韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2021.35.2.193
제 35집 제 2호, 2021. 6. 193-212

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 35, No. 2, Jun. 2021. 193-212

구체적 수학탐구활동 사례를 통한 학교현장 수학 탐구방법 탐색

서 보 억 (충남대학교, 교수)

본 연구는 학교현장의 수학탐구활동을 지원하기 위한 현장지원 연구이다. 수학탐구활동은 수학교사에게뿐 아니라, 학생에게도 매우 중요한 수학적 활동이다. '수학과제 탐구' 교과목이 생기고, 고교학점제, 자유학년제와 같은 다양한 수학적 활동이 강화되면서 이러한 경향은 더 강해지고 있다. 수학탐구활동은 전문수학자만의 고유영역이 아니며, 수학을 학습하는 그리고 수학을 지도하는 모든 평범한 사람에게도 동일하게 기회가 주어져 있다. 이에 본 현장지원 연구에서는 한 가지 수학적 사실을 기반으로 하는 구체적인 수학탐구활동을 기반으로, 현장 학교에서 교사 및 학생이 자발적으로 수행할 수 있는 수학탐구활동 방법을 제안하는 것을 연구의 목적으로 한다. 구체적으로 본 연구에서 선택한 한 가지 수학적 사실은 2015개정 수학과 교육과정에서 다시 추가된 내용요소인 코사인 법칙이다. 본 연구에서는 코사인 법칙을 기초로 여러 가지 수학탐구활동을 수행하였다. 이러한 수행 결과를 분석하여 현장에서 학교수학을 탐구하는 방법을 구체적으로 제안하였다. 본 연구의 결과를 통해 수학탐구활동이 수학교실에서 학생 및 교사에 의해 다양하고 활발하게 이루어지기를 기대한다.

Ⅰ. 서론

수학의 발달은 우리의 실제 삶의 공간이나 가상적 공간 속에서 새로운 사실을 발견하고 끊임없는 재구성의 과정을 통해 이루어져 왔다. 인류의 역사를 통해 볼 때, 수학은 한 가지 사실을 출발점으로 하여 다양한 사고활동을 통해 처음과 유사하거나 전혀 다른 새로운 내용을 재구성하는 과정을 밟아 생성되어 왔음을 분명하게 확인할 수 있다. 실제로 고대그리스 수학자 Euclid는 기원전 3세기 원론(The Elements)이라는 위대한 수학책을 저술하였는데, 그는 이 책에서 5개의 공준과 5개의 공통개념을 출발점으로 하여 기본 용어를 정의하고, 최소한의 출발점 명제로부터 논리적으로 완전한 수학 이론의 형태로 완성하였다(한인기, 2003b). 이러한 저술형태는 한 가지 수학적 사실로부터 출발하여 끊임없이 새로운 사실을 재구성할 수 있음을 명확하게 제시하여 주고 있다.

Lakatos(1976)는 '수학적 발견의 논리'에서 수학 지식의 발달과정을 가상 수학교실 상황에서 설명하고 있다. 근대 유럽에서 300여년간 이어진 입체도형에서 오일러 표수에 대한 논쟁을 준경험주의 철학을 기반으로 가상교실로 상황으로 구현하였다. 이에 따르면, Lakatos는 수학적 지식의 성장은 한 문제로부터 수학적 추측을 제시하는 단계, 추측을 부분추측으로 분해하는 단계, 반례가 등장하고 추측과 증명을 반박하는 단계, 증명을 검토하여 증명과 추측을 개선하는 단계를 거쳐 이루어진다. 이 과정에서 처음의 추측과 다른 또 다른 수학적 지식이 성장하기도 하고, 새로운 증명-생성 개념을 만들어내기도 한다. 이는 한 가지 수학적 사실이 새로운 다른 수학적 사실을 생성하도록 유도한다는 것을 명확히 보여주고 있다.

2015개정 수학과 교육과정에서 '수학과제 탐구'이라는 과목을 신설하였다(교육부, 2015). 박경미 외(2015)는 수학과제 탐구에 대해 '일반고등학교 학생들이 수학의 기본적인 탐구 주제를 자신의 수준과 흥미에 맞게 선택하여 스스로 수학과 관련된 연구를 수행할 수 있는 능력을 신장시키기 위해 개설된 교과목이다.'라고 제시하면서, 수

* 접수일(2021년 5월 26일), 심사(수정)일(2021년 6월 14일), 게재확정일(2021년 6월 23일)
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 수학교사, 현장수학탐구방법, 논증기하, 코사인법칙, 복소수

학과 관련된 주제를 선정하여 탐구하는 활동을 강조하였다. 더불어 학생들이 교사의 안내에 따라 자발적이고 주도적으로 수학의 다양한 영역 및 관련된 응용 분야에 관한 탐구 주제를 자유롭게 탐구하도록 요구하고 있다. 더 나아가 소논문 대회, 수학체험전, 수학 캠프, 수학 독서 활동 등과 연계하여 수업을 계획할 수 있으며 교내의 다양한 프로그램과 연계하여 진행하도록 하고 있다. 이러한 수학과제 탐구의 성공적인 운영은 교사 및 학생 스스로 현장 학교수학을 탐구대상으로 한 수학탐구방법에 대한 정확한 이해와 그것에 대한 실천 역량을 요구한다. 그만큼 학교현장에서 수학을 탐구할 수 있는 방법에 대한 개발 필요성이 제기되고 있다.

하지만 현장 학교수학의 탐구방법에 대한 연구는 거의 진행되지 않은 것으로 나타났다. 최근 수학과제 탐구에 대한 연구가 다수 진행되었지만, 대부분이 수업자료 개발에 초점을 맞추고 있다(천선빈, 이종학, 김원경, 2017; 정혜윤, 이경화, 백도현, 2018; 황혜정, 김주미, 2018). 또한 수학과 교육과정을 개발하고 교과서를 심의하는 한국과학창의재단(2019)에서는 '수학과제 탐구-2015 개정 교육과정 적용 모델 교과서'라는 제목으로 수학과제 탐구 교과목에 대한 운영을 위한 안내 책자에서 학교 수학탐구 방법을 네 가지로 제시하였다. 구체적으로 문헌 연구, 사례 조사, 수학 실험, 개발 연구를 제시하였는데, 실제 학교수학내용에 대한 구체적인 수학탐구활동을 진행하는 방법이라기보다는 이론적 수준에서의 탐구방법을 제시하고 있다. 실제적으로 적용할 수 있는 구체적인 탐구방법에 대한 개발이 필요한 실정이다.

이러한 필요성에 따라 본 연구의 목적은 중등학교 수준에서 학생들과 교사들이 자기 주도적으로 현장 학교수학을 소재로 수학탐구활동을 진행할 수 있는 탐구방법을 '한 가지 수학적 사실'을 출발점으로 하는 구체적인 수학탐구활동 사례로부터 개발하는 것이다. 본 연구의 목적을 달성하기 위해 다음 두 가지 연구 내용을 선정하였다. 첫째, 한 가지 수학적 사실로 수학탐구활동의 구체적인 결과를 제시한다. 둘째, 한 가지 수학적 사실을 기반으로 한 수학탐구활동으로부터 학교수학 탐구방법을 제시한다.

Ⅱ. 연구의 배경

1. 선행 연구를 통해 본 학교수학 탐구방법

박한식(1991)은 '교직수학'에서 학교수학에 대한 다양한 해석을 다루었다. 예비교사를 위한 '수학교재연구'라는 강좌가 수학교육적 측면에 중점을 두었다면, '교직수학'은 중등학교 수학 자체에 더 초점을 두고 있다. 비록 구체적인 수학내용에 대한 탐구방법을 제시하지는 않았지만, 탐구 결과를 다양한 관점에서 제시하고 있는 것이 특징이다. 본 연구의 구체적인 탐구방법을 제안하기에 앞서 그 동안 제기되었던 학교수학의 탐구방법 세 가지에 대해 살펴보자.

첫째, 개연추론 전략이다. Lakatos(1976)는 수학의 논리를 정당화의 논리와 발견의 논리로 구분하였다. 그리고 이미 알고 있는 판단으로부터 새로운 판단을 이끌어 내는 사유작용인 추론을 두 가지로 구분하였는데, 하나가 연역추론이고 다른 하나가 개연추론이다. 연역추론은 일반적 원리로부터 특수한 주장을 정당화하는 것이고, 개연추론은 개별적이고 특수한 사실로부터 법칙을 발견하고 지식을 확장하는 것이다. 따라서 수학적 지식은 개연추론에 의해 발견되고, 연역추론에 의해 정당화된다. Lakatos가 말하는 정당화의 논리는 연역추론과 일맥상통하고, 발견의 논리는 개연추론과 깊은 관련이 있다. 학교에서 수학을 가르치는 입장에서 완성된 연역추론도 중요하지만, 수학탐구활동을 통해 새로운 수학을 발견하고 재발명한다는 측면에서 개연추론도 매우 중요하다. 이에 Polya(1973)는 학교수학의 발견과 재발명에서 매우 중요한 역할을 하는 개연추론을 네 가지 유형 즉, 귀납, 일반화, 특수화, 유추로 구분하였다. 귀납은 '제한적이고 특수한 사례로부터 일반적 결론을 이끌어 내는 것'을 의미한다. 즉 경험적 판단을 전제로 한다. 이로 인해, 항상 참이라고 볼 수 없고, 오류 가능성이 있음에도 불구하고 새

로운 수학적 사실의 탐구 활동과 발견을 위해 매우 유용하다. 귀납추론을 개연추론과 동일하게 받아들이기도 한다. 일반화는 '어떤 주어진 특수한 대상의 속성으로부터 이를 포함하는 더 집합으로 나아가는 것'을 의미한다. 예를 들어 삼각형에서 성립하는 성질로부터 임의의 다각형으로 그 성질이 보존된다는 것으로 나아감으로써 일반화되어질 수 있다. 특수화는 '어떤 속성을 만족하는 전체 대상들의 집합에서, 이 집합에 포함된 더 작은 집합으로 나아가는 것'을 의미한다. 예를 들어, 정n각형에서 성립하는 성질로부터, 어떤 정다각형에서도 그 성질이 성립한다는 것으로 나아감으로써 특수화되어질 수 있다. 마지막으로 유추는 '어떤 한 대상이 특정 성질을 가지고 있을 때, 이와 유사한 대상도 이 특정 성질을 가질 것이라고 추측하는 것'을 의미한다. 따라서 유추는 유사한 두 대상들 사이에서 일어나는 추론이다. 예를 들어, 평면의 삼각형이 공간의 사면체와 유사하다고 판단된다. 따라서 평면에서의 삼각형의 여러 가지 성질들로부터, 공간에 있는 사면체에서도 이 성질들이 성립한다는 것으로 나아감으로써 유추가 가능하다. 그런데, 개연추론 즉 귀납추론에 해당하는 귀납, 일반화, 특수화, 유추 사이의 관계에 대해 Polya(1973)는 '몇 몇 특수한 사례로부터 삼각형에 대한 성질을 찾았다고 하자. 그렇다면, 삼각형에 성립하는 성질을 다각형에도 동일하게 성립한다는 것을 보이는 것이 일반화이고, 삼각형에서 성립하는 성질이 삼각형의 특수한 경우인 정삼각형에서도 성립한다는 것이 특수화이고, 평면의 삼각형에서 성립하는 성질이 공간의 삼각뿔에서도 성립한다는 것이 유추이다.'라고 설명하고 있다. 이 중에서 수학탐구활동 방법으로 유추에 대해 구체적으로 살펴보자. 영국의 천문학자 Kepler는 '유추는 자연의 모든 비밀을 간직하고 있기 때문에 가장 믿을 수 있는 스승이다.'라고 언급하였고, 한인기와 에르든예프(2005)는 '유추의 사용은 학습 자료를 깊이 이해할 수 있도록 도우며 지식들을 질적으로 새롭게 한다.'라고 언급하면서 유추를 통해 학생들의 독자성과 자발성의 계발에 중요한 역할을 강조하였다. 또한 Polya(1973)는 수학적 발견에서 유추가 큰 역할을 한다고 강조하였다.

이를 통해 볼 때, 수학교육에서 유추는 중요한 역할을 수행할 수 있음을 알 수 있다. 유추에 의한 개연추론의 구조는 간단하다. 어떤 대상 A가 속성 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, x를 가지고 있고, 다른 대상 B가 속성 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n을 가지고 있다고 가정해 보자. 그렇다면, 대상 A와 대상 B의 이러한 유사한 속성에 의해, 대상 B도 속성 x를 가지고 있다는 추론이 유추이다. 실제로 유추의 사례는 중학교 수학에서 매우 폭넓게 찾을 수 있다. 먼저, 중선에 대한 유추이다. 대상 A를 '삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나고, 이 교점은 각 중선을 $2:1$로 나눈다.'라고 하고, 대상 B를 '사각형의 네 중선은 한 점에서 만난다.'라고 하자. 그러면, 대상 A로부터 사각형도 각 중선을 어떤 비 $a:b$로 나눈다는 추측이 가능하다. 또한, 각의 이등분선에 대한 유추이다. 대상 A를 '삼각형의 내각의 이등분선을 그으면, 각의 이등분선은 대변을 각의 두 변의 길이의 비로 나눈다.'라고 하고, 대상 B를 '삼각형의 외각의 이등분선을 긋는다.'라고 하자. 그러면, 대상 A로부터 삼각형의 외각의 이등분선은 대변을 각의 두변의 길이의 비로 나눈다는 추측이 가능하다.

둘째, 문제 구성하기(problem posing) 및 What if not 전략이다. Lakatos는 수학적 발견의 논리에서 발견을 위한 추측의 출발은 '문제(problem)'이다. 그런데 Lakatos에게 있어서 주어진 문제는 완성된 문제가 아니라, 완성의 과정에 있는 문제였다. 그런데 우리에게 있어서 문제는 무엇인가? 사실 오류 가능성이 전혀 없는 이미 완벽한 풀이 절차를 가지고 있는 문제이다. 이로 인해, 우리는 완벽한 풀이 절차를 찾는데 집중해야하고, 문제를 볼 때마다 풀이 방법을 찾는데 길들여져 있다. 하지만, 주어져 있는 문제의 풀이 절차(알고리즘)를 찾는 활동만으로 새로운 수학에 대한 탐구활동이 가능하지 않다. 단지 주어진 문제의 해결에만 몰두하는 것만으로 수학탐구활동, 문제해결활동이 충분하게 끝났다고 할 수 없다. 이에 수학교육학자들은 최초의 주어진 문제가 어디에서 비롯된 것이며 주어진 문제가 다르게 제기될 수는 없는지를 묻는 것은 매우 자연스러운 교육활동으로 보고 있다. 주어진 문제의 해결만을 다룰 것이 아니라 주어진 문제를 보다 새로운 차원에서 취급하고, 새로운 수학적 발견을 위해 주어진 문제로부터 새로운 문제를 구성하는 활동의 중요성을 강조하고 있다. 주어진 최초의 문제로부터 새로운 문제를 구성하거나 제기하는 활동을 문제 구성하기(problem posing)라고 부르는데, 이 활동이 학교 수학탐구

활동을 위한 중요한 탐구 방법이 될 수 있다. 그럼 왜, 수학교육에서 문제 구성하기가 중요한가에 대해 생각해 보자. 대다수의 많은 학생들은 요술과 같은 다음 경험을 가지고 있다.

> 수학수업시간에 선생님이 풀어주시는 문제가 상당히 새로웠다. 선생님의 풀이가 끝나고 교과서 연습문제를 선생님의 풀이 방법을 보고 따라서 풀었는데 신기하게 풀렸다. 그리고 수업이 끝났다. 학교 수업을 마치고 집으로 돌아가 수학 숙제를 하는데 오늘 수업시간에 풀었던 문제와 유사한 문제를 푸는데 도저히 풀리지 않는 것이다. 분명히 수업시간에는 풀렸는데…(서보억, 2013, pp.111-112).

왜 이러한 현상이 일어난 것일까? 수학은 수학적 대상이 가진 본질을 파악하는 교과이다. 따라서 위의 현상의 원인은 수학문제는 풀었지만, 그 문제에 내포되어져 있는 수학적 본질이 무엇인지는 이해하지 못했기 때문이다. 교사는 수업시간에 많은 문제에 대한 풀이 방법을 가르치고, 학생들은 그 문제를 끊임없이 풀고 있다. 하지만 정작 중요한 한 문제 한 문제에 대한 깊은 사고활동과 반성활동은 부족하다. 한 문제 한 문제를 풀지만 각각의 문제가 서로 관련이 없는 독립적인 문제들로 배치된 경우가 많아 중요한 개념이 내재된 문제에 대한 깊이 있는 생각은 잘 하지 못한다. 한 문제에 오랫동안 집중하여 풀이를 음미하는 기회는 제한적인데, 이러한 한계를 극복하도록 도와주는 것이 문제 구성하기 활동이며, 지금 우리가 문제 구성하기 활동에 집중하는 이유이다. 문제 구성하기에 대한 용어는 Brown과 Walter(1990)가 쓴 문제 구성하기의 기술(The art of problem posing)에 제시되어 있다. 문제 구성하기는 문자 그대로 바탕문제를 기초로 하여 새로운 문제를 만드는 것을 의미한다. Brown과 Walter는 문제 구성하기를 두 차원으로 구분하고 있는데, 첫 번째 차원은 주어진 최초의 문제의 이해와 수용과 관련되어 있고, 두 번째 차원은 최초의 문제로부터 새로운 문제를 제시하는 것과 관련이 있다(Brown & Walter, 1990). 첫 번째 차원은 주어져 있는 최초의 문제를 수용하고 받아 받아들이는 차원이다. 이 차원에서의 총 5가지의 전략이 존재한다. 현상을 가지고 하려는 전략, 내적 탐색과 외적 탐색의 전략, 정밀한 탐색과 어림 탐색 전략, 역사적 탐색으로 사실과 가설의 전략, 질문 목록을 만드는 전략이다. 두 번째 차원은 주어진 문제를 바탕으로 새로운 문제를 제기하는 차원으로 총 5가지의 절차와 전략이 존재한다. 문제 구성하기를 위한 출발점을 선택하는 단계, 주어진 문제로부터 속성목록을 작성하는 단계, '만약에 아니라면 어떻게(What if not)'로 간단히 '아님 어떻게'를 제시하는 단계, 새로운 문제를 구성하기 위한 질문을 만드는 단계, 질문을 해결하는 단계 5가지 수준으로 나누어진다.

셋째, 수학사 탐구 전략이다. 수학사는 수학교육에서 매우 중요한 역할을 한다. 그 대표적인 이론이 수학 역사 발생적 원리이다. 수학사를 활용한 수학탐구활동의 가능성은 NCTM(1995), 한인기(2003a) 등을 통해 확인할 수 있다. 특히 '수학사에 대한 제 고찰은 수학의 구조나 학생들의 개념 형성과정을 이해하고 연구하는데 중요한 자료가 되며 나아가 수학교육과정 연구와 지도법 연구에 핵심적인 자료를 제공하므로 수학사는 필요하다.'라고 언급한 것이 가장 대표적인 사례이다. 역사는 살아있는 현실이다. 과거의 역사는 현재의 역사를 조명하고 현재에 영향을 미치고 미래를 예측하는 열쇠이다. 수학의 역사도 동일한 맥락에서 해석이 가능하다. 이로 인해 수학사에 대한 연구는 새로운 수학적 발견을 위한 수단으로 활용될 수 있고, 현장학교에서 수학탐구활동의 중요한 방법이 될 수 있다. 즉, 수학사를 통해 수학교사, 학생은 지금 배우는 혹은 지금 탐구하는 수학내용에 대한 과거를 이해하고, 현재의 모습을 통해 새로운 미래의 수학적 대상을 창조적으로 재생산할 수 있다는 것을 의미한다. 수학교사, 학생은 수학의 본질인 창조적인 활동, 사고의 자율성, 개별 학습의 주체로써 새롭게 거듭나는 도구로써 수학사를 활용하는 것이고, 이는 수학사와 현장수학 탐구활동과의 새로운 만남을 시사하는 것이다.

2. 연구 방법 및 절차

앞서서 개연추론 전략, 문제 구성하기 전략, 수학사 탐구 전략을 고찰하였다. 본 연구에서는 또 다른 탐구방법을 구체적인 수학탐구활동 사례를 바탕으로 개발하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 다음과 같은 방법과 절차로 연구를 진행하였다.

첫째, 중등학교에서 한 가지 수학적 사실을 추출한다. 한 가지 수학적 사실은 문헌연구를 바탕으로 하고, 수학사에서 가치있는 주제로 선정한다. 구체적으로 본 연구에서는 수학사에서 코사인 법칙을 한 예로 선정하였다. 코사인 법칙을 선정한 이유는 2009개정 고등학교 수학과 교육과정에서는 삭제되었으나, 그 중요성과 다양한 활용가능성으로 인해 2015개정 고등학교 수학과 교육과정에서 새롭게 추가된 내용이기 때문이다.

둘째, 선정된 한 가지 수학적 사실에 대한 선행연구를 조사하였다. 코사인 법칙과 관련된 선행연구를 살펴보면 다음과 같다. 먼저 한 가지 수학 문제와 관련된 연구가 있었는데, 이 연구는 한 가지 문제를 교육적으로 분석하고 이를 바탕으로 관련된 문제를 체계화하는 연구였고(한인기, 2003a), 다른 하나는 한 문제를 바탕문제로 설정하여 이 문제로부터 다양한 수학적인 성질을 탐구하는 연구가 있었으며(김경선, 한인기, 2007; 김문섭, 한인기, 2007), 마지막으로 코사인 법칙 그 자체에 대한 연구가 있었다(권영인, 서보억, 2004; 2007; 한인기, 2007).

셋째, 선정한 한 가지 수학적 사실을 토대로 수학탐구활동을 위한 기초 조사 활동을 진행한다. 기초 조사 활동은 기존의 수학탐구방법인 개연추론, 문제 구성하기, 수학사 탐구 방법을 기초로 진행한다. 이때, 코사인 법칙이 가지는 다른 수학적 개념과의 연결성에 초점을 맞추었다. 구체적으로 본 연구에서는 코사인 법칙과 관련된 기초 조사활동을 요약하면 다음과 같다. 먼저, 코사인 법칙은 삼각형 및 원과 매우 밀접한 관계를 맺고 있으므로, 삼각형과 원을 근거로 하여 우리는 코사인 법칙에 대한 다양한 증명 방법을 찾을 수 있으며 여러 가지 교수학적인 적용가능성을 고찰한다(권영인, 서보억, 2004). 다음으로, 코사인 법칙에 대한 여러 가지 증명 방법에 대한 고찰을 통해 우리는 코사인 법칙이 단순히 삼각형에서 성립하는 코사인의 성질이 아닌 피타고라스 정리의 확장으로 학습하는 것이 더 자연스럽다는 것을 알 수 있으므로 이와 관련하여 고찰한다. 실제로, 유클리드 원론의 제 I권의 마지막 명제인 47번 명제에서 피타고라스 정리를 제시하고 있고, 제 II권 명제 12, 13번에 코사인 법칙을 제시하고 있음을 통해 이러한 사실을 더 명확하게 확인할 수 있다(Heath, 1952). 마지막으로 한 가지 수학적 사실을 바탕으로 한 가지 수학 문제만을 해결할 수 있다면 우리는 수학문제 만큼의 수학개념을 학습하여야 하지만, 한 가지 수학적 사실이 다양한 문제 상황에 적용되어진다면 그 만큼의 학습량이 줄어들고 줄어든 양만큼 새로운 수학개념을 획득할 수 있는 여유가 생긴다. 이것이 한 가지 수학적 사실을 이용한 수학탐구활동의 중요성에 대한 단적인 이유이다.

넷째, 기초 조사활동을 기반으로 한 가지 수학적 사실로부터 활용 가능한 다양한 수학탐구활동을 진행하였다. 본 연구의 목적을 실현하기 위해 고등학교 <수학Ⅰ> 삼각함수 단원 코사인 법칙을 선택하여 다양한 수학탐구활동을 진행하였다. 구체적인 한 사례로 코사인 법칙의 다양한 증명 방법을 바탕으로 코사인 법칙이 학교수학에서 어떻게 활용되어질 수 있는지에 대해 고찰하였다. 실제로 코사인 법칙을 활용한 다양한 수학탐구활동은 다음 네 가지 측면에서 진행하였다. ①고등학교 교과서에서 코사인 법칙을 활용한 사례 탐구하기, ②삼각형의 각의 크기와 관련된 수학적 사실을 코사인 법칙과 관계맺어 탐구하기, ③삼각형의 변의 길이 혹은 길이의 비와 관련된 수학적 사실을 코사인 법칙과 관계맺어 탐구하기, ④코사인 법칙을 활용하여 전혀 관련 없어 보이는 실수로부터 복소수를 생성하는 방법 탐구하기이다.

다섯째, 구체적인 수학탐구활동 결과를 분석하여 학교수학을 주제로 한 수학탐구방법을 제안한다. 학생 및 교사가 학교에서 다루는 구체적인 수학적 사실 한 가지를 출발점으로 하여 어떻게 수학탐구활동을 진행할 것인지에 대한 구체적인 방법을 제시한다.

Ⅲ. 연구 결과 및 논의

본 연구는 중등학교 수준에서 학생과 교사들이 자기 주도적으로 현장학교 수학탐구활동을 진행할 수 있는 수학탐구방법을, 한 가지 수학적 사실을 출발점으로 하는 구체적인 수학탐구활동 사례로부터 개발하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 한 가지 수학적 사실로부터 수학탐구활동의 구체적인 결과를 제시하고, 이를 기초로 수학탐구방법을 제시하고자 한다. 본 연구는 교사, 학생이 현장수학교육 상황에서 활용하기 위한 현장지원 연구이다.

1. 한 가지 수학적 사실을 출발점으로 하는 수학탐구활동 결과

본 연구에서는 한 가지 수학적 사실을 코사인 법칙으로 선택하였다. 코사인 법칙을 활용한 다양한 수학탐구활동으로 다음 네 가지 측면으로 구분하여 고찰한다.

첫째, 현재 고등학교 교과서에서 코사인 법칙을 활용한 사례를 분석한다.

둘째, 삼각형의 각의 크기와 관련된 수학적 사실을 코사인 법칙으로 탐구한다.

셋째, 삼각형의 변의 길이 혹은 길이의 비와 관련된 수학적 사실을 코사인 법칙으로 탐구한다.

넷째, 코사인 법칙을 활용하여 실수로부터 복소수를 생성하는 방법을 탐구한다.

가. 현재 고등학교 교과서에서의 코사인 법칙 활용

우리나라 수학교과서에서는 고등학교 <수학Ⅰ> 삼각함수 단원에서 사인 법칙과 함께 코사인 법칙을 다루고 있다(교육부, 2015). 코사인 법칙을 활용한 교과서의 내용을 살펴보면, 첫째, 코사인 법칙과 관련된 문제는 열 네 문제 정도 다루어졌고, 둘째, 코사인 법칙을 활용한 문제의 대부분은 공식에 대입하는 문제 즉, 삼각형의 나머지 구성 요소를 구하는 문제가 대다수를 차지하고 있었으며, 셋째, 코사인 법칙을 이용하여 기존의 개념을 새롭게 증명하거나 새로운 공식을 유도하는 것은 다루어지지 않았다. 따라서, 한 가지 수학적 사실을 활용하여 다른 공식을 유도하거나 실제적으로 활용하는 교육적인 활동에는 비교적 소극적이었다. 대표적인 문제는 다음 [문제1]과 같다. 이 문제의 경우 $\cos B$와 $\cos A$ 대신에 코사인 법칙을 대입하면 해결되는 문제이다.

[문제1] 삼각형 ABC에서 $a\cos B = b\cos A$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

나. 삼각형의 각의 크기와 관련된 수학탐구활동 결과

코사인 법칙은 각의 크기와 깊은 관련이 있다. 그러면 각의 크기와 관련 있는 수학적 사실을 탐색해 보자. 본 수학탐구활동에서는 세 가지 측면에 초점을 맞추었다.

첫째, 중학교에서 가장 대표적 명제인 피타고라스 정리와 관련된 것이다. 피타고라스 정리는 직각이 있는 삼각형을 기반으로 한다. 그런데, 피타고라스 정리의 역이 중학교에서 매우 효율적으로 사용되고 있음에도 불구하고 이에 대한 정당화과정은 생략하고 있다. 이에 피타고라스 정리의 역에 초점을 맞추어 코사인 법칙과 연결하여 수학탐구활동을 진행하였다.

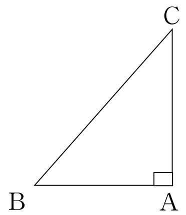
둘째, 이등변삼각형과 관련된 것이다. 이등변삼각형은 두 밑각의 크기가 같은 도형이다. 이러한 각의 속성을 이용하여 코사인 법칙과 연결하여 수학탐구활동을 진행하였다.

셋째, 삼각형의 중점연결정리와 관련된 것이다. 삼각형의 중점연결정리의 핵심은 평행을 보장해준다는 점이다. 그런데, 평행은 곧 동위각과 엇각과 연결될 수 있다. 따라서 평행을 보장하는 동위각이나 엇각과 연결하여 수학탐구활동을 진행하였다.

1) 피타고라스 정리의 역 정리

[명제1] 삼각형에서 한 변 위의 정사각형이 나머지 두 변 위의 정사각형의 합과 같으면 삼각형에서 나머지 두 변이 이루는 각은 직각이다.

(코사인 법칙을 이용한 탐구활동)



[그림 III-1] 탐구1

[그림 Ⅲ-1]에서 삼각형 ABC는 주어진 조건에 의해서 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$이 성립한다. 삼각형 ABC에서 코사인 법칙을 적용하면, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC) \quad ---①$$

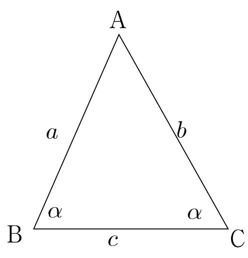
조건과 ①식에 의해서, $2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)=0$을 얻을 수 있다. 그런데, $\overline{AB},\overline{AC}$는 0이 될 수 없으므로 $\cos(\angle \mathrm{BAC})=0$이 되어야 한다. 즉, $\angle \mathrm{BAC}=90°$이 된다. 따라서, △ABC는 직각삼각형이다.■

피타고라스 정리와 그 역에 대해서 중학교 2학년 교과서에서 다루고 있다. 피타고라스 정리는 다양한 증명 방법을 제시하고 있지만, 역 정리에 대한 증명은 아무런 언급이 없다. 단지 직관을 활용하여 둔각삼각형, 직각삼각형, 예각삼각형이 되는 변의 길이만 다루고 있다. 고등학교에서 코사인 법칙을 학습한 다음 코사인 법칙을 이용하여 역 정리를 탐구하는 활동이 가능하다.

2) 이등변삼각형의 성질

[명제2] 삼각형 ABC에서 각 B와 각 C의 크기가 같으면 선분 AB와 선분 AC의 길이는 같다.

(코사인 법칙을 이용한 탐구활동)



[그림 III-2] 탐구2

[그림 Ⅲ-2]에서 이등변삼각형의 두 밑각의 크기를 α라고 하고, 세 변의 길이를 a, b, c라고 하자. 코사인 법칙에 의해서 다음 두 식을 얻을 수 있다.

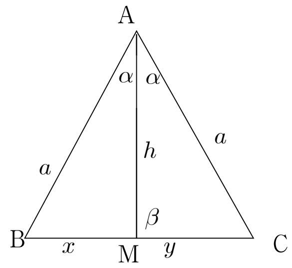
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha \ \ --- ①, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \ \ --- ②$$

얻은 ①, ② 식에서 $\cos\alpha$의 값이 서로 같으므로 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

이 식을 정리하여 인수분해하면 $(a-b)(a+b+c)(a+b-c)=0$이다. 따라서, $a=b$ 또는 $a+b+c=0$ 또는 $a+b=c$ 인데, 가능한 경우는 $a=b$뿐이므로 이등변삼각형이다.■

[명제3] 이등변삼각형에서 꼭지각 A의 이등분선이 대변과 만나는 점을 M이라고 하면, 점 M은 밑변을 수직으로 이등분한다.
(코사인 법칙을 이용한 탐구활동)



[그림 Ⅲ-3] 탐구3

각 A에서 내린 각의 이등분선이 대변과 만나는 점 M에서 나머지 두 꼭짓점까지의 거리를 각각 x,y라고 하고 이등분선의 길이를 h라고 하자. 또한, $\angle \mathrm{BAM}=\alpha$, $\angle \mathrm{AMC}=\beta$ 라고 두고, M이 중점임을 보이자. 코사인 법칙에 의해서, 다음 두 식을 얻는다.

$$x^2 = a^2 + h^2 - 2ah\cos\alpha \ , \qquad y^2 = a^2 + h^2 - 2ah\cos\alpha,$$

이 두 식을 부터 $x=y$ 임을 알 수 있다. 다음으로, $\angle \mathrm{AMC}$가 직각임을 보이자. 코사인 법칙으로부터 다음 식을 얻을 수 있고,

$$a^2 = h^2 + y^2 - 2hy\cos\beta, \quad a^2 = h^2 + x^2 - 2hx\cos(180-\beta)$$

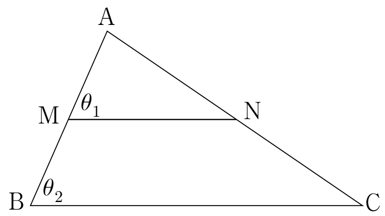
위 식으로부터 $\cos\beta = -\cos\beta$이어야 하므로 $\cos\beta = 0$이다. 즉, $\beta = 90°$이다.■

중학교에서는 두 밑각의 크기가 같으면 이등변삼각형임을 합동을 이용하여 논리적으로 정당화한다. 또한, 꼭지각의 이등분선이 밑변을 수직으로 이등분함을 논증적으로 증명을 하고 있다. 고등학교의 경우는 논증보다는

대수적인 증명이 더 많은 부분을 차지하고 있다. 따라서 코사인 법칙을 활용하여 중학교에서 학습한 논증적인 증명과 비교하면서 대수적인 증명과 결합시키는 수학탐구활동이 가능하다.

3) 삼각형의 중점연결 정리의 증명

[명제4] 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분은 나머지 변과 평행하고, 그 길이는 나머지 변의 길이의 반과 같다.
(코사인 법칙을 이용한 탐구활동)



[그림 III-4] 탐구4

[그림 III-4]의 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2a$, $\overline{BC}=2c$, $\overline{AC}=2b$, $\overline{MN}=x$라 하고, $\angle AMN=\theta_1$, $\angle ABC=\theta_2$, $\angle BAC=\theta$라고 하자. 먼저, 선분 MN이 선분 BC의 반임을 보이자. 코사인 법칙에 의해서 다음 두 식을 얻는다.

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta,\quad (2c)^2=(2a)^2+(2b)^2-2\times 2a\times 2b\cos\theta$$

이 식으로부터 $x=c$ 라는 사실을 얻을 수 있다. 따라서, $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ 이다.

두 번째, 선분 MN과 선분 BC가 평행임을 보이자. 이 사실을 증명하기 위해서 $\theta_1=\theta_2$임을 보이면 된다. 코사인 법칙으로부터, 다음 식을 얻는다.

$$\cos\theta_1=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\quad \cos\theta_2=\frac{(2a)^2+(2c)^2-(2b)^2}{2\times 2a\times 2c}$$

얻은 두 식을 정리하면 $\cos\theta_1=\cos\theta_2$이므로 $\theta_1=\theta_2$이다. 따라서, 평행이다.■

중학교에서 삼각형의 중점연결정리는 삼각형의 닮음을 이용하여 정당화하고 있다. 고등학교에서는 코사인 법칙을 활용하여 삼각형의 닮음의 성질도 탐구 가능함을 확인할 수 있다.

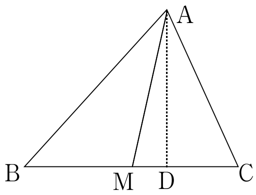
다. 삼각형의 변의 길이와 관련된 수학탐구활동 결과

여기에서는 Pappus의 정리와 그 일반적인 형태인 Stewart의 정리에 대해 살펴보고(이종우, 2002), 코사인의 합 공식에 대해 살펴본다.

1) Pappus의 중선 정리와 그 일반화에 대한 증명

[명제5] 삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이다.

(코사인 법칙을 이용한 탐구활동)



[그림 Ⅲ-5] 탐구5

[그림 Ⅲ-5]에서 중선 AM을 기준으로 두 개의 삼각형이 만들어진다. 이 두 삼각형 각각에서 코사인 법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2\overline{AM}\times\overline{BM}\times\cos(\angle AMB) \quad ---①$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 - 2\overline{AM}\times\overline{CM}\times\cos(\angle AMC) \quad ---②$$

그런데, 여기서 $\angle \mathrm{AMC} = 180 - \angle \mathrm{AMB}$ 이므로 $\cos(\angle \mathrm{AMC}) = -\cos(\angle AMB)$ 이다. 또한, $\overline{CM} = \overline{BM}$ 이므로, 위의 ②식을 변형하면,

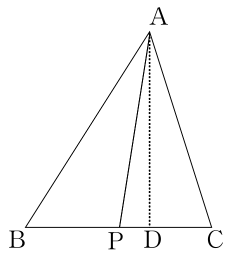
$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + 2\overline{AM}\times\overline{BM}\times\cos(\angle AMB) \quad ---③$$

이다. 이제, ①과 ③식을 더하면 우리는 Pappus의 중선정리를 얻을 수 있다.■

[명제6] 삼각형 ABC의 변 BC 위에 임의의 점 P를 취하면, 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\overline{AB}^2\times\overline{PC} + \overline{AC}^2\times\overline{PB} = \overline{PA}^2\times\overline{BC} + \overline{PB}\times\overline{PC}\times\overline{BC}$$

(코사인 법칙을 이용한 탐구활동)



[그림 Ⅲ-6] 탐구6

[그림 Ⅲ-6]에서 선분 AP를 기준으로 삼각형 ABP와 삼각형 ACP가 만들어진다. 이 두 삼각형 각각에서 코사인 법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 - 2\overline{AP}\times\overline{BP}\times\cos(\angle APB) \quad ---①$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 - 2\overline{AP} \times \overline{CP} \times \cos(\angle APC) \quad ---②$$

그런데, 여기서 $\angle APC = 180 - \angle APB$ 이므로 $\cos(\angle APC) = -\cos(\angle APB)$ 이므로, 위의 ②식을 변형하면, 다음과 같다.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 + 2\overline{AP} \times \overline{CP} \times \cos(\angle APB) \quad ---③$$

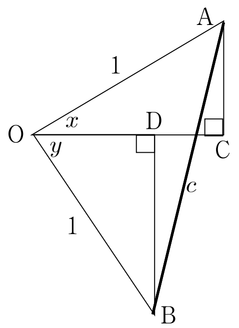
위의 ①식과 ③식에서 코사인 값을 가진 항을 소거하기 위해서 ①식에 CP를 곱하고, ③식에 BP를 곱해서 서로 더하면, 증명이 마무리된다.■

Pappus의 정리와 그것의 일반화에 대한 내용은 중학교 교과서에는 나오지 않는다. 고등학교 교과서의 경우 좌표를 이용하여 대수적으로 증명하는 내용을 일부교과서에서 언급하고 있다. 피타고라스 정리를 학습한 학생이라면 이 정리가 피타고라스 정리와 유사함을 곧 알아차리게 된다. 피타고라스 정리가 직각삼각형에서만 성립한다면 Pappus의 정리는 모든 삼각형에서 성립하는 성질이다. 따라서 피타고라스 정리의 확장인 코사인 법칙을 학습한 학생에게 Pappus의 정리에 대한 탐구활동의 기회를 주는 것은 의미 있는 수학탐구활동으로 가능하다.

2) 코사인의 합 공식과 Heron의 공식 증명

[명제7] $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$이 성립한다.

(코사인 법칙을 이용한 탐구활동)



[그림 III-7] 탐구7

[그림 Ⅲ-7]에서 선분 OC는 x축이고, 점 O는 좌표평면의 원점이라고 하자. $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$, $AB = c$이고, $\angle AOC = x, \angle BOC = y$이다. 따라서, 삼각형 OAB에서 코사인 법칙에 의해서 다음을 얻는다.

$$c^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos(x+y) = 2 - 2\cos(x+y) \quad ---①$$

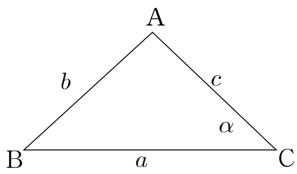
또한, 점 A의 좌표는 $(\cos x, \sin x)$이고, 점 B의 좌표는 $(\cos y, -\sin y)$이다. 두 점 사이의 거리 공식에 의해서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$AB^2 = c^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 = 2 - 2\cos x \cos y + 2\sin x \sin y \quad ---②$$

①식과 ②식에 의해서 공식을 얻을 수 있다. $2-2\cos(x+y)=2-2\cos x\cos y+2\sin x\sin y$이므로 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$이다.■

[명제8] 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c라 하면 삼각형의 넓이 S는 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 이다.(단, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$)

(코사인 법칙을 이용한 탐구활동)



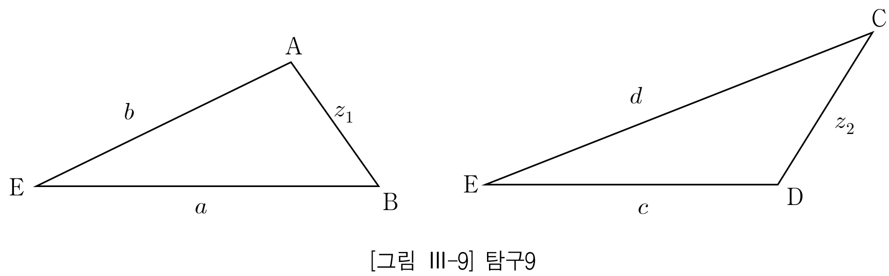
[그림 III-8] 탐구8

삼각형의 넓이를 사인값을 이용하여 나타내면, $S=\dfrac{1}{2}ac\sin\alpha$이고, 식을 $\dfrac{2S}{ac}=\sin\alpha$로 변형할 수 있다. 코사인 법칙에 의해서 $\cos\alpha=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$이다. 이 두 식을 제곱하여 더해서 정리하면, Heron의 공식 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 를 얻는다(이종우, 2002).■

코사인의 합공식과 Heron의 공식은 많은 학생이 기억하고 있는 유명한 대수적인 공식이다. 이러한 대수적인 공식이 가지는 수학적 의미에 대해 코사인 법칙을 통해 탐구해 보는 것은 의미 있는 활동이다. 특히, Heron의 공식은 변의 길이를 통해 넓이를 구한다는 의미에서 매우 중요한 수학적인 의미를 가지는데 그 중요한 의미를 코사인 법칙을 통해 탐구하는 것이 가능하다.

라. 실수로부터 복소수의 생성과 관련된 수학탐구활동 결과

코사인의 법칙을 사용하면 아주 자연스럽게 복소수를 생성할 수 있다(Web1, 2021). 다음 [그림 Ⅲ-9]는 각 E의 크기가 서로 같은 두 삼각형 ABE와 삼각형 CDE이다.



[그림 III-9] 탐구9

이 삼각형에서 코사인 법칙에 의해서 다음 두 식을 얻을 수 있다.

$$z_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos E\ , \quad {z_2}^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos E$$

두 식을 같은 변 끼리 곱하면, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}(z_1z_2)^2 &= (a^2+b^2-2ab\cos E)(c^2+d^2-2cd\cos E)\\ &= a^2c^2 + a^2d^2 - 2a^2cd\cos E + b^2c^2 + b^2d^2 - 2b^2cd\cos E - 2abc^2\cos E - 2abd^2\cos E + 4abcd\cos^2 E\\ &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 4b^2d^2\cos^2 E + 2abcd - 4abd^2\cos E - 4b^2cd\cos E\\ &\quad - 2a^2cd\cos E - 2abc^2\cos E + 4abcd\cos^2 E + 2abd^2\cos E + 2b^2cd\cos E - 4b^2d^2\cos^2 E\end{aligned}$$

$$(z_1z_2)^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc-2bd\cos E)^2 - 2(ac-bd)(ad+bc-2bd\cos E)\cos E$$

이때 $ac-bd=x,\ ad+bc-2bd\cos E=y$라고 하면, $(z_1z_2)^2 = x^2+y^2-2xy\cos E$이다. 여기서, 집합 C를 실수 a,b의 모든 순서쌍 (a,b)의 집합이라고 하고, 집합 C의 대수적인 성질을 살펴보면 다음과 같다.

먼저, 집합 C에서 연산을 다음과 같이 정의해 보자.

첫째, 집합 C에서 같다는 것은 다음과 같다. 만약$(a,b)=(c,d)$일 때에만 $a=c, b=d$ 이다.

둘째, 집합 C에서 덧셈은 다음과 같다. $(a,b)+(c,d)=(a+c, b+d)$

셋째, 집합 C에서 곱셈은 다음과 같다.

1) $(a,b)\times(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc-2bd\cos E)$

2) $k(a,b)=(ka,kb)$

이러한 정의에 의해서 집합 C는 정의된 덧셈과 곱셈에 대한 체(Field)를 이루게 된다.

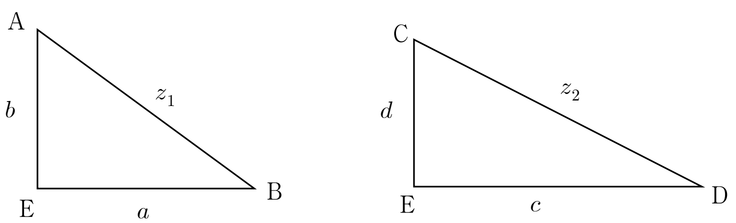
다음으로, 집합 C가 복소수가 됨을 살펴보자. 집합 C의 원소인 (a,b)는 $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$으로 나타낼 수 있다. $(1,0)$은 1과 같으므로, $(0,1)=n$이라고 하면, $(a,b)=a+bn$으로 나타낼 수 있다. 여기서, n을 구체적으로 살펴보자. n을 제곱하면 다음 식을 얻는다. 즉,

$$n^2 = (0,1)\cdot\ (0,1) = (-1, -2\cos E) = -1 - 2\cos E\, n$$

이 식을 정리하면, $n^2 + 2\cos E\, n + 1 = 0$이고 이차방정식의 근의 공식에 의해서 다음 값을 얻을 수 있다.

$$n = \frac{-2\cos E \pm \sqrt{4\cos^2 E - 4}}{2} = \frac{-2\cos E \pm 2\sqrt{\cos^2 E - 1}}{2} = -\cos E \pm \sqrt{-\sin^2 E}$$

이 때, $i=\sqrt{-1}$ 하면 $n = -\cos E + i\sin E$ 를 얻을 수 있다.



[그림 III-10] 탐구10

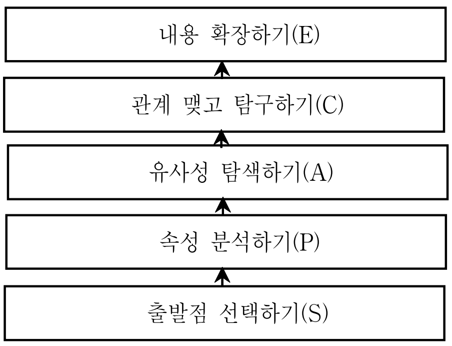
따라서, 집합 C의 임의의 원소 $(a,b)=a+bn$은 $(a,b)=a+b(-\cos E+i\sin E)$으로 나타낼 수 있다. 여기서 각 C의 크기가 90°이면, $(a,b)=a+b(-\cos 90+i\sin 90)=a+bi$ 가 된다. 즉, 집합 C의 임의의 원소 (a,b)는 $a+bi$를 나타내고 이것은 복소수 전체를 의미한다. 결국 코사인 법칙으로부터 복소수의 집합을 자연스럽게 생성할 수 있다.■

코사인 법칙을 활용한 복소수의 생성은 매우 특이한 수학탐구활동의 결과라고 볼 수 있다. 코사인 법칙은 기하학적인 사실이다. 복소수는 대수적인 수 체계에 대한 사실이다. 전혀 관련이 없어 보이는 수학적 사실을 다른 수학적 사실로부터 얻을 수 있다는 것은 매우 중요한 탐구활동의 결과이다. 한 가지 수학적 사실이 다른 수학적 사실에 적용될 수 있고 더 나아가서 전혀 새로운 수학적 사실을 얻을 수 있다는 것이 가능함을 보여줄 수 있다.

2. 학교수학 수학탐구방법 및 평가 방안 제안

가. 학교수학 수학탐구방법 제안

지금까지 고등학교 <수학 I> 삼각함수 단원에 제시된 수학적 사실인 '코사인 법칙'을 출발점으로 설정하고, 다양한 수학탐구활동을 수행하였다. 이러한 탐구활동 결과로부터 수학탐구방법에 대한 새로운 접근을 시도할 수 있다. Lakatos(1976)의 준경험주의에서 탐구의 시작은 '문제(problem)'이었고, Polya(1973)가 수학적 지식을 발견하기 위한 출발점은 '관찰, 경험, 구체적 사례'이었으며, Brown과 Walter(1990)의 문제 구성하기에서 새로운 수학문제를 만들기 위한 출발점은 '수학적 사실, 명제, 문제, 개념' 등이었다. 본 연구의 탐구활동의 출발도 이와 크게 다르지 않다. 즉, 수학탐구활동을 시작하기 위해서는 출발점에 해당하는 수학적 사실, 수학적 명제(정리), 개념 등이 필요하다는 점이다. 이러한 출발점의 선택으로부터 시작된 수학탐구활동은 [그림 Ⅲ-11]과 같이 5개의 단계로 제시할 수 있고, 이러한 수학탐구활동을 '관계맺기전략 수학탐구활동'이라고 명명하기로 한다.



[그림 Ⅲ-11] 관계맺기전략 수학탐구활동

본 연구에서 구체적으로 수행한 수학탐구활동으로부터 관계맺기전략 수학탐구활동(SPACE Activity)을 순차적으로 제시하면 다음과 같다.

첫째 단계는 '출발점 선택하기(Starting)' 단계이다. 수학탐구활동을 위한 수학적 사실을 출발점으로 선택하는 단계이다. 수학적 사실, 수학적 명제나 정리, 수학적인 개념 등이 이에 해당한다. 단순한 수학적인 지식이나 학습 요소가 아니라, 수학적인 적응력이 높은 수학적 사실을 출발점으로 선택하여야 한다. 더불어 출발점으로 선택된 요소가 교과서에서 구체적으로 어떻게 도입되고, 정의되며, 다루어지는지 조사한다.

본 연구에서 구체적으로 제시한 수학탐구활동 결과를 바탕으로 예를 들면, '코사인 법칙'이 이에 해당한다. 출발점 선택하기에서 '코사인 법칙'을 탐구활동의 시작으로 선택한 것이다. 코사인 법칙은 매우 중요한 수학적인 공식으로 단편적인 지식이 아니기에 출발점으로 충분한 가치가 있다.

두 번째 단계는 '속성 분석하기(Property)' 단계이다. 이 단계는 앞 단계에서 선택한 출발점에 해당하는 수학적 사실, 명제, 개념, 정리, 일반화된 지식, 공식 등을 대상으로 하여, 해당 사실, 명제, 개념, 정리, 일반화된 지식 및 공식 등에 나타난 다양한 특성이나 속성을 분석하는 단계이다. 다음 단계의 탐색활동을 수행하기 위한 기본적인 정보를 추출하는 단계이다. 다음 단계에서 진행하는 탐색 및 탐구를 통해 새로운 수학적 관련성을 찾고 새로운 지식을 확장하기 위해 가능한 많은 속성들을 작성하는 단계이다. 이 단계는 주어진 초기 상태를 어떻게 잘 볼 수 있는가와 관련이 있고, 가능한 최대한 상세하게 작성될 수 있도록 한다.

본 연구에서 구체적으로 제시한 수학탐구활동 결과를 바탕으로 예를 들면, '코사인 법칙'이라는 일반화된 지식으로부터 최대한 많은 다양한 속성들을 추출하는 것이다. 코사인 법칙은 고등학교 교과서에서 다음과 같이 제시하고 있다.

$\triangle \mathrm{ABC}$의 세 변을 a, b, c라하고 그 대응각의 크기를 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$라고 하면 다음을 만족하는데, 이것을 코사인 법칙이라고 한다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\ ,\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B\ ,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

위 일반화된 식에서 다음과 같은 속성들을 추출할 수 있다. 추출 결과를 바탕으로 속성분석 목록을 작성하게 된다.

속성분석1. 법칙은 삼각형을 대상으로 한다.
속성분석2. 법칙은 변의 길이를 다룬다.
속성분석3. 법칙은 각의 크기를 다룬다.
속성분석4. 법칙은 각의 크기와 변의 길이의 제곱을 다룬다.
속성분석5. 법칙은 피타고라스 정리와 관련이 있다.

세 번째 단계는 '유사성 탐색하기(Analogy)' 단계이다. 이 단계에서는 앞 단계에서 나열한 속성분석 결과를 기초로 하여 세 가지 수준(교과서 수준, 고등수학 수준, 수학사 수준)에서 유사성을 탐색하는 단계이다. 1수준은 교과서 수준의 유사성 탐색인데, 중학교 및 고등학교 수학교과서에서 앞 두 단계의 결과인 출발점의 내용 및 속성분석 결과와 관련된 수학 내용에 대해 탐색한다. 2수준은 고등수학 수준의 탐색인데, 대학교 교재에서 앞 두 단계에서 수행한 결과와 관련된 수학 내용에 대해 탐색한다. 3수준은 수학사 탐색인데, 수학의 역사적 발생과정에서 앞 두 단계에서 수행한 결과와 관련된 수학 내용에 대해 탐색한다.

본 연구에서 구체적으로 제시한 수학탐구활동 결과를 바탕으로 예를 들면, 1수준의 탐색 결과는 '삼각형 ABC에서 $a\cos B = b\cos A$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?'에 대한 문제 추출, 피타고라스 정리의 역 정리에 대한 추출, 이등변삼각형의 성질과 관련된 명제의 추출 등을 제시할 수 있다. 또한 3수준이 탐색 결과는 Pappus의 중선정리와 그 일반화에 대한 명제, Heron의 공식 추출 등을 제시할 수 있다. 이때, 속성분석1, 3의 결과로 이등변삼각형의 성질의 추출, 속성분석2, 4의 결과로 Pappus의 정리 및 Stewart의 정리의 추출, 속성분석5의 결과로 피타고라스 정리의 역 정리의 추출이 이루어졌다. 추출 결과를 바탕으로 유사성탐색 목록을 작성한다.

네 번째 단계는 '관계맺고 탐구하기(Connection)' 단계이다. 가장 왕성한 사고활동이 일어나는 단계이기도 하고, 브레인스토밍(Brainstorming)이 일어나는 단계이다. 이 단계는 첫 번째 단계에서 출발점으로 선택된 수학적 사실과 세 번째 단계에서 작성한 목록을 기반으로 하여 서로 간의 연결고리를 맺고, 그 연결고리의 구체적인 수

학탐구결과를 도출하게 된다. 이때, 출발점과 구체적인 연결고리를 찾을 수 없는 유사성탐색 목록은 제외하고, 실제적으로 연결고리가 만들어진 결과에 대해서만 그 결과를 정리한다.

본 연구에서 구체적으로 제시한 수학탐구활동 결과를 바탕으로 예를 들면, 삼각형의 각의 크기와 관련되어 있는 피타고라스 정리의 역, 이등변삼각형은 두 밑각의 크기, 삼각형의 중점연결정리를 코사인 법칙과 연결하여 수학탐구활동을 진행하였다. 또한, 삼각형의 변의 길이와 관련되어 있는 Pappus의 정리와 Stewart의 정리, 코사인의 합 공식, Heron의 공식을 코사인 법칙과 연결하여 수학탐구활동을 진행하였다.

다섯 번째 단계는 ‘내용 확장하기(Expansion)’ 단계이다. 관계맺고 탐구하기 단계의 결과를 바탕으로 또 다른 새로운 수학적 사실이나 연결고리를 창조하는 단계이다. 유추 전략, 문제 구성하기 전략 등을 폭넓게 사용할 수 있다. 본 연구의 수학탐구활동 결과를 통해 볼 때, 코사인 법칙과 전혀 관련 없어 보이는 복소수를 유도하는 새로운 접근방법을 발견할 수도 있다.

나. 평가방법 제안

학교수학 수학탐구방법에 따른 탐구결과는 프로젝트평가와 매우 유사한 측면이 있다. 교육부(2015)는 수학 학습을 토대로 특정한 주제나 과제에 대해서 자료를 수집하고 분석, 종합, 해결하는 과정과 결과를 평가하는 방법으로 프로젝트평가를 제안하고 있기 때문이다. 이광상, 임해미, 최인선, 김성경(2021)의 제안을 근거로 <표 Ⅲ-1>과 같이 제시할 수 있다.

<표 Ⅲ-1> 관계맺기전략 수학탐구활동에 대한 평가표

평가내용 \ 평가구분		비율(100%)	적절하지 못함	부분적 보완 필요	적절함	우수함
주제선정 및 탐구주제	출발점 선택	20%	탐구수행에 적절하지 않음	탐구수행에 어려움이 있음	탐구수행이 비교적 원활함	탐구수행에 매우 적합함
탐구수행	속성 분석	10%	출발점으로부터 추출된 속성이 매우 부족함	출발점으로부터 추가적 속성의 추출이 필요함	탐구수행에 적합한 속성이 추출됨	탐구수행에 매우 적합한 속성들이 추출됨
	유사성 탐색	10%	교과서수준에서의 유사성탐색이 이루어짐	교과서/대학수준의 유사성탐색이 이루어짐	교과서/대학수준/수학사에 대한 유사성탐색이 이루어짐	유사성탐색이 잘 이루어졌고, 목록이 체계적으로 정리됨
	관계 맺기 및 탐구	30%	수학탐구활동이 진행되었지만, 결과가 미미함	수학탐구활동이 부분적으로 진행되고, 2-3가지의 결과가 도출됨	수학탐구활동이 비교적 잘 진행되고, 4가지 정도의 결과가 도출됨	수학탐구활동이 원활하게 진행되고, 5가지 이상의 결과가 도출됨
	내용 확장	20%	출발점과 다른 새로운 영역으로 확장이 미미함	출발점과 다른 새로운 영역으로 확장이 불완전함	부분적으로 새로운 영역으로 확장함	수학탐구활동 결과 새로운 영역으로 확장함
결론도출	탐구결과정리	10%	탐구결과의 제시가 부족함	결론은 제시하였지만 논리성이 미흡	결론을 제시하고 논리적으로 정리함	결론을 체계적으로 제시하고, 매우 논리적임

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 중등학교 수준에서 학생 및 교사들이 자기 주도적으로 진행할 수 있는 수학탐구방법을 구체적인

사례로부터 개발하는 것을 목적으로 한다. 본 연구의 목적을 달성하기 위해 첫째, 코사인 법칙을 출발점으로 하여 구체적인 수학탐구활동 결과를 제시하였고, 둘째, 코사인 법칙의 탐구결과를 바탕으로 하여 교사와 학생을 위한 학교수학 탐구방법과 평가방법을 제시하였다. 이에 대한 연구결과는 다음과 같다.

첫째, 선행연구 분석 결과 코사인 법칙은 역사적으로 다양한 접근방법을 가지고 있으며 교수학적 적용가능성도 다양함을 알 수 있었다. 또한 코사인 법칙은 다양한 증명 방법의 존재와 더불어 코사인 법칙이 다양한 상황에서 어떻게 활용할 수 있는지 살펴보는 것은 수학교육적으로 중요한 의미를 가진다는 것을 확인하였다. 이러한 이유로 구체적인 수학탐구활동의 사례로 코사인 법칙을 선택하였다. 따라서, 교사 및 학생들이 수학탐구활동 주제를 선택할 때, 이러한 점이 고려되어야 한다.

둘째, 코사인 법칙에 대한 탐구활동 결과 코사인 법칙은 삼각형의 각의 크기와 관련되어 있고, 삼각형의 변의 길이와 관련되어 있음을 추출할 수 있었다. 이러한 추출을 기초로 하여 피타고라스의 정리의 역, 이등변삼각형의 성질, 삼각형의 중점연결 정리, Pappus의 중선정리, 코사인의 합공식과 Heron의 공식 등의 내용이 코사인 법칙을 활용한 수학탐구활동이 가능함을 확인할 수 있었다. 따라서, 수학탐구활동 주제와 관련된 속성의 정확한 추출은 수학탐구활동을 효과적으로 수행하는 중요한 기준이 됨을 확인하였다.

셋째, 복소수가 코사인 법칙을 통해 어떻게 생성되어질 수 있는지 고찰하여 보았다. 이러한 고찰을 통해 한 가지 수학적 사실이 전혀 관련이 없는 새로운 수학적 사실로의 유도가 가능함을 발견하였다.

넷째, 코사인 법칙을 주제로 수행한 수학탐구활동 결과를 경험적으로 분석하여 교사와 학생이 자기 주도적으로 수행할 수 있는 일련의 관계맺기전략 수학탐구활동(SPACE Activity)방법에 대한 절차를 개발하였다. 이러한 절차는 출발점 선택하기(S단계), 속성 분석하기(P단계), 유사성 탐색하기(A단계), 관계맺고 탐구하기(C단계), 내용 확장하기(E단계)로 구분된다. 이러한 절차를 통한 수학탐구활동은 학교수학을 탐구주제로 하는 상황에서 의미 있는 수학탐구방법임을 확인하였다.

다섯째, 학교 현장에서 이러한 절차에 따라서 수학탐구를 진행할 경우 각 단계에서의 학생 및 교사의 역할은 다음과 같이 제안할 수 있다. S단계에서 학생은 각 조별로 혹은 개인별로 자신이 확실하게 이해하고 있거나 흥미 있는 수학적 사실, 개념, 법칙, 문제 등을 출발점으로 선택한다. 이때 교사는 탐구가능한 수학적 사실, 개념, 법칙, 문제를 선택할 수 있도록 도움을 제공한다. 출발점 선택에서 학생은 다양한 정보를 수집하고, 분류, 정리할 수 있도록 충분한 시간을 부여한다. P단계에서 학생은 선택된 출발점에 대한 충분한 토의와 토론을 통해 다양한 속성들을 열거하고 분류한다. 교사는 학생들이 최대한 유연하고 풍부한 속성들이 나열될 수 있도록 격려하고 다양한 정보를 제공한다. A단계에서 학생은 중등학교 교과서, 대학수준의 교재, 수학사와 관련된 자료를 수집하고, 정리하며, 조사된 내용을 수학적으로 분석하고 이해한다. 수집된 자료의 수준에 따라 내용의 이해를 위해 학생들 간의 소집단활동, 발표활동 등의 기회를 충분히 제공한다. 교사는 학생에 의해 수집된 수학적 자료에 대한 이해를 도와주는 역할을 수행한다. C단계에서 학생은 가장 활발한 수학탐구활동을 진행한다. 수학적 창의력과 문제해결능력 등을 통해 수집된 자료들과 나열된 속성 등을 다양한 방식으로 연결하여, 다양한 수학적 결론들을 도출하도록 한다. 교사는 학생 개개인이 다양한 관계맺기를 통해 수학적 역량이 향상될 수 있도록 지도한다. E단계에서는 앞단계의 관계맺기를 통해 도출된 수학적 사실을 정리하여 새로운 수학적 사실로 받아들일 수 있도록 한다. 교사와 학생은 도출된 사실로부터 새롭게 확장된 수학을 체계적으로 정리한다. 또한 발표의 기회를 제공하여 소집단별로 탐구한 결과를 공유하는 기회를 제공한다.

지금까지의 연구결과를 통해 한 가지 수학적 사실을 활용한 다양한 수학탐구활동이 교수학적으로 의미가 있음을 알 수 있었다. 또한, 이를 기반으로 추출된 수학탐구활동이 학생과 교사에 의해 의미 있는 수학탐구방법으로 활용될 것으로 기대된다. 더불어 학교현장에서 구체적으로 수행된 다양한 수학탐구활동을 통해 새롭고 의미 있는 수학탐구방법이 다양하게 제안되고, 활용되기를 기대한다. 마지막으로 수학탐구활동이 특정 수학자만의 전

유물이 아니라, 수학을 가르치고 배우는 모든 평범한 교사와 학생에 의해 자유롭게 이루어지는 활동이 되기를 기대하며, 더불어 교사와 학생들의 수학탐구활동의 결과를 통해 학교수학의 내용이 더욱 더 풍성해질 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육부 (2015). 수학과 교육과정, 교육부 고시 제2015-74호.

Ministry of Education (2015). *2015 Revised National Curriculum of Mathematics*, Ministry of Education Notice 2015-74

권영인・서보억 (2004). 코사인 제 2법칙의 다양한 증명방법 분석, 수학교육논문집, 18(2), 251-263.

Kwon, Y. I., Suh, B. E. (2004). Analysis of various proof methods of the second law of cosine, *Communications of Mathematical Education, 18*(2), 251-263.

권영인・서보억 (2007). 코사인 법칙의 발달과정 분석과 논증을 통한 확장에 대한 연구, 한국수학사학회지, 20(3), 147-166.

Kwon, Y. I., Suh, B. E. (2007). The Analysis of the Development Process of the Law of Cosines and the Study of the Extension through the Demonstration, *Journal for History of Mathematics, 20*(3), 147-166.

김경선・한인기 (2007). 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다양한 성질 탐구, 수학교육논문집, 21(3), 385-406.

Kim, K. S., Han, I. K. (2007). A Study on Investigating Various Properties of Triangle's Escribed Circle and Tetrahedron's Escribed Sphere, *Communications of Mathematical Education, 21*(3), 385-406.

김문섭・한인기 (2007). 바탕문제를 활용한 정사면체와 정육면체의 절단면 작도에 대한 연구, 수학교육, 46(3), 303-314.

Kim, M. S., Han, I. K. (2007). A Study on Constructing Plane Section of Regular Tetrahedron and Regular Hexahedron Using Base Problems, *The Mathematical Education, 46*(3), 303-314.

박경미 외 41명 (2015). 2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구, 한국과학창의재단연구보고서.

Park, K. M. et al. (2015). *Development of revised mathematics course curriculum*, Seoul: Korea Foundation for the advancement of science and creativity.

서보억 (2013). 교육과정과 중학교 교직수학의 탐구, 서울: 교우사.

Suh, B. E. (2013). *Investigaton on middle school mathematics and curriculum for teachers*, Seoul: KyoWooSa.

이광상・임해미・최인선・김성경 (2021). 수학교육평가의 이론과 실제, 서울: 교우사.

Lee, K. S., Lim, H. M., Choi, I. S., & Kim, S. K. (2021). *Theory and practice of evaluation in mathematics education*, Seoul: KyoWooSa.

이종우 (2002). 기하학의 역사적 배경과 발달, 서울: 경문사.

Lee, J. W. (2002). *The historical background and development of geometry*, Seoul: Gyeongmunsa.

정혜윤・이경화・백도현 (2018). 수학적 모델링 관점에 의한 〈수학과제 탐구〉 과목용 과제의 설계. 학교수학, 20(1), 149-169.

Jung, H. Y., Lee, K. H., Baek, D. H. (2018). Design for 〈Mathematical Task Inquiry〉 Subject's Task Based on the Mathematical Modeling Perspective, *School Mathematics, 20*(1), 149-169.

천선빈・이종학・김원경 (2017). '수학과제 탐구' 과목의 수업을 위한 교수-학습 자료 개발 연구, 수학교육, 56(3), 319-340.

Cheon, S. B., Lee, J. H., Kim, W. K. (2017). A Study on Development of Teaching and Learning Materials for Mathematics Project Inquiry Subject, *The Mathematical Education, 56*(3), 319-340.

한국과학창의재단 (2019). 수학과제 탐구, 서울: 한국과학창의재단.

Korea Foundation for the advancement of science and creativity (2019). *Mathematics Project*, Seoul: KOFAC

한인기 (2003a). 한 가지 수학 문제의 교육적 분석 및 관련된 문제의 체계화에 대한 연구, 수학교육, 42(1), 57-67.

Han, I. K. (2003a). A Study on the Educational Analysis of a Mathematical Problem and Systematization of Related Problems, *The Mathematical Education, 42*(1), 57-67.

한인기 (2003b). 교사를 위한 수학사, 서울 : 교우사.

Han, I. K. (2003). *Mathematics history for teacher*, Seoul: KyoWooSa.

한인기 (2007). 유추를 통한 코사인정리의 일반화에 대한 연구, 수학교육논문집, 21(1), 51-64.

Han, I. K. (2007). A Study on a Generalization of the Law of Cosine Using Vector, *Communications of Mathematical Education, 21*(1), 51-64.

황혜정・김주미 (2018). 2015 개정 <수학과제 탐구> 신설 과목 운영을 위한 과제 탐구의 수업 모형 및 자료 개발 연구. 수학교육논문집, 32(3), 363-383.

Hwang, H. J., Kim, J. M (2018). A Study on the Development of Instruction Model on Project inquiry and Materials for the New Subject of Mathematical Task Inquiry in the curriculum revised in 2015. *Communications of mathematical education, 32*(3), 363-383.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1990). The art of problem posing, Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutation-The logic of Mathematical Discovery*, (우정호 역(1991). 수학적발견의 논리, 서울 : 민음사.)

Polya, G. (1973). *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol I*, New York: Princeton University Press.

The National Council of Teachers of Mathematics (1995). A*ssessment Standards for School Mathematics*, Reston VA: NCTM.

Thomas L. Heath.(Trans.) (1952). *The Thirteen Books Of Euclid's Elements*, London : Cambridge University Press.

Web1 (2021). www.geocities.com/fredlb37/node16.html.

A Study on Mathematical Investigation Activity through Using One Mathematical Fact

Suh, Bo Euk
Department of Mathematics Education,
Chungnam National University
E-mail : eukeuk@cnu.ac.kr

This study is to support the school's mathematics exploration activities. Mathematics exploration is a very important mathematical activity not only for mathematics teachers, but also for students. Looking at the development of mathematics, it has been extended from one mathematical fact to a new mathematical fact. Mathematics exploration activities are not unique to mathematicians, and opportunities are equally given to all ordinary people who are learning mathematics and teaching mathematics. Therefore, the purpose of this study is to develop a method of mathematics exploration activities that teachers and students can perform in schools, based on mathematics exploration activities based on one mathematical fact. Specifically, the cosine law was selected as one mathematical fact, and mathematical exploration activities were performed based on the cosine law. By analyzing the results of these mathematics exploration activities, we developed a method to explore school mathematics. Through the results of this study, it is expected that mathematics exploration activities will be conducted equally by students and teachers in the mathematics classroom.

* MSC2000 Classification : 97C90
* Key words : mathematics teacher, school mathematics investigation method, synthetic geometry, the law of cosines, complex number