

Performance Models of Multi-stage Bernoulli Lines with Multiple Product and Dedicated Buffers

Kyungsu Park* · Jun-Hee Han** · Woo-Sung Kim***†

*Department of Business Administration, Pusan National University

**Department of Industrial & Management Systems Engineering, Dong-A University

***College of Business Administration, Konkuk University

다품종 제품과 전용 대기공간을 고려한 다단계 베르누이 라인을 위한 성능 모델

박경수* · 한준희** · 김우성***†

*부산대학교 경영학과

**동아대학교 산업경영공학과

***건국대학교 경영학과

To meet rapidly changing market demands, manufacturers strive to increase both of productivity and diversity at the same time. As a part of those effort, they are applying flexible manufacturing systems that produce multiple types and/or options of products at a single production line. This paper studies such flexible manufacturing system with multiple types of products, multiple Bernoulli reliability machines and dedicated buffers between them for each of product types. As one of the prevalent control policies, priority based policy is applied at each machines to select the product to be processed. To analyze such system and its performance measures exactly, Markov chain models are applied. Because it is too complex to define all relative transient and its probabilities for each state, an algorithm to update transient state probability are introduced. Based on the steady state probability, some performance measures such as production rate, WIP-based measures, blocking probability and starvation probability are derived. Some system properties are also addressed. There is a property of non-conservation of flow, which means the product ratio at the input flow is not conserved at the succeeding flows. In addition, it is also found that increased buffer capacity does not guarantee improved production rate in this system.

Keywords : Bernoulli Machine, Multiple Products, Production Rate, Scheduling Policy, Dedicated Buffer, Flexible Manufacturing

1. 서 론

빠르게 변화하는 시장의 요구와 수요를 만족시키기

위해서 기업들은 신기술의 도입, 제품의 다양화, 기업 구조의 개편, 예측의 정확성 증대, 다양한 판매 전략 등 다양한 방면에서 노력을 기울이고 있다. 그러한 노력의 일환으로 많은 제조기업들은 하나의 생산라인에서 동시에 다양한 종류 또는 다양한 옵션의 제품을 생산하는 유연 제조시스템(flexible manufacturing systems)을 적용하고 있으며, 이를 통해 생산성과 다양성을 모두 증대시켜 기

Received 16 July 2021; Finally Revised 2 September 2021;

Accepted 8 September 2021

† Corresponding Author : kimws@konkuk.ac.kr

업의 경쟁력을 확보하고자 한다[18]. 예를 들어, 하나의 생산 라인에서 여러 종류의 트랜스미션을 생산하거나, 동일한 제품이 다양한 옵션을 가질 수 있도록 제품을 생산한다(예: 다양한 외관, 엔진, 색상, 내부사양 등을 가지는 자동차). 심지어 하나의 생산라인에서 유사한 특성을 가지는 전혀 다른 제품을 생산하기도 한다. 특히 최근 스마트 공장(smart factory)에 대한 관심 및 관련 기술 보급으로 인해 이러한 제조 유연성(flexibility)에 대한 중요성이 더욱 커지고 있다.

이러한 제조 유연성 확보에는 여러 가지 이슈가 따른다. 예를 들어 제품 및 공정별로 전용 장비를 확보할 수도 있고, 범용 장비를 통해 여러 종류의 공정 및 제품들을 생산할 수도 있다. 변화하는 수요를 효과적으로 확보하기 위해 장비가 다양한 생산능력(capacity)을 지원해야 할 수도 있고[7], 다양한 제품 생산을 위해 시스템이 여러 경로를 처리해주는 경로의 유연성(routing flexibility)이 필요한 경우도 있다. 공정 간에 제품들이 대기하는 공간인 버퍼(buffer)들의 경우에는 여러 종류의 제품들이 하나의 버퍼를 공유할 수도 있으나, 제품들 간의 오염이나 간섭을 피하기 위해 또는 관리의 수월성을 위해 각 제품종류마다 전용 버퍼(dedicated buffer)를 가져야 하는 경우도 있다. 예를 들어, 반도체 제조에서는 물리적 형상이나 보관 온도에 대한 제약, 화학적 오염 방지 등을 위해 여러 개의 전용 버퍼가 존재한다. 이러한 상황 하에서 본 연구에서는 여러 종류의 제품을 처리할 수 있는 다수의 범용 장비들과 각 제품종류마다 전용 버퍼를 가지는 생산 시스템에 대해서 다룬다.

또한 유연제조시스템에서는 다양한 제품들을 다루면서 어떤 종류의 제품을 우선적으로 처리할 것인지와 같은 스케줄링 이슈가 발생한다. 이를 위해 공정 시간 기반의 정책, 납품기한(due date) 기반 정책, 재공품(WIP, work-in-process) 기반 정책뿐만 아니라 다양한 알고리즘이 존재하나, 본 연구에서는 간단하고 쉽게 현장에 적용가능하여 널리 사용되는 우선순위(priority) 기반 스케줄링 정책을 가정한다. 하지만 도출된 연구 방법론은 추후 다양한 스케줄링 정책으로 확장 가능하다.

본 연구에서는 기계 고장, 부품 수급, 종업원의 유희 등의 문제로 각 장비가 생산활동을 할 수 없는 상황을 확률적 모형을 통해 고려한다. 이를 위해 각각의 장비가 베르누이(Bernoulli) 신뢰 모형을 따른다고 가정한다. 즉 모든 장비는 동일한 주기(cycle time)를 가지고, 각 주기마다 장비는 일정한 확률로 정상적으로 공정을 수행하거나 공정을 실패한다. 이러한 가정은 특정 생산시스템에 한정적으로 적용 가능한 것으로 보일 수 있으나, 실제 장비들의 주기가 다른 경우에도 수학적 변환을 통해 베르누이 가정의 장비들로 변환 가능하다[25]. 특히 가용 시

간이 지수 분포를 따르는 경우에는 더욱 쉽게 베르누이 신뢰 모형으로 변환이 가능하며, 변환된 모형의 정확성 또한 다양한 산업분야에서 입증되었다[1, 8, 9, 14, 19, 27, 28, 42, 43, 44, 45]. 이러한 베르누이 신뢰 모형을 바탕으로 한 제조 시스템 분석은 다양하게 연구되어왔지만 본 연구와 같이 다수의 범용 장비들과 전용 버퍼를 고려한 연구는 찾을 수 없다. 가장 유사한 가정을 가진 Park et al.[34]와 Park and Kim[32]에서도 단 두개의 장비만을 고려하였다.

따라서 본 논문의 주요 학술적 기여는 다음과 같다. 다수의 범용 버퍼와 전용 버퍼들로 이루어진 베르누이 모형 기반의 시스템을 마코프 체인(Markov chain)으로 모델링하였다. 또한 이를 바탕으로 시스템의 생산율(production rate), 재공품(WIP) 관련 여러 지표, 각 장비에서의 블락율(blockage probability) 및 고갈율(starvation probability) 등 여러 핵심 성능지표를 정확하게 분석하였다. 또한 이러한 시스템의 특성을 고찰하였다.

본 논문의 제2장에서는 선행 연구들에 대해 다루며, 제3장에서는 본 연구의 가정을 명확히 하고 시스템을 정의한다. 제4장에서는 마코프 체인을 통하여 시스템과 중요한 성능지표에 대한 이론적인 분석을 수행한다. 제5장에서는 시스템의 특성을 파악하고 제6장에서는 결론 및 향후 연구과제를 제시한다.

2. 선행 연구

유연제조시스템에 대한 연구는 지난 30년 이상 활발하게 진행되어 왔다. 고전적인 연구인 Buzacott and Shanthikumar [4]는 유연제조시스템과 생산 능력 모델에 대한 기본적인 특성들을 소개하였고, Buzacott and Yao[6]는 그러한 시스템들에 대한 여러 분석적 모델들을 제시하고 연구 진행방향에 대한 가이드라인을 제시하였다. 또한 Sethi and Sethi[37]에서는 제조에서의 유연성에 대해 기계, 공정(operations), 프로세스(process), 제품, 경로(routing) 등의 측면에서 정의하고 고찰하였다. 이러한 유연제조시스템은 확률적(stochastic) 또는 확정적(deterministic) 모델을 기반으로 연구되었다. 예를 들어 Buzacott and Shanthikumar[5]와 Tempelmeier and Kuhn[40] 등은 확률 모형을 이용하여 유연제조시스템의 성능 평가 최적 시스템 설계, 생산 관리 등을 다루었으며, Viswanadham and Narahari[41]와 Zhou and Venkatesh[46] 등은 유사한 주제를 시뮬레이션이나 펠트리넷(Petr-net)과 같은 확정적 모델을 기반으로 분석하였다. 유연 제조시스템에 대한 다양한 주제 및 연구들은 Beach et al.[2], Li et al.[26], Shi and Daniels[38]에서 요약되어 있다.

유연제조시스템에서는 다양한 종류의 제품이 생산되므로 스케줄링에 대한 연구가 필수적이다. 본 연구에서 적용되는 우선순위 정책은 고전적 연구들인 Nemec[31], Syrowicz[39]에서 두 개의 제품 종류를 생산하는 시스템에 대해 적용되고 분석되었다. Colledani et al.[10], Colledani et al.[11]은 두 개 이상 제품 종류를 생산하는 시스템에 대해 우선순위 정책을 포함하여 확률적으로 제품 종류를 선택하는 정책에 대해 분석하였고, 이를 위해 분해 기법(decomposition method)을 적용하였다. Jang[17]에서는 우선순위 정책 하에서 생산율과 평균 재공품 수준 등에 대해 수리적 모델을 개발하고 근사값을 구하는 방법을 제시하였다. 유연제조시스템에서는 우선순위 정책 외에도 다양한 정책이 고려되었다. 예를 들면 Krieg and Kuhn[20], Krieg and Kuhn[21]에서는 다양한 제품들을 순서대로 선택하는 순환 정책(cyclic policy) 하에서 장비의 준비시간을 고려한 Kanban 시스템에 대해 다루었으며, Ryan and Vorasayan[35], Satyam and Krishnamurthy[36]에서는 CONWIP(constant work-in-process) 정책 하에서 시스템을 분석하였다. Park and Kim[32], Park et al.[34]에서는 두 개의 장비 하에서 우선순위 정책의 성능을 순환 정책, WIP 기반 정책과 비교하였고, Feng et al.[12, 13]에서는 순환 정책의 성능을 다른 다양한 정책들과 비교하였다.

유연제조시스템을 위한 확률적 모형에서는 분석의 용이성으로 인해 베르누이 신뢰 모형이 자주 사용되었다. 초기 연구 중 하나인 Lim et al.[28]에서는 자동차 조립 공장에서의 페인트 공정에 대해서 베르누이 모델을 사용하여 성능 분석을 수행하였으며, Jacobs and Meerkov[16]에서는 Lim et al.[28]에서의 가정을 확장하고 여러 장비로 이루어진 생산라인에 대해 합성기법(aggregation method)을 적용하였다. 베르누이 신뢰 모형은 다양한 제조시스템의 형태를 고려하도록 발전하기도 하였다. Biller et al.[3]에서는 폐쇄형 제조시스템(closed production line)을 다루었고, Li[24]에서는 동일한 생산 라인이 다수 존재하는 제조시스템(parallel production line)을 베르누이 모형을 적용하여 분석하였다. Liu and Li[29]에서는 제조라인이 나뉘지거나 합쳐지는 시스템에 대해서 분석하였다. 이외에도 셋업(setup), 납기만족, 검사 및 재작업과 같은 제조 특성들도 고려되었다. Zhao and Li[44], Zhao et al.[45]에서는 셋업(setup)이 고려되었으며, Han et al.[15], Meerkov and Zhang[30]에서는 품질 검사 기계와 불량 제품들에 대한 처리 또한 베르누이 모형으로 분석되었다. 공정간 시간제약(time window) 또한 Lee et al.[22, 23]에서 고려되었다.

이러한 베르누이 신뢰 모형은 분석이 간단함에도 불구하고 제조시스템의 성질을 잘 설명하고 여러 생산시스템에서 성공적으로 적용되었다. 특히 자동차 산업에 적용한 사례가 다수 존재하는데, Lim et al.[28]과 Arinez et

al.[1]에서는 페인트 공정, Kuo et al.[19]에서는 자동차 부품 생산공정, Chiang et al.[8, 9], Li and Meerkov[27]는 분사 모듈(injection module) 조립 공정, Wang and Li[42]은 세척 공정을 포함한 점화 부품(ignition component) 조립 공정, Feng et al.[14]은 자동차 차체(body) 조립 공정을 베르누이 신뢰 모형을 사용하여 분석하였다. 자동차 산업 외에도 Zhao and Li[43, 44], Zhao et al.[45]은 가구 조립 공정을, Park and Li[33]은 오토바이의 트랜스미션 가공 라인을 베르누이 신뢰 모형을 적용하여 분석하였다.

3. 문제정의 및 가정

본 장에서는 시스템을 정확하게 정의하고 관련된 가정 및 변수들을 소개한다. 본 연구에서는 다양한 제품을 생산할 수 있는 범용 장비들과 각 제품별로 유한한 용량의 전용 버퍼(대기공간)를 가진 시스템에 대해서 다룬다. 이는 <Figure 1>에 표현되어 있으며, 원과 직사각형은 각각 장비(또는 스테이지)와 버퍼(대기공간)를 의미한다. 자세한 가정은 아래와 같다.

- 1) 하나의 시스템에서 K 개의 서로 다른 종류의 제품을 생산할 수 있다. 즉, 하나의 생산라인에서 여러 종류의 제품을 생산하는 유연제조시스템(FMS, Flexible Manufacturing Systems)이다. 각 제품 종류 k 는 $1, 2, \dots, K(k=1, 2, \dots, K)$ 로 표기된다.
- 2) 시스템은 M 개의 연속적인 장비(또는 스테이지)들인 m_1, m_2, \dots, m_M 으로 이루어져 있다.
- 3) 장비 사이에는 제품별로 전용 버퍼가 존재한다. 따라서 시스템 상에서는 $(M-1) \times K$ 개의 전용 버퍼가 존재하며, 장비 i 와 장비 $i+1$ 사이에 존재하는 K 개의 전용 버퍼를 $b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,K}$ 라고 정의한다. 버퍼 $b_{i,k}$ 는 $N_{i,k}$ 개의 유한한 용량을 가지고 있다.
- 4) 장비 m_1 은 제품종류가 k 인 제품을 α_k 확률로 선택하여 공정을 진행한다. 즉, 장비 m_1 이 선택할 제품의 종류는 이산 확률 분포를 따르며, $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$ 이다. 만일 장비 m_1 이 기계 고장 등의 이유로 공정에 실패한 경우, 기존 제품이 아닌 새로운 제품을 확률 분포에 따라 선택한다. 참고로 Park and Kim[32]은 동일한 가정 하에서 2개의 장비에 대해서 다뤘으며, Park et al.[34]에서는 공정이 실패하더라도 새로운 제품을 선택하지 않고 공정을 완료할 때까지 기존 제품을 유지하는 모형에 대해 다뤘다.
- 5) 각각의 장비들은 베르누이 신뢰 모형(Bernoulli reliability model)을 따른다. 즉, 장비들은 일정하고 동일한 주기(cycle)마다 정상작동 또는 유희(idle)를 반복

한다. 이 때 동일 장비라도 제품의 종류가 다르면 정상작동할 확률이 달라지며, 장비 m_i 가 k 종류의 제품을 정상적으로 생산할 확률은 $p_{i,k}$, 유티할 확률은 $1-p_{i,k}$ 라 정의한다. 앞서 언급하였듯이 실제 장비들의 주기(cycle time)가 동일하지 않더라도 변환 과정을 통해 동일한 주기를 가지는 베르누이 장비로 변환 가능하며, 이러한 방법론은 Li and Meerkov[25]에서 자세히 다루어져 있다. 또한 변환된 베르누이 모형의 정확성에 대해서도 Zhao and Li[44], Zhao et al.[45] 등 여러 기존 연구에서 입증되었다. 또한 베르누이 신뢰 모형에서 $p_{i,k}$ 는 단순히 고장율이 아니라 장비의 가동 시간, 중단시간, 셋업시간, 베르누이 가정에서의 주기 길이 등을 고려하여 산출될 수 있다.

- 6) 첫 번째 장비 m_1 을 제외한 다른 장비들에서도 제품 종류를 선택해야 하는 스케줄링 이슈가 발생한다. 본 연구에서는 가장 기본적이고 널리 사용되는 우선순위 정책(Priority policy)을 적용한다. 즉, 제품 종류별로 우선순위가 고정되어 있으며 본 연구에서는 제품 종류 인덱스가 작을수록 높은 우선순위를 가진다. 따라서 장비 m_{i+1} 는 버퍼 $b_{i,1}$ 에 제품이 존재하면 제품종류 1을 최우선적으로 선택하여 공정을 진행하며, 이외의 제품종류 $k(2 \leq k \leq K)$ 는 버퍼 $b_{i,k}$ 에 제품이 존재하며 높은 우선순위 버퍼 $b_{i,j}(2 \leq j \leq k)$ 가 비어있을 때 선택된다.
- 7) 장비의 상태(정상작동 또는 유티)는 각 주기의 시작 시에 결정되며, 버퍼의 상태(제품의 수)는 각 주기의 끝에 갱신된다.
- 8) 장비 m_{i+1} 앞의 버퍼들(즉, $b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,K}$)이 모두 비어있는 경우에는 장비 m_{i+1} 가 생산을 진행할 수 없으며, 이러한 상태를 고갈 상태(starved)라고 한다. 하지만 첫 번째 장비 m_1 앞에는 충분한 크기의 버퍼가 존재하며 충분한 속도로 제품들이 도착하기 때문에 장비 m_1 은 항상 제품을 선택 가능하며 고갈되는 경우는 없다(never starved). 참고로, 일반적으로 고갈 상태는 장비가 정상작동할 때 재공

품이 존재하지 않는 경우로 정의한다. 하지만 본 시스템에서는 재공품이 존재하지 않을 때 특정 제품종류를 선택할 수 없으므로 장비의 정상작동 확률을 정의할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 장비의 상태와 상관없이 특정 장비 앞에 재공품이 전혀 존재하지 않는 경우를 고갈되었다고 정의한다.

- 9) 장비 m_i 가 제품종류 k 를 선택하고 정상작동가능함에도 불구하고 뒤의 전용 버퍼 $b_{i,k}$ 가 가득 차있고 후속 장비 m_{i+1} 이 제품종류 k 를 가져가지 않는 경우에는 해당 주기에 장비 m_i 는 제품을 생산할 수 없다. 이를 블로킹(blocking)이라고 일컫는다. 시스템 이후에는 충분한 공간이 있다고 가정하므로 장비 m_M 은 절대 블로킹이 발생하지 않는다.

4. 마코프 체인(Markov Chain)을 통한 분석

앞서 정의한 가정 1) - 9)를 바탕으로 시스템의 성능을 분석하기 위해서 마코프 체인(Markov chain)을 적용한다. 이를 통해 분해기법, 합성기법 등과 달리 정확한 시스템 및 성능척도 분석이 가능하다.

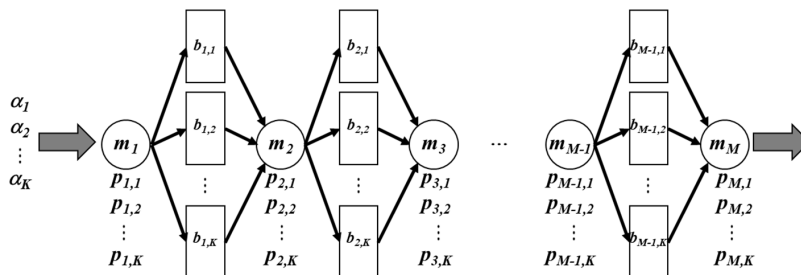
4.1 상태 공간(State Space)

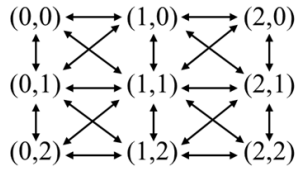
상태(state)를 정의하기 위해서 각 전용버퍼에 존재하는 재공품의 수를 활용한다. 즉, 전용버퍼 $b_{i,k}$ 에 존재하는 재공품의 수를 $h_{i,k}$ 라고 정의하면 임의의 시점의 시스템 상태 s 는 $s = (h_{1,1}, h_{1,2}, \dots, h_{M-1,K})$ 로 표현 가능하다. 이 때 시스템이 가질 수 있는 상태의 수 S 는 아래와 같다.

$$S = \prod_{i=1}^{M-1} \prod_{k=1}^K (N_{i,k} + 1)$$

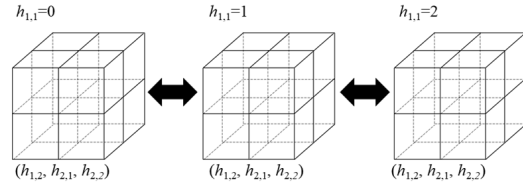
이러한 상태의 수 S 는 장비의 수 및 제품 종류의 수에 따라 기하급수적으로 증가할 뿐 아니라 상태의 차원 또한 증가하므로 그 분석이 복잡하다. 예를 들어, $M=2, K=2, N_{1,1} = N_{1,2} = 2$ 인 경우에는 <Figure 2>와 같이 상태가 2차원이고 $S=3^2=9$ 으로 비교적 간단하지만, 장비의 개수가

<Figure 1> System with M machines, K product types and dedicated buffers





<Figure 2> State space for M=2 and K=2



<Figure 3> State space for M=3 and K=2

하나 증가한 $M=3, K=2, N_{1,1} = \dots = N_{2,2} = 2$ 인 시스템에서는 <Figure 3>과 같이 상태가 4차원으로 확장되고 상태의 수 또한 $S=3^4=81$ 로 크게 증가하게 된다. 만약 $M=5, K=5, N_{1,1} = \dots = N_{4,5} = 5$ 이면 가능한 상태의 수는 $S=(6^5)^4=3,656,158,440,062,976$ 개로 매우 커진다.

4.2 전이 확률(Transition Probability)

일반적으로 마코프 체인을 분석하기 위해서는 각 상태에서 전이가 가능한 상태들을 모두 정의한 후 그 확률값을 구한다. 이를 위해 상태들을 몇 가지 경우로 분류하여 분석하기도 한다. 하지만 본 시스템에서는 상태의 수와 특성이 매우 다양하고 각 상태에서 발생가능한 전이의 수 또한 매우 다양하여 그러한 방법론을 적용하기 힘들다. 따라서 본 연구에서는 먼저 첫 번째 장비에서 선택

하는 제품의 종류와 각 장비에서의 상태를 바탕으로 발생 가능한 모든 시나리오 및 그 확률값을 정의한다. 이때 발생 가능한 시나리오의 개수는 $K \times 2^M$ 이다. 이후 모든 상태에 대해 각각의 시나리오를 적용하여 발생하는 전이의 전이확률에 그 시나리오가 발생한 확률값을 더해주는 방식으로 전이확률을 구하는 알고리즘을 구현한다.

예를 들어 $M=3, K=2, N_{1,1} = \dots = N_{2,2} = 2$ 인 시스템에서 $s_1=(h_{1,1}, h_{1,2}, \dots, h_{M-1,K})=(1,1,2,2)$ 인 상태 s_1 를 고려해보자. 이때 첫 번째 장비 m_1 는 제품종류 1 또는 2를 선택가능하고, 장비 m_1 및 m_2 는 각각 정상작동 또는 유희할 것이므로 발생가능한 시나리오의 수는 $2^3=8$ 개이다. 우선 선택된 제품종류가 1이고 모든 장비가 정상작동하는 시나리오를 적용하면, 장비 m_2 에서는 우선순위 정책에 의해 제품종류 1을 선택할 것이므로 이 시나리오가 발생할 확률은 $\alpha_1 \times p_{1,1} \times p_{2,1}$ 이다. 또한 이때 상태 s_2

<Table 1> Algorithm to Update Transient Probabilities

Algorithm 1. Generation of transient probabilities	
1	Set all transient probability equal to 1 (that is, all);
2	for all states $s_s := (h_{1,1}, h_{1,2}, \dots, h_{M-1,K})$
3	Set target state $s_{s'} := (h'_{1,1}, h'_{1,2}, \dots, h'_{M-1,K}) \leftarrow (h_{1,1}, h_{1,2}, \dots, h_{M-1,K})$;
4	for $i = 2:M$ (all machines except 1 st one)
5	if
6	Set product types to be selected at machine $i = 0$ (that is, $v_i \leftarrow 0$);
7	else
8	Determine product types to be selected (v_i)
9	end if
10	for end
11	for all scenarios (based on the product type to be selected at the 1 st machine ($v_1=k$) and the state of all machines)
12	Calculate the probability that this scenario occurs ();
13	for $i = M:-1:1$
14	if $v_i \neq 0 \ \&\& \ i == 1$
15	if machine m_i is up &&
16	$s_{s'} \leftarrow (h'_{1,1}, \dots, \dots, h'_{M-1,K})$;
17	end if
18	elseif $v_i \neq 0 \ \&\& \ i == M$
19	if machine m_i is up
20	$s_{s'} \leftarrow (h'_{1,1}, \dots, \dots, h'_{M-1,K})$;
21	end if
22	elseif $v_i \neq 0$
23	if machine m_i is up &&
24	$s_{s'} \leftarrow (h'_{1,1}, \dots, \dots, \dots, h'_{M-1,K})$;
25	end if
26	end if
27	for end
28	Update transient probability (that is,);
29	for end
30	for end

$= (1,1,2,2)$ 로 전이하므로 기존에 존재하는 상태 s_1 에서 s_2 로의 전이확률 T_{s_1, s_2} 를 $T_{s_1, s_2} \leftarrow T_{s_1, s_2} \times \alpha_1 \times p_{1,1} \times p_{2,1}$ 로 갱신시켜준다. 이후 현재의 상태 s_1 에 대해 남은 모든 시나리오를 차례로 적용하여 전이확률을 업데이트한 후다음 상태에 대해서 동일한 절차를 반복한다. 이러한 알고리즘은 <Table 1>에 요약되어 있다. 참고로 실제로 이 알고리즘을 적용하는 경우에는 $\sum_{s_2=1}^S T_{s_1, s_2} = 1$ 임을 확인하여 오류가 있는지 쉽게 확인 가능하다.

4.3 안정 상태 확률(Steady-state probability)

상태가 정의되고 전이 확률이 도출되면 각 상태에 대한 안정 상태 확률(steady-state probability)을 통해 시스템의 분석이 가능하다. 특히 본 시스템에서는 모든 상태들이 서로 소통하는 하나의 클래스(class)에 존재하므로 도출되는 마코프 체인은 기약 마코프 체인(irreducible Markov chain)이며, 흡수상태(absorbing state)가 존재하지 않고 상태의 수가 유한하므로 양재귀(positive recurrent)하다. 또한, 자기 자신으로 전이가 가능하므로 비주기적(aperiodic)하다. 이러한 마코프 체인에서는 안정상태확률이 항상 존재하며, 아래와 같은 평형 방정식(balance equation)을 통해 이를 도출할 수 있다. ψ_{s_j} 는 상태 s_j 의 안정상태확률이며, T_{s_i, s_j} 는 앞의 제4.2절에서 도출된 상태 s_i 에서 s_j 로의 전이확률을 나타낸다.

$$\psi_{s_i} = \sum_{j=1}^S T_{s_i, s_j} \psi_{s_j}, \quad i = 1, \dots, S$$

$$\sum_{j=1}^S \psi_{s_j} = 1$$

이와 같은 $(S+1)$ 개의 연립방정식을 풀어서 각 상태들에 대한 안정상태확률을 구할 수 있다. 첫 번째 식은 상태 s_i 의 안정상태확률은 다른 모든 안정상태들에서 상태 s_i 로 전이되는 확률의 합과 동일함을 의미한다. 두 번째 식은 모든 안정상태 확률의 합은 1임을 의미한다. 이러한 식들은 행렬로 표현 가능하다.

$$T \cdot \Psi = \Psi$$

$$E \cdot \Psi = 1$$

이때,

$$\Psi = [\psi_{s_1}; \psi_{s_2}; \dots; \psi_{s_S}],$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{s_1, s_1} & \dots & T_{s_1, s_S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{s_S, s_1} & \dots & T_{s_S, s_S} \end{bmatrix},$$

$$E = [1, 1, \dots, 1]$$

이다. 따라서 안정상태확률은 아래와 같다.

$$\Psi = [T - I; E]^{-1} \cdot \Theta.$$

이때, I 는 크기가 S 인 단위행렬, Θ 는 $[0; 0; \dots; 1]$ 인 행렬을 의미한다.

4.4 성능척도 분석

도출된 안정상태확률을 바탕으로 제조시스템 분석에 널리 사용되는 여러 성능척도들에 대해 분석이 가능하며, 이를 활용하여 시스템의 재설계 또는 특정 요소를 개선함으로써 시스템의 효과적인 향상이 가능하다. 예를 들면, 일반적으로 불량율이 높은 장비의 후속 버퍼나 고갈율이 높은 장비의 선행 버퍼의 개수를 증가시킴으로써 전체 생산성을 효과적으로 향상시킬 수 있다.

4.4.1 생산율(Production Rate)

제품종류 k 의 평균 생산율을 PR_k 라고 정의하면 아래와 같이 계산 가능하다.

$$PR_k = \sum_{s \in A_k} p_{Mk} \psi_{s_j}$$

이때,

$A_k = \{s_j | s_j = (h_{1,1}, \dots, h_{M-1,K}), h_{M-1,k} > 0, h_{M-1,j} = 0, \forall j < k\}$ 이다. 또한, 모든 제품종류를 포함하는 전체 평균생산율 $PR = \sum_{k=1}^K PR_k$ 로 정의된다.

4.4.2 재공품(WIP, Work-in-process)

본 연구에서 상태는 각 전용버퍼에 존재하는 재공품의 개수를 기반으로 하므로 재공품에 대한 확률값을 다양하게 구할 수 있다. 예를 들면, $\psi_s = (h_{1,1}, \dots, h_{M-1,K})$ 를 통해 직접적으로 전용버퍼 $b_{1,1}$ 에 $h_{1,1}$ 개의 재공품, $b_{1,2}$ 에 $h_{1,2}$ 개의 재공품, ..., $b_{M-1,K}$ 에 $h_{M-1,k}$ 의 재공품이 있을 확률을 구할 수 있다.

또는 전용버퍼 $b_{i,k}$ 가 n 개의 재공품을 가지고 있을 확률을 $X_{i,k,n}$ 이라 정의하면 아래와 같이 계산 가능하다.

$$X_{i,k,n} = \sum_{s \in B_{i,k,n}} \psi_{s_j}$$

$$B_{i,k,n} = \{s_j | s_j = (h_{1,1}, \dots, h_{M-1,K}), h_{i,k} = n\}.$$

이외에도 아래와 같이 여러 재공품 관련 성능척도 분석이 가능하다.

$WIP_{i,k}$: 전용버퍼 $b_{i,k}$ 의 평균 재공품의 수

WIP_i^{bf} : 장비 m_i 와 m_{i+1} 사이에 존재하는(즉, 전용 버퍼 $b_{i,1}, \dots, b_{i,K}$) 평균 재공품의 수

WIP_k^{type} : 시스템 내에 존재하는 제품종류 k 의 평균 재공품의 수

WIP : 시스템 내에 존재하는 전체 평균 재공품의 수

$$WIP_{i,k} = \sum_{n=1}^{N_{i,k}} n \cdot X_{i,k,n},$$

$$WIP_i^{bf} = \sum_{k=1}^K WIP_{i,k},$$

$$WIP_k^{type} = \sum_{i=1}^{M-1} WIP_{i,k},$$

$$WIP = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k=1}^K WIP_{i,k}.$$

4.4.3 블락율(Blockage Probability)

블락율을 정의하기 전에 장비 m_i 가 제품종류 k 를 선택할 확률 $v_{i,k}$ 를 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$v_{1,k} = \alpha_k,$$

$$v_{i,k} = \left(\sum_{j=1}^{k-1} X_{i-1,j,0} \right) (1 - X_{i-1,k,0}) \text{ for } i = 2, \dots, M.$$

또한 버퍼 $b_{i-1,k}$ 가 가득 차있을 경우 m_i 가 제품종류 k 를 선택할 확률을 $v'_{i,k}$ 라 정의하면 아래와 같이 계산 가능하다.

$$v'_{i,k} = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} X_{i-1,j,0}}{X_{i-1,k,N_k}} = \frac{v_{i,k}}{X_{i-1,k,N_k} (1 - X_{i-1,k,0})}$$

for $i = 2, \dots, M$.

장비 m_i 에서 제품종류 k 에 대해 발생하는 블락율을 $BL_{i,k}$ 라고 정의하면 아래와 같이 계산 가능하다. $BL_{i,k}$ 식은 (장비 m_i 가 제품종류 k 를 선택할 확률)×(장비 m_i 가 정상작동할 확률)×(버퍼 $b_{i,k}$ 가 가득찰 확률)×(장비 m_{i+1} 가 제품종류 k 를 선택하지 않거나 선택하더라도 블로킹이 일어날 확률)로 이루어져 있다.

$$BL_{M,k} = 0$$

$$BL_{M-1,k} = v_{M-1,k} p_{M-1,k} X_{M-1,k,N_k} \{ (1 - v'_{M,k}) + v'_{M,k} (1 - p_{M,k}) \},$$

$$BL_{i,k} = v_{i,k} p_{i,k} X_{i,k,N_k} \left\{ (1 - v'_{i+1,k}) + \frac{v'_{i+1,k}}{v_{i+1,k}} BL_{i+1,k} \right\}$$

for $i = 1, \dots, M-2$.

장비 m_i 에서 일어나는 장비 블락율 BL_i 은 $BL_i = \sum_{k=1}^K BL_{i,k}$ 를 통해 계산 가능하다.

4.4.4 고갈율(Starvation Probability)

장비 m_i 에서의 고갈율 ST_i 는 아래 식을 통해 계산 가능하다.

$$ST_i = \sum_{k=1}^K X_{i-1,k,0}.$$

5. 수치 예제 및 시스템의 특성

개발된 방법론을 적용하면 특정 시스템에 대한 정확한 성능 분석이 가능하다. <Table 2>는 3개의 제품종류와 2~4개의 장비를 가지는 시스템을 제안된 방법으로 분석한 예시이다. 이 때, $\alpha=1/3$, 모든 $p_{ij} = 0.9$, 모든 버퍼의 용량은 2 ($N_{ij}=2$)라고 가정하였다.

또한 이러한 방법론을 바탕으로 수치실험을 통해 몇 가지 특성을 파악할 수 있다.

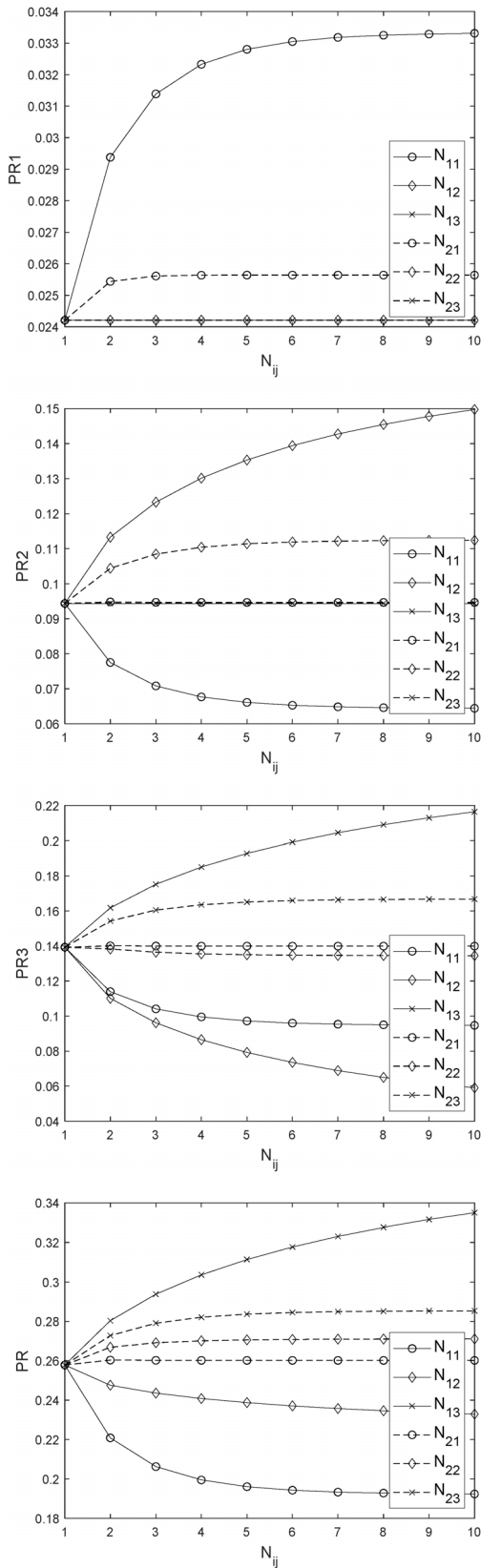
(특성 1) 흐름의 비보전성(non-conservation of flow):

가정 1) - 9)를 따르는 시스템에서는 생산 비율이 보존되지 않는다. 즉, $\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \neq \frac{PR_i}{PR_j}$ 이다.

일반적으로는 제품의 투입 비율이 유지되는 경우가 많으나 본 연구의 시스템에서는 유지되지 않았다. 이는 <Table 2>의 예시에서도 확인할 수 있다. 예를 들어 $M=4$ 일 때, $\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = 1$ 이지만 $\frac{PR_1}{PR_3} = \frac{0.300}{0.235} \neq 1$ 이다. 이러한 흐름의 비보전성은 가정 4)에서 가정되었듯이, 공정이

<Table 2> Performance Analysis for Numerical Examples ($K=3, N_{ij}=2, p_{ij}=0.9, \alpha=1/3$)

# of machines	Comp. Time (sec)	Production Rate				WIP			Blockage Probability				Starvation Probability			
		PR ₁	PR ₂	PR ₃	PR	WIP_1^{bf}	WIP_2^{bf}	WIP_3^{bf}	BL_1	BL_2	BL_3	BL_4	ST_1	ST_2	ST_3	ST_4
M=2	0.02	0.300	0.297	0.266	0.863	1.679	-	-	0.037	0	-	-	0	0.041	-	-
M=3	2.33	0.300	0.297	0.247	0.843	1.841	1.519	-	0.052	0.028	0	-	0	0.031	0.063	-
M=4	3657.94	0.300	0.297	0.235	0.831	1.925	1.674	1.442	0.061	0.041	0.024	0	0	0.027	0.050	0.077



<Figure 4> Non-monotonicity with Respect to Buffer Capacity

실패하였을 때 기존 제품을 유지하지 않고 새로운 제품을 선택하기 때문이다.

(특성2) 버퍼 용량과 생산물의 비상관성(no correlation between buffer capacity and production rate): 가정 1) - 9)를 따르는 시스템에서는 버퍼 용량의 증가가 무조건적으로 생산율의 증가로 이어지지 않는다.

<Figure 4>에서는 $K=3, M=3, \alpha=1/3$, 모든 $p_{1,1} = p_{2,1} = p_{3,1} = 0.1, p_{1,2} = p_{2,2} = p_{3,2} = 0.5, p_{1,3} = p_{2,3} = p_{3,3} = 0.9$ 인 시스템에 대해 분석한 결과이다. 이때 모든 버퍼의 용량을 1로 고정하되, 표시된 특정 버퍼의 용량만 증가시킬 때의 생산율을 계산하였다. 이때 $N_{1,1}$ 과 $N_{1,2}$ 가 증가할 때 오히려 전체 평균생산율 PR 이 감소함을 알 수 있다. 이러한 특성은 버퍼의 용량이 커짐에 따라 생산율이 증가할 것이라는 직관과는 다른 결과이다. 이는 흐름의 비보전성으로 인해, 특정 버퍼의 증가가 생산율이 낮은 제품종류의 비율을 증가시킴으로써 발생한다.

고장율, 장비의 가동 시간, 중단시간, 셋업시간 등이 변화하면 $p_{i,k}$ 값이 변화하게 된다. $p_{i,k}$ 값과 생산율은 일반적으로 양의 상관관계를 가지나, $p_{i,k}$ 값의 증가가 생산율의 증가를 보장하지는 않음을 주의해야 한다. 또한 $p_{i,k}$ 값에 따라 재공품, 불량율, 고갈율도 매우 다양한 형태로 변화한다.

6. 결론

본 연구에서는 하나의 생산 라인에서 여러 종류의 제품종류를 생산하고 각 제품종류마다 전용 버퍼를 가지는 시스템의 성능 분석을 위한 방법론을 소개하였다. 시스템은 베르누이 신뢰 모형을 따르는 다수의 장비로 이루어져 있으며, 각 장비에서는 미리 정해진 우선순위에 따라 제품을 선택하여 공정을 진행한다고 가정하였다. 이러한 시스템의 정확한 분석을 위해, 마코프 체인을 이용한 모델링 방법을 제시하고, 여러 성능척도 분석을 위한 식들을 도출하였다. 또한 정확한 시스템 분석을 통해 흐름의 비보전성과 버퍼 용량과 생산물의 비상관성과 같은 시스템의 고유한 특성들도 제시하였다. 향후에는 베르누이 신뢰 모형 대신 지수분포를 가정하거나 다양한 스케줄링 정책을 고려하여 연구를 확장해 나갈 것이다. 또한 흐름의 비보전성으로 인해 분해기법을 적용할 수 없으므로, 시스템이 더욱 커질 경우에는 추정을 위한 다른 기법 연구도 필요하다. 분석을 활용한 시스템의 최적 디자인도 향후 연구 주제가 될 수 있다.

Acknowledgement

This work was supported by a 2-Year Research Grant of Pusan National University.

References

- [1] Arinez, J., Biller, S., Meerkov, S.M., and Zhang, L., Quality/quantity improvement in an automotive paint shop: A case study, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2010, Vol. 7, No. 4, pp. 755-761.
- [2] Beach, R., Muhlemann, A.P., Price, D.H., Paterson, A., and Sharp, J.A., A review of manufacturing flexibility, *European Journal of Operational Research*, 2000, Vol. 122, No. 1, pp. 41-57.
- [3] Biller, S., Marin, S.P., Meerkov, S.M., and Zhang, L., Closed Bernoulli production lines: Analysis continuous improvement and leanness, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2009, Vol. 6, No. 1, pp. 168-180.
- [4] Buzacott, J.A. and Shanthikumar, J.G., Models for understanding flexible manufacturing systems, *AIIE Transactions*, 1980, Vol. 12, No. 4, pp. 339-349.
- [5] Buzacott, J.A. and Shantikumar, J.G., *Stochastic Models of Manufacturing Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [6] Buzacott, J.A. and Yao, D.D., Flexible manufacturing systems: A review of analytical models, *Management Science*, 1986, Vol. 32, No. 7, pp. 890-905.
- [7] Chang, S., Optimal production capacity and outsourcing production planning for production facility producing multi-products, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2012, Vol. 35, No. 4, pp. 110-117.
- [8] Chiang, S.Y., Kuo, C.T., Lim, J.T., and Meerkov, S.M., Improvability of assembly systems I: Problem formulation and performance evaluation, *Mathematical Problems in Engineering*, 2000, Vol. 6, No. 4, pp. 321-357.
- [9] Chiang, S.Y., Kuo, C.T., Lim, J.T., and Meerkov, S.M., Improvability of assembly systems II: Improvability indicators and case study, *Mathematical Problems in Engineering*, 2000, Vol. 6, No. 4, pp. 359-393.
- [10] Colledani, M., Gandola, F., Matta A., and Tolio, T., Performance evaluation of linear and non-linear multi-product multi-stage lines with unreliable machines and finite homogeneous buffers, *IIE Transactions*, 2008, Vol. 40, No. 6, pp. 612-626.
- [11] Colledani, M., Matta, A., and Tolio, T., Erformance evaluation of production lines with finite buffer capacity producing two different products, *OR Spectrum*, 2005, Vol. 27, No. 2-3, pp. 243-263.
- [12] Feng, W., Zheng, L., and Li, J., Scheduling policies in multi-product manufacturing systems with sequence-dependent setup times and finite buffer, *International Journal Production Research*, 2012, Vol. 50, No. 24, pp. 7479-7492.
- [13] Feng, W., Zheng, L., and Li, J., The robustness of scheduling policies in multi-product manufacturing systems with sequence-dependent setup times and finite buffers, *Computer & Industrial Engineering*, 2012, Vol. 63, No. 4, pp. 1145-1153.
- [14] Feng, Y., Zhong, X., Li, J., and Fan, W., Analysis of closed loop production Lines with Bernoulli reliability machines: theory and application, *IIE Transactions*, 2018, Vol. 50, No. 3, pp. 143-160.
- [15] Han, M.S., Lim, J.T., and Park, D.J., Performance analysis of serial production lines with quality inspection machines, *International Journal of Systems Science*, 1998, Vol. 29, No. 9, pp. 939-951.
- [16] Jacobs, D. and Meerkov, S.M., A system-theoretic property of serial production lines: Improvability, *International Journal of Systems Science*, 1995, Vol. 26, No. 4, pp. 755-785.
- [17] Jang, Y.J., *Mathematical Modeling and Analysis of Flexible Production Lines* [dissertation], [Cambridge, MA, USA] : Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [18] Kim, D.H., Lee, I.S., and Cha, C.N., Determination of the pallet quantity using simulation in the FMS for aircraft parts, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2018, Vol.41, No. 4, pp. 57-59.
- [19] Kuo, C.T., Lim, J.R., and Meerkov, S.M., Bottlenecks in serial production lines: A system-theoretic approach, *Mathematical Problems in Engineering*, 1996, Vol. 2, No. 3, pp. 233-276.
- [20] Krieg, G.N. and Kuhn, H., A decomposition method for multi-product kanban systems with setup times and lost sales, *IIE Transactions*, 2002, Vol.34, No. 7, pp. 613-625.
- [21] Krieg, G.N. and Kuhn, H., Analysis of multi-product

- kanban systems with state-dependent setups and lost sales, *Annals of Operations Research*, 2004, Vol. 125, No. 1-4, pp. 141-166.
- [22] Lee, J.H., Li, J., and Horst, J.A., Serial Production Lines with Waiting Time Limits: Bernoulli Reliability Model, *IEEE Transactions on Engineering Management*, 2017, Vol. 65, No. 2, pp. 316-329.
- [23] Lee, J.H., Zhao, C., Li, J., and Papadopoulos, C.T., Analysis, design, and control of Bernoulli production lines with waiting time constraints, *Journal of Manufacturing Systems*, 2018, Vol. 46, pp. 208-220.
- [24] Li, J., Modeling and analysis of manufacturing systems with parallel lines, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, Vol. 49, No. 10, pp. 1824-1829.
- [25] Li, J. and Meerkov, S.M., *Production Systems Engineering*, New York, Springer, 2008.
- [26] Li, J., Blumenfeld, D.E., Huang, N., and Alden, J.A., Throughput analysis of production systems: Recent advances and future topics, *International Journal of Production Research*, 2009, Vol. 47, No. 14, pp. 3823-3851.
- [27] Li, J. and Meerkov, S.M., Customer demand satisfaction in production systems: A due-time performance approach, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2001, Vol. 17, No. 4, pp. 472-482.
- [28] Lim, J.T., Meerkov, S.M., and Top, F., Homogeneous, asymptotically reliable serial production lines: theory and a case study, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, Vol. 25, No. 5, pp. 524-534.
- [29] Liu, Y. and Li, J., Modelling and analysis of split and merge production systems with Bernoulli reliability machines, *International Journal of Production Research*, 2009, Vol. 47, No. 16, pp. 4373-4397.
- [30] Meerkov, S.M. and Zhang, L., Product quality inspection in Bernoulli lines: analysis, bottlenecks, and design, *International Journal of Production Research*, 2010, Vol. 48, No. 16, pp. 4745-4766.
- [31] Nemeç, J.E., Diffusion and Decomposition Approximations of Stochastic Models of Multiclass Processing Networks [dissertation], [Cambridge, MA, USA] : Massachusetts Institute of Technology, 1998.
- [32] Park, K. and Kim, W., Flexible manufacturing systems for smart factory, *Journal of the Korean Operations Research and Management Science Society*, 2017, Vol. 42, No. 4, pp. 15-29.
- [33] Park, K. and Li, J., Improving productivity of a multiproduct machining line at a motorcycle manufacturing plant, *International Journal of Production Research*, 2019, Vol. 57, No.2, pp. 470-487.
- [34] Park, K., Li, J., and Feng, S.C., Scheduling policy in flexible Bernoulli lines with dedicated finite buffers, *Journal of Manufacturing Systems*, 2018, Vol. 48, pp. 33-48.
- [35] Ryan, S.M. and Vorasayan, J., Allocating work in process in a multiple product CONWIP system with lost sales, *International Journal of Production Research*, 2005, Vol. 43, No. 2, pp. 223-246.
- [36] Satyam, K. and Krishnamurthy, A., Performance evaluation of a multiproduct system under CONWIP control, *IIE Transactions*, 2008, Vol. 40, No. 3, pp. 252-264.
- [37] Sethi, A.K. and Sethi, S.P., Flexibility in manufacturing: a survey, *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 1990, Vol. 2, No.4, pp. 289-328.
- [38] Shi, D. and Daniels, R.L., A survey of manufacturing flexibility: implications for e-business flexibility, *IBM Systems Journal*, 2003, Vol. 42, pp.414-427.
- [39] Syrowicz, D., Decomposition Analysis of a Deterministic, Multiple-part type, Multiple-failure-mode Production Line [master's thesis], [Cambridge, MA, USA] : Massachusetts Institute of Technology, 1999.
- [40] Tempelmeier, H. and Kuhn, H., *Flexible Manufacturing Systems: Decision Support for Design and Operation*, New York, NY, John Wiley & Sons, 1993.
- [41] Viswanadham, N. and Narahari, Y., *Performance Modeling of Automated Manufacturing Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [42] Wang, C. and Li, J., Approximate analysis of reentrant lines with Bernoulli reliability model, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2010, Vol. 7, No. 3, pp. 708-715.
- [43] Zhao, C. and Li, J., Analysis and improvement of multi-product assembly systems: an application study at a furniture manufacturing plant, *International Journal of Production Research*, 2014, Vol. 52, No. 21, pp. 6399-6413.
- [44] Zhao, C. and Li, J., Analysis and improvement of multi-product Bernoulli serial lines: theory and application, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Systems*, 2015, Vol. 45, No. 6, pp. 1218-1230.
- [45] Zhao, C., Li, J., Huang, N., and Horst, J., Flexible lines

with setups: analysis, improvement, and application, *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2017, Vol. 2, No. 1, pp. 120-127.

- [46] Zhou, M. and Venkatesh, K., *Modeling, Simulation and Control of Flexible Manufacturing Systems: A Petri Net Approach*, Singapore, World Scientific Publishing, 1999.

ORCID

Kyungsu Park | <https://orcid.org/0000-0002-5386-5222>

Jun-Hee Han | <https://orcid.org/0000-0003-3292-5705>

Woo-Sung Kim | <https://orcid.org/0000-0001-9444-2712>