

# 마제형 대칭 타원 아치의 자유진동: 아치 정점의 합응력 경계조건 이용 再考

이병구\* · 이태은\*\* · 김권식\*\*\* · 오상진\*\*\*\*

Lee, Byoung Koo\*, Lee, Tae Eun\*\*, Kim, Gweon Sik\*\*\*, Oh, Sang Jin\*\*\*\*

## Free Vibrations of Horseshoe Symmetric Elliptic Arch: Using Boundary Conditions of Stress Resultants at Mid-Arc Revisited

### ABSTRACT

This paper deals with the boundary conditions of the stress resultants at the mid-arc for free vibration analyses of the arch. The considered arch is a horseshoe symmetric elliptic arch. The work dealing with the boundary conditions of the deflection at both ends of the arch has already been reported in the open literature. This revisited paper aims to study the suitability of the boundary conditions of the stress resultants at the mid-arc to be replaced by the boundary condition at both ends. In this study, the boundary conditions of the stress resultants at the mid-arc are newly derived based on the theory of the previous work, and natural frequencies and mode shapes are obtained using the new boundary conditions of the stress resultants. The numerical results of this paper confirm that the new boundary conditions have been validated according to previous studies and results of finite element ADINA.

**Key words** : Free vibration, Horseshoe elliptic arch, Stress resultants, Natural frequency, Mode shape

### 초 록

이 논문은 아치의 자유진동 해석에서 아치 정점의 합응력 경계조건 이용에 관한 연구이다. 연구 대상 아치는 마제형 타원 대칭 아치이다. 마제형 타원 아치의 자유진동을 다룬 연구는 이미 문헌에 발표된 바 있다. 이 재고 논문은 기존 문헌에서 사용한 아치 양단의 경계조건을 대신할 수 있는 아치 정점의 합응력 경계조건의 적용성을 연구하는 데 그 목적이 있다. 기존 문헌의 이론을 이용하여 아치 정점의 합응력 경계조건을 유도하고, 이를 이용하여 아치의 고유진동수와 진동형을 산정하였다. 이 연구의 결과는 기존 문헌 및 유한요소해 ADINA의 결과와 잘 일치하여, 아치 정점의 합응력 경계조건을 아치의 자유진동 해석에 적용할 수 있음을 검증하였다.

**검색어** : 자유진동, 마제형 타원 아치, 합응력, 고유진동수, 진동형

## 1. 서론

아치는 외관이 아름답고, 구조적으로 압축력과 휨에 효과적으로 저항할 수 있기 때문에 대형 구조물에서 하중을 지지하는 뼈대구조로 이용되고 있다. 아치는 매우 전통적인 구조형식으로 고대의 건축물로부터 현대의 장대지간 교량에 이르기까지 토목, 건축공학은 물론

\* 원광대학교 토목환경공학과 명예교수 (Wonkwang University · bkleest@wku.ac.kr)

\*\* 중신회원 · 교신저자 · 동강대학교 건설환경과 겸임교수 (Corresponding Author · Donggang University · telee@hanmail.net)

\*\*\* 중신회원 · 원광대학교 토목환경공학과 부교수 (Wonkwang University · gskim1531@wku.ac.kr)

\*\*\*\* 중신회원 · 전남도립대학교 토목환경과 교수 (Jeonnam State University · sjoh@dorip.ac.kr)

Received July 7, 2020/ revised August 8, 2020/ accepted August 15, 2020

기계, 선박, 항공공학분야에서 다양한 시공사례를 볼 수 있다.

풍하중, 차량 하중 등과 같이 동하중이 작용하는 구조물에서 구조물의 고유한 성질 중에 하나인 자유진동은 구조물의 안정성에 영향을 미치는 요소 중에 하나이다. 동하중이 작용하는 구조물은 자유진동 특성이인 공진현상으로 인하여 구조기능을 약화시킬 수 있다. 따라서, 구조물의 설계단계에서부터 공용 중인 구조물의 건전성 평가에 이르기까지 자유진동은 구조해석에서 중요한 연구 과제 중에 하나이다(Rao, 2007).

아치 구조물을 포함하는 구조물의 자유진동 문제는 지난 수십 년간 많은 연구가 수행되어왔다. 자유진동에 관한 연구는 몇 개의 연구주제로 분류할 수 있으며, 주요한 연구결과의 간단한 문헌고찰은 다음과 같다. 먼저, 아치 고유진동수의 해는 닫힌 해와 수치해로 나눌 수 있다. 닫힌 해는 변위의 진폭 즉, 진동형을 지배미분방정식을 이용하여 직접 풀어 정확한 고유진동수를 산정한다. 변화곡률 아치에서는 닫힌 해가 존재하지 않기 때문에 그 연구결과는 매우 드물다. 닫힌 해의 논문으로는 Huang et al.(1990), Tufekci and Ozdemir(2006), Lü and Lü(2009) 등의 연구가 있다. 수치해는 변위에 관한 미분방정식을 수치적분하여 진동형을 산정하고, 경계조건을 만족하는 고유진동수를 비선형 방정식을 이용하여 계산하는 수치해석적 방법이다. 대부분의 연구들이 수치해석 방법이며, Joo et al.(1985), Malekzadeh et al.(2008), Shin et al.(2008) 등의 논문이 있다. 구조물에서 적절한 선형의 선택은 매우 중요하며, 아치의 자유진동해석에서 원호(Lee et al., 2014; Tufekci and Ozdemir, 2006), 포물선(Joo et al., 1985), 타원(Nieh et al., 2003), 정현(Lee and Wilson, 1990), 현수(Wilson and Lee, 1995) 등의 다양한 선형들을 연구대상으로 하고 있다. 변단면은 고유진동수 및 진동형에 상당한 영향을 미치며 적당한 변단면 형식을 채택함으로써 아치의 동적 최적형을 찾을 수 있다. 변단면 아치의 자유진동에 관한 논문으로는 Huang et al.(1990), Tufekci and Ozdemir (2006), Shin et al.(2008) 등의 연구가 있다. 이 밖에도 해석방법(Bozyigit et al., 2020; Rezaiee-Pajand et al., 2018; Ruta and Meissner, 2018), 회전관성 및 전단변형(Wu and Chiang, 2004), 지점조건(Filipich et al., 1987), 재료적 성질(Li, 2008; Malekzadeh et al., 2008), 다경간 아치(Riedel and Kang, 2006) 등을 주제로 하는 논문이 있다. 이와 같이 아치의 자유진동에 관한 연구는 선형으로부터 재료적 특성에 이르기까지 구조공학에서 다루는 모든 분야에서 지금까지 활발하게 연구되고 있다.

위에서 언급한 아치는 아치 지점에서 할선(secant line) 길이가 가장 짧은 아치들이다. 이와는 다르게 마제형 아치는 말굽 형상과 같이 할선 길이가 아치 정점으로부터 점차 증가하여 최대치를 보인 후에 지점의 개구부에 이르기까지 감소하는 아치형식이다. 마제형 아치의 자유진동에 관한 연구로는 원호 아치(Lee et al., 2014),

타원 아치(Lee et al., 2016)의 두 편이 있다. 아치 정점의 경계조건에 관한 연구로는 Lee and Lee(2020)의 논문이 있지만 중심각이  $\pi$ 보다 작은 마제 아치가 아닌 원호 아치를 대상으로 연구하였다.

구조물의 경계조건은 구조물을 해석하는 데 매우 중요한 역할을 한다. 예를 들어, 정사각형 균질 평판 등과 같은 대칭구조에서는 대칭축의 경계조건을 이용함으로써 평판 면적의 1/4만을 해석 대상으로 하여 효율적인 구조해석을 실행할 수 있다. 이 개념은 유한요소 해석에서 그 적용성이 뛰어나 널리 이용되고 있음은 잘 알려진 사실이다. 이러한 관점에서 이 논문은 아치의 자유진동해석에서 아치 정점의 경계조건 적용에 관한 연구이다. 아치 정점의 경계조건을 이용하기 위해서는 아치 구조에 발생하는 합응력식을 이용하여야 한다. 위에서 언급한 마제형 아치의 논문(Lee et al., 2014; Lee et al., 2016)에는 이 합응력식이 잘 기술되어 있다. 타원 아치는 변화곡률 아치이므로 구조해석이 원호 아치 보다는 복잡하다. 이러한 점에서 이 연구에서는 원호보다는 타원 아치를 연구 대상으로 하였다.

이 재고 논문은 마제형 대칭 타원 아치의 정점에서 경계조건 즉, 대칭(symmetric) 및 역대칭(anti-symmetric) 경계조건의 적용에 관한 연구이다. 기존에 발표한 타원 아치(Lee et al., 2016)의 이론(특히, 합응력식)을 이용하여 아치 정점의 합응력 경계조건을 새로 유도하고, 고유진동수 및 진동형을 산정하는 적용성을 연구하였다. 이 연구는 고전역학을 기반으로 하는 이론연구이며, 이 연구의 결과는 현대역학을 기반으로 하는 유한요소법 등의 결과와 서로 보완하여 상호 발전하는데 의의가 있다.

## 2. 수학적 모형

### 2.1 대칭 타원 아치의 기하적 형상

Fig. 1은 수평축 길이가  $2a$ , 수직축 길이가  $2b$ , 중심각(opening angle)이  $\alpha(\pi < \alpha < 2\pi)$ 인 마제형 대칭 타원 아치의 기하적 형상을 나타낸다. 아치의 선형은 원점이 O인 직교 좌표계( $x, y$ )에서 정의된다. 점선으로 표시된 아치의 왼쪽 지점( $\theta = 0$ )의 곡률반경으로부터 실선으로 표시된 직교좌표( $x, y$ )의 곡률반경까지의 각도는  $\theta$ 이고, 곡률중심반경은  $r$ 이다. 아치는 양단  $x = -a(\theta = 0)$ ,  $x = a(\theta = \alpha)$ 에서 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있다. 아치 정점  $c$ 에서  $\theta = \alpha/2$ 이다. 이 연구에서 아치의 기하적 형상은 대칭이므로 회전-회전(hinged-hinged), 고정-고정(clamped-clamped) 아치만을 취급하며, 회전-고정/고정-회전 아치는 연구대상에서 제외한다. 아치가 자유진동하면 직교좌표( $x, y$ )에서 곡률중심방향 변위  $w$ , 접선방향 변위  $v$ , 단면회전각  $\psi$ 가 발생한다. 이 연구에서 자유진동은 조화진동으로 가정하며, 예로서 동적 접선방향 변위  $w_{r,t}$ 는  $w_{r,t} = w \sin \omega_i t$ 로 나타낸다. 여기서,  $\omega_i$ 는 고유각진동수,  $i=(1, 2, 3, \dots)$

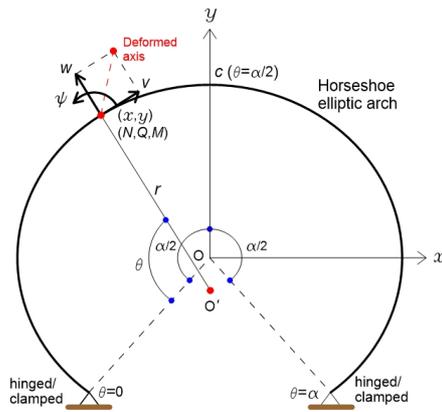


Fig. 1. Configuration of Horseshoe Symmetric Elliptic Arch and its Parameters

는 진동형 변위,  $t$ 는 시간이다. 아치 단면에는 동적 변위( $w, v$ )에 의한 동적 축방향력  $N$ , 전단력  $Q$ , 휨 모멘트  $M$ 의 합응력이 작용한다.

위의 그림에서 수평축 길이  $2a$ , 수직축 길이  $2b$ 인 즉,  $(x, y)$ 의 절편이  $(a, b)$ 인 타원의 선형 방정식은 다음과 같다.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (1)$$

타원 식을 무차원으로 나타내기 위하여 형상비(aspect ratio)  $k$ , 무차원 좌표계( $\xi, \mu$ )를 다음과 같이 정의한다.

$$k = \frac{b}{a} \quad (2)$$

$$\xi = \frac{x}{a} \quad (3)$$

$$\mu = \frac{y}{a} \quad (4)$$

Eqs. (2)-(4)를 이용하여 Eq. (1)을 다음과 같이 무차원 타원 식으로 표현한다.

$$\xi^2 + \left(\frac{\mu}{k}\right)^2 = 1, -1 \leq \xi \leq 1; -k \leq \mu \leq k \quad (5)$$

위 타원은  $k=1$ 이면 원형,  $0 < k < 1$ 이면 납작한(flat) 타원,  $k > 1$ 이면 길쭉한(longish) 타원이다.

위 Eq. (5)는 완전히 닫힌 타원(closed elliptic) 식이며 이 식에 타원의 중심각  $\alpha$ 를 주면(Fig. 1 참조), 아치의 임의의 각도  $\theta$ (Fig.

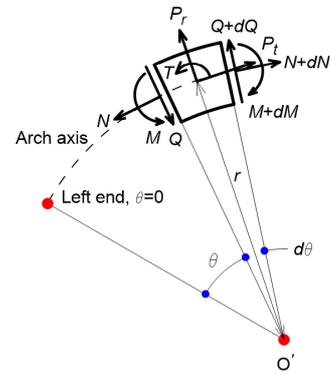


Fig. 2. Free Body Diagram of Small Arch Element

1 참조)에서 무차원 직교좌표( $\xi, \mu$ )를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\xi = \left| \frac{\tan(\alpha/2 - \theta)}{\sqrt{k^2 + \tan^2(\alpha/2 - \theta)}} \right|, 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (6a)$$

$$\mu = k\sqrt{1 - \xi^2} \quad (6b)$$

위에서  $\theta$ 의 1~4 분면에서 ( $\xi, \mu$ ) 부호는 각각 (+,+), (-,+), (-,-), (+,-)이다.

## 2.2 상미분방정식

이 절에서는 아치 정점의 합응력 경계조건을 유도하는 데 필요한 문헌(Lee et al., 2016)에 발표되어 있는 이론을 요약한다. Fig. 2는 자유진동하는 미소요소에 작용하는 힘의 자유물체도를 나타낸다. 이 미소요소에는 동적 변위( $w, v$ )에 의한 동적 합응력( $N, Q, M$ )이 작용하고, 질량을 갖는 미소요소에는 가속도에 의한 곡률중심 관성력  $P_r$ , 접선 관성력  $P_t$ , 회전관성우력  $T$ 가 발생한다.

Fig. 2의 자유물체도에서  $\Sigma F_r = 0, \Sigma F_t = 0, \Sigma M = 0$ 의 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$N' + Q + rP_t = 0 \quad (7)$$

$$Q' - N + rP_r = 0 \quad (8)$$

$$M' - rQ - rT = 0 \quad (9)$$

위에서 ( $'$ ) =  $d/d\theta$ , ( $''$ ) =  $d^2/d\theta^2$ 의 미분연산자이다.

아치 단면에 발생하는 합응력( $N, M$ ) 및 회전각  $\psi$ 는 다음과 같다(Borg and Gennaro, 1959).

$$N = EA r^{-1}(v' + w) + EI r^{-3}(w'' + w) \quad (10)$$

$$M = -EI r^{-2} (w'' + w) \quad (11)$$

$$\psi = r^{-1} (w' - v) \quad (12)$$

위에서  $E$ 는 아치 재료의 탄성계수이다.

미소요소에 발생하는 관성력( $P_r, P_t$ ) 및 회전관성우력  $T$ 는 다음과 같다(Weaver et al., 1990).

$$P_r = \rho A \omega_i^2 w \quad (13)$$

$$P_t = \rho A \omega_i^2 v \quad (14)$$

$$T = \rho I \omega_i^2 \psi = \rho I \omega_i^2 r^{-1} (w' - v) \quad (15)$$

위에서  $\rho$ 는 아치 재료의 질량밀도이다.

Eqs. (10) and (11)에서  $(N, M)$ 의 1차미분( $N', M'$ )를 구하면 다음과 같다.

$$N' = EAr^{-1}(v'' + w') - EAr^{-2}r'(v' + w) + EIr^{-3}(w''' + w') - 3EIr^{-4}r'(w'' + w) \quad (16)$$

$$M' = -EI r^{-2} (w''' + w') + 2EI r^{-3} r' (w'' + w) \quad (17)$$

Eq. (9)의 평형방정식에 Eqs. (15) and (17)을 대입하고 전단력  $Q$ 에 대하여 정리하면 Eq. (18)과 같고, 이로부터 1차미분  $Q'$ 를 구하면 Eq. (19)와 같다.

$$Q = EIr^{-3}[-(w''' + w') + 2r^{-1}r'(w'' + w)] - \rho I \omega_i^2 r^{-1} (w' - v) \quad (18)$$

$$Q' = EIr^{-3}[-(w'''' + w'') + 5r^{-1}r'(w''' + w') + (2r^{-1}r'' - 8r^{-2}r'^2)(w'' + w)] + \rho I \omega_i^2 r^{-1}[-(w'' - v') + r^{-1}r'(w' - v)] \quad (19)$$

자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 정의한다.

$$\delta = \frac{w}{a} \quad (20)$$

$$\eta = \frac{v}{a} \quad (21)$$

$$\zeta = \frac{r}{a} \quad (22)$$

$$s = \frac{a}{\sqrt{IA}} \quad (23)$$

$$C_i = \omega_i a \sqrt{\rho/E} \quad (24)$$

여기서  $(\delta, \lambda)$ 는 곡률중심 및 접선방향의 무차원 변위,  $\zeta$ 는 무차원 곡률반경,  $s$ 는 세장비,  $C_i$ 는 무차원 고유진동수이다.

Eq. (8)의 평형방정식에 Eqs. (10), (13) and (19)를 대입하고 무차원 변수식 Eqs. (20)~(24)를 적용하면 Eq. (25)의 미분방정식을 얻을 수 있다. 마찬가지로 Eq. (7)의 평형방정식에 Eqs. (13), (16) and (18)을 대입하면 Eq. (26)의 미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\delta'''' = 5e_1 \delta'''' + (e_2 + C_i^2 e_3) \delta'' + (5e_1 + C_i^2 e_4) \delta' + [e_2 + s^2 e_3 (C_i^2 e_3 + 1) + 1] \delta + (s^2 - C_i^2) e_3 \eta' - C_i^2 e_4 \eta \quad (25)$$

$$\eta'' = s^{-2} e_5 \delta'' + (s^{-2} C_i^2 - 1) \delta' + (e_1 + s^{-2} e_5) \delta + e_1 \eta' + C_i^2 (e_3 - s^{-2}) \eta \quad (26)$$

여기서 계수  $e_1 \sim e_5$ 는 다음과 같다.

$$e_1 = \zeta^{-1} \zeta', e_2 = 2(\zeta^{-1} \zeta'' - 4\zeta^{-2} \zeta'^2 - 1), e_3 = -\zeta^2, e_4 = \zeta \zeta', e_5 = \zeta^{-3} \zeta' \quad (27)$$

Eq. (27)에서 무차원 곡률반경  $\zeta$ 는 Eq. (6)을 이용하여 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\zeta = \frac{\mu(1 + m^4 \xi^2 / \mu^2)^{3/2}}{m^2(1 + m^2 \xi^2 / \mu^2)} \quad (28)$$

Eq. (27)에서 두개의 미분 값  $\zeta', \zeta''$ 는 Eq. (28)을 이용하여 아래와 같이 5점 대표 값 (5 points stencil)을 이용하여 계산하였다.

$$\zeta' = \frac{1}{12(\Delta\theta)} (-\zeta_2 + 8\zeta_1 - 8\zeta_{-1} + \zeta_{-2}) \quad (29a)$$

$$\zeta'' = \frac{1}{12(\Delta\theta)^2} (-\zeta_2 + 16\zeta_1 - 30\zeta_0 + 16\zeta_{-1} - \zeta_{-2}) \quad (29b)$$

위 식  $\zeta, \zeta', \zeta''$ 은 타원 아치에서 각도  $\theta$  즉, Eq. (6)으로 표현된  $(\xi, \mu)$ 에서 곡률항이다. 여기서  $\zeta_{-2} \sim \zeta_2$ 는 중심 곡률반경  $\zeta$ 에서 등간격  $\Delta\theta$ 로 계산한 좌우의  $\zeta$  값이다.

### 2.3 아치 양단의 경계조건

아치의 양쪽 지점  $\theta=0$  및  $\theta=\alpha$ 에서 회전 및 고정지점의 경계조건을 유도하면 다음과 같다. 회전지점( $\theta=0$  또는  $\theta=\alpha$ )에서 변위  $w, v$  및 Eq. (11)로 표현되는 휨 모멘트  $M$ 은 '0'이다. 이 경계조건에 무차원 변수식 Eqs. (20) and (21)을 적용하면 회전지점의 무차원 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, \delta'' = 0 \quad (30)$$

고정지점( $\theta=0$  또는  $\theta=\alpha$ )에서 변위  $w, v$  및 Eq. (12) 식으로 표현되는 회전각  $\psi$ 는 '0'이다. 이 경계조건에 무차원 변수식 Eqs. (20) and (21)을 적용하면 고정지점의 무차원 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, \delta' = 0 \quad (31)$$

### 3. 아치 정점의 경계조건

#### 3.1 변위 경계조건

대칭구조의 진동형은 대칭 진동(symmetric mode) 또는 역대칭 진동(anti-symmetric mode)으로 구분된다(Weaver et al., 1990). 타원 아치의 기하적 선형은 아치 정점  $c(\theta=\alpha/2)$ 에 대하여 대칭이므로 동적 변위( $w, v$ )도 정점에 대하여 대칭 또는 역대칭이다. 아치 정점에 대한 대칭 및 역대칭의 변위 경계조건은 다음과 같다(Wung, 1967).

(a) 대칭 진동  
 $\textcircled{1} \delta' = 0, \textcircled{3} \delta''' = 0, \textcircled{5} \eta = 0 \quad (32)$

(b) 역대칭 진동  
 $\textcircled{2} \delta = 0, \textcircled{4} \delta'' = 0, \textcircled{6} \eta' = 0 \quad (33)$

위에서 원 번호는 대칭 및 역대칭 진동의 요소식(cluster equation) 번호이다. 홀수는 대칭, 짝수는 역대칭 진동이다.

#### 3.2 합응력 경계조건

이 절에서는 이 논문의 주요점인 아치 정점  $c(\theta=\alpha/2)$ 에서 합응력( $N, Q, M$ )의 경계조건을 유도한다. 합응력은 변위( $w, v$ )의 향으로 표현되기 때문에 구조가 대칭이면 합응력의 진동형도 변위와 마찬가지로 대칭 또는 역대칭 진동이 된다. Fig. 3에 아치 정점에 대한 대칭과 역대칭의 합응력 진동형을 도식적(schematic drawing)으로 나타냈다. 이 그림에서 화살표 방향은 (+, -)의 합응력의 부호 규약이다. 진동형을 대칭축을 기준으로 수평 방향으로 중첩시

킬 때 화살표 방향이 중복되면 대칭, 화살표 방향이 반대이면 역대칭이다. 이 진동형으로부터 대칭 및 역대칭의 합응력 경계조건을 아치 정점에서 판정할 수 있다.

합응력 경계조건을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 합응력( $n, q, m$ )을 정의한다.

$$n = \frac{N}{EA}, q = \frac{Q}{EA}, m = \frac{M}{EAa} \quad (34)$$

위 식을 이용하면 Eqs. (10), (18) and (11)의 ( $N, Q, M$ )은 다음과 같이 무차원 합응력으로 변환된다.

$$n = \zeta^{-1}(\eta' + \delta) + s^{-2}\zeta^{-3}(\delta'' + \delta) \quad (35a)$$

$$q = \zeta^{-3}[-(\delta''' + \delta') + 2\zeta^{-1}\zeta'(\delta'' + \delta)] - C_i^2 \zeta^{-1} s^{-2}(\delta' - \eta) \quad (35b)$$

$$m = -s^{-2}(\delta'' + \delta) \quad (35c)$$

아치 정점  $c(\theta=\alpha/2)$ 에서 합응력 경계조건은 '0' (Fig. 3 참조)이므로 Eq. (35)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$n = 0; \eta' + \delta = 0 \quad (36a)$$

$$q = 0; \delta''' + \delta' + C_i^2 \zeta_{\theta=\alpha/2}(\delta' - \eta) = 0 \quad (36b)$$

$$m = 0; \delta'' + \delta = 0 \quad (36c)$$

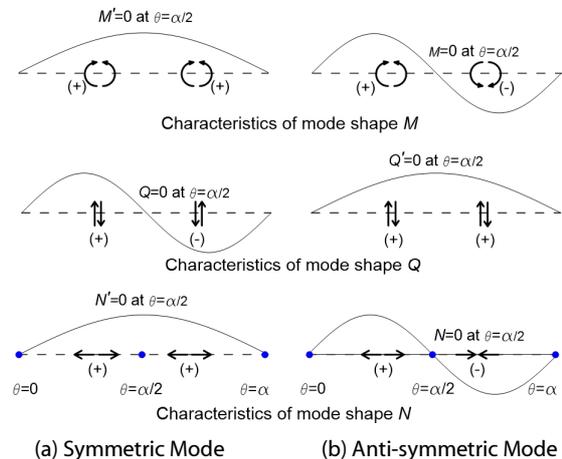


Fig. 3. Schematic Drawings of (a) Symmetric and (b) Anti-symmetric Mode of Stress Resultants of ( $N, Q, M$ ) at Mid-arc, Modified from Lee and Lee(2020)

위 식에서 아치 정점에서  $\zeta' = 0$ 이므로 이 항은 경계조건식에서 삭제한다.

Eq. (36)을 미분하여  $(n', q', m')$ 를 구한다.

$$n' = 0; \eta'' + \delta' = 0 \tag{36d}$$

$$q' = 0; \delta'''' + \delta'' + C_i^2 \zeta_{\theta = \alpha/2} (\delta'' - \eta') = 0 \tag{36e}$$

$$m' = 0; \delta''' + \delta' = 0 \tag{36f}$$

위 Eq. (36e)에서 아치 정점의  $\delta''''$ 는 Eq. (25)로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\delta'''' = (e_6 + C_i^2 e_3) \delta'' + [e_6 + s^2 e_3 (C_i^2 e_3 + 1) + 1] \delta + (s^2 - C_i^2) e_3 \eta', e_6 = 2(\zeta_{\theta = \alpha/2}^{-1} \zeta''_{\theta = \alpha/2} - 1) \tag{36g}$$

Fig. 3으로부터 대칭 및 역대칭 진동의 합응력 경계조건을 다음과 같이 구한다. Fig. 3의 대칭 경계조건에서  $N' = 0, Q = 0, M' = 0(n' = 0, q = 0, m' = 0)$ 이며, Eq. (36)을 이용하면 다음과 같이 아치 정점에서 대칭 진동의 합응력 경계조건을 얻을 수 있다.

(a) 대칭 경계조건

$$\textcircled{7} \eta'' + \delta' = 0, \textcircled{9} \delta'''' + \delta'' + C_i^2 \zeta_{\theta = \alpha/2} (\delta'' - \eta) = 0, \textcircled{11} \delta''' + \delta' = 0 \tag{37}$$

Fig. 3의 역대칭 경계조건에서  $N = 0, Q' = 0, M = 0(n = 0, q' = 0, m = 0)$ 이며, Eq. (36)을 이용하면 다음과 같이 아치 정점에서 역대칭 진동의 합응력 경계조건을 얻을 수 있다.

(b) 역대칭 경계조건

$$\textcircled{8} \eta' + \delta = 0, \textcircled{10} \delta'''' + \delta'' + C_i^2 \zeta_{\theta = \alpha/2} (\delta'' - \eta') = 0, \textcircled{12} \delta'' + \delta = 0 \tag{38}$$

이상에서 마제형 타원 아치의 정점에서 합응력의 경계조건 요소식  $\textcircled{7}$ ~ $\textcircled{12}$ 와 같이 유도하였다. 홀수는 대칭 진동, 짝수는 역대칭이며, 기존의 대칭 및 역대칭의 변위 경계조건과 구분하기 위하여 굵은 (bold letter) 원 번호를 사용하여 나타냈다.

### 3.3 혼합 경계조건

아치 정점  $c(\theta = \alpha/2)$ 에서 기존의 변위 경계조건 요소식  $\textcircled{1}$ ~ $\textcircled{6}$ 과 이 연구에서 새로 유도한 합응력의 경계조건 요소식  $\textcircled{7}$ ~ $\textcircled{12}$ 는 초기 조건문제(initial value problem)인 Eqs. (25) and (26)의 미분방정식을 수치 적분하는 데 사용할 수 있고, 고유치인 무차원 고유진동수  $C_i$ 를 산정하는 경계조건문제(boundary value problem)에서 사용할 수 있으므로 변위와 합응력 경계조건을 다음과 같이 대칭 진동과 역대칭 진동으로 구분하여 혼합경계조건으로 사용한다.

(a) 대칭 경계조건 요소식:  $\textcircled{1}, \textcircled{3}, \textcircled{5}, \textcircled{7}, \textcircled{9}, \textcircled{11}$   $\tag{39}$

(b) 역대칭 경계조건 요소식:  $\textcircled{2}, \textcircled{4}, \textcircled{6}, \textcircled{8}, \textcircled{10}, \textcircled{12}$   $\tag{40}$

Table 1에 Eqs. (39) and (40)의 혼합경계조건을 미분방정식의 적분구간과 함께 수록하였다. 이 표에는 미분방정식의 수치적분에서 초기조건으로 사용해야하는 아치 양단의 회전 및 고정 경계조건을 함께 수록하였고, 아치 정점의 경계조건을 적용하기 위해서는 적분구간이 전반부 적분구간은  $0 \leq \theta \leq \alpha/2$ , 후반부 적분구간은  $\alpha/2 \leq \theta \leq \alpha$ 이어야 한다.

### 4. 수치해석 방법 및 검증

위에서 유도한 미분방정식 Eqs. (25) and (26)의 입력변수는 다음과 같다: 지점조건; 중심각  $\alpha$ ; 형상비  $k$ ; 세장비  $s$ . 미분방정식에 경계조건 Eqs. (30)~(33)을 적용하고 고유치인 Eq. (24)의  $C_i$ 와 진동형  $(\delta, \lambda)_i$ 를 산출하였다. 진동형을 계산하기 위하여 직접적분법인 Runge-Kutta method (Burden et al., 2016)로 미분방정식을 수치적분하였고, 무차원 고유진동수는 행렬값 탐사법(determinant search method)과 비선형방정식의 수치해법인 Regula-Falsi method (Burden et al., 2016)로 계산하였다. 이러한 수치해석 방법은 여러 문헌(Lee et al., 2016; Lee and Lee, 2020)에서 그 유용성이 입증되었으므로 여기서는 자세한 기술을 생략한다.

수치해석의 검증을 위하여 유한요소 해인 ADINA와 이 연구의 고유진동수  $f_i$  (Hz)를 Table 2에서 비교하였다. 이 검증에서 양단의 경계조건식 Eqs. (30) and (31)을 이용하기 위하여 미분방정식의

Table 1. Mixed Boundary Conditions from Deflections and Stress Resultants with Integral Intervals

Integral interval	Initial condition (Integral starting with)	Boundary condition (Integral ending with)
$0 \leq \theta \leq \alpha/2$	H-H arch: Eq. (30) C-C arch: Eq. (31)	Symmetric mode: ( $\textcircled{1}, \textcircled{3}, \textcircled{5}$ ) Anti-symmetric mode: ( $\textcircled{7}, \textcircled{9}, \textcircled{11}$ )
$\alpha/2 \leq \theta \leq \alpha$	Symmetric mode: ( $\textcircled{1}, \textcircled{3}, \textcircled{5}$ ) Anti-symmetric mode: ( $\textcircled{7}, \textcircled{9}, \textcircled{11}$ )	H-H arch: Eq. (30) C-C arch: Eq. (31)

Table 2. Natural Frequency  $f_i$  (Hz) of ADINA and This Study

End condition and Eq. of BC*	Mode number $i$	Natural frequency $f_i$ (Hz)	
		ADINA	This study
Hinged-hinged, Eq. (30)	1	836.9	849.0
	2	1205	1227
	3	2145	2176
	4	3243	3290
Clamped-clamped, Eq. (31)	1	1043	1066
	2	1649	1686
	3	2657	2696
	4	3862	3921

\*BC: Boundary Condition

적분구간은 전적분구간인  $0 \leq \theta \leq \alpha$ 을 채택하였다. 아치의 기하적 형상 및 기계적 성질은 아래와 같다.

- 중심각 :  $\alpha = 1.6\pi$
- 절편 :  $a = 2 \text{ m}, b = 2.4 \text{ m} (k = 1.2)$
- 단면 성질 :  $A = 2.19 \times 10^{-3} \text{ m}^2, I = 1.34 \times 10^{-6} \text{ m}^4 (s = 80.9)$
- 재료 성질(강) :  $E = 200 \text{ GPa}, \rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
- 지점 조건 : 회전-회전, 고정-고정

위의 아치 입력값을 이용하면 이 연구에서 계산한  $C_i$ 로부터 고유진동수  $f_i$ 는  $f_i = \omega_i / 2\pi = \sqrt{E/\rho} / (2\pi a) = 401.7 C_i$  (Hz)로 계산할 수 있다. Table 2에서 두 결과의  $f_i$ 는 매우 근사하다. 최대오차 2.25 %, 평균오차 1.71 %로 이 연구의 타당성을 검증할 수 있었다.

### 5. 수치해석 예제 및 토의

이 재고 논문은 아치 정점에서 합응력 경계조건의 적용성에 관한 연구이므로 아치 입력값  $\alpha, k, s$ 에 대한 변수연구(parametric study)는 생략한다. 관심독자는 이전 논문(Lee et al., 2016)에 자세하게 기술되어 있는 타원형 마제 아치의 변수연구를 참고할 수 있다.

아치 입력값은 회전-회전(H-H), 고정-고정(C-C),  $\alpha = 1.6\pi, k = 1.2, s = 100$ 이다. 아치축의 적분구간을 [1] 전구간( $0 \leq \theta \leq \alpha$ ), [2] 전반 구간( $0 \leq \theta \leq \alpha/2$ ), [3] 후반 구간 ( $\alpha/2 \leq \theta \leq \alpha$ )으로 구분하여 4개( $i = 1, 2, 3, 4$ )의 무차원 고유진동수  $C_i$ 를 산정하고 Table 3에서 비교하였다. 적분구간 [1]은 전구간(full arc-length) 적분이므로 기존의 양단 경계조건식 Eqs. (30) and (31)을 이용하였고, [2], [3]의 전·후반 적분구간은 아치 정점의 합응력 경계조건이므로 대칭 요소식 ⑦, ⑨, ⑪, 역대칭 요소식 ⑧, ⑩, ⑫의 경계조건을

Table 3. Comparison of  $C_i$  between Three Different Intervals

Integral interval and Cluster Eqs. of BC	$i$	Frequency parameter $C_i$	
		H-H arch	C-C arch
[1] $0 \leq \theta \leq \alpha$ H-H arch: Eq. (30) C-C arch: Eq. (31)	1	2.3834	2.9089
	2	3.1051	4.2607
	3	5.4582	6.7408
	4	8.1895	9.7609
[2] $0 \leq \theta \leq \alpha/2$ Symmetric: (⑦, ⑨, ⑪) Anti-Sym.: (⑧, ⑩, ⑫)	1	2.3834 (A <sub>1</sub> )	2.9089 (A <sub>1</sub> )
	2	3.1051 (S <sub>1</sub> )	4.2607 (S <sub>1</sub> )
	3	5.4582 (A <sub>2</sub> )	6.7408 (A <sub>2</sub> )
	4	8.1895 (S <sub>2</sub> )	9.7609 (S <sub>2</sub> )
[3] $\alpha/2 \leq \theta \leq \alpha$ Symmetric: (⑦, ⑨, ⑪) Anti-Sym.: (⑧, ⑩, ⑫)	1	2.3834 (A <sub>1</sub> )	2.9089 (A <sub>1</sub> )
	2	3.1051 (S <sub>1</sub> )	4.2607 (S <sub>1</sub> )
	3	5.4582 (A <sub>2</sub> )	6.7408 (A <sub>2</sub> )
	4	8.1895 (S <sub>2</sub> )	9.7609 (S <sub>2</sub> )

적용성 검토에 사용하였다. 이 표에서 [1], [2], [3]의 3개 적분구간에서 모든  $C_i$  값은 정확하게 일치한다. [1]의 경계조건은 기존 문헌에서 이미 잘 알려진 경계조건이므로(Lee et al., 2014; Lee et al., 2016), Table 3에서 [2], [3]의  $C_i$  값이 [1]의 결과와 일치하는 것은 새로 유도한 경계조건의 요소식(⑦, ⑨, ⑪), (⑧, ⑩, ⑫)의 적용성을 입증하는 것이며, ADINA의 결과와도 잘 일치함을 입증하는 것이다(Table 2 참조). [2], [3]의 결과에서는 대칭(⑦, ⑨, ⑪), 역대칭(⑧, ⑩, ⑫)의 경계조건으로 구분하여  $C_i$  값을 산정하는 것이므로 계산된  $C_i$  값도 괄호에 표시한(S<sub>1</sub>), (A<sub>1</sub>) 등과 같이 대칭, 역대칭 모드로 구분하여 산정된다. 구분된 [2], [3]의 대칭 및 역대칭 모드는 모두 일치한다. 한편, [1]의 전구간적분에서는  $C_i$ 는 대칭, 역대칭의 모드 구분을 할 수 없다.

이상에서 토의한 바와 같이 새로 유도한 합응력 경계조건식 ⑦~⑫는 마제형 대칭 타원 아치의 자유진동해석에서 정확하게 적용할 수 있음을 입증할 수 있었다.

다음은 기존 변위의 경계조건식 ①~⑥과 새로 유도한 합응력 경계조건 ⑦~⑫를 혼합한 경계조건식의 적용성을 토의한다. 혼합 경계조건은 Eqs. (39) and (40)과 Table 1에 나타나 있다. Eqs. (25) and (26)의 6계 미분방정식은 Eqs. (30) and (31)에 나타낸 바와 같이 3개의 초기조건만 알려져 있으므로 3(=6-3)개의 초기조건을 가정하여야 한다. 초기조건을 선택할 수 있는 경계조건수는 Table 3에서와 같이 대칭 6개, 역대칭 6개이므로 6개 중에서 임의로 3개를 선택할 수 있는 조합은 대칭, 역대칭별로 각각  ${}_6C_3 = 20$ 개의 조합이 가능하다. 이 20개의 조합 중에서 Table 4에 [1], [2]의 경계조건 요소식을 적용하여  $C_i$ 를 계산하고 서로 비교하였다. 여기서 [1]의 경우는 2개의 변위 경계조건과 1개의 합응력 경계조건이

혼합된 예이며, [2]의 경우는 1개의 변위 경계조건과 2개의 합응력 경계조건이 혼합된 예이다. 이 밖에도 19개의 또 다른 변위 조합이 가능하다. Table 4에서 보듯이 혼합 경계조건을 이용한 [1], [2]의  $C_i$  값과 (S<sub>i</sub>), (A<sub>i</sub>) 등의 대칭, 역대칭의 모드 구분이 모두 정확하게 일치한다. 이 표에서 보이지 않은 혼합경계조건에서도  $C_i$  값과 모드 구분이 모두 일치하는 것을 확인할 수 있었다. 따라서, 변위 및 합응력 경계조건을 각각 별개의 경계조건으로 적용할 수도 있으며, 혼합 경계조건을 자유진동해석에 이용하여도 그 적용성은 성립하는 것을 입증할 수 있었다.

Figs. 4-6은 이 연구에서 산정한 변위, 변형축 및 합응력의 진동형을 나타내며, 아치의 입력값은  $\alpha=1.6\pi$ ,  $k=1.2$ ,  $s=100$ 이다. 이 그림에서 살구조에서는 가진(excited) energy가 모두 다르기 때문에 진폭들은 최대 진폭을 “1”로 하는 상대값이다. 먼저, Fig. 4는 변위요소들의 진동형  $(\delta, \eta, \psi)_i$ 을 나타낸다. 이 그림에서 아치 양단의 경계조건식 Eqs. (30) and (31)이 정확하게 구현되었음을 볼 수 있다. 이 그림에 나타나 있는  $(\delta, \eta, \psi)_i$ 의 최대진폭의 위치는, 특히  $i=1$ 의 기본진동형(fundamental mode)의 위치는 매우 중요하므로 아치 구조의 설계, 안정해석 등에서 유용한 자료로 사용할 수 있다.

Fig. 5는 아치의 변형축(deformed axis) 진동형의 예를 나타낸다. 미분방정식의 수치해석에서 곡률중심 변위  $\delta_i$ , 접선 변위  $\eta_i$ 를

각각 별개의 변위로 계산하였지만 이 2개의 변위는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 서로 직각의 벡터이므로 여기서는 두 변위를 한 개의 합성된 변형축 진동형으로 나타냈다. 지점조건은 이 그림에 나타낸  $C_i$  결정에 큰 영향을 미친다. Fig. 5의 Hinged-hinged, Clamped-clamped 아치의 진동형 사이에는 지점에서 회전각의 발생유무를 제외하고는 큰 차이가 없다(경계조건식 Eqs. (30) and (31) 참조). 즉, 2개 진동형의 무변위 위치와 최대진폭의 위치 등에는 큰 차이가 없다. Fig. 5에서  $(\delta, \eta)_i$ 로 조합된 변형축 진동형은 Fig. 4에서  $\delta_i$ 의 진동형과 매우 유사하며, 이는 변형축 진동형은  $\eta_i$ 보다는

Table 4. Comparison of  $C_i$  between BCs from Mixed Conditions

Integral interval and Cluster Eqs. of BC	$i$	Frequency parameter $C_i$	
		H-H arch	C-C arch
[1] $0 \leq \theta \leq \alpha/2$ Symmetric: (①, ⑤, ⑨) Anti-Sym.: (②, ⑥, ⑧)	1	2.3834 (A <sub>1</sub> )	2.9089 (A <sub>1</sub> )
	2	3.1051 (S <sub>1</sub> )	4.2607 (S <sub>1</sub> )
	3	5.4582 (A <sub>2</sub> )	6.7408 (A <sub>2</sub> )
	4	8.1895 (S <sub>2</sub> )	9.7609 (S <sub>2</sub> )
[2] $\alpha/2 \leq \theta \leq \alpha$ Symmetric: (③, ⑦, ⑪) Anti-Sym.: (④, ⑩, ⑫)	1	2.3834 (A <sub>1</sub> )	2.9089 (A <sub>1</sub> )
	2	3.1051 (S <sub>1</sub> )	4.2607 (S <sub>1</sub> )
	3	5.4582 (A <sub>2</sub> )	6.7408 (A <sub>2</sub> )
	4	8.1895 (S <sub>2</sub> )	9.7609 (S <sub>2</sub> )

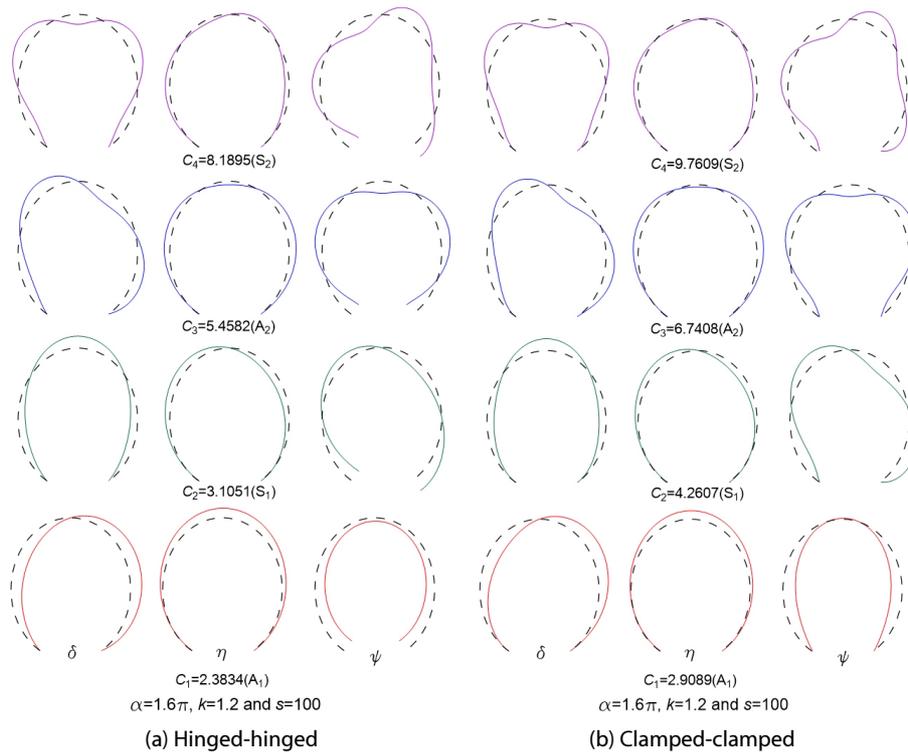


Fig. 4. Typical Mode Shapes of Deflection Elements of  $(\delta, \eta, \psi)_i$

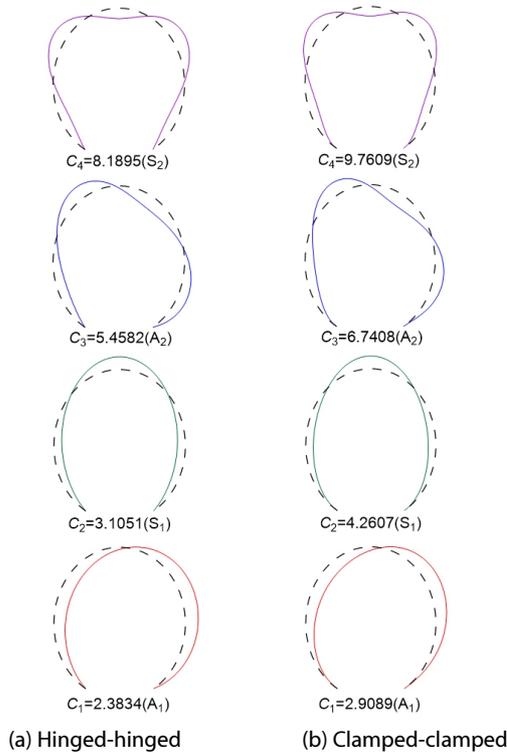


Fig. 5. Typical Mode Shapes of Deformed Axis Combined by Deflection Elements of  $(\delta, \eta)_i$

$\delta_i$ 의 영향이 더 큰 것임을 의미한다. Fig. 5에 보인 최대진폭의 위치는 구조안전상 중요하며 장기간에 걸쳐 동적 하중에 노출되는 경우에 공진으로 인한 피로파괴가 발생할 가능성이 높으므로 공용 중인 아치의 최대 진폭 위치에는 주기적인 안전점검이 필요하다.

Fig. 6은 Eq. (35)로 표현되는 무차원 합응력 $(n, q, m)_i$ 의 진동형을 나타낸다. 구조해석에서 구조물의 건전성 평가는 결국 합응력에 의한 평가가 중요하므로 이와 같은 합응력의 진동형으로부터 최대 진폭의 위치 등을 아치 구조의 안정해석 및 설계에서 유용한 동적 자료로 사용할 수 있다.

## 6. 결론

이 재고 논문은 마제형 대칭 타원 아치의 자유진동 해석에 관한 연구이며, 아치 정점에서 합응력 경계조건의 적용성을 주안점으로 연구하였다. 마제형 아치의 자유진동에 관한 이전 연구(Lee et al., 2016)의 이론을 이용하여 아치 정점의 합응력 경계조건을 새로 유도하였다. 새로 유도한 아치 정점의 합응력 경계조건을 이용하여 산정한 고유진동수는 유한요소 ADINA 해와 잘 일치 하였다. 아치 축의 전적분구간에서 적분하는 기존의 변위 경계조건의 해와 이 연구의 무차원 고유진동수는 정확하게 일치하였다. 아치축의 전반부와 후반부의 적분구간을 별도로 이용하는 합응력 경계조건의

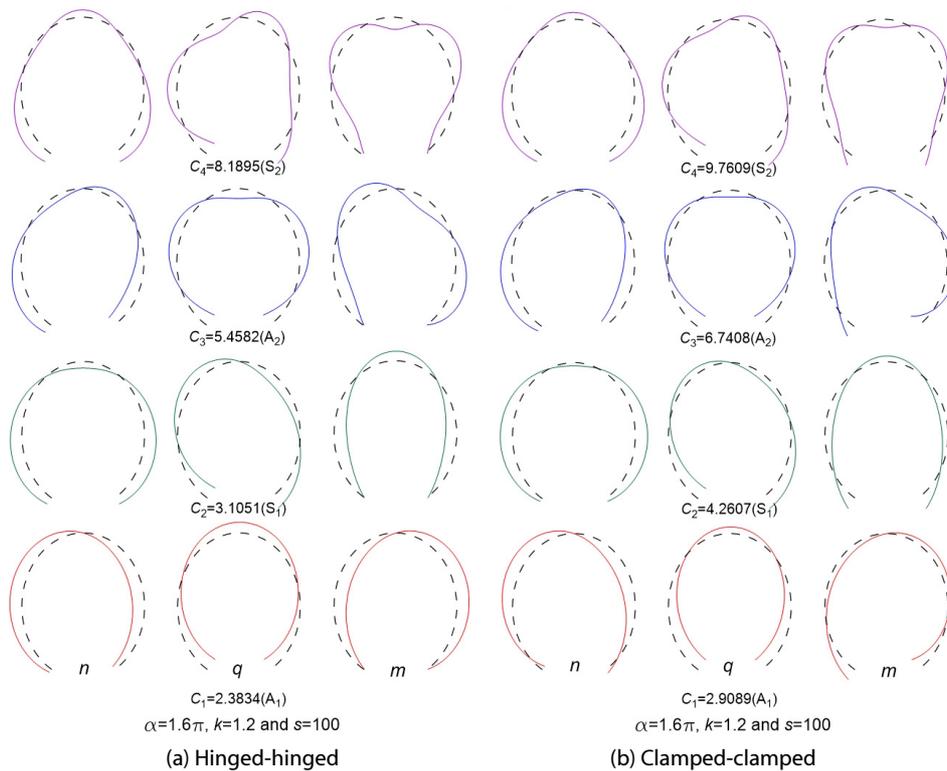


Fig. 6. Typical Mode Shapes of Stress Resultants of  $(n, q, m)_i$

해들은 무차원고유진동수 뿐만 아니라 대칭, 역대칭 모드의 구분도 모두 정확하게 일치하였다. 일련의 수치해석 예 및 토의를 통하여 마제형 대칭 타원 아치의 아치 정점의 합응력 경계조건이 자유진동 해석에 정확하게 적용될 수 있음을 입증하였다.

## References

- Borg, S. F. and Gennaro, J. J. (1959). *Advanced structural analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, N.Y., USA.
- Bozyigit, B., Yesilce, Y. and Acikgoz, S. (2020). "Free vibration analysis of arch-frames using the dynamic stiffness approach." *Vibroengineering PROCEDIA*, JVE, Vol. 30, pp. 72-78.
- Burden, R. L., Faires, D. J. and Burden, A. M. (2016). *Numerical analysis*, Cengage Learning, MA, USA.
- Filipich, C. P., Canicer, R., Cortinez, V. H. and Laura, P. A. A. (1987). "In-plane vibrations of a circumferential arch elastically restrained against rotation at one end and with an intermediate support." *Applied Acoustics*, Vol. 22, No. 4, pp. 261-270.
- Huang, C. S., Tseng, Y. P., Leissa, A. W. and Nieh, K. Y. (1990). "An exact solution for in-plane vibrations of an arch having variable curvature and cross section." *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 40, No. 11, pp. 1159-1173.
- Joo, S. M., Park, K. K., Lee, B. K. and Hwang, H. J. (1985). "Free vibration analysis of fixed ended parabolic arches." *Journal of the Korean Society of Civil Engineers*, KSCE, Vol. 5, No. 3, pp. 31-38 (in Korean).
- Lee, B. K. and Wilson, J. F. (1990). "Free vibrations of arches with variable curvature." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 1, pp. 75-89.
- Lee, B. K., Oh, S. J. and Lee, T. E. (2014). "In-plane free vibrations of horseshoe circular arch." *Journal of the Korean Society of Civil Engineers*, KSCE, Vol. 34, No. 4, pp. 1043-1052 (in Korean).
- Lee, B. K., Park, K. K., Oh, S. J. and Lee, T. E. (2016). "Planar free vibrations of horseshoe elliptic arch." *KSCE Journal of Civil Engineering*, KSCE, Vol. 20, No. 4, pp. 1411-1418.
- Lee, J. K. and Lee, B. K. (2020). "Free vibrations of AFG arch with symmetric and anti-symmetric boundary conditions at Mid-arc." *Symmetry*, Vol. 12, No. 3, 417.
- Li, X. F. (2008). "A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Bernoulli-Euler beam." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, No. 4-5, pp. 1210-1229.
- Lü, Q. and Lü, C. F. (2009). "Exact two-dimensional solutions for in-plane natural frequencies of laminated circular arches." *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 318, No. 4-5, pp. 982-920.
- Malekzadeh, P., Setoodeh, A. R. and Barmshouri, E. (2008). "A hybrid layerwise and differential quadrature method for in-plane free vibration of laminated thick circular arches." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 315, No. 1-2, pp. 212-225.
- Nieh, K. Y., Huang, C. S. and Tseng, Y. P. (2003). "An analytical solution for in-plane free vibration and stability of loaded elliptic arches." *Computers & Structures*, Vol. 81, No. 13, pp. 1311-1327.
- Rao, S. S. (2007). *Vibration of continuous system*, John Wiley & Sons, Inc., NJ, USA.
- Rezaiee-Pajand, M., Sani, A. A. and Kazemiyani, M. S. (2018). "Free vibration analysis of concrete arch dam by quadratic ideal-coupled method." *Structures Engineering and Mechanics*, Vol. 65, No. 1, pp. 69-79.
- Riedel, C. H. and Kang, B. S. (2006). "Free vibration of elastically coupled dual-span curved beams." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, No. 3-5, pp. 820-838.
- Ruta, P. and Meissner, M. (2018). "Analysis of the spatial vibrating of nonprismatic arches by means of recurrence relations for the coefficients of the Chebyshev series expression of solutions." *Mechanical Problems in Engineering*, Vol. 2018, 1512825.
- Shin, Y. J., Kwon, K. M. and Yun, J. H. (2008). "Vibration analysis of a circular arch with variable cross-section using differential transformation and generalized differential quadrature." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 309, No. 1-2, pp. 9-19.
- Tufekci, E. and Ozdemir, O. (2006). "Exact solution of free in-plane vibration of a stepped circular arch." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, No. 3-5, pp. 725-738.
- Weaver, W., Timoshenko, S. P. and Young, D. H. (1990). *Vibration problems in engineering*, John Wiley & Sons, Inc., NJ, USA.
- Wilson, J. F. and Lee, B. K. (1995). "In-plane free vibrations of catenary arches with unsymmetric axes." *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 3, No. 3, pp. 511-525.
- Wu, J. S. and Chiang, L. K. (2004). "A new approach for free vibration analysis of arches with effects of shear deformation and rotary inertia considered." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 277, No. 1-2, pp. 49-71.
- Wung, S. J. (1967). *Vibration of hinged circular arches*, Master's Thesis, Rice University, Houston, Texas, USA.