

https://doi.org/10.7236/JIIBC.2021.21.4.177
JIIBC 2021-4-25

혼합 최적화 문제의 성분 함량 조절 알고리즘

Algorithm for Grade Adjust of Mixture Optimization Problem

이상운*

Sang-Un, Lee *

요 약 다양한 원재료를 혼합하여 원하는 성분 함유량을 가진 제품을 최소의 비용으로 생산하는 혼합 최적화 문제에 대해 일반적으로 $O(n^4)$ 의 수행 복잡도의 선형계획법을 적용하고 있다. 본 논문에서는 이 문제에 대해 $O(n \log n)$ 복잡도로 해를 얻을 수 있는 휴리스틱 알고리즘을 제안한다. 제안된 알고리즘은 합금 강판에서 요구하는 성분들의 함유량 범위를 충족시키면서 최소의 원자재비용을 얻기 위해, 원재료 단가 오름차순으로 성분별 함유량을 충족시키도록 원재료 양을 결정하였다. 3가지 사례에 대해 적용한 결과 제안된 알고리즘은 $O(n \log n)$ 복잡도로 단순한 결정기법을 적용하였음에도 불구하고, LP의 최적화 기법과 동일하거나 보다 좋은 해를 얻을 수 있었다.

Abstract Generally, the linear programming (LP) with $O(n^4)$ time complexity is applied to mixture optimization problem that can be produce the given ingredients grade product with minimum cost from mixture of various raw materials. This paper suggests heuristic algorithm with $O(n \log n)$ time complexity to obtain the solution of this problem. The proposed algorithm meets the content range of the components required by the alloy steel plate while obtaining the minimum raw material cost, decides the quantity of raw material that is satisfied with ingredients grade for ascending order of unit cost. Although the proposed algorithm applies simple decision technique with $O(n \log n)$ time complexity, it can be obtains same solution as or more than optimization technique of linear programming.

Key Words : Mixture optimization, Grade, Linear programming, Grade adjust, Minimum cost

1. 서 론

m 개 성분에 대한 함유량을 갖고 있는 단가 $c_i, (i=1,2,\dots,n)$ 인 S_i 개의 원자재들 (raw materials)이 있다. 이 원자재들을 혼합하여 m 개 성분의 제약조건을 충족하는 제품을 최소비용 $z = \min \sum_{i=1}^n c_i x_i$ 로 생산하고자

한다. 이 경우 x_i 의 배정량을 구하는 문제를 혼합 최적화 문제 (mixture optimization problem, MOP)라 한다.^[1]

MOP에 대해 Sutton과 Coates^[2]은 스테인리스 생산 공정의 혼합비율을 계산하는 방법을 제안하였으며, 강판에 대한 합금 원자재 혼합비율에 대해서는 Guéret et al.^[3], Edvall^[4]과 Hawley^[5]가 있으며, 동물사료 혼합비

*정회원, 강릉원주대학교 과학기술대학 멀티미디어공학과
접수일자 : 2021년 2월 19일, 수정완료 : 2021년 7월 29일
게재확정일자 : 2021년 8월 6일

Received: 19 February, 2021/ Revised: 29 July, 2021 /
Accepted: 6 August, 2021

*Corresponding Author: sulee@gwnu.ac.kr
Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National
University, Korea

율에 대해서는 Jensen과 Bard^[1]가 있다. 이들 연구 결과 모두 선형계획법 (linear programming, LP)과 CPLEX를 적용하고 있다. LP중 하나인 Ellipsoid 알고리즘의 수행 복잡도는 $O(m^4)$ 로 알려져 있다.^[6]

본 논문에서는 MOP에 대해 $O(n \log n)$ 의 다항시간 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 Guéret et al.^[3]이 제시한 MOP 사례를 고찰해본다. 3장에서는 MOP에 대해 $O(n \log n)$ 복잡도로 최적 해를 구할 수 있는 규칙을 제시한 휴리스틱 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 알고리즘을 실제 데이터에 적용하여 알고리즘 적합성을 평가해 본다.

II. 합금강판 생산 문제의 혼합 최적화

Guéret et al.^[3]은 표 1과 같이 선박건조에 사용되는 500톤의 철강 강판을 주문받은 철강회사의 예를 제시하였다. 이 회사는 주문된 철강을 생산하기 위해 필요한 표 2의 7가지 종류의 원자재를 확보하고 있다. 이 회사는 500톤에 대한 성분 함유량을 충족시키면서, 최소의 비용으로 철강을 생산하고자 한다. 이 경우 어떤 원자재를 얼마나 사용해야 하는가가 문제이다.

표 1. P_1 문제의 주문된 철강의 특성

Table 1. Characteristics of steel ordered of P_1 problem

Chemical element	Minimum grade	Maximum grade
Carbon (C)	2.00 %	3.00 %
Copper (Cu)	0.40 %	0.60 %
Manganese (Mn)	1.20 %	1.65 %
주문량	500 ton	

표 3. P_1 문제에 대한 LP와 CPLEX의 결과

Table 3. Results of LP and CPLEX for P_1 problem

Raw material	LP								
	C %	Cu %	Mn %	Actual (ton)	Unit cost (€/ton)	Total cost	C %	Cu %	Mn %
Iron alloy #1	2.5	0.0	1.3	400.000	200	80,000.0000	2.0000	0.0000	1.0400
Iron alloy #2	3.0	0.0	0.8	0.000	250	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Iron alloy #3	0.0	0.3	0.0	39.777	150	5,966.5500	0.0000	0.0239	0.0000
Copper alloy #1	0.0	90.0	0.0	0.000	220	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Copper alloy #2	0.0	96.0	4.0	2.761	240	662.6400	0.0000	0.5301	0.0221
Aluminum alloy #1	0.0	0.4	1.2	57.462	200	11,492.4000	0.0000	0.0460	0.1379
Aluminum alloy #2	0.0	0.6	0.0	0.000	165	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Requirement	[2,3]	[0.4,0.6]	[1.2,1.65]	500.000		98,121.5900	2.0000	0.5999	1.2000

표 2. 원자재 등급, 가용량과 가격

Table 2. Raw material grades, availabilities, and prices

Raw material	C (%)	Cu (%)	Mn (%)	Availability (ton)	Unit cost (€/ton)
Iron alloy #1	2.5	0.0	1.3	400	200
Iron alloy #2	3.0	0.0	0.8	300	250
Iron alloy #3	0.0	0.3	0.0	600	150
Copper alloy #1	0.0	90.0	0.0	500	220
Copper alloy #2	0.0	96.0	4.0	200	240
Aluminum alloy #1	0.0	0.4	1.2	300	200
Aluminum alloy #2	0.0	0.6	0.0	250	165

이 문제는 그림 1과 같이 표현할 수 있으며, 합금강판 생산 문제 (alloyed steel plate production problem, ASPPP)라 하며, 혼합 최적화 문제 (MOP)의 일종이다. Guéret et al.^[3]은 표 1과 2의 데이터에 대해 선형계획법 패키지를 활용하여 표 3과 같이 €98,121.5900을, Edvall^[4]은 CPLEX를 MATLAB 프로그램으로 작성하여 €98,121.6370의 결과를 얻었다.

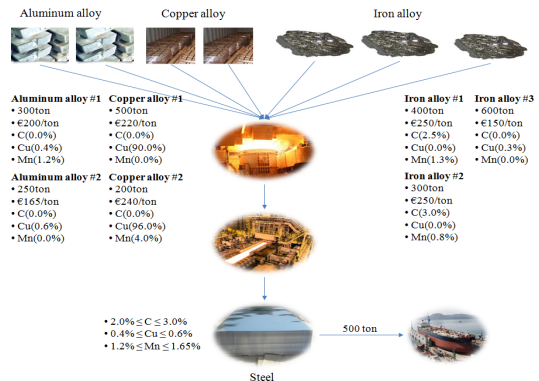


그림 1. 합금 강판 생산 공정

Fig. 1. Production process of alloyed steel plate

3장에서는 $O(n \log n)$ 의 복잡도로 MOP의 최적 해를 얻을 수 있는 규칙을 제시한 휴리스틱 알고리즘을 제안한다.

III. 성분 함량 조절 알고리즘

본 장에서는 합금 강판에서 요구하는 성분들 (탄소, 구리, 망간 등)의 함유량 범위를 충족시키면서 최소의 원자재비용을 얻기 위해, 원자재의 단가 오름차순으로 정렬하고, 성분 함유량을 조절하는 단순한 방법을 제안한다.

제안된 알고리즘을 성분 함량 조절 알고리즘 (grade adjust algorithm, GAA)이라 하며 다음과 같이 수행된다.

Step 1. 원자재들을 단가 (unit cost) 오름차순으로 정렬한다.

/* 수행 복잡도 : $O(n \log n)$ */

Step 2. 해당 성분들을 함유하고 있는 원자재들 개수를 파악한다. /* 수행 복잡도 : $O(n)$ */

최소 개수를 가진 성분부터 오름차순으로 해

당 원자재의 실제 투입량을 결정한다. 이 경우, 최종 합금 강판의 성분 함유량 범위를 충족시켜야 하며, 원자재 투입량은 단가 오름차순으로 조절한다.

Step 3. 총비용 최소화를 위한 원자재 량 조절

/* 수행 복잡도 : $O(n)$ */

성분 함유량 범위를 만족시키면서 최소 비용 원자재를 보다 많이 사용할 수 있는 경우 원자재 투입량 조절

Guéret et al.[3]은 MOP를 최적화 문제로 보아 $O(n^4)$ 수행 복잡도를 갖는 선형계획법의 최적화 문제를 풀고자 한 반면 제안된 알고리즘은 결정 문제로 보고 $O(n \log n)$ 복잡도로 해를 구할 수 있었다.

IV. 실험 및 결과 분석

본 장에서는 첫 번째로, Guéret et al.[3]이 제시한 표

표 4. P_1 문제에 대한 GAA의 결과

Table 4. Results of GAA for P_1 problem

Raw material	C (%)	Cu (%)	Mn (%)	Available (ton)	Actual (ton)	Unit cost (€/ton)	Total cost	C (%)	Cu (%)	Mn (%)
Iron alloy #3	0.0	0.3	0.0	600	0	150	0	0.0000	0.0000	0.0000
Aluminum alloy #2	0.0	0.6	0.0	250	0	165	0	0.0000	0.0000	0.0000
Iron alloy #1	2.5	0.0	1.3	400	400.0000	200	80,000.0000	200000	0.0000	1.0400
Aluminum alloy #1	0.0	0.4	1.2	300	0	200	0	0.0000	0.0000	0.0000
Copper alloy #1	0.0	90.0	0.0	500	0	220	0	0.0000	0.0000	0.0000
Copper alloy #2	0.0	96.0	4.0	200	0	240	0	0.0000	0.0000	0.0000
Iron alloy #2	3.0	0.0	0.8	300	0	250	0	0.0000	0.0000	0.0000
계					400.0000		80,000.0000	2.0000	0.0000	1.0400
Requirement					500.0000			$2.0 \leq C \leq 3.0$	$0.4 \leq Cu \leq 0.6$	$1.2 \leq Mn \leq 1.65$

Raw material	C (%)	Cu (%)	Mn (%)	Available (ton)	Actual (ton)	Unit cost (€/ton)	Total cost	C (%)	Cu (%)	Mn (%)
Iron alloy#3	0.0	0.3	0.0	600	38.0000	150	5,700.0000	0.0000	0.0228	0.0000
Aluminum alloy #2	0.0	0.6	0.0	250	0	165	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Iron alloy#1	2.5	0.0	1.3	400	400.0000	200	80,000.0000	2.0000	0.0000	1.0400
Aluminum alloy #1	0.0	0.4	1.2	300	60.0000	200	12,000.0000	0.0000	0.0480	0.1440
Copper alloy #1	0.0	90.0	0.0	500	0	220	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Copper alloy #2	0.0	96.0	4.0	200	2.0000	240	480.0000	0.0000	0.3840	0.0160
Iron alloy #2	3.0	0.0	0.8	300	0	250	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
계					500.0000		98,180.0000	2.0000	0.4548	1.2000
Requirement					500.0000			$2.0 \leq C \leq 3.0$	$0.4 \leq Cu \leq 0.6$	$1.2 \leq Mn \leq 1.65$

Raw material	C (%)	Cu (%)	Mn (%)	Available (ton)	Actual (ton)	Unit cost (€/ton)	Total cost	C (%)	Cu (%)	Mn (%)
Iron alloy #3	0.0	0.3	0.0	600	39.7910	150	5,968.6500	0.0000	0.0239	0.0000
Aluminum alloy #2	0.0	0.6	0.0	250	0	165	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Iron alloy #1	2.5	0.0	1.3	400	400.0000	200	80,000.0000	2.0000	0.0000	1.0400
Aluminum alloy #1	0.0	0.4	1.2	300	57.4500	200	11,490.0000	0.0000	0.0460	0.1379
Copper alloy #1	0.0	90.0	0.0	500	0	220	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Copper alloy #2	0.0	96.0	4.0	200	2.7590	240	662.1600	0.0000	0.5297	0.0221
Iron alloy #2	3.0	0.0	0.8	300	0	250	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
계					500.0000		98,120.8100	2.0000	0.5996	1.2000
Requirement					500.0000			$2.0 \leq C \leq 3.0$	$0.4 \leq Cu \leq 0.6$	$1.2 \leq Mn \leq 1.65$

1과 2의 문제에 대해 GAA를 적용하여 본다. 표 1과 2의 문제에 대해 GAA를 수행한 결과는 표 4에 제시되어 있다.

첫 번째 표는 단가 오름차순으로 정렬하고 각 성분의 함유량을, C는 2개, Cu는 5개, Mn은 4개의 원자재가 함유하고 있다. 따라서 첫 번째로, C를 포함한 Iron alloy #1과 Iron alloy #2 중에서 최소의 비용이 소요되는 Iron alloy #1을 선택하였다. Iron alloy #1은 C(2.5%)인 400톤을 사용할 수 있으며, 500톤에 대한 함유량은 $400/500 \times 2.5\% = 2.0\%$ 로 $2.0\% \leq C \leq 3.0\%$ 의

요구조건을 충족시킨다. 두 번째 표는 Aluminum alloy #1과 Copper alloy #2로 Mn 함유량을 조절하고, 나머지는 Cu의 함유량을 충족시키기 위해 최소 단가인 Iron alloy #3을 배정한 결과이다. 세 번째 표는 Cu와 Mn 함유량을 충족시키면서 총비용을 최소화시키도록 Iron alloy#3, Aluminum alloy#1과 Copper alloy#2로 조절된 결과이다.

다음으로, Hawley^[5]에서 인용된 표 5의 P_2 문제에 대해 제안된 알고리즘을 적용하여 보자. 이 문제는 4가지

표 5. P_2 문제의 철강 특성

Table 5. Characteristics of steel for P_2 problem

Raw metal	Density	Carbon (C %)	Phosphor (P %)	Price (\$/kg)
A	6500	0.200	0.050	2.000
B	5800	0.350	0.015	2.500
C	6200	0.150	0.065	1.500
D	5900	0.110	0.100	2.000
Requirement	[5950,6050]	[0.1, 0.3]	[0.045, 0.055]	

표 6. P_2 문제에 대한 LP의 결과

Table 6. Results of LP for P_2 problem

Raw metal	Density	Carbon (C %)	Phosphor (P %)	Price (\$/kg)	Actual	Density	Carbon (C %)	Phosphor (P %)	Price (\$/kg)
A	6500	0.200	0.050	2.000	0.000	0	0	0	0.000
B	5800	0.350	0.015	2.500	0.285	1653	0.09975	0.004275	0.713
C	6200	0.150	0.065	1.500	0.595	3689	0.08925	0.038675	0.893
D	5900	0.110	0.100	2.000	0.120	708	0.0132	0.012	0.240
Requirement	[5950,6050]	[0.1, 0.3]	[0.045, 0.055]		1.000	6050.0000	0.2022	0.0550	1.84500
						[5950,6050]	[0.1, 0.3]	[0.045, 0.055]	

표 7. P_2 문제에 대한 GAA의 결과

Table 7. Results of GAA for P_2 problem

Raw metal	Density	Carbon (C %)	Phosphor (P %)	Price (\$/kg)	Actual	Density	Carbon (C %)	Phosphor (P %)	Price (\$/kg)
C	6200	0.150	0.065	1.500	0.600	3720	0.09	0.039	0.900
A	6500	0.200	0.050	2.000	0.000	0	0	0	0.000
D	5900	0.110	0.100	2.000	0.100	590	0.011	0.01	0.200
B	5800	0.350	0.015	2.500	0.300	1740	0.105	0.0045	0.750
계					1.000	6050.0000	0.2060	0.0535	1.8500
Requirement	[5950,6050]	[0.1, 0.3]	[0.045, 0.055]			[5950,6050]	[0.1, 0.3]	[0.045, 0.055]	

Raw metal	Density	Carbon (C %)	Phosphor (P %)	Price (\$/kg)	Actual	Density	Carbon (C %)	Phosphor (P %)	Price (\$/kg)
C	6200	0.150	0.065	1.500	0.590	3658	0.0885	0.03835	0.885
A	6500	0.200	0.050	2.000	0.000	0	0	0	0.000
D	5900	0.110	0.100	2.000	0.120	708	0.0132	0.012	0.240
B	5800	0.350	0.015	2.500	0.290	1682	0.1015	0.00435	0.725
계					1.000	6048.0000	0.2032	0.0547	1.85000
Requirement	[5950,6050]	[0.1, 0.3]	[0.045, 0.055]			[5950,6050]	[0.1, 0.3]	[0.045, 0.055]	

종류의 원자재의 밀도, 탄소와 형광물질 함유량을 나타내고 있으며, 생산되는 제품의 탄소와 형광물질에 대한 함유량 제약조건 범위가 주어졌다. 만약, 1 kg을 기준으로 최소의 비용으로 제품을 생산한다면 어떤 원자재를 얼마의 양으로 혼합해야 하는가가 문제이다. 이 문제에 대해 Hawley^[5]는 LP를 적용하여 표 6과 같이 \$1.845000/kg의 결과를 얻었다. 표 5에 대해 GAA를 적용한 결과는 표 7에 제시되어 있으며, Hawley[3]와 동일하게 \$1.845000 /kg의 결과를 얻었다. P_2 에 대한 GAA는 비용 오름차순은 원자재 C,A,D,B 순이며, C의 배정량을 결정한 결과 원자재 A는 밀도 (density)의 상한값을 초과하여 배정되지 않는다. 따라서 원자재 D, B로 성분 C와 P의 함유량을 조절하도록 배정량을 결정한 초기치를 얻었다. 이 초기치에 대해 최소 비용이 되도록 원자재 C, D, B의 양을 조절하여 최종 결과를 얻었다. 마지막으로, Jensen과 Bard[5]에서 인용된 표 8의 P_3 문제에 대해 제안된 알고리즘을 적용하여 보자.

표 8. 동물사료 P_3 문제의 특성

Table 8. Characteristics of animal feed P_3 problem

Ingredient	Calcium (kg/kg)	Protein (kg/kg)	Fiber (kg/kg)	Unit cost (€/kg)
Limestone	0.380	0.000	0.000	10.0
Corn	0.001	0.090	0.020	30.5
Soybean meal	0.002	0.500	0.080	90.0
Requirement	[0.008, 0.012]	≥0.22	≤0.05	

이 문제는 3가지 종류의 원자재로 동물사료를 생산하는 경우이다. 만약, 1 kg을 기준으로 최소의 비용으로 동

표 9. P_3 문제에 대한 GAA의 결과

Table 9. Results of GAA for P_3 problem

Ingredient	Calcium (kg/kg)	Protein (kg/kg)	Fiber (kg/kg)	Unitcost (cent/kg)	Actual	Calcium (kg/kg)	Protein (kg/kg)	Fiber (kg/kg)	Cost (€/kg)
Limestone	0.380	0.000	0.000	10.0	0.028	0.0106	0.0000	0.0000	0.2800
Corn	0.001	0.090	0.020	30.5	0.592	0.0006	0.0533	0.0118	18.0560
Soybean meal	0.002	0.500	0.080	90.0	0.380	0.0008	0.1900	0.0304	34.2000
Total					1.000	0.0120	0.2433	0.0422	52.5360
Requirement						[0.008, 0.012]	≥0.22	≤0.05	

Ingredient	Calcium (kg/kg)	Protein (kg/kg)	Fiber (kg/kg)	Unitcost (cent/kg)	Actual	Calcium (kg/kg)	Protein (kg/kg)	Fiber (kg/kg)	Cost (€/kg)
Limestone	0.380	0.000	0.000	10.0	0.028	0.0106	0.0000	0.0000	0.2800
Corn	0.001	0.090	0.020	30.5	0.648	0.0006	0.0583	0.0130	19.7640
Soybean meal	0.002	0.500	0.080	90.0	0.324	0.0006	0.1620	0.0259	29.1600
Total					1.000	0.0119	0.2203	0.0389	49.2040
Requirement						[0.008, 0.012]	≥0.22	≤0.05	

물사료를 생산한다면 어떤 원자재를 얼마의 양으로 혼합해야 하는가가 문제이다. 이 문제에 대해 Jensen과 Bard[5]는 LP를 적용하는 수식만을 제시하였고, 해는 구하지 않았다. 표 8에 대해 GAA를 적용한 결과는 표 9에 제시되어 있으며, €49.2040/kg의 결과를 얻었다.

P_3 에 대한 GAA는 Limestone, Corn과 Soybean meal의 초기치를 결정하고, Corn과 Soybean meal의 양을 조절하여 최적 해를 얻었다.

제안된 GAA를 LP, CPLEX와 성능을 비교한 결과는 표 10에 제시하였다. GAA는 P_1 에 대해서는 최적의 값을 나타내었으며, P_2 에 대해서는 LP와 동일한 값을, P_3 에 대해서는 새로운 해를 구하였다.

결론적으로, 제안된 알고리즘은 LP의 $O(n^4)$ 의 최적화 과정을 $O(n \log n)$ 배정 과정으로 수행 복잡도를 단 순화 시킬 수 있었다.

제안된 알고리즘은 MOP 알고리즘들 중에서 가장 간단히 해를 구할 수 있는 관계로, MOP 문제에 직면한 경우 선형계획법 전문가의 도움 없이도 Excel을 활용해 자체적으로 해결할 수 있는 방법을 제공하였다.

표 10. 알고리즘 성능 비교

Table 10. Compare with algorithm performance

문제	알고리즘		
	LP	CPLEX	GAA
P_1	€98,121.5900	€98,121.6370	€98,120.8100
P_2	\$1.84500	-	\$1.84500
P_3	-	-	€49.2040

References

- [1] P. A. Jensen and J. F. Bard, "Operations Research Models and Methods: Blending or Mixing Problem", http://www.me.utexas.edu/~jensen/or_site/models/unit/lp_model/blending/blend1.html, Feb. 2000.
- [2] D. W. Sutton and P. A. Coates, "On-line Mixture Calculation System for Stainless Steel Production by BSC Stainless: the Least Through Cost Mix System (LTCM)", Journal of the Operational Research Society, Vol. 32, No. 3, pp. 165-169, Mar. 1981, <https://doi.org/10.2307/2581058>
- [3] C. Guéret, X. Prins, and M. Sevaux, "Applications of Optimization with Xpress-MP: 6.1 Production of Alloys", Dash Optimization Ltd., pp. 62-65, Feb. 2005.
- [4] M. Edvall, "Production of Alloys", Tomlab Optimization Inc, http://tomsym.com/examples/tomsym_productionofalloys.html, Apr. 2009.
- [5] D. E. Hawley, "Excel Hacks: 100 Industrial- Strength Tips and Tools, Alloy Mixture Optimization (Minimize Expenses)", <http://www.ozgrid.com/Services/linear-alloy-mixture.htm>, O'Reilly Media, Mar. 2004.
- [6] D. Alevras and M. W. Padberg, "Linear Optimization and Extensions: Problems and Extensions", Universitext, Springer-Verlag, 2001.

저 자 소 개

이 상 운(정회원)



- 1987년 : 한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
- 1997년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
- 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
- 2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과 전임강사
- 2004년 ~ 2007년 2월 : 국립 원주대학 여성교양과 조교수
- 2007년 3월 ~ 2015년 3월 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
- 2015년 4월 ~ 현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 정교수
- 관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 개발 방법론, 시험 및 품질보증, 소프트웨어 신뢰성, 최적화 알고리즘, 딥러닝 신경망, 빅데이터분석
- e-mail : sulee@gwnu.ac.kr