

# 공기막 구조물의 형상과 형상 탐색 알고리즘

## Form and Form-Finding Algorithm for Air-supported Membrane Structure



손 수 덕\*  
Shon, Sudeok



하 준 홍\*\*  
Ha, Junhong



이 승 재\*  
Lee, Seungjae

### 1. 공기막 구조물의 분류와 형상

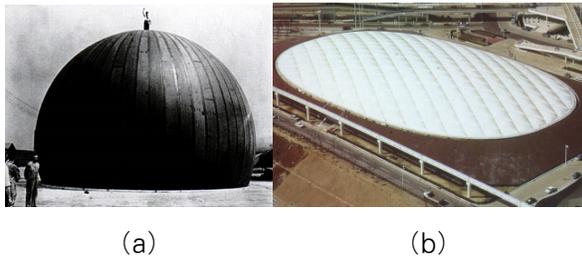
공기 팽창식 구조는 미국의 장교 Walter Bird에 의해 군사용 시설(1948년 Radome <Fig. 1(a)>)로부터 시작하여 실용화되기 시작하였다. 열기구(hot-air balloon)의 원리를 이용하여 발전된 이 기술은 1960년대부터는 창고, 수영장, 스포츠 시설 등의 상업적 용도로 확장되었고, 전람회 또는 전시장을 중심으로 나타나기 시작하였다. 특히, 1970년 오사카 박람회(Expo '70 Osaka)의 미국관(U.S. pavilion, <Fig. 1(b)>)과 후지관(Fuji pavilion)은 공기막 구조물의 가능성을 잘 설명해주었다. 미국관은 David Geiger와 그의 동료들에 의해 계획된 성공적인 사례로서 이를 계기로 미국과 캐나다 전역에 여러 프로젝트를 실현하게

되었고, 1988년에는 200m에 달하는 도쿄 돔(Tokyo dome)으로 대형 공기막의 기술적인 성공을 거두게 되었다. 최근 다양한 사례의 공기막 구조물이 많이 등장하고 있으며, 영구적인 아름다운 구조물로 자리를 잡고 있다.<sup>1)-4)</sup>

공기막구조는 연성구조시스템의 분류체계 중 면재의 공기압방식으로서 단일막(single layered) 또는 이중막(double layered)으로 분류된다.(<Fig. 2> 참조)<sup>4),5)</sup> 단일막과 이중막의 분류와 함께 공기압 방식의 관점에서는 공기지지(air supported)와 공기팽창(air inflatable) 방식으로 다시 설명될 수 있다. 공기 팽창식은 주로 빔(beam)이나 아치(arch)의 형태로 설계되거나 쿠션(Cushion)구조로 계획된다.(<Fig. 3> 참조)<sup>4),5)</sup> 아치형 공기팽창식의 경우는 Expo'70의 후지관 뿐만아니라 2015년에 선보인 토론토의 온타리오 기념관(Ontario Celebration Zone pavilion)에서도 찾아볼 수 있으며, 높이 15m와 길이 60m에 달한다.<sup>3),6)</sup>

\* 한국기술교육대학교 건축공학과  
Department of Architectural Engineering, Korea University of Technology and Education

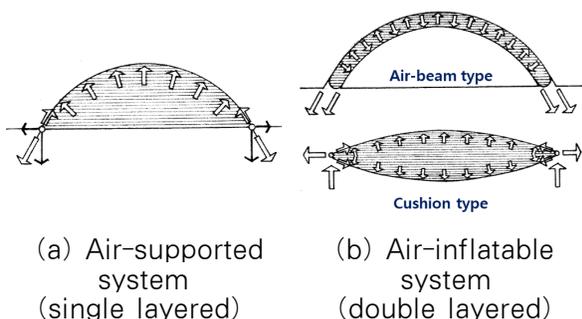
\*\* 한국기술교육대학교 교양학부  
School of Liberal Arts, Korea University of Technology and Education



(a) (b)  
 <Fig. 1> Pnumatic structures<sup>1)~3)</sup>

부재구성방식	구조시스템 명칭	세부 구성방식의 예
선재	일축방향 일방향 케이블구조	단층
		복층
	다축방향 격자형 케이블구조	단층
		복층
	다축방향 방사형 케이블구조	단층
		복층
면재	공기압방식 공기막구조	단일막
		이중막
	장력방식 현수막구조	연성지지
		강성지지
선재 + 면재 (하이브리드)	달림형 달림형 하이브리드 막구조	
	들림형 들림형 하이브리드 막구조	

<Fig. 2> Classification of soft structure system for large spacial structures<sup>4),5)</sup>



(a) Air-supported system (single layered) (b) Air-inflatable system (double layered)

<Fig. 3> Types of Pnumatic structures<sup>4),5)</sup>

인장 구조의 한 분류인 공기막구조는 비누막(soap film) 축소 모형실험으로 초기형태를 결정할 수 있다. 이 형상은 최소곡면(minimal surface)이라 일컫는 안정된 곡면이며, 주어진 공기의 부피를 고려한 최소 표면적 곡면으로 다른 인장 구조 형상과는 달리 곡률 방향이 같다.<sup>1),2)</sup> 이러한 축소 모형의 경우 측정하는 과정에서 오차를 발생할 수 있는 단점이 있다.<sup>7)</sup> 또한, 등장력(constant tension)의 특성을 가진 최소곡면을 변분(variation)법으로 구할 수 있지만, 이 방법으로 구할 수 있는 형상에는 한계가 있다. 즉, 모형을 통한 물리적인 모델이나 수학적 가정을 통해 형상의 함수(function)를 구하는 것은 자유로운 형태(free form)나 역학적인 최적의 상태를 찾는 데는 한계가 있다. 따라서 수치적인 계산기법을 통해서 형상 탐색을 수행하여 구하게 된다.<sup>7)~11)</sup>

이처럼 탐색해 구한 형상을 기초로 풍하중이나 적설하중에 대한 구조물의 변형을 예측하고, 계산된 내력이 허용된 값을 초과하지 않도록 설계한다. 이 과정에서 최적의 형상은 초기장력과 외력에 의한 내력이 적절하게 분포되도록 하며, 필요한 공기압을 예측할 수 있게 한다. 이러한 관점에서 볼 때, 인장 구조의 형상 결정은 매우 중요하다.

## 2. 수치적 형상 탐색 기법

케이블이나 막과 같은 인장 구조의 형상 탐색 기법에서 고려되어야 할 항목은 기하학적인 비선형성이다. 인장 구조물의 임의로 정의된 불안정한 형상은 초기장력으로 인해 안정성이 부여되고, 찾고자 하는 초기 형상은 초기장력에 의해 평형을 이루게 된다. 일반적으로 형상 탐색의 큰 의미는 초기장력에 평형상태인 안정된 최소곡면이나 등장력은 아니지만, 외부조건에 대한 정적 평형상태(static equilibrium state)에 있는 곡면 또는 근사하게 평형상태에 있는 최적의 형태를 찾는 것이다.<sup>7)~9)</sup>

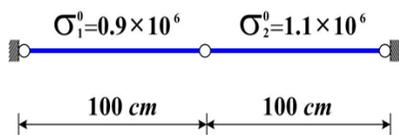
이러한 상태를 추정할 수 있는 수치 기법으로는 접선 강성을 이용한 유한요소(finite element)법, 내력밀

도(force density)법, 동적이완(dynamic relaxation)법 등이 있다. 인장 막과는 달리 공기막은 내부 공기로 인한 공기압(pneumatic pressure)이 고려되며, 비보존(non-conservative)적인 까닭에 반복 연산 단계에서 곡면의 법선 방향의 힘으로 보정된다. 이러한 과정을 제외하면 두 구조 시스템의 형상 탐색은 유사하다.<sup>9)</sup>

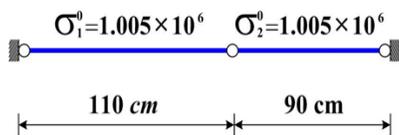
형상 탐색 알고리즘 중에서 접선 강성(tangential stiffness)을 이용하는 방법은 내 외력 간에 불평형력(residual force)  $r$ 이 최소가 되도록 해석하는 것으로서 다음과 같은 기초방정식을 이용한다.

$$f - r = (K_E + K_G)d \quad (1)$$

공기압은 외력  $f$ 로 환산되어 점차 증분되며,  $K_G$ 를 통해서 내력을 고려할 수 있게 된다. 반복 계산되는 변위  $d$ 는 단계마다 갱신되며, 변위로 인해 바뀐 형상은 접선 강성과 불평형력  $r$ 을 갱신할 수 있게 된다. 수정된 상태에 대한 변위  $d$ 의 반복은 불평형력  $r$ 이 0으로 감소할 때까지 수행하며, 최종적으로 내력이 거의 같은 값으로 수렴한다. <Fig. 4>에서 보는 케이블은 접선 강성을 이용한 예제이며, 초기장력이 다른 상태의 케이블에 대해 동일한 장력과 절점이 수평으로 10cm 이동한 결과를 보여주고 있다.<sup>5)</sup>



(a) Initial state



(b) Equilibrium state after analysis

<Fig. 4> Simple cable example<sup>5)</sup>

접선 강성법을 기반으로 삼각형 막 요소의 형상 탐색은 많은 계산량이 필요하며, 반복계산 과정에서 발

산할 때도 있다. 이와 대조적으로 효율적인 연산을 하는 내력밀도법은 케이블 넷트와 같이 모델링하며, 초기장력의 비율이 일정하다는 가정으로 선형방정식으로 정적 평형을 유도한다.

내력밀도법은 부재의 내력을 길이로 나눈 내력 밀도(force density)행렬  $Q$ 와 부재의 연결행렬  $C, C_f$ 를 이용하여 다음과 같은 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} Ax + A_f x_f &= f_x \\ Ay + A_f y_f &= f_y \\ Az + A_f z_f &= f_z \end{aligned} \quad (2)$$

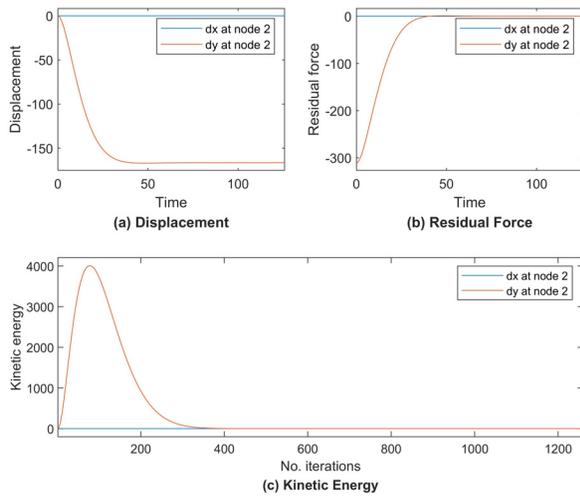
여기서,  $A = C^T Q C$  및  $A_f = C^T Q C_f$ 이며, 각각은 경계 절점과 자유 절점의 선형시스템에 해당한다. 따라서 위 식은  $x, y, z$ 를 경계점의 좌표와 내력 밀도로 구할 수 있는 합리적인 탐색 결과를 얻게 된다.<sup>7),12)</sup>

앞의 두 방법과는 달리 동적이완법은 동적인 효과를 이용하여 정적 평형상태를 찾는 기법이며, 유한 차분법에 근사하여 편미분 방정식을 해석한다. 이 과정에서 과감쇠(over damping)나 운동감쇠(kinetic damping)를 이용하여 정적인 평형상태를 예측한다.

기본적으로 이 방법은 식(3)과 같은 내 외의 불평형력  $r$ 을 0으로 수렴시키기 위해서 점성 감쇠(viscous damping)계수  $C$ 를 이용해 계산한다.<sup>7),13)</sup>

$$r = M \ddot{d} + C \dot{d} \quad (3)$$

즉, 정적 평형상태는 불평형력이 0이 되는 상태를 의미하므로 이러한 상태가 되도록 동적해석을 수행하는 것이다. <Fig. 5>는 현수 케이블의 초기장력과 중앙부 수직 처짐에 대한 형상을 해석한 것으로 <Fig. 5(a)>에서 보는 바와 같이 변위는 진동하지 않고 수렴하는 과감쇠 시스템의 결과를 보여주고 있다. 이에 대한 불평형력과 운동에너지는 <Fig. 5(b),(c)>와 같이 0으로 수렴한다.



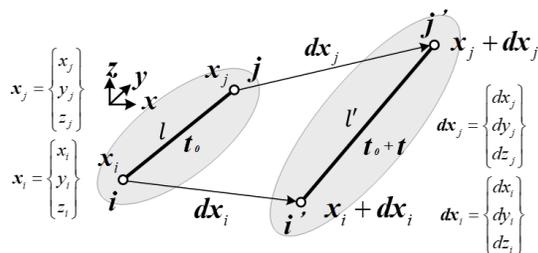
〈Fig. 5〉 Analysis results of dynamic relaxation method

동적이완법에서 운동감쇠를 이용할 경우 감쇠계수를  $C=0$ 로 가정하며, 이것은 비감쇠 시스템이다. 다만, 운동에너지가 최대가 될 때 위치에너지가 최소가 되는 원리를 이용하여 해석과정에 적용한다.

### 3. 비선형 최적화를 이용한 형상 탐색

유한요소법이나 동적이완법은 불평형력이 0에 가깝도록 반복해석을 하지만 내력법에 기초를 둔 방법은 비교적 쉽게 방정식을 구성할 수 있다. 본 고에서는 비선형 최적화 문제로 형상을 구하기 위해 내력법을 이용하도록 한다. 변형 후 형상에 기초하여 평형방정식과 적합방정식을 구성함으로써 기하학적 비선형을 고려할 수 있게 된다.<sup>11),14)</sup>

〈Fig. 6〉과 같이 요소의 길이  $l$ 인 부재는 변형 후에도 평형을 이루며,  $l'$ 로 길이가 바뀌게 된다. 두 상태



〈Fig. 6〉 Relationship between initial and deformed shape

에 대한 기하학적인 관계를 얻기 위해서 절점좌표 벡터  $x_i, x_j$ 와 절점변위 벡터  $d_i, d_j$ 를 각각 정의하고, 평형방정식을 구하도록 한다.

변형 전과 후의 요소 길이를 절점좌표와 변위로 표현하고, 차이를 신장량으로 정의하면, 다음과 같다.

$$e = l' - l \tag{4}$$

변형 후의 상태에서 각 절점은 외력과 내력 사이에 평형을 이룬다. 즉, 하중  $p$ 는 각 부재의 초기 내력  $t_0$ 와 외력에 의한 내력  $t$ 의 관계에서 평형을 이루며 다음과 같다.

$$p_{(i)} = \sum_{k=1}^{c_{(i)}} (t_{0(k)} + t_{(k)}) \cos \theta_{(i)} \tag{5}$$

여기서,  $\cos \theta$ 는 방향여현,  $c_{(i)}$ 는  $i$ 번째 절점의 연결 부재 수이다. 탄성 변형에 대해서만 고려하므로 적합 조건은  $i$ 번째 부재의 유연도 성분으로 나타낼 수 있으며, 유효폭  $w_e$ 로 표현할 수 있다.

$$e_{(i)} = tF_{(i)} = t \frac{l_{(i)}}{E w_{e(i)}} \tag{6}$$

따라서, 식(4)와 (6)의 불균형  $f_c(\zeta)$ 와 식(5)의 평형에 대한 불평형  $f_e(\zeta)$ 를 계산하면 다음과 같은 비선형 방정식을 구할 수 있다. 여기서,  $\zeta = \{d : t\}^T$ 이다.

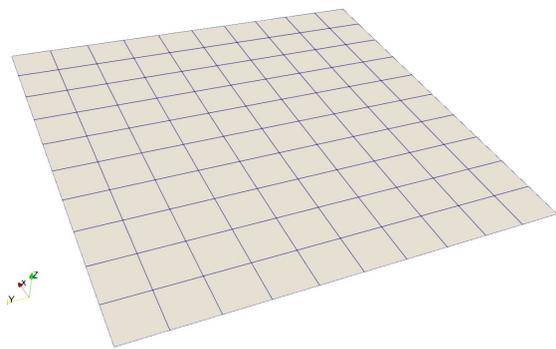
$$f_{c(i)}(\zeta) = l_{(i)}' - l_{(i)} - t_{(i)}F_{(i)} \tag{7}$$

$$f_{e(j)}(\zeta) = \sum_{k=1}^{c_{(j)}} (t_{0(k)} + t_{(k)}) \cos \theta_{(j)} - p_{(j)}$$

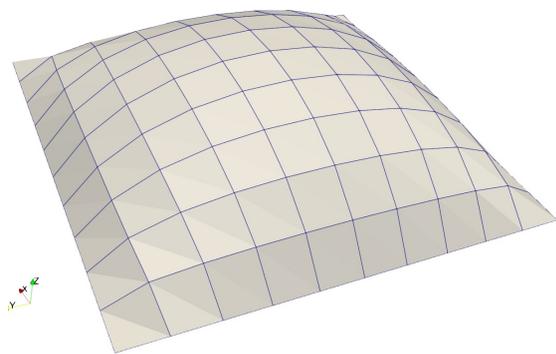
여기서,  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, N$ 이며, 각각의 내력 벡터의 크기와 총 절점의 수  $N$ 개가 얻어진다. 따라서 두 불균형적 관계들이 0이 되는 다음과 같은 방정식을 만족하는 것이 곧 변형 후의 형상에서 평형상태가 된다.

$$\mathbf{f}(\zeta) = \begin{Bmatrix} f_c(\zeta) \\ \vdots \\ f_e(\zeta) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (8)$$

위 식은 곧 비선형 최적화 문제의 형성과 같고, 함수  $f(\zeta)$  가 0인 지점을 탐색하여 변형 후의 평형상태를 구한다. 해를 탐색하는 방법은 Matlab 라이브러리를 이용한다. 공기막의 경우 공기압은 막의 법선 방향에 작용하므로 해석과정에서 수정되어야 한다. 따라서, 단계별 법선면을 계산하며, 형상의 초기 단계 탐색과 평형 단계의 탐색으로 나누어 진행하도록 알고리즘을 구성한다.



(a) Initial shape



(b) Final shape

〈Fig. 7〉 Pneumatic membrane model of double curvature square

공기막의 형상 탐색 예제로 〈Fig. 7(a)〉와 같은 이중 곡률 정사각형 모델을 살펴본다. 공기막의 길이와 폭은 각각 100m × 100m이고, 10분할된 모델로 탐색하였다. 초기조건으로 막의 탄성계수  $E$ 는 Warp과 fill

방향 모두 500kN/m, 자중(self-weight)은 단위질량을 5kg/m<sup>2</sup>로 가정하였다. 또한, 공기압은 300Pa, 초기장력은 2kN/m이 작용하는 모델이다. 공기막의 높이는 23m를 기준으로 해석 단계를 나누었다.

모델의 형상 탐색 결과는 〈Fig. 7(b)〉와 같다. 초기 단계에서 공기압이 고려된 평면은 내압과 초기장력 및 자중과의 관계에서 평형을 이루고 있다. 이 관계는 단계별 해석에서도 적용되며, 단계마다 평형상태를 고려한 결과를 얻을 수 있다.

#### 4. 결론

공기막구조의 설계에서 시작점이 되는 형상 탐색은 내부 공기의 부피를 포함한 최소곡면이나 이에 근사하는 형상을 구하는 과정으로써 다양한 방법들이 개발되었다. 이러한 형상도 조건에 따라 다양한 최적 곡면이 결정될 수 있으며, 이를 찾는 방법들을 본 고에서 다루었다. 또한 비선형 최적화 기법을 적용한 새로운 기법을 설명하였다. 다루어진 알고리즘은 비선형 내력법에 기초한 지배방정식과 공기압을 고려한 2단계의 해석과정으로 형상을 탐색할 수 있었다. 초기 형상을 탐색하는 방법들은 모두 장단점이 있으며, 이러한 해석적인 접근의 완성도를 위해서는 축소 모형을 통한 형상의 탐색을 병행하는 것이 바람직하다.

#### 감사의 글

이 원고는 2019년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(NRF-2019R1F1A1058327 및 NRF-2019R1A2C2010693)

#### References

1. Shon, S.D., Jeong, E.S. & Kim, S.D., "A study on the nonlinear stress-deformation analysis and design of unity-typed pneumatic structures under the design load," Journal of the Korean Association for Shell and Spatial

- Structures, Vol.5, No.2, pp.47–55, 2005
2. Liuti A., “Design and construction interfaces: the pneumatic erection of gridshells,” 2018 (URL: <http://hdl.handle.net/11343/214578>)
  3. Chi, J., Pauletti, R. & Pauletti, O., “An outline of the evolution of pneumatic structures,” 2021 (URL: [www.researchgate.net/publication/228655700\\_An\\_outline\\_of\\_the\\_evolution\\_of\\_pneumatic\\_structures](http://www.researchgate.net/publication/228655700_An_outline_of_the_evolution_of_pneumatic_structures))
  4. Lee, J.N., Park, S.W., Kim, S.D. & Park, C.S., “The term and classification of structure system with non-rigid member,” Journal of the Korean Association for Shell and Spatial Structures, Vol.4, No.2, pp.99–105, 2004
  5. “Development of Design and Construction Technology of Large Spatial Structures”, Korea research foundation, 2007 (URL: <https://scienceon.kisti.re.kr/srch/selectPORSrchReport.do?cn=TRKO200700007317>)
  6. Junghohann, H. & Woodington, W., “Ontario Celebration Zone Pavilion: A Large Pneumatic Structure,” Procedia Engineering, Vol.155, pp.507–515, 2016
  7. Lewis, W.J., “Tension structures,” Thomas Telford, 2003
  8. Shon, S.D., Kim, S.D., Jeong, E.S. & Jeon, J.H., “A study on estimate for error and convergence of membrane structures according to the nonlinear form-finding techniques,” Journal of the Korean Association for Shell and Spatial Structures, Vol.7, No.3, pp.57–66, 2007
  9. Sur, S., Lee, J.B. & Kwun, T.J., “A study on the shape-finding analysis of pneumatic structures,” Journal of the Architectural Institute of Korea, Structure & Construction, Vol.14, No.5, pp.285–292, 1998
  10. Park, S.W., Kim, S.D., Shon, S.D. & Jeong, E.S., “A study on the shape-decision technique of membrane structures according to the design process and shape analysis,” Journal of the Korean Association for Shell and Spatial Structures, Vol.7, No.2, pp.115–124, 2007
  11. Kwan, A.S.K., “A new approach to geometric nonlinearity of cable structures”, Computer & Structures, Vol.67, pp.813–828, 1998
  12. Jiang, Y., Zegard, T., Baker, W.F. et al. Form-finding of grid-shells using the ground structure and potential energy methods: a comparative study and assessment, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.57, pp.1187–1211, 2018
  13. Pauletti, R.M.O., Pappalardo-Jr, A. & Guirardi, D.M., “The method of dynamic relaxation for the static nonlinear analysis of cable and membrane structures,” IASS–SLTE International Sym. 2008, Acapulco, Mexico
  14. Shon, S.D., Kwan, A.S.K., & Lee, S.J., “Shape control of cable structures considering concurrent/sequence control,” Structural Engineering and Mechanics, Vol.52, No.5, pp.919~935, 2014