

대칭 1차원 5-이웃 CA 기반의 키 수열 생성기 설계

최연숙* · 김한두** · 강성원*** · 조성진****

Design of Key Sequence Generators Based on Symmetric 1-D 5-Neighborhood CA

Un-Sook Choi* · Han-Doo Kim** · Sung-Won Kang*** · Sung-Jin Cho****

요약

시스템의 성능을 평가하기 위하여 1차원 3-이웃 셀룰라 오토마타(Cellular Automata, 이하 CA) 기반의 의사 난수 생성기가 여러 분야에서 많이 응용되고 있다. 보다 더 효과적인 키 수열 생성을 위해 2차원 CA와 1차원 5-이웃 CA가 응용되었으나, 주어진 특성 다항식에 대응하는 대칭 1차원 5-이웃 CA를 설계하는 것은 매우 어려운 문제이다. 이를 해결하기 위해 특성 다항식의 점화식을 이용한 합성 방법, Krylov 행렬을 이용한 합성 방법과 같이 1차원 5-이웃 CA 합성에 관한 연구들이 진행되었다. 그러나 여전히 비선형 방정식을 풀어야 하는 문제점이 있었다. 이러한 문제점을 해결하기 위해, 최근 90/150 CA의 전이 행렬과 블록행렬을 이용한 1차원 5-이웃 CA 합성 방법이 제안되었다. 본 논문에서는 제안된 알고리즘의 이론적인 과정을 상세히 기술하고 그 알고리즘을 이용하여 높은 차수의 원시 다항식에 대응하는 대칭 1차원 5-이웃 CA를 구한다.

ABSTRACT

To evaluate the performance of a system, one-dimensional 3-neighborhood cellular automata(CA) based pseudo-random generators are widely used in many fields. Although two-dimensional CA and one-dimensional 5-neighborhood CA have been applied for more effective key sequence generation, designing symmetric one-dimensional 5-neighborhood CA corresponding to a given primitive polynomial is a very challenging problem. To solve this problem, studies on one-dimensional 5-neighborhood CA synthesis, such as synthesis method using recurrence relation of characteristic polynomials and synthesis method using Krylov matrix, were conducted. However, there was still a problem with solving nonlinear equations. To solve this problem, a symmetric one-dimensional 5-neighborhood CA synthesis method using a transition matrix of 90/150 CA and a block matrix has recently been proposed. In this paper, we detail the theoretical process of the proposed algorithm and use it to obtain symmetric one-dimensional 5-neighborhood CA corresponding to high-order primitive polynomials.

키워드

Cellular Automata, Primitive Polynomial, Synthesis Algorithm, Symmetric 5-neighborhood CA, State Transition Matrix
셀룰라 오토마타, 원시 다항식, 합성 알고리즘, 대칭 5-이웃 CA, 상태 전이 행렬

* 동명대학교 시학부(choies@tu.ac.kr)

** 교신저자 : 인제대학교 컴퓨터공학부

*** 부경대학교 정보보호학과(jsm2371@hanmail.net)

**** 부경대학교 응용수학과(sjcho@pknu.ac.kr)

• 접수일 : 2021. 04. 06

• 수정완료일 : 2021. 05. 12

• 게재확정일 : 2021. 06. 17

• Received : Apr. 06, 2021, Revised : May. 12, 2021, Accepted : Jun. 17, 2021

• Corresponding Author : Han-Doo Kim

Dept. of Computer Engineering, Inje University,

Email : mathkhd@inje.ac.kr

1. 서론

3-이웃 90/150 CA는 수십 년간 많은 연구자들이 연구하고 있는 분야이다[1-3]. 주어진 특성 다항식에 대응하는 90/150 CA의 합성 방법이 수학적 이론을 바탕으로 광범위하게 연구되었다[4-10]. 최근 최대 길이 CA는 이미지 암호 시스템에 적용되면서 우수한 의사난수 생성기임이 입증되었다[11,12].

[13]에서는 5-이웃 CA에 의해 생성된 이진수열의 난수성을 검증하기 위해 24비트 대칭 5-이웃 최대 주기 선형 하이브리드 CA를 사용하여 NIST 통계 테스트를 수행하였고 그 결과 5-이웃 CA가 생성하는 이진수열은 높은 난수성이 있음이 확인되었다. 또한 이들은 특성 다항식의 점화식을 이용하여 n -셀 대칭 1차원 5-이웃 CA를 구하는 기본적인 알고리즘을 제안하였다[13]. 그러나 이들이 제안한 방법은 이전 특성 다항식들을 모두 알아야만 대칭 1차원 5-이웃 CA를 구할 수 있기 때문에 비효율적인 방법이다. 이를 개선하기 위해 [5]에서는 행렬의 닻음, Krylov행렬과 90/150 CA를 이용하여 대칭 1차원 5-이웃 CA를 합성하는 알고리즘을 제안하였다. 그러나 이 알고리즘은 비선형 방정식을 풀어야 하는 문제점이 있다.

이러한 문제점을 해결하기 위해 [6]에서는 삼중블록행렬을 이용하여 비선형 문제를 일부 선형화하여 대칭 5-이웃 CA F 를 효율적으로 구하는 알고리즘을 제안하였다. 본 논문에서는 [6]에서 제안한 알고리즘의 이론적인 과정을 상세히 기술하고 그 알고리즘을 이용하여 높은 차수의 원시 다항식에 대응하는 n -셀 대칭 1차원 5-이웃 CA를 구한다. 특히 [4]에서 제안된 1차원 90/150 CA의 합성 알고리즘을 이용하여 상태 전이 행렬 T 를 구하고, 방정식 $FQ=QT$ (Q 는 직교행렬)를 이용하여 구한 블록행렬의 계수, F 와 $F+I$ 에 대한 조건을 이용하여 대칭 5-이웃 CA인 F 를 구하는 과정을 제시한다.

II. 배경 지식 및 기존 연구

n 개의 셀로 이루어진 CA의 모든 셀에 적용된 전이규칙이 90 또는 150인 경우 이러한 CA를 90/150 CA라고 한다. n -셀 3-이웃 90/150 CA의 상태 전이 행렬 $T_n = (t_{ij})_{n \times n}$ 은 식(1)과 같은 삼중대각행렬이다.

$$t_{ij} = \begin{cases} d_i, & i = j \\ 1, & |i - j| = 1 \\ 0, & o/w \end{cases} \quad (1)$$

T_n 은 주대각성분을 이용하여 $\langle d_1 d_2 \dots d_n \rangle$ 로 간단히 나타낸다. 여기서 CA의 i 번째 셀에 적용되는 규칙이 90이면 $d_i = 0$, 규칙이 150이면 $d_i = 1$ 이다. 표 1은 전이규칙 90과 150의 부울식이다.

T_n 의 특성 다항식 $\Delta_n(x)$ 은 $|T_n \oplus xI_n|$ 이다. 여기서 I_n 은 n 차 단위행렬이다. n 차 기약다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 가 $x^m - 1$ 의 인수가 되는 m 의 최솟값이 $2^n - 1$ 일 때 $f(x)$ 를 원시 다항식(primitive polynomial)이라고 한다. 예를 들어 $x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + 1$ 은 원시 다항식이다. T_n 의 특성 다항식 $\Delta_n(x)$ 가 원시 다항식일 때 T_n 에 대응하는 90/150 CA는 최대주기수열을 생성한다.

표 1. 전이규칙 90과 150의 부울식
Table 1. Boolean expressions of transition rule 90 and 150

Rule No.	Boolean Expression
90	$s_i^{t+1} = s_{i-1}^t \oplus s_{i+1}^t$
150	$s_i^{t+1} = s_{i-1}^t \oplus s_i^t \oplus s_{i+1}^t$

대칭 1차원 5-이웃 CA의 i 번째 셀의 상태전이함수는 식 (2)와 같다.

$$s_i^{t+1} = f_i(s_{i-2}^t, s_{i-1}^t, s_i^t, s_{i+1}^t, s_{i+2}^t) \quad (2)$$

여기서 s_i^t 는 시간 t 에서의 i 번째 셀의 상태, f_i 는 i 번째 셀의 조합 논리이다. 식(3)은 대칭 1차원 5-이웃 CA의 부울식이다.

$$s_i^{t+1} = s_{i-2}^t \oplus s_{i-1}^t \oplus u_i s_i^t \oplus s_{i+1}^t \oplus s_{i+2}^t \quad (3)$$

여기서 $u_i \in \{0,1\}$ 이다.

n -셀 대칭 1차원 5-이웃 CA의 상태 전이 행렬 $F_n = (v_{ij})_{n \times n}$ 은 식(4)와 같은 오중대각행렬이다.

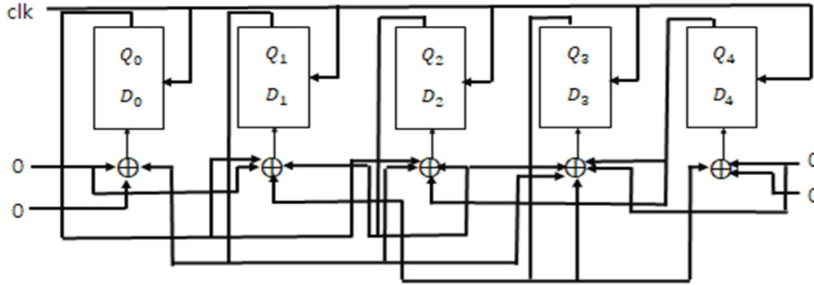


그림 1. 전이규칙이 <00010>, 특성 다항식이 $x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$ 인 1차원 대칭 5-이웃 CA
 Fig. 1 5-neighborhood null boundary CA with transition rule <00010> and characteristic polynomial $x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$

$$v_{ij} = \begin{cases} u_i, & i = j \\ 1, & |i - j| = 1 \text{ or } 2 \\ 0, & o/w \end{cases} \quad (4)$$

F_n 은 주대각성분을 이용하여 $\langle u_1 u_2 \dots u_n \rangle$ 로 간단히 나타낸다[13]. 그림 1은 전이규칙이 <00010>, 특성 다항식이 $x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$ 인 1차원 대칭 5-이웃 CA의 구조이다.

n -셀 대칭 1차원 5-이웃 CA의 상태 전이 행렬이 $F_n = \langle u_1 u_2 \dots u_n \rangle$ 일 때 F_n 의 특성 다항식을 $\Gamma_n(x)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x) &= x + u_1, \quad \Gamma_2(x) = (x + u_2)\Gamma_1(x) + 1, \\ \Gamma_3(x) &= (x + u_3)\Gamma_2(x) + \Gamma_1(x) + (x + u_2)\Gamma_0(x), \\ \Gamma_4(x) &= (x + u_4)\Gamma_3(x) + \Gamma_2(x) + (x + u_3)\Gamma_1(x) \\ &+ \Gamma_0(x). \quad (\text{단 } \Gamma_0(x) = 1) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5)$$

이므로 $\Gamma_n(x)$ 은 식(6)과 같다[13].

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &= (x + u_n)\Gamma_{n-1}(x) + \Gamma_{n-2}(x) \\ &+ (x + u_{n-1})\Gamma_{n-3}(x) + \Gamma_{n-4}(x) \quad (n \geq 1) \\ \text{단 } \Gamma_{-3}(x) &= \Gamma_{-2}(x) = \Gamma_{-1}(x) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

III. 대칭 1차원 5-이웃 CA를 구하는 방법

정사각행렬 C, D 에 대하여 $D = P^{-1}CP$ 를 만족하는 가역행렬 P 가 존재할 때 D 는 C 와 닮은 행렬(similar matrix)이라고 한다. 두 행렬이 닮은 행렬일 때, 두 행렬의 특성 다항식은 동일하다[14]. 특성 다항식이 $f(x)$ 인 n -셀 90/150 CA의 상태 전이 행렬 T 가 주어졌을 때 특성 다항식이 $f(x)$ 인 n -셀 대칭 5-이웃 CA의 상태 전이 행렬 F 는 대칭행렬 T 와 닮은 대칭행렬이므로 $FQ = QT$ 가 성립하는 직교행렬 Q 가 존재한다. 직교행렬 Q 에 대하여 방정식 $FQ = QT$ 을 이용하여 대칭 5-이웃 CA F 를 구한다.

$Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n]$ (\mathbf{q}_i 는 Q 의 i 번째 열벡터)라 하면 $FQ = F[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n] = [F\mathbf{q}_1, F\mathbf{q}_2, \dots, F\mathbf{q}_n]$

이고

$$QT = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} t_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & t_n \end{bmatrix}$$

$= [t_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1 + t_2\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_2 + t_3\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4, \dots, \mathbf{q}_{n-1} + t_n\mathbf{q}_n]$ 이므로 식(7)이 성립한다.

$$F\mathbf{q}_1 = t_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$$

$$F\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 + t_2\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3$$

$$F\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_2 + t_3\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ Fq_{n-1} &= q_{n-2} + t_{n-1}q_{n-1} + q_n \\ Fq_n &= q_{n-1} + t_nq_n \end{aligned} \tag{7}$$

이를 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (F+t_1I_n)q_1 &= q_2 \\ (F+t_2I_n)q_2 &= q_1 + q_3 \\ (F+t_3I_n)q_3 &= q_2 + q_4 \\ & \vdots \\ (F+t_{n-1}I_n)q_{n-1} &= q_{n-2} + q_n \\ (F+t_nI_n)q_n &= q_{n-1} \end{aligned} \tag{8}$$

이를 행렬방정식으로 나타내면 식(9)와 같다.

$$B(F)V_Q = O \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \text{단 } B(F) &= (B_{ij})_{n \times n}, B_{ij} = \begin{cases} F+t_iI_n, & i=j \\ I_n, & |i-j|=1 \\ O_n, & o/w \end{cases}, \\ V_Q &:= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, O := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

식(9)가 자명하지 않은 해 V_Q 를 가져야 하므로 $|B(F)| = 0$ 이어야 한다. 주어진 T_n 에 대하여 $B(F_n)$ 의 행사다리꼴 $ref(B(F_n))$ 은 식(11)과 같다.

$$ref(B(F_n)) = \begin{bmatrix} I F_n + t_2 I & I & O & \dots & O & O \\ O & I & F_n + t_3 I & I & \dots & O & O \\ O & O & I & F_n + t_4 I & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & I & F_n + t_n I \\ O & O & O & O & \dots & O & \Delta_n(F_n) \end{bmatrix} \tag{11}$$

여기서 $\Delta_n(x)$ 은 T_n 의 특성 다항식이다. 따라서 T_n 에 대응하는 F_n 에 대하여 $\Delta_n(F_n) = O$ 이다.

<예제 1> 원시 다항식 $\Delta_5(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$ 에 대응하는 T_5 는 <00111>이므로 $B(F_5)$ 는 식(12)와 같다.

$$B(F_5) = \begin{bmatrix} F_5 & I & O & O & O \\ I & F_5 & I & O & O \\ O & I & F_5 + I & I & O \\ O & O & I & F_5 + I & I \\ O & O & O & I & F_5 + I \end{bmatrix} \tag{12}$$

블록행렬 $B(F_5)$ 의 행사다리꼴 $ref(B(F_5))$ 을 구하면 식(13)과 같다.

$$ref(B(F_5)) = \begin{bmatrix} I F_5 & I & O & O \\ O & I & F_5 + I & I & O \\ O & O & I & F_5 + I & I \\ O & O & O & I & F_5 + I \\ O & O & O & O & \Delta_5(F_5) \end{bmatrix} \tag{13}$$

$B(F_5)V_Q = O$ 이 자명하지 않은 해를 찾기 위해서는 $\Delta_5(F_5) = O$ 이 되어야 한다. $F_5 = \langle 00010 \rangle$ 인 경우 $\Delta_5(F_5) = O$ 이므로 T_5 에 대응하는 F_5 가 된다.

주어진 기약다항식 $\Delta_n(x) = x^n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i x^i + 1$ 에 대하여 $\Delta_n(x+1)$ 도 기약다항식이 되므로 $|F_n| = |F_n + I| = 1$ 이다. $F_n = \langle u_1 u_2 \dots u_n \rangle$ 을 효율적으로 찾기 위해 $B(F_n)$ 의 행사다리꼴을 구하기 전에 $|F_n| = |F_n + I| = 1, Tr(F_n) = \sum_{i=1}^n u_i = c_{n-1}$ 인 F_n 을 선택한다. 표 2는 [6]에서 제안된 주어진 원시 다항식에 대응하는 최대길이를 갖는 대칭 1차원 5-이웃 CA의 전이 행렬의 합성 알고리즘이다.

표 3은 C++프로그램을 이용하여 65차부터 128차까지 주어진 원시 다항식에 대응하는 대칭 1차원 5-이웃 CA F 와 상태 전이 행렬 T 를 구한 것이다. 표 3의 8차 원시 다항식에서 6, 5, 3은 $x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + 1$ 을 나타낸다.

본 논문은 2019학년도 인제대학교 학술연구조성비 보조에 의한 것임.

References

- [1] J. Von Neumann, *Theory of self-reproducing automata*. Urbana and London: University of Illinois Press, 1966.
- [2] P. P. Chaudhuri, D. R. Chowdhury, S. Nandi and S. Chattopadhyay, *Additive cellular automata, Theory and applications*. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1997.
- [3] H. Kim, S. Cho, U. Choi, M. Kwon, and G. Kong, "Synthesis of uniform CA and 90/150 hybrid CA," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 11, no. 3, Mar. 2016, pp. 293-302.
- [4] S. Cho, U. Choi, H. Kim, Y. Hwang, J. Kim, and S. Heo, "New synthesis of one-dimensional 90/150 linear hybrid group cellular automata," *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 26, no. 9, Sept. 2007, pp. 1720-1724.
- [5] S. Cho, H. Kim, U. Choi, and S. Kang, "Synthesis of symmetric 1-D 5-neighborhood CA using Krylov matrix," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 15, no. 6, Dec. 2020, pp. 1105-1111.
- [6] U. Choi, S. Cho, and S. Kang, "1-D symmetric 5-neighbor MLCA based color image encryption," 2021 IEEE the 6th Int. Conf. on Computer and Communication Systems, Chengdu, China, vol. 1, Apr. 2021. pp. 1-6.
- [7] H. Jeong, S. Cho, and S. Kim, "Medical image encryption based on C-MLCA and 1D CAT," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 14, no. 2, Apr. 2019, pp. 439-446.
- [8] U. Choi, S. Cho, H. Kim, and J. Kim, "90/150 CA corresponding to polynomial of maximum weight," *J. of Cellular Automata*, vol. 13, no. 4, 2018, pp. 347-358.
- [9] H. M. Ghadirli, A. Nodehi, and R. Enayatifar, "An overview of encryption algorithms in color images," *Signal Processing*, vol. 164, Nov. 2019, pp. 163-185.
- [10] Z. Mehmahad and A. Latif, "A novel image encryption scheme based on reversible cellular automata and chaos," *I. J. Information Technology and Computer Science*, vol. 11, no. 1, Apr. 2019, pp. 15-23.
- [11] U. Choi, S. Cho, H. Kim, and M. Kwon, "Analysis of 90/150 CA corresponding to the power of irreducible polynomials," *J. of Cellular Automata*, vol. 14, no. 5-6, 2019, pp. 417-433.
- [12] H. Jeong, S. Cho, and S. Kim, "Medical image encryption based on C-MLCA and 1D CAT," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 14, no. 2, Apr. 2019, pp. 439-446.
- [13] S. Maiti and D. R. Chowdhury, "Study of five-neighborhood linear hybrid cellular automata and their synthesis," *ICMC 2017, CCIS 655*, Apr. 2017, pp. 68-83.
- [14] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1985.

저자 소개

최연숙(Un-Sook Choi)



1992년 성균관대학교 산업공학과 졸업(공학사)

2000년 부경대학교 대학원 응용수학과 졸업(이학석사)

2004년 부경대학교 응용수학과 졸업(이학박사)

2009년 부경대학교 정보보호학과 졸업(공학박사)

2009년~ 현재 동명대학교 정보통신 소프트웨어공학과 교수

※ 관심분야 : 셀룰라 오토마타론, 정보보호



김한두(Han-Doo Kim)

1982년 고려대학교 수학과 졸업(이학사)

1984년 고려대학교 대학원 수학과 졸업(이학석사)

1988년 고려대학교 대학원 수학과 졸업(이학박사)

1989년~ 현재 인제대학교 컴퓨터공학부 교수

※ 관심분야 : 셀룰라 오토마타론, 정보보호



강성원(Sung-Won Kang)

2017년 부경대학교 응용수학과 졸업(이학사)

2019년 부경대학교 대학원 수학과 졸업(이학석사)

2019년~ 현재 부경대학교 대학원 정보보호학과 박사과정 재학

※ 관심분야 : 셀룰라 오토마타론, 정보보호



조성진(Sung-Jin Cho)

1979년 강원대학교 수학교육과 졸업(이학사)

1981년 고려대학교 대학원 수학과 졸업(이학석사)

1988년 고려대학교 대학원 수학과 졸업(이학박사)

1988년~ 현재 부경대학교 응용수학과 교수

※ 관심분야 : 셀룰라 오토마타론, 정보보호

