, X-방향 수직응력, Y-방향 수직응력, XY-방향 전단응력을 비교한다. 평판의 형상치수와 재료 물성치는 Table 1과 같다.

유한요소해석에 있어서는 Fig. 4(a)과 같이 모델링하며, 유한요소법-경계요소법 근사 결합 방법에서는 Fig. 4(b)와 같이 평판을 모델링한다. Fig. 4(a)에 보이는 바와 같이 정

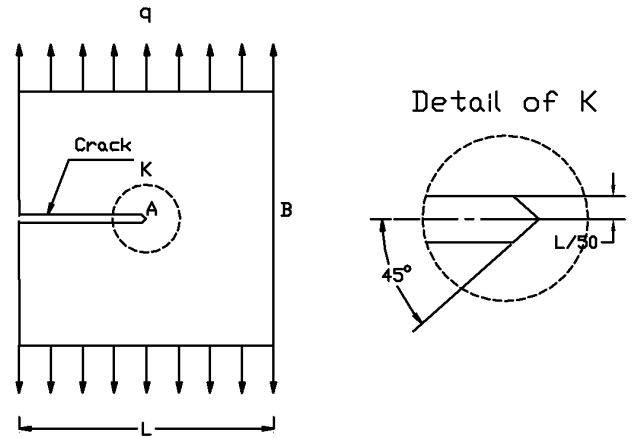
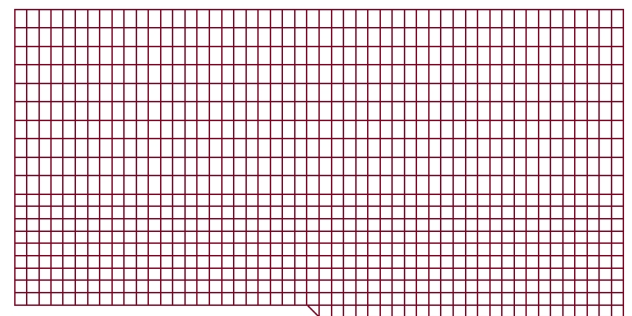
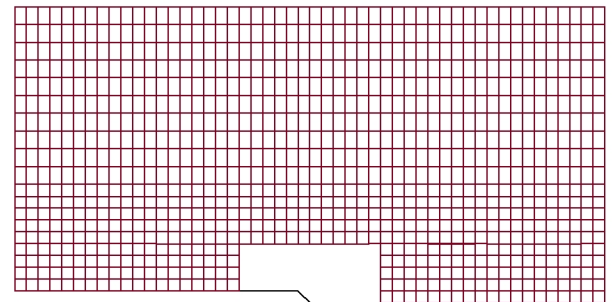


Fig. 3. Plate-1 with a crack



(a) FEM



(b) Approximately coupling method with FEM and BEM

Fig. 4. Mesh refinement of plate-1

확해에 근접하는 유한요소해석 결과를 얻기 위해서 평판 전체를 충분한 개수의 유한요소로 세분화하여 해석을 수행한다. Fig. 4(b)에 보이는 바와 같이 유한요소법과 경계요소법의 근사 결합 방법에서는 균열선단 부분 이외에는 Fig. 4(a)의 유한요소들을 그대로 이용하되 변위와 응력이 급격히 변화하는 균열선단 부분의 경계는 경계요소를 이용하여 모델링한다.

Table 1. Material properties of plate-1

Young's Modulus (E, MPa)	Poisson's ratio (ν)	Width (B, mm)	Length (L, mm)	Thickness (t, mm)	Uniform load (q, N/mm)
$2.2 \times 10^6$	0.2	20	20	1.0	1,000

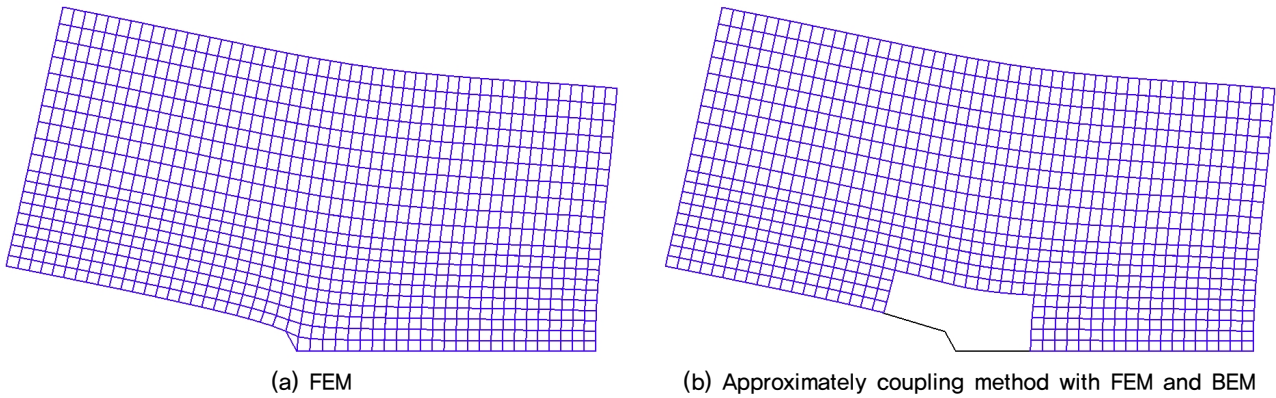


Fig. 5. Deformed shape of plate-1

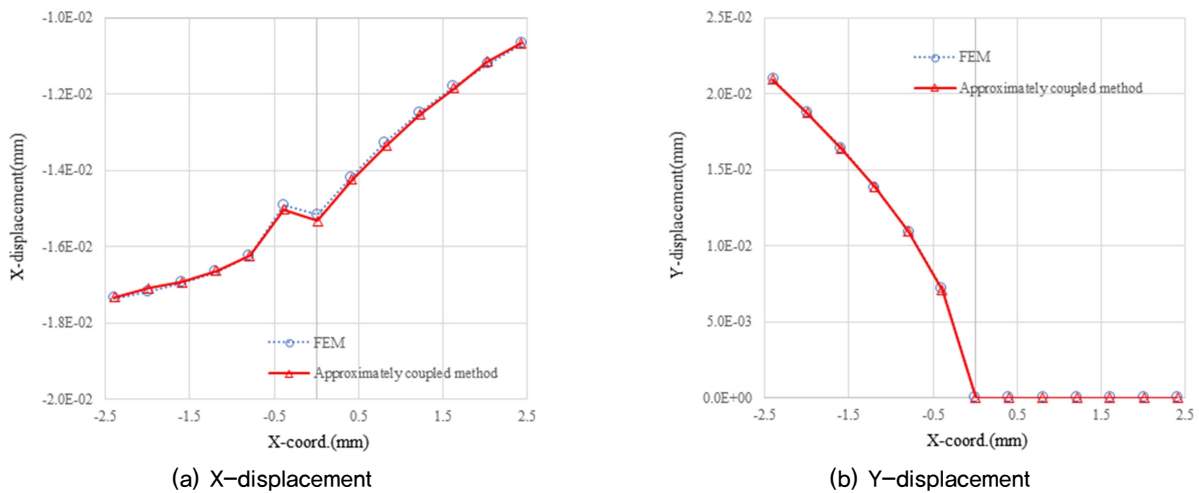


Fig. 6. Comparison of displacement results for plate-1

이와 같은 두 가지 해석모델들을 적용하여 유한요소해석과 유한요소법-경계요소법 근사 결합 방법의 해석을 수행한다. Fig. 5에서는 두 가지 해석 방법을 통하여 얻어진 변형 형상을 보여 주고 있다. Fig. 6에서는 변위를 비교하고 있는데, 두 가지 해석 방법에 의한 변위 해석 결과는 거의 동일한 해석 결과를 보여 주고 있음을 알 수 있다. 근사 결합 방법을 이용해서 균열 선단 부분을 경계요소만으로 모델링하여도 정확한 해석 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 유한요소해석에 의한 경우에 응력집중이 되는 국부 영역에 대해 요소를 세분화하여 정확한 결과를 얻을 수 있지만, 요소 세분화가 충분하지 않을 경우에는 정확한 결과를 얻을 수는 없다. 하지만, 전체 해석 영역에 대해서는 유한요소로 모델링을 하고, 응력집중이 되는 국부적인 영역은 경계요소로 모델링하는 방법을 통하여 정확한 해석 결과를 얻을 수 있고, 효율적인 해석이 가능함을 알 수 있다. Fig. 7에서는 응력 해석 결과를 비교하고 있는데, 전체적으로 유사한 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다. 두 가

지 해석 방법에 의한 응력해석 결과가 약간의 차이가 나는 이유는 유한요소해석의 경우에는 평면응력 요소의 중앙점에서의 응력을 나타내고 있고, 근사 결합 방법에서는 경계요소의 절점에서 응력을 나타내고 있기 때문이다. Fig. 7(c)에서의 XY-방향 전단응력이 균열선단(X=0인 점) 부위에서 해석 결과의 차이가 크게 나는 이유는 유한요소해석에 의한 해석 결과가 평면응력 요소의 중앙점에서의 전단응력을 보여주고 있는 동시에 삼각형 평면응력 요소의 요소좌표계에 대한 전단응력을 보여주고 있기 때문이다.

#### 2.4.2 균열을 가진 평판-2

본 수치예제는 소수의 유한요소를 이용한 유한요소해석을 통하여 부정확한 해석 결과를 도출하고, 경계만 경계요소로 세분화한 근사 결합 방법에 의한 해석 결과와 비교하여 근사 결합 방법에 의한 해석 결과가 더 정확한 해석 결과를 줄 수 있음을 보여주기 위하여 수행한다.

같이 기하학적으로 특이점이 있도록 형상을 모델링한

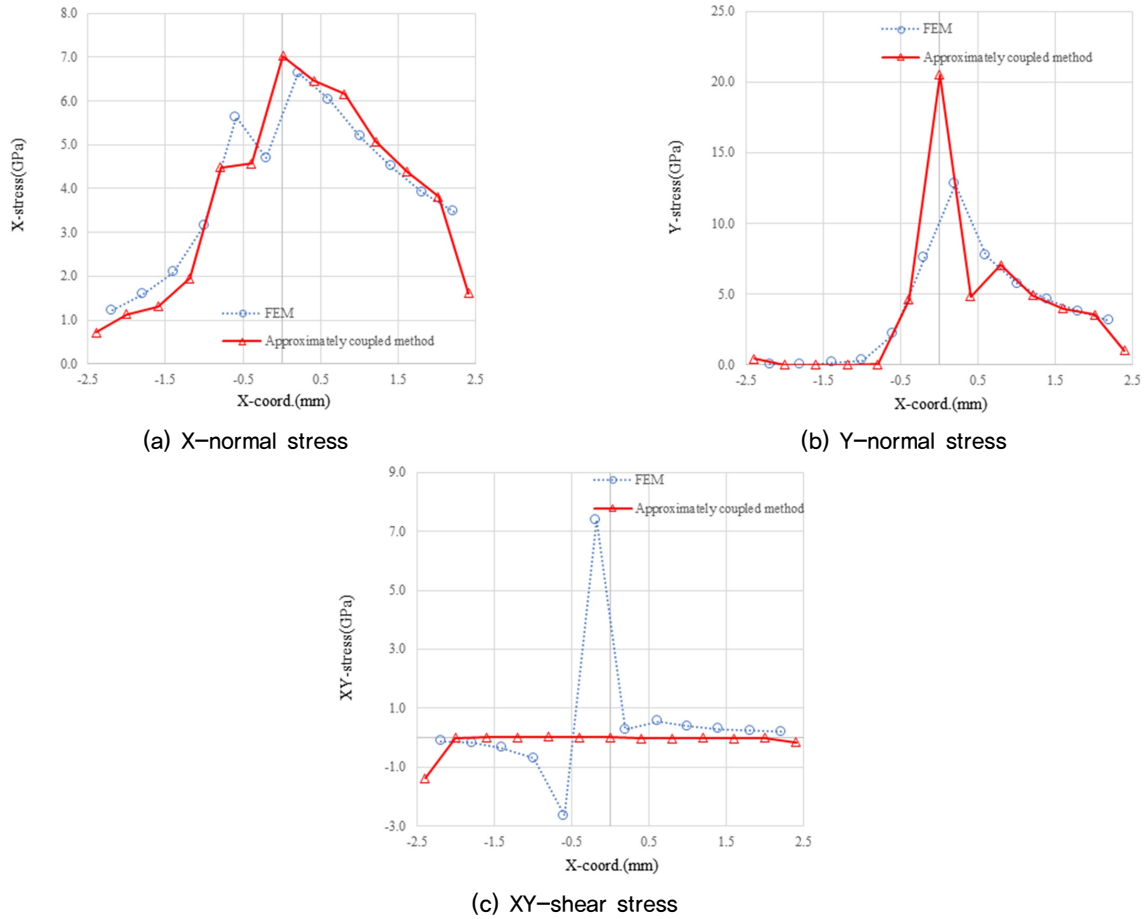


Fig. 7. Comparison of stress results for plate-1

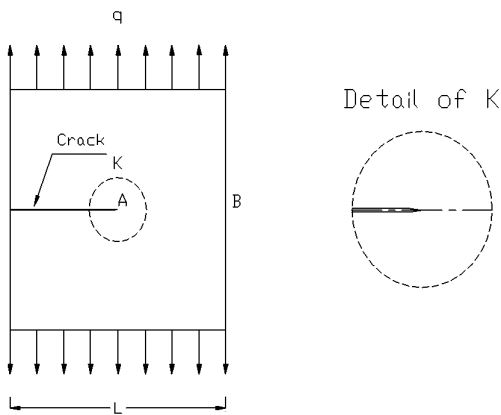


Fig. 8. Plate-2 with a crack

다. 균열선단의 좌측에서 우측으로 이동하면서 X-방향 변위, Y-방향 변위, X-방향 수직응력, Y-방향 수직응력, XY-

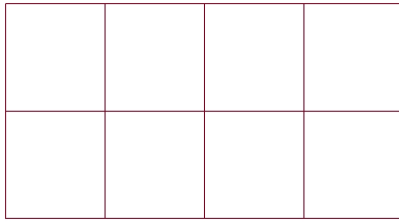
방향 전단응력을 비교한다.

유한요소해석에 있어서는 Fig. 9(a)과 같이 모델링하며, 유한요소법-경계요소법 근사 결합 방법에서는 Fig. 9(b)와 같이 평판을 모델링한다. 탄성 정적 해석에 있어서 응력 집중이 발생하는 균열선단에서의 응력을 정확히 해석하기 위해서는 요소 세분화가 필요하다. Fig. 9(a)에 보이는 바와 같이 정확하지 않은 유한요소해석 결과를 얻기 위해서 평판 전체를 소수의 유한요소로 모델링하여 해석을 수행한다. Fig. 9(b)에 보이는 바와 같이 유한요소법과 경계요소법의 근사 결합 방법에서는 균열선단 부분 이외에는 Fig. 9(a)의 유한요소들을 그대로 이용하되 변위와 응력이 급격히 변화하는 균열선단 부분의 경계는 경계요소를 이용하여 세분화하여 모델링한다.

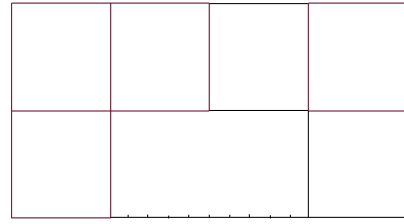
유한요소해석에 있어서는 Fig. 9(a)과 같이 모델링하며,

Table 2. Material properties of plate-2

Young's Modulus (E, MPa)	Poisson's ratio (ν)	Width (B, mm)	Length (L, mm)	Thickness (t, mm)	Uniform load (q, N/mm)
2.2×10 <sup>6</sup>	0.2	20	20	1.0	1,000

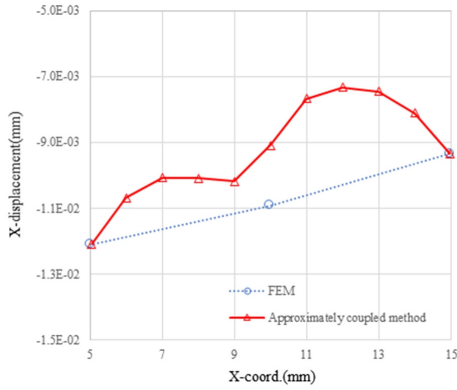


(a) FEM

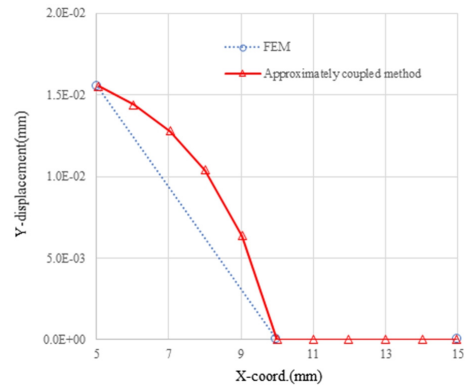


(b) Approximately coupled method with FEM and BEM

Fig. 9. Mesh refinement of plate-2

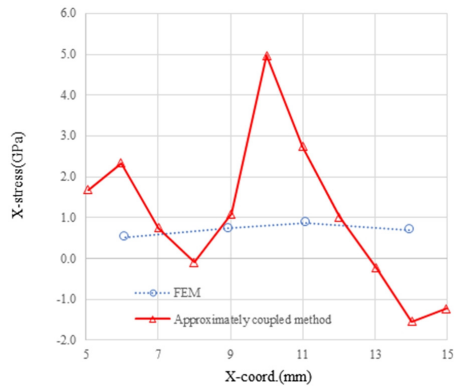


(a) X-displacement

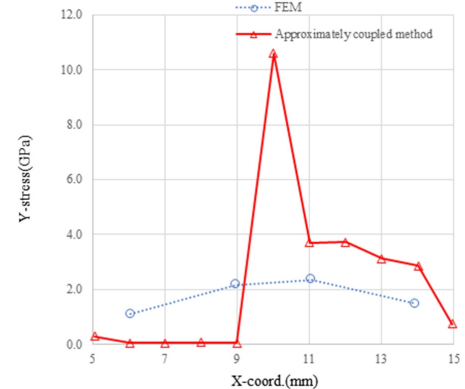


(b) Y-displacement

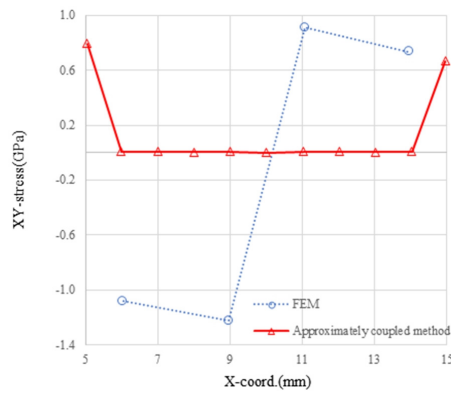
Fig. 10. Comparison of displacement results for plate-2



(a) X-normal stress



(b) Y-normal stress



(c) XY-shear stress

Fig. 11. Comparison of stress results for plate-2



유한요소법-경계요소법 근사 결합 방법에서는 Fig. 9(b)와 같이 평판을 모델링한다. Fig. 4(a)에 보이는 바와 같이 정확해에 근접하는 유한요소해석 결과를 얻기 위해서 평판 전체를 충분한 개수의 유한요소로 세분화하여 해석을 수행한다. Fig. 4(b)에 보이는 바와 같이 유한요소법과 경계요소법의 근사 결합 방법에서는 균열선단 부분 이외에는 Fig. 4(a)의 유한요소들을 그대로 이용하되 변위와 응력이 급격히 변화하는 균열선단 부분의 경계는 경계요소를 이용하여 모델링한다.

이와 같은 두 가지 해석모델들을 적용하여 유한요소해석과 유한요소법-경계요소법 근사 결합 방법의 해석을 수행한다. Fig. 10에서는 변위를 비교하고 있는데, 응력 집중이 발생하지 않는 부위는 적은 수의 유한요소로 모델링하고 응력집중이 되는 국부 영역의 경계는 경계요소로 세분화한 근사 결합 방법이 정확도가 개선된 해석 결과를 주고 있음을 알 수 있다. 따라서, 전체 해석 영역에 대해서는 소수의 유한요소로 모델링을 하고, 응력집중이 되는 국부 영역의 경계는 경계요소로 세분화하여 모델링하는 방법이 상대적으로 효율적이고 정확한 해석 결과를 준다는 것을 알 수 있다. Fig. 11에서는 응력 해석 결과를 비교하고 있는데, 유한요소해석의 경우에는 정확도가 떨어지는 해석 결과를 주고 있지만, 근사 결합 방법은 해석 결과의 정확도가 개선되고, 경계요소의 절점위치에 따른 세밀한 해석 결과를 줄 수 있음을 알 수 있다. 유한요소해석의 경우에는 평면응력 요소의 중앙점에서의 응력을 나타내고 있고, 근사 결합 방법에서는 경계요소의 절점에서 응력을 나타내고 있다.

### 3. 결론

본 연구에서는 2차원 탄성 정적 문제의 효율적이고 정확한 해석을 위한 유한요소법과 경계요소법의 근사 결합 방법을 제안하였다. 이러한 방법을 적용하여 수치예제 해석을 수행하였으며, 그 해석 결과를 고찰하였다. 수치 예제로서는 균열을 가진 평판을 해석하였는데, 균열선단의 좌측에서 우측으로의 X-방향 변위, Y-방향 변위, X-방향 수직응력, Y-방향 수직응력, XY-방향 전단응력에 대하여 유한요소해석 결과와 근사 결합 방법을 이용한 해석 결과를 비교하였다. 유한요소해석에 의하여 해석할 경우에는 균열선단에서의 변위와 응력을 정확히 해석하기 위해서 균열선단 부분에서 많은 수의 유한요소들로 세분화하여야

하여야 하므로 해석 대상의 모델링시에 상대적으로 많은 시간이 소요되고, 컴퓨터를 이용한 해석 시간도 오래 걸리게 된다. 그러나, 유한요소법과 경계요소법과의 근사 결합 방법을 이용하여 해석할 경우에는 변위나 응력의 변화가 심하지 않은 영역은 소수의 유한요소로 모델링하고, 변위나 응력의 변화가 심한 영역은 다수의 경계요소로 경계를 모델링하여, 유한요소만으로 해석을 수행하는 것보다 모델링 시간이 단축되며, 컴퓨터를 이용한 해석시간도 상대적으로 짧게 소요되는 것을 알 수 있었다. 결론적으로 근사 결합 방법은 기존의 유한요소해석보다 효율적이고 정확한 해석이 가능하다는 것을 알 수 있었고, 필요할 경우에는 균열 선단에서의 경계요소 세분화도 상대적으로 용이하였다.

### References

1. Aour, B., Rahmani, O., and Nait-Abdelaziz M. (2007), A coupled FEM/BEM approach and its accuracy for solving crack problems in fracture mechanics, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.44, pp.2523-2539.
2. Becker, A. A. (1992), *The Boundary Element Method in Engineering*, McGraw-Hill, UK.
3. Beer, G. (1983), Finite Element, Boundary Element, and Coupled Analysis of Unbounded Problems in Elastostatics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.19, pp.567-580.
4. Belytschko, T., Chang, H. S., and Lu, Y. Y. (1989), A Variationally Coupled Finite Element-Boundary Element Method, *Computers & Structures* Vol.33, No.1, pp.17-20.
5. Boumaiza, D. and Aour, B. (2014), On the efficiency of the iterative coupling FEM-BEM for solving the elasto-plastic problems, *Engineering Structures*, Vol.72, pp12-25.
6. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., and Wrobel, L. C. (1984), *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, UK.
7. Chidgzy, S. R., Trevelyan J., and Deeks, A. J. (2008), Coupling of the Boundary Element Method and the Scaled Boundary Element Method for Computations in Fracture Mechanics, *Computers & Structures* Vol.86, pp.1198-1203.
8. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E. (1989), *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, USA.
9. El-Gebeily, M., Elleithy, W. M., and Al-Gahtani, H. J. (2002), Convergence of the Domain Decomposition Finite Element-Boundary Element Coupling Methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.191, pp.4851-4867.
10. Galvin, P., Francois, S., Schevenels, M., Bongini, E., Degrande, G., and Lombaert, G. (2010), A 2.5D Coupled

FE-BE Model for the Prediction of Railway Induced Vibrations, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.30, pp. 1500-1512.

11. Hinton, E., Owen, D. R. J. (1977), Finite Element Programming, Academic Press Inc. Ltd.
12. Kim, K. H., Bang, J. S., Kim, J. H., Kim, Y., Kim, S. J., and Kim, Y. (2013), Fully Coupled BEN-FEM Analysis for Ship Hydroelasticity in Waves, Marine Structures, Vol.33, pp.71-99.
13. Stephan, E. P. (2017), Coupling of Boundary Element Methods and Finite Element Methods, Encyclopedia Computational Mechanics, 2nd. Ed., pp.1-40.
14. Vasilev, G., Parvanova, S., Dineva, P., and Wuttke, F. (2015), Soil-structure Interaction using BEM-FEM Coupling through ANSYS Software Package, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.70, pp.104-117.
15. Yazdchi, M., Khalili, N., and Valliappan, S. (1999), Dynamic Soil-Structure Interaction Analysis via Coupled Finite-Element-Boundary-Element Method, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.18, pp.499-517.
16. Zhao, W., Chen, L., Chen, H., and Marburg, S. (2019), Topology Optimization of Exterior Acoustic-structure Interaction Systems using the Coupled FEM-BEM Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.119, No.5, pp.404-431.