

셸 유한요소 개발 연구

My Experience in Shell Finite Element Development

필자는 본지의 2020년 6월호에 “FEM의 발전, 성공과 비전”이라는 글을 기고 하며 FEM의 태동과 성공의 역사 및 미래의 비전을 살펴보았다. 1년이 지난 본 글에는 셸 유한요소(shell finite element) 개발에 대한 필자의 연구 경험을 적어 보고자 한다.

필자는 1997년에 KAIST 최창근 교수님 구조시스템(structural system) 연구실에서 석사과정을 시작하였다. 구조시스템 연구실에서 가장 오랫동안 다루어 왔던 연구분야는 판(plate) 및 셸 유한요소의 개발이었다. 필자 또한 이전 연구실 선배들의 뒤를 밟아 같은 분야로 들어서게 되었다. 연구주제는 면내 회전 자유도(drilling degrees of freedom)를 가지는 4절점 셸 유한요소를 개발하는 것이었고, 소기의 목표를 달성하여 SEM(structural engineering and mechanics) 저널에 논문을 게재하였다. 석사과정 동안 셸 유한요소 연구에 대한 기본 소양을 익히게 되었다.

이후 2000년에 필자는 MIT에 박사과정으로 가게 되었고, 유한요소 분야에 유명하신 KJ Bathe 교수님 연구실에 들어갔다. 박사과정 내내 셸 유한요소에 대한 연구를 하였다. 초기의 연구들은 왜 셸 구조물의 유한요소해석이 어려운지에 대한 본질적인 깨달음을 얻는 연구를 하였고, 이후 삼각형 셸 유한요소 개발을 연구 주제로 삼게 되었다.

구조물의 FEM 해석에서 빔 유한요소 다음으로 많이 쓰이는 구조 유한요소는 셸 유한요소이다. 셸 유한요소는 셸 구조물의 해석에 쓰인다. 자연에 존재하는 나뭇잎이나 조개 껍데기도 셸 구조물이고 비행기나 선박도 셸 구조를 가지고 있다. 또한, 셸 유한요소는 판(plate) 구조물을 해석하는데 쓰일 수 있다. 셸 유한요소의 개발에 있어서 가장 큰 어려움은 전단잠김(shear locking) 현상을 억제하는 것이었으며 많은 연구자들에 의해 여러가지 방법들이 제안되었고 그에 따라 수 많은 종류의 셸 유한요소가 개발되었다. 특히 대부분의 연구는 4절점 사각형 셸 유한요소에 대하여 집중되었다.

개발된 셸 유한요소 중 가장 성공적이었으며 가장 잘 알려진 셸 유한요소는 1986년 MIT의 Dvorkin과 Bathe 교수가 개발한 MITC4 유한요소이다. Assumed strain이라는 방법의 창안으로 만들어진 4절점 유한요소로 현존하는 거의 모든 상용코드에서 기본 요소로 사용되고 있다. 전단잠김이 억제되지 않은 요소는 실제 해석에서 사용이 불가능할 만큼 성능이 나쁘다. 이후 assumed strain 방법은 8, 9 및 16 절점 판 및 셸 유한요소 개발에도 그대로 확대 적용되었다. Assumed strain 방법에서 핵심은 변위기반 표준 유한요소에서 typing point라고 불리는 특



이 필 승

KAIST 기계공학과 교수

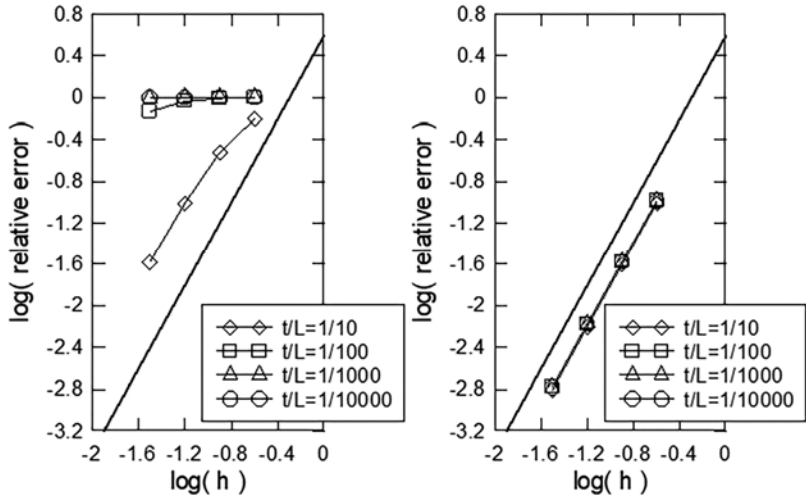
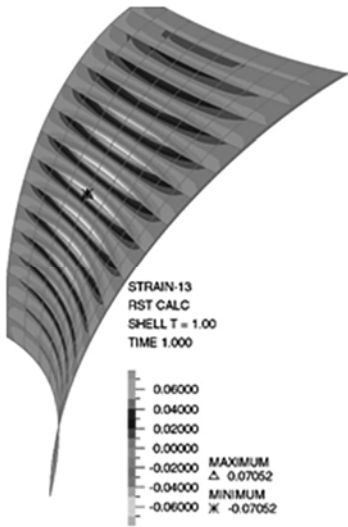


그림 1 셸 유한요소 해석에서 전단잠김 현상의 발생

정 지점을 정하고, 여기서 변형률을 샘플링(sampling)하여 새로운 대체변형률장(assumed strain field)을 구성하는 것이다.

그림 1은 셸 유한요소 해석에서 전단잠김 현상이 어떻게 나타나는지를 보여준다. 전단잠김 현상이 발생하게 되면, 왼쪽 그림과 같이 면의 전단 변형률(transverse shear strain)의 분포에 극도의 불연속이 나타나게 된다. 그림 1의 중앙과 오른쪽에 있는 그래프는 셸 유한요소 해의 수렴 곡선(convergence curves)이다. 수렴곡선의 수평축은 요소의 크기에 log를 취하였다. 그래프의 왼쪽으로 갈수록 요소의 크기가 작아진다. 또는 사용된 요소의 수가 많아진다. 수직축은 에러에 log를 취하였고 아래로 갈수록 에러가 작아지고 위로 갈수록 에러가 커진다. 에러의 log 값이

0에 가까이 있다는 것은 에러가 엄청나게 크다는 것을 의미한다.

중앙의 그림은 전단잠김 현상이 제어되지 않았을 때 수렴곡선을 보여준다. 셸의 두께(t)가 작아질수록 에러가 급격히 커진다. 반면 오른쪽의 수렴곡선은 MITC4 셸 유한요소로 계산된 결과로 유한요소 해의 수렴이 셸의 두께에 관계없이 좋은 수렴을 보여주고 있다. 매우 이상적인 수렴거동으로 전단잠김 현상이 거의 일어나지 않는 경우이다. 다양한 셸 구조 문제에 대하여 이런 이상적인 수렴거동을 보이는 셸 유한요소를 개발하는 것은 극도로 어렵다.

4절점 셸 유한요소에 비해 형상이 더 단순하고 메쉬(mesh) 자동생성에 더욱 유용한 셸 유한요소는 3절점 삼각형 요소이다. 그러나 많은 연구자들의 노력에도 불구하고

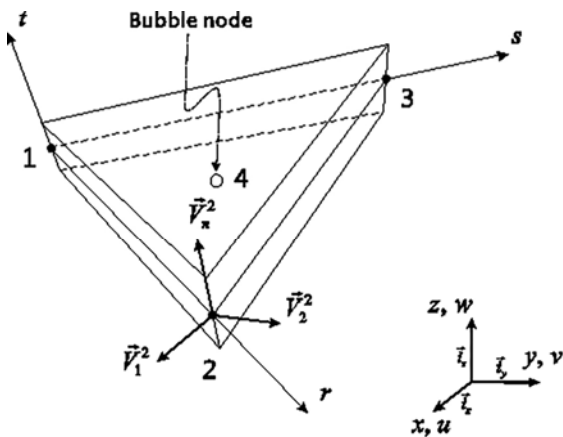


그림 2 MITC3+ 셸 유한요소의 형상 및 변위 함수

Geometry interpolation

$$\bar{x}(r, s, t) = \sum_{i=1}^3 h_i(r, s) \bar{x}_i + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^4 a_i f_i(r, s) \bar{V}_n^i$$

$$a_4 \bar{V}_n^4 = \frac{1}{3} (a_1 \bar{V}_n^1 + a_2 \bar{V}_n^2 + a_3 \bar{V}_n^3),$$

$$f_4 = 27rs(1-r-s),$$

$$f_1 = h_1 - \frac{1}{3} f_4, \quad f_2 = h_2 - \frac{1}{3} f_4, \quad f_3 = h_3 - \frac{1}{3} f_4$$

Displacement interpolation

$$\bar{u}(r, s, t) = \sum_{i=1}^3 h_i(r, s) \bar{u}_i + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^4 a_i f_i(r, s) (-\bar{V}_2^i \alpha_i + \bar{V}_1^i \beta_i)$$

고 3절점 요소에서 전단잠김의 억제에 대한 연구는 매우 오랫동안 성공적이지 못했다. 필자는 박사과정 마지막 연구로 3절점 삼각형 유한요소의 전단잠김 문제를 해결하기 위해 노력했다. 당시에는 이 연구주제가 어려운 것이라는 것을 알지 못했다. 책상 위에 종이와 연필만 가지고 그림을 그리며 아이디어를 구상하였고, 어느 날 연구실로 출근하는 중 생각난 아이디어로 졸업을 할 수 있을 만한 결과를 얻게 되었다.

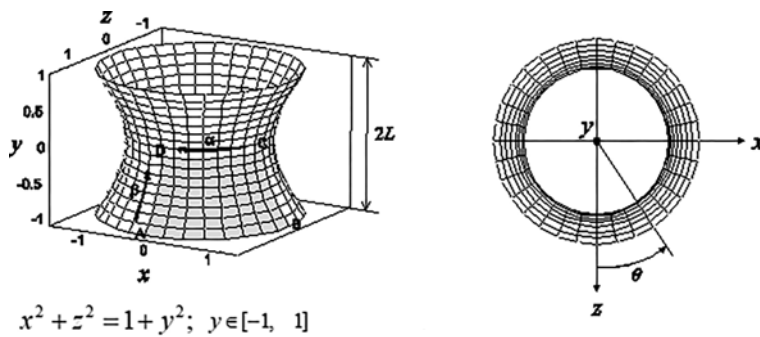
Assumed strain 기법이 적용된 MITC3라는 유한요소를 개발하였고, 이 셀 유한요소는 이전의 3절점 요소보다 좋은 성능을 보여주었다. 그러나 MITC4의 성능이 90점이라면 MITC3는 70점 밖에는 되지 않았다. 갈 길이 멀다는 것을 체감하였다. 3절점 셀 유한요소 연구에 있어서 가장 어려운 점은 요소 자체의 수식(formulation)이 너무나도 단순하다는 것이다. 즉, 수식들 중 손을 댈 곳이 거의 없었다.

필자는 2003년 가을에 졸업을 하고 이후 지속적으로 MITC3 셀 유한요소를 개선하고자 노력하였다. 셀 수 없이 많은 아이디어를 내고 이를 Fortran90 코드로 구현하고 다양한 benchmark 문제들의 수치해석을 하고 결과를 확인하는 과정을 반복하였다. 전단잠김 문제는 해결될 듯하다 가도 안되는 반복되는 실패를 거듭하였다. 박사과정이었던 2002년에 시작된 연구는 필자가 2009년에 KAIST에 임용

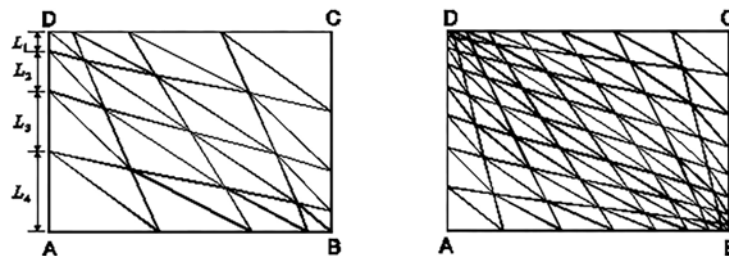
되어서도 지속되었고, 평생 연구할 주제라고 생각했다. 당시 MIT의 Bathe 교수도 필자의 연구를 지속적으로 독려해주었다.

임용 후 첫 해 석사과정으로 입학한 이윤규 박사에게 이 어려운 연구주제를 맡겼다. 이윤규 박사는 석사 연구로 상당히 의미있는 진전을 이루어 냈다. 대략 80점 정도 되는 셀 유한요소를 개발하였다. 가장 큰 발견은 in-plane twisting 모드에서 3절점 셀 유한요소가 과도하게 큰 강성을 보인다는 점이었다. 이는 4절점 셀 유한요소에서는 나타나지 않는 현상이었다. 이 현상을 조절함으로써 3절점 요소의 성능이 상당히 개선되었다.

이윤규 박사는 이후 박사학위 연구로 같은 주제를 매진하였다. 석사 때부터 박사로 이어지며 5년동안 셀 수 없는 시행착오 끝에 드디어 MITC4에 버금가는 성능을 가지는 3절점 삼각형 셀 유한요소를 개발하였다. 필자에게도 엄청나게 기쁜 순간이었다. 당시 우리의 연구에 관심이 많았던 MIT의 Bathe 교수에게 연구성과를 알렸고, Bathe 교수는 요소의 이름으로 MITC3+를 제안하였다. 이렇게 만들어진 MITC3+는 이윤규 박사의 피땀 어린 노력의 산물로 현존하는 가장 뛰어난 성능을 가지는 3절점 셀 유한요소이다. 필자는 향후 더 좋은 3절점 요소를 개발하는 것은 극도로 어려울 것이라고 생각한다.



(a)



(b)

그림 3 쌍곡셀 구조 문제

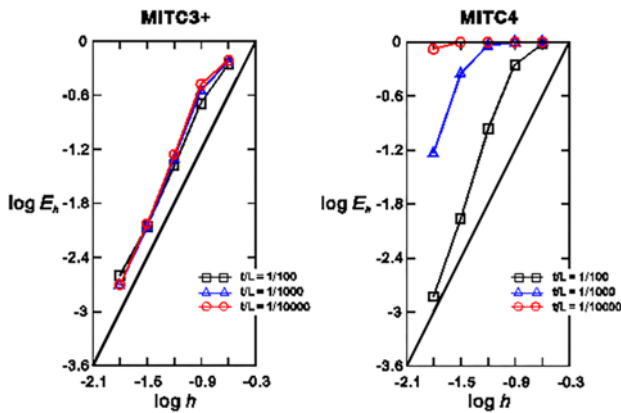


그림 4 MITC3+ 및 MITC4 셸 유한요소의 수렴곡선

그림 2는 MITC3+ 셸 유한요소의 형상 및 변위 함수를 보여준다. 3절점 셸 유한요소는 4절점 요소에 비하여 본질적으로 자유도가 적어서 표현할 수 있는 힘 모드 수가 부족하다. 이를 극복하기 위해 요소 중심에 절점을 추가하여 회전 자유도를 2개 넣고 면외방향 전단 변형률에 대하여 새로운 대체변형률장(assumed strain field)을 고안했다.

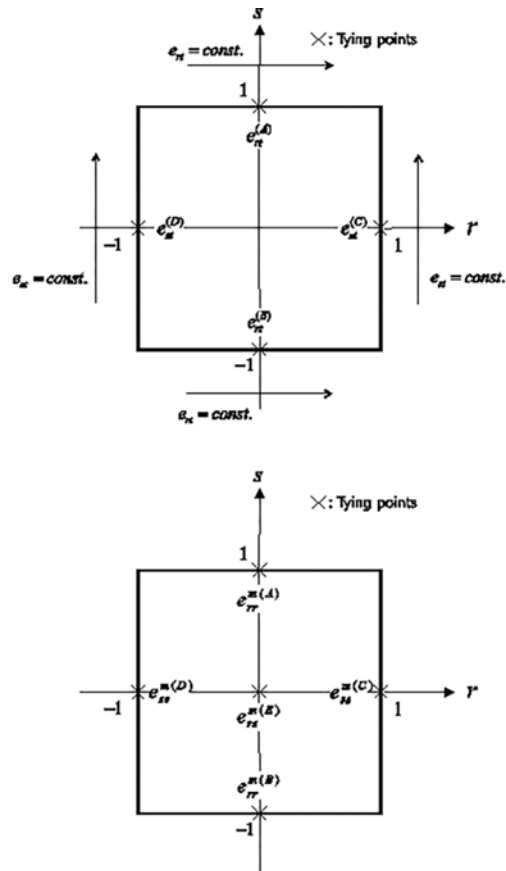
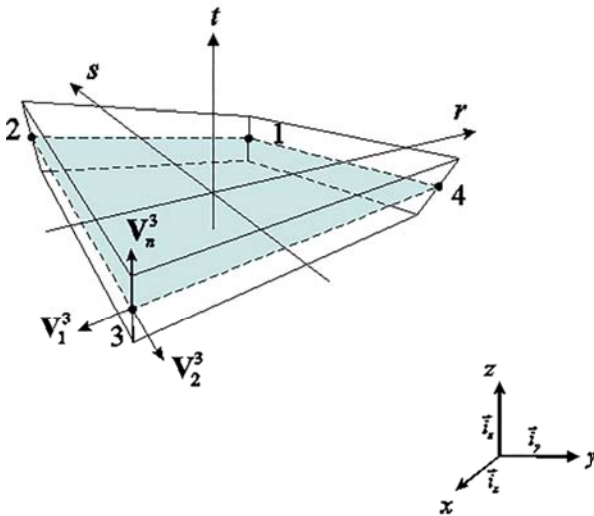


그림 5 MITC4+ 셸 유한요소에서 typing point의 위치

추가된 자유도는 정적응축(static condensation)에 의해 제거될 수 있다.

MITC3+ 셸 유한요소는 MITC4와 대등한 수준의 정확도를 가지는 해를 생성해냈다. 몇몇 셸 구조 문제에 대해서는 MITC3가 더 정확한 해를 구했다. 그림 3의 쌍곡셸 구조문제를 찌그러진 메쉬 (distorted mesh)로 모델링하여 해석했을 때, MITC3+와 MITC4의 그림 4에 보이는 수렴곡선을 보여준다. 쌍곡셸은 음의 Gaussian curvature를 가지고 있어서 FEM으로 정확한 해를 구하기 매우 어렵다고 알려져 있다. MITC4보다 MITC3+가 더 좋은 해를 계산해내는 것을 알 수 있다. MITC3+는 MITC4에 비해 메쉬가 찌그러졌을 때 더 강건한 해를 주었다. 필자는 MITC4가 이 쌍곡셸 문제에서 감감현상을 보이는 이유가 막잠김(membrane locking) 현상 때문이라고 생각했고 MITC4의 막잠김 현상을 줄여주는 연구에 도전하기로 하였다. MITC3+와 같은 3절점 셸 유한요소는 항상 평평한 형상을 가지기 때문에 막잠김 현상이 일어나지 않는다.

MITC4 유한요소의 막잠김 현상 억제 문제에 대한 연구

는 고영빈 박사가 수행하였다. 이 문제를 해결하기 위해서는 셀 유한요소의 막변형률장(membrane strain field)을 건드려야 하는데 membrane field는 아주 조금만 손을 대도 요소가 조각시험(patch test)을 통과하지 못하게 된다. 매우 어려운 문제였다. 이전 연구들에서 MITC4의 막잡김 현상을 개선한 바 있었지만, patch test를 통과시키는데는 실패하였다. 1년여 동안 많은 시도와 실패 후 2016년에 고영빈 박사는 patch test를 통과함과 동시에 막잡김 현상을 드라마틱하게 줄여주는 대체변형률장(assumed strain field)을 개발하였다. 이 연구 결과 또한 MIT의 Bathe 교수님과 공유하였고, 이 새로운 4절점 셀 유한요소의 이름을 MITC4+라고 명명하였다. 그림 5는 MITC4+ 셀 유한요소에서 사용된 tying point의 위치를 보여준다.

그림 6은 그림 3의 쌍곡셀 구조 문제를 MITC4 및 MITC4+ 요소를 사용하여 계산했을 때 해의 수렴곡선을 보여준다. MITC4에 비해 MITC4+는 월등히 우수한 수렴성을 보여준다. MITC4+ 셀 유한요소를 사용했을 때 구조물의 두께(t)와 관계없이 요소의 크기가 작아 짐에 따라 빠르게 셀 유한요소 해석의 해가 정확해에 수렴해 간다.

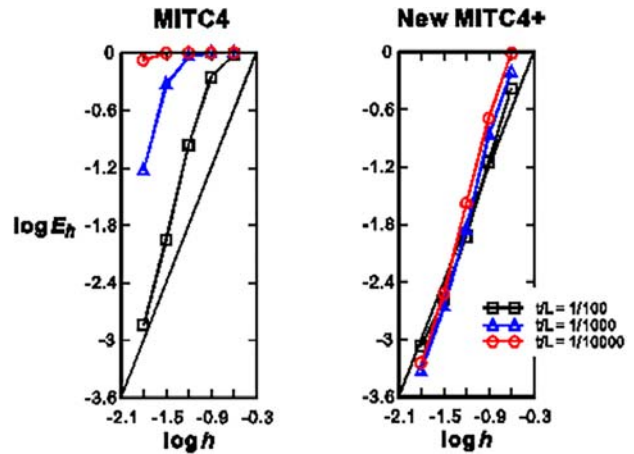


그림 6 MITC4 및 MITC4+ 셀 유한요소의 수렴곡선

또한, MITC4+를 막변형률장은 요소의 면내 전단잡김(in-plane shear locking)을 줄여주도록 설계되어 있다. 그림 7은 MITC4+를 막변형률장을 그대로 활용한 2차원 슬리드 문제의 대변형 해석 예를 보여준다. Q4I4 유한요소는 비적합모드(incompatible mode)를 사용한 4절점 2차원 슬리드 유한요소로 대부분의 상용코드에서 채택되어 사용되

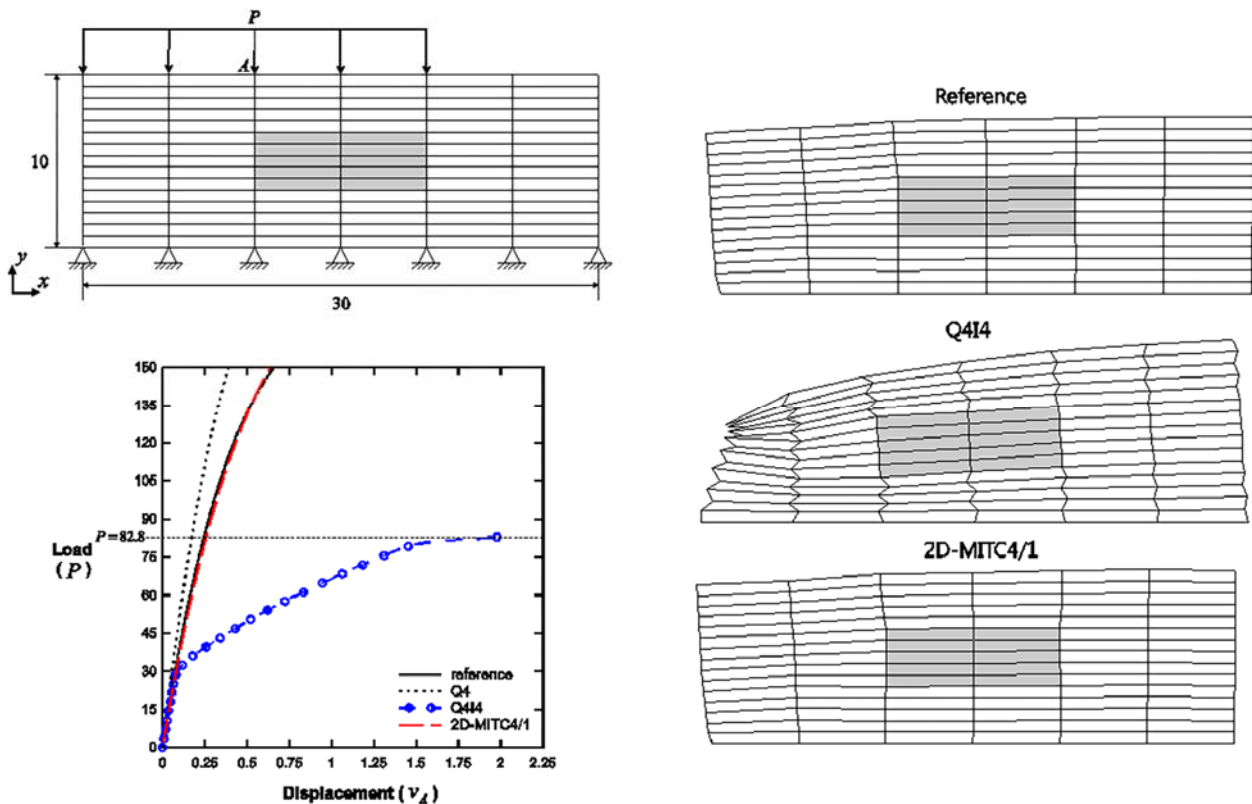


그림 7 MITC4+의 평면 거동 (2D-MITC4/1로 지칭되어 있음)

는 아주 유명한 요소이다. Q414 요소가 주어진 문제에 대하여 훨씬 작은 하중에서 임계하중에 도달하고 비물리적인 변형형상을 보여주는 것에 비하여 새로 개발된 MITC4+ 기반 유한요소는 정확한 해를 도출해 낸다.

셸 유한요소의 개발에 대한 연구는 FEM이 태동된 1950년대부터 지금까지도 계속되고 있다. 1980년대에 assumed strain 기법이 4절점 요소에 적용되어 MITC4 셸 요소가 개발되었고 아직까지도 가장 널리 사용되고 있다. 3절점 셸 유한요소에 대한 연구개발은 오랫동안 큰 성과를 내지 못하다가 2010년대 접어들어 획기적인 발전을 이루어 냈다. 무려 60년 만의 일이다. 물론 포기하지 않는 노력의 산물이었다. 또한, MITC4의 막잠김 문제는 최근에 해결되었다. MITC3+와 MITC4+ 셸 유한요소는 상용코드인 ADINA에 적용되어 일반 사용자들도 그 우수한 성능을 경험할 수 있게 되었다. MITC3+를 창출해낸 이윤규 박사는 국방과학기술을 개발하고 있으며 MITC4+를 만들어낸 고영빈 박사는 미국 ADINA 본사 연구개발팀에서 FEM 코드를 개발하고 있다. 두 박사들에게 감사의 마음을 전한다.

참고문헌

1. PS Lee, Development, success and vision in FEM (FEM의 발전, 성공과 비전), 한국전산구조공학회 학회지 Vol. 33 No.2, 2020.
2. Choi CK, Lee PS, Park YM. Defect-free 4-node flat shell element: NMS-4F element. *Structural Engineering and Mechanics*, 8(2), 207-231, 1999.
3. Lee PS, Bathe KJ. On the asymptotic behavior of shell structures and the evaluation in finite element solutions. *Computers & Structures*, 80(3-4), 235-255, 2002.
4. Bathe KJ, Lee PS, Hiller JF. Towards improving the MITC9 shell element. *Computers & Structures*, 81(8-11), 477-489, 2003.
5. Bathe KJ, Chapelle D, Lee PS. A shell problem 'highly-sensitive' to thickness changes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(8), 1039-1052, 2003.
6. Lee PS, Bathe KJ. Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Computers & Structures*, 82(11-12), 945-962, 2004.
7. Lee PS, Bathe KJ. Insight into finite element shell discretizations by use of the "basic shell mathematical model." *Computers & Structures*, 83(1), 69-90, 2005.
8. Lee PS, Noh HC, Bathe KJ. Insight into 3-node triangular shell finite elements: the effects of element isotropy and mesh patterns. *Computers & Structures*, 85(7-8), 404-418, 2007.
9. Lee PS, Bathe KJ. The quadratic MITC plate and MITC shell elements in plate bending. *Advances in Engineering Software*, 41(5), 712-728, 2010.
10. Bathe KJ, Lee PS. Measuring the convergence behavior of shell analysis schemes. *Computers & Structures*, 89(3-4), 285-301, 2011.
11. Lee Y, Yoon K, Lee PS. Improving the MITC3 shell finite element by using the Hellinger-Reissner principle. *Computers & Structures*, 110-111, 93-106, 2012.
12. Jeon HM, Lee PS, Bathe KJ. The MITC3 shell finite element enriched by interpolation covers. *Computers & Structures*, 134, 128-142, 2014.
13. Lee Y, Lee PS, Bathe KJ. The MITC3+ shell finite element and its performance. *Computers & Structures*, 138, 12-23, 2014.
14. Jeon HM, Lee Y, Lee PS, Bathe KJ. The MITC3+ shell element in geometric nonlinear analysis. *Computers & Structures*, 146, 91-104, 2015.
15. Lee Y, Jeon HM, Lee PS, Bathe KJ. The modal behavior of the MITC3+ triangular shell element. *Computers & Structures*, 153, 148-164, 2015.
16. Ko Y, Lee PS, Bathe KJ. The MITC4+ shell element and its performance. *Computers & Structures*, 169, 57-68, 2016.
17. Ko Y, Lee PS, Bathe KJ. A new MITC4+ shell element. *Computers & Structures*, 182, 404-418, 2017.
18. Ko Y, Lee PS, Bathe KJ. The MITC4+ shell element in geometric nonlinear analysis. *Computers & Structures*, 185, 1-14, 2017.
19. Ko Y, Lee PS. A 6-node triangular solid-shell element for linear and nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 111(13), 1203-1230, 2017.
20. Ko Y, Lee PS, Bathe KJ. A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element. *Computers & Structures*, 192, 34-49, 2017.
21. Ko Y, Lee Y, Lee PS, Bathe KJ. Performance of the MITC3+ and MITC4+ shell elements in widely-used benchmark

- problems. *Computers & Structures*, 193, 187-206, 2017.
22. Jun H, Yoon K, Lee PS, Bathe KJ. The MITC3+ shell element enriched in membrane displacements by interpolation cover. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 337, 458-480, 2018.
23. Lee C, Lee PS. The strain-smoothed MITC3+ shell element. *Computers & Structures*, 223, 106096, 2019. 