韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2021.60.1.133
2021. 5. 제 60권, 제 2호, 133-157.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
May. 2021, Vol. 60, No. 2, 133-157.

초등학생들의 비구조화된 문제 해결 과정에서 나타나는 공간 추론 능력과 문제 해결 능력

최주연(이화여자대학교 대학원, 학생) · 김민경(이화여자대학교, 교수)†
†교신저자

An analysis of spatial reasoning ability and problem solving ability of elementary school students while solving ill-structured problems

Choi, Jooyun(Ewha Womans University Graduate School, choiju0315@naver.com)
Kim, Min Kyeong(Ewha Womans University, mkkim@ewha.ac.kr)†
†Corresponding Author

초록

본 연구에서는 학생들의 생활과 밀접한 공간을 기반으로 한 비구조화된 문제를 개발하고 수업에 적용하였다. 이 과정에서 6학년 학생들의 공간 추론 능력으로는 외적 추론에 비해 내적 추론에서 어려움을 표했으며, 공간 추론이 수와 연산, 측정 등의 영역과 연계되어 활용될 때 그 수준이 더 높게 나타났다. 문제 해결 능력에서는 반성 요소가 미흡하게 나타났으며 초등 현장에서 온라인 환경에서의 협력과 수학적 모델링 학습이 적용 가능하다는 결과를 얻었다. 이를 통해 수학 교육 현장에 공간 학습과 실생활 문제 해결에 관한 의미 있는 시사점을 도출할 것으로 기대된다.

Abstract

Ill-structured problems have drawn attention in that they can enhance problem-solving skills, which are essential in future societies. The purpose of this study is to analyze and evaluate students' spatial reasoning(Intrinsic-Static, Intrinsic-Dynamic, Extrinsic-Static, and Extrinsic-Dynamic reasoning) and problem solving abilities(understanding problems and exploring strategies, executing plans and reflecting, collaborative problem-solving, mathematical modeling) that appear in ill-structured problem-solving. To solve the research questions, two ill-structured problems based on the geometry domain were created and 11 lessons were given. The results are as follows. First, spatial reasoning ability of sixth-graders was mainly distributed at the mid-upper level. Students solved the extrinsic reasoning activities more easily than the intrinsic reasoning activities. Also, more analytical and higher level of spatial reasoning are shown when students applied functions of other mathematical domains, such as computation and measurement. This shows that geometric learning with high connectivity is valuable. Second, the 'problem-solving ability' was mainly distributed at the median level. A number of errors were found in the strategy exploration and the reflection processes. Also, students exchanged there opinion well, but the decision making was not. There were differences in participation and quality of interaction depending on the face-to-face and web-based environment. Furthermore, mathematical modeling element was generally performed successfully.

* 주요어 : 비구조화된 문제, 공간 추론 능력, 문제 해결 능력
* **Key words** : ill-structured problem, spatial reasoning ability, problem-solving ability
* 이 논문은 제 1저자의 학위논문의 일부 내용을 보완하고 재수정한 것임.
* This study was based on parts of master's thesis of the first author.
* **Address**: 52, Ewhayeodae-gil, Seodaemun-gu, Seoul 03760, Republic of Korea
* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97D50
* **Received**: February 3, 2021 **Revised**: March 2, 2021 **Accepted**: March 10, 2021

Ⅰ. 서론

세계경제포럼(World Economic Forum)은 지난 5년간 지능정보화시대로 대표되는 4차 산업혁명 시대의 시작을 알리며 미래 사회에 필요한 핵심적인 16가지 기술 중 하나로 문제 해결을 꼽았고, 2020년에 필요한 인재 역량으로 복잡한 문제 해결 능력을 1위로 예측하였다. 수학과는 문제 해결 능력 증진을 목표로 삼는 주요 교과이며 수학적 문제 해결의 목표는 이전에 얻은 지식을 활용할 뿐만 아니라 새로운 해결책을 생성하고, 이를 실생활에 적용할 수 있는가에 있다.

이러한 목표에도 불구하고 우리나라 교육 현장에서는 수학적 문제 해결을 정형화된 문제를 얼마나 빠르고 정확하게 풀어내느냐에 초점을 맞추어 왔으며 수학 문제와 실생활의 연결이 피상적인 수준에 그친다는 비판이 계속되었다(Lee, 2014). 이와 같은 문제점을 해결하고자, 2009 개정 교육과정은 스토리텔링을 활용한 교과서를 도입하고 2015 개정 교육과정은 수학과 교과역량으로서 문제 해결을 제시하였으며 교과서에 ‘도전수학’, ‘탐구수학’ 코너를 도입하여 실생활 문제를 수학적으로 해결하는 기회를 제공하려 하였다. 이러한 변화는 미국의 National Council of Teachers of Mathematics(NCTM, 2000)에서 문제 해결을 하나의 규준으로 제시하며 수학학습에서 문제 해결 활동을 강조한 것과 그 흐름을 같이 한다.

위의 수학교육 동향과 더불어 실생활 맥락 문제로서 ‘비구조화된 문제(ill-structured problem)’에 관한 논의가 다수 이루어졌다. 비구조화된 문제는 실생활 맥락성이 높은 문제 상황이 제시되고, 문제 해결에 필요한 수학적 개념이나 원리가 명확하지 않으며 수렴적인 해결방안이 없고 다양한 해결책들이 포함되는 문제를 말한다(Jonassen, 1997). 이 유형의 문제는 현실에서 직면하는 문제와 비슷한 수준의 복잡성을 가지고 있어 문제 해결이 간단하지는 않으나, 아동의 삶과 맞닿아 있다는 점에서 학습의 동기를 부여한다. 학생들은 비구조화된 문제를 해결하기 위해 지금껏 학습한 수학적 지식과 원리를 종합적으로 활용하며, 해결책과 여러 대안에 대해 서로 의견을 나누며 다양한 관점을 비교할 수 있다. 이 중 가장 적절한 해결책을 선택하고 이를 수학적으로 정당화하는 과정은 수학적 문제 해결 능력을 신장시킨다(Kim et al., 2014).

현재까지 비구조화된 문제의 의미, 모델, 개발, 실행에 대한 다양한 국내외의 연구가 있었으며 국내에서 개발된 수학 비구조화된 문제로는 Hong(2013), Kim 외(2014), Cho(2016), Kim, Kim(2016) 등의 연구가 있었다. 이들 연구에서는 수와 연산이나 측정 영역을 중심으로 한 문제가 주를 이루어 도형 영역을 기반으로 한 문제 개발이 상대적으로 미진했다는 점을 확인하였다.

도형 영역을 기반으로 하는 비구조화된 문제 개발의 필요성은 도형 영역 중 공간 학습이 학생의 일상생활과 밀접한 관련을 맺는다는 데에서 찾을 수 있다. 인간은 3차원의 공간 속에서 살고 있으며 많은 양의 정보를 시각적으로 얻고 인식한다. 따라서 도형과 공간에서 비구조화된 문제의 소재를 추출하는 것은 학생들에게 풍부한 현실적 맥락을 제공한다는 측면에서 의미 있다고 할 수 있다.

NCTM(2000)은 학교 수학을 위한 규준에서 기하 영역의 규준으로 추론 과정, 특히 공간 추론 능력을 강조하였다. 기하 영역의 학습으로는 형태의 특징을 분석하고 기하 관계에 대해 탐구할 뿐 아니라 문제를 해결하기 위해 시각화, 공간 추론, 기하 모델링 등을 활용하는 것이 포함된다. 기하 영역에서 공간 추론 능력은 필수적인 학습 요소이며, 공간의 특성을 직관적으로 파악하고 기하적 아이디어를 풍부히 하는 것이 중요하다.

Burte, Gardony, Hutton, Taylor(2017)는 특히 초등학교 고학년은 발달 단계상 공간 추론을 학습하기에 매우 적절한 시기라고 하였으나, 현재 우리나라의 고학년 공간 추론 지도 단원은 쌓기나무의 개수를 세고, 여러 방향에서 본 모습을 그리는 반복적인 연습으로 이루어져 있어 공간 추론의 정도가 그다지 많이 필요하지 않다는 문제점이 있다. 학생들의 공간적 사고와 추론의 기회를 풍부하게 제공하기 위해 비구조화된 문제를 제시하고자 한다.

본 연구에서는 도형 영역 중심의 비구조화된 문제 개발의 가능성을 확인하고, 초등학교 6학년 2학기 공간과 입체 단원을 기반으로 한 비구조화된 문제를 개발한다. 학생들의 비구조화된 문제 해결 과정에서 나타나는 공간 추론 능력과 문제 해결 능력 수준을 평가해보고 그 특징을 다양한 사례를 통해 분석해 보고자 한다. 본 연구를 통해 학교 현장에서 활용되기에 적절한 교수·학습 자료를 개발하며 비구조화된 문제 해결과 공간 추론 학습에 대한 의미 있는 교육적 시사점을 도출할 것으로 기대된다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 비구조화된(ill-structured) 문제

수학에서 문제란, 해답을 요구하는 물음이나 과제, 해결해야 할 사항으로 정의할 수 있으며 여러 학자들이 수학적 문제를 다양한 기준으로 분류하였다. Jonassen(1997)은 문제 해결을 위해 적용할 규칙이나 원리, 절차 등이 한정되어 있는 구조화된(well-structured) 문제와 실생활 상황 맥락과 연결된 문제로 수렴적인 해결방안이 없고 다양한 해결책들이 포함될 수 있는 비구조화된(ill-structured) 문제로 유형화하였다.

Jonassen(1997), Spiro, Vispoel, Schmitz, Ala, Boerger(1987), Sung, Park(2012), Kim 외(2014)의 연구를 종합하면 비구조화된 문제(ill-structured problem)는 다양한 수학 문제의 유형 중 하나로서, 실생활과 연결된 문제 상황이 제시되고, 문제의 요소나 문제 해결에 필요한 수학적 개념이나 원리가 명확하지 않으며 수렴적인 해결 방안이 없고 다양한 해결책들이 생성되는 문제를 말한다. 비구조화된 문제는 학습자의 능동적 탐구를 통해 다양한 결론에 이르게 한다고 볼 수 있다(Kim et al., 2014).

Kim 외(2014)는 비구조화된 문제의 특징으로 높은 실제성, 복잡성, 개방성을 제시하였다. 비구조화된 문제는 과제의 실제적인 상황 측면을 잘 모방하고, 묘사한다. 상황에 대한 정보가 많고 폭넓게 적용되므로 실제성이 높다고 할 수 있다. 또한 문제에서 제시되는 개념과 내용이 복잡하고 다양한 관점에서 바라볼 수 있으며 현실 세계에서 볼 수 있는 복잡성, 불규칙성과 그 수준이 비슷하다. 마지막으로 문제 해결 과정에서 다양한 조작이 가능하고, 해답에 제한이 없으며 학습자가 끊임없이 문제를 반복·순환적으로 판단하며 여러 관점에서 해석이 가능하다는 점에서 개방성이 높다고 할 수 있다.

비구조화된 문제의 해결은 구조화되고 수렴적인 해답을 가진 문제와 그 해결 과정과 절차가 다르므로 Jonassen(1997), Ge, Land(2004), Kim, Heo, Park(2014) 등 여러 학자들이 비구조화된 문제 해결 과정을 밝히고, 다양한 모형으로 제시하고 있다. Jonassen(1997)은 ①문제 공간과 상황 맥락을 명료하게 하기, ②의사결정에 대한 여러 관점, 대안적인 견해를 확인하고 명확히 하기, ③가능한 문제 해결책을 생성하기, ④논의와 개인적 신념을 통해 구체화된 대안적 해결안을 평가하기, ⑤문제 공간과 해결안을 점검하기, ⑥문제 공간과 해결안을 점검하기, ⑦해결안의 적용의 7단계로 비구조화된 문제의 해결 과정을 단계화하였다. Ge, Land(2004)는 ① 문제 표상단계, ②이해한 내용을 바탕으로 해결안 생성 및 선정 단계, ③해결한 것을 설명해 내는 해결안에 대한 정당화 단계, 마지막으로 ④점검과 평가의 4단계로 구조화하였다. Kim 외(2014)의 연구에서는 앞의 연구를 토대로 ABCDE 모형을 개발하였고 A(Analyze)단계에서는 문제와 주어진 조건을 파악하여 다시 표현하고 B(Browse)단계에서는 필요한 조건과 수학적 내용을 파악한 뒤, 정보나 자료를 수집한다. C(Create)단계에서는 여러 조건을 만족하는 문제 해결책을 다양하게 생성하고 D(Decision-Making)단계에서는 가장 적합한 문제 해결책을 결정하고 이를 수학적으로 정당화한다. E(Evaluate)단계에서는 다른 모둠의 해결책을 평가하고 나의 것과 비교한 후 수정·보완한다.

비구조화된 문제 해결과 관련한 연구는 국내·외에서 모두 활발하게 이루어지고 있다. 대표적으로 Cho(2016)는 초등학교 5~6학년 학생들을 대상으로 세 가지의 비구조화된 문제를 개발하였고 교사의 스캐폴딩 제공에 따른 학생 간 문제 해결과 상호 작용에 대한 연구를 하였다. 또한 Hong(2013)은 초등학교 고학년을 대상으로 한 비례추론 관련 비구조화된 문제 해결에서의 수학적 추상화 양상을 연구하였다. 국내 연구는 주로 초등학교 고학년을 대상으로 하며 모둠 활동 형태로 설계하였다. 비구조화된 복잡한 문제 상황 속에서 학생들은 상호작용을 더욱 활발히 하고 추론, 추상화, 정당화 등의 기능이 증진되었다는 의미있는 결과들이 도출되었다.

비구조화된 문제에 대한 최근 연구에서는 다양한 교육용 소프트웨어 활용과 온라인 학습 환경이 비구조화된 문제 해결에 긍정적인 영향을 미친다는 결과가 있었다. Berger(2000)는 영재학생들에게 비구조화된 문제를 해결하게 했을 때 학생들은 문제를 해결하는 데 단서가 되는 여러 유용한 웹사이트를 효과적으로 활용하였다고 보고하였다. Cho(2008)는 대학생을 대상으로 서로 다른 학습 환경(면대면, 웹기반)에서 비구조화된 문제의 협력적 해결 과정 차이를 탐색하였다. 이와 같이 전통적 학습 환경과 온라인 학습 환경에서의 문제 해결 효과와 차이에 관한 다양한 연구 결과가 존재한다. 초등학교에서는 주로

면대면 수업이 이루어지기 때문에 지금까지는 관련 연구가 제한적이었으나, 최근 온라인 수업을 통한 비대면 수업이 전면적으로 시행되면서 초등학생을 대상으로도 다양한 기술과 정보, 온라인 학습 환경을 기반으로 하는 비구조화된 문제 해결 연구가 이루어질 것으로 기대된다.

2. 공간 추론 능력

Battista, Clements(1992)는 공간 추론이란 공간적 물체, 이미지, 관계와 변환을 눈으로 보고, 탐구하고, 반영할 수 있는 능력이라고 정의하였다. 공간 추론은 이미지 생성하기, 질문에 답하기 위해 이미지를 탐구하기, 이미지를 변형하고 조작하기와 이미지 기억하기를 포함한다. 즉, 공간 추론이란 공간대상, 관계, 변환을 위한 정신적 표현이 구성되고 조작되는 일련의 인지 과정이다(Clements, 1999; Kim & Pang, 2007).

공간 추론의 의미뿐 아니라 그 유형을 나누는 방법도 학자마다 다양하다. de Moor(1990)는 분석과 종합, 연역과 추론, 시각화 방법의 개발과 적용, 체계적 접근, 변환의 인식과 사용을 제시하였다(as cited in Kim & Pang, 2007). Koo(2007)는 공간 추론을 구성 요소에 따라 모양, 크기, 방향에 대한 추론으로 나누고 각각의 추론을 다시 형태에 따라 귀납적, 유비적, 연역적 추론으로 세분화한다. 최근 Ramey, Stevens, Uttal(2020)은 공간 추론을 내적-정적 추론, 내적-동적 추론, 외적-정적 추론, 외적-동적 추론으로 나누었는데, 이 유형은 공간 추론 대상과 관찰자의 관계를 중심으로 질적 코딩을 통해 분류되었다는 점이 특징이다. STEAM 활동에서 인적·물적 자원과 실생활 맥락은 학생들의 공간 추론을 촉진시키고, 학생들의 공간 추론 양상과 발달 과정을 질적으로 분석했다는 데에 의의가 있다.

Ramey 외(2020)의 공간 추론 유형으로 '내적-정적 추론'은 복잡한 배경 속에서 물체, 경로, 공간 구성을 인식하는 것이다. 인식의 결과로 형태와 공간을 분리해내고 묘사, 정량화하는 것을 하위요소로 갖는다. '내적-동적 추론'은 물체를 더욱 복잡한 구성물에 합치는 것, 주로 2차원에서 3차원 혹은 그 반대로 물체를 시각화하고 마음속으로 변형하는 것, 2차원이나 3차원 문제를 회전하는 것이다. 물체의 변형, 회전, 접기, 크기 변화와 같은 하위요소를 갖는다. '외적-정적 추론'은 물체 간 혹은 물체와 보는 사람 간의 관계에 대해 다루고, 추상적인 공간적 원리 이해하는 것으로 공간의 관계나 위치, 크기를 묘사하는 것을 하위요소로 갖는다. '외적-동적 추론'은 다양한 위치에서 둘러싼 물체의 환경을 시각화하는 능력으로, 관찰자나 물체의 움직임에 따른 관점의 변화와 그 결과를 표현하는 것을 하위요소로 한다. Ramey 외(2020)가 제시하는 공간 추론의 4가지 유형과 그 하위 요소의 의미는 [Table 1]과 같다.

[Table 1] Types of spatial reasoning by Ramey et al. (2020)

Types	Elements	meaning
Intrinsic Static	Disembedding	Distinguishing shapes or objects from distracting background information
	Categorizing Space	Describing or labelling individual shapes or objects
	Quantifying Space	Attaching numerical measurements, dimensions, or counts to objects
Intrinsic Dynamic	2D to 3D Translation	Relating or translating between 2D and 3D representations
	Mental Rotation	Mentally representing and rotating 2D or 3D objects in space
	Mental Simulation	Visualizing dynamic motion of a static object or representation
	Mental Folding	Spatial visualization involving the folding of 2D patterns or materials into 3D objects and representations
	Scaling or Scale Changes	Visualizing scale changes of objects
Extrinsic Static	Spatial Relations	Visualizing or describing relations between objects or between self and objects
	Describing Relative Size	Similar to spatial relations but specifically about the relative size of objects
Extrinsic Dynamic	Perspective Taking	Updating static representations given self-movement
	Dynamic Spatial Relations	Updating static representations given movement of objects

위의 공간 추론의 내용은 초등학교 6학년 2학기 수학 교과서 '공간과 입체' 단원에 가장 잘 구현되어있다. 이 단원에서는 공간에 있는 대상을 여러 위치와 방향에서

바라본 모양과 쌓은 모양에 대해 알아보고, 쌓기나무로 쌓은 모양을 평면에 나타내는 다양한 방법을 익히며 반대로 쌓은 모양과 쌓기나무의 개수를 추측하는 것을 목표로 한다.

공간 추론 능력과 관련된 선행연구로 Chong(2004)은 우리나라 교과서와 미국 MIC 교과서와의 비교를 통해 공간 방향화 신장을 위해 풍부한 현실적 맥락을 제시하고 다양한 공간 추론을 경험하도록 지도할 것을 제안하였다. Shin, Shin(2010)은 공간 추론 활동을 통한 기하 학습은 수학적 문제 해결력을 신장시키고 수학적 태도에 긍정적인 영향을 미친다는 결과와 함께 공간 추론의 중요성과 문제 해결 능력과의 관련성을 시사하였다. Chang, Hong, Lee(2020)는 공간 기하 이해 능력을 공간시각, 공간측정과 공간추론으로 나누어 평가했고 이 중 공간측정과 공간추론 능력은 학년이 올라갈수록 신장되므로 학생에게 자신의 추론 과정을 표현하고 정당화할 기회를 충분히 제공해야 한다고 하였다. 또한 공간 추론 능력에 대한 질적 연구가 부족하다는 Ramey 외(2020)의 의견에 따라 국내·외에서 도형 영역 관련 풍부한 질적 연구가 요구된다.

3. 수학적 문제 해결 능력

'문제 해결'이나 '문제 해결 능력'에 대한 학자들의 시각은 매우 다양하다. Gagne(1985)는 문제 해결을 이미 배운 원리를 응용하여 새로운 상황에서 직면하게 되는 문제들을 해결해내는 것으로 보았다. Kim(2019)은 수학적 문제 해결력을 단순히 계산 연습을 위한 문제 해결이나 알고 있는 지식을 적용하는 수준이 아니라 문제를 이해하고, 주어진 조건과 문제에서 구하려는 것 사이의 관계를 파악해 문제 해결의 계획을 수립하며, 창의적으로 문제를 해결하고 풀이의 결과를 점검 및 반성하는 모든 과정을 포함하는 것이라고 정의하였다.

NCTM(2000)에 따르면 문제 해결은 매우 복합적인 과정이며 지식을 스스로 형성하고 노력을 요하는 복잡한 문제를 해결하는 기회를 많이 경험하는 것이 중요하다. NCTM(2000)은 학교 수학을 위한 과정 규준에서 문제 해결 활동과 관련하여 다음과 같은 목표를 제시하였다. 첫째, 문제 해결을 통해 학생들은 새로운 수학의 지식을 획득할 수 있다. 둘째, 문제 해결을 통해 배운 지식이나 전략을 다른 문제나 상황에 적용할 수 있다. 셋째, 다양하고 적절한 문제 해결 전략을 탐색하고 응용하여 문제를 해결한다. 넷째, 학생들은 반성적 사고 능력을 가지고 문제 해결 과정을 점검한다. 이는 2015 개정 교육과정에서 제시하는 수학과 핵심역량 중 하나인 문제 해결의 하위 요소와도 연결된다.

2015 개정 교육과정 수학과 핵심역량으로서 Park 외(2015)가 제시하는 문제 해결 능력의 의미는 해결 방법을 모르는 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력이다. 교육부의 수학과 교사용 지도서에서 제시하는 문제 해결의 하위 요소는 총 5가지로 문제 이해 및 전략 탐색은 문제에서 구하고자 하는 것과 주어진 조건 및 정보를 파악하고, 적절한 해결 전략을 탐색하여 풀이 계획을 수립하는 능력이다. 계획 실행 및 반성은 계획한 풀이 과정을 수행하고 검증 및 반성을 통하여 해결 방법과 해답을 평가하는 능력, 협력적 문제 해결은 균형 있는 책임 분담과 상호 작용을 통해 집단적으로 문제 해결을 수행하는 능력, 수학적 모델링은 실생활 문제 상황을 수학적으로 나타내고 분석하여 결론을 도출하고 이를 상황에 맞게 해석하는 능력, 그리고 문제 만들기는 주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하는 능력이다.

Polya(1986)의 문제 해결 연구를 시작으로 수학적 문제 해결에 대한 많은 연구가 진행되었고 최근 협력 학습, 토의토론 학습, STEAM 학습이 문제해결력을 증진시킨다는 연구가 활발히 이루어졌다. Kim, Kim(2016)은 2015 개정 교육과정 수학과 문제해결력의 하위 요소를 활용하여 학생들의 문제해결력을 분석하고 문제해결력과 창의·융합 역량과의 정적 관련성을 밝혔다. Do, Paik(2019)은 영재학생의 문제 해결 과정을 메타적 관점에서 연구하였는데, 성공적으로 문제를 해결한 경우, 문제 해결 전략을 선택하고, 세운 식의 적절성과 계산 과정의 오류를 확인하고 평가하는 반성적 사고가 활발하게 작용하였음을 밝혔다. Lee(2016)는 협력적 문제 해결의 중요성을 강조하였고 Oh, Park(2019)은 초등학교에 적용된 수학적 모델링 과제의 특징과 유형을 분석하였다. 수학적 모델링의 필요성은 높으나, 초등학교 수준에서 수학적 모델링 수업을 적용하고 수행하는데 교사와 학생들이 어려움을 겪고 있다고 보고하였다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 대상

본 연구에는 서울시 B초등학교 6학년 1개 학급이 참여하였다. B초등학교 학생들의 사회경제적 지위(SES) 수준은 중상수준이며 참여 학급의 학생 수는 21명(남학생 12명, 여학생 9명)이다. 교육부 전자 저작물로 수록된 6학년 수학 전 단원 평가를 기준으로 2~3명의 학생을 제외한 모든 학생들이 보통 이상의 성취도를 보이고, 학급의 절반(약 10명)정도의 학생들은 매우 우수한 성취 수준을 보여 전반적으로 수학 과목에 대한 이해도와 사고력이 높은 편이다. 또한 학급에서 가장 선호하는 학습 형태로 모둠 활동을 고른 학생들의 비율이 가장 높았고 학생들은 토의와 협력의 훈련이 잘 되어있으므로 본 연구에 참여한 학생들은 모둠을 중심으로 문제 해결 활동을 하기에 적합한 상태로 판단된다.

2. 연구 설계

1) 비구조화된 문제 해결 수업 설계

본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들의 비구조화된 문제 해결 과정에서 나타나는 공간 추론 능력과 문제 해결 능력을 분석하고 평가하고자 한다. 연구는 총 11차시의 세 가지 비구조화된 문제 해결 수업으로 설계되었다. 연구자가 개발한 비구조화된 문제를 해결하기에 앞서, 학생들이 이전에 비구조화된 문제를 해결해 본 경험이 없으므로 ABCDE 단계를 익힐 수 있는 3차시의 연습 문제 해결 시간을 가졌다. 연습문제는 『생각의 힘을 키우는 초등수학 문제 해결(2014)』에 수록된 문제이다. 이후 연구자가 개발한 총 2개의 비구조화된 문제를 각각 4차시씩 총 8차시에 거쳐 본격적으로 해결한다. 문제 <1>과 <2>는 6학년 2학기 수학 '공간과 입체'라는 동일한 단원을 기반으로 하나 문제 상황이 다르고 일부 계산에서 약간의 난이도 차이가 있다. 작은 수준의 차이이지만 상대적으로 쉬운 난이도의 문제 <1>을 먼저 해결하여 학생들이 단계적으로 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

문제 해결 절차로는 Kim 외(2014)의 ABCDE 모형을 따른다. A(Analyze)는 문제에서 구해야 하는 것과 조건을 이해하고 분석하는 단계, B(Browse)는 필요한 정보를 수집, 탐색하며 해결 계획을 세우는 단계, C(Create)는 계획에 따라 해결책을 다양하게 생성하고 실행하는 단계, D(Decision-Making)는 생성된 해결책들을 정당화하고 선택하는 단계, E(Evaluate)는 해결책을 평가하고 공유하며 반성하는 단계이다.

문제 해결 활동 형태는 개인, 모둠(소집단), 전체 활동을 모두 포함하나 모둠(소집단) 활동을 중심으로 진행된다. 모둠 구성 방법은 모둠별로 남녀 학생을 각각 2명씩, 총 4명의 학생으로 구성하였다(학급 인원 특성상 한 모둠은 남3, 여1, 다른 모둠은 남3, 여2로 구성). 특정 모둠이 수학 성취도가 낮은 학생으로만 구성되어 문제 해결에 어려움을 겪지 않도록, 학생들의 수학 성취도를 고려하여 균형 있게 배정하였다.

모든 비구조화된 문제의 해결은 대면 수업으로 계획했으나 코로나19로 인한 등교 중지 상황이 지속되어 불가피하게 문제 <1>의 해결은 쌍방향 원격 수업으로 이루어졌다. 비대면 상황으로 인한 제한점과 연구 결과에 미치는 영향을 최소화하기 위하여 원격 수업에 필요한 각 가정의 기기와 네트워크 상황을 점검하고, 학생들과 zoom 플랫폼에 익숙해지도록 여러 번 연습하였다. 원격 수업 상황에서도 ABCDE 모형과 모둠 구성, 활동 방법을 동일하게 적용하였다.

2) 비구조화된 문제 개발

연구자는 초등학교 6학년 학생들의 공간 추론 능력과 문제 해결 능력 수준을 분석하기 위해서 6학년 2학기 3단원 '공간과 입체' 단원을 중심으로 두 가지의 비구조화된 문제를 개발하였다.

첫 번째 문제 '사각지대 제로! CCTV는 어디에?'는 공원에서 발생한 사건을 해결하기 위해 CCTV 녹화 내용을 확인하는 상황이다. 사각지대의 개념을 도입하여 학생들은 CCTV를 추가로 설치해야 하는 필요성을 느끼고 CCTV의 성능에 따라 가장 효율적인 위치와 방향을 결정하여, 최종적으로 CCTV의 예상 장면을 표현한다. 비구조성을 실제성, 복잡성, 개방성에 따라 평가할 때, 문제 <1>은 CCTV와 지도라는 실생활 소재를 활용하였고, CCTV의 성능과 사각지대를 고려하며 문제를 해결해야 한다는 점에서 중간 수준의 복잡도를 갖는다. 또한 CCTV를 설치할 수 있는 위치와 방향이 다양하므로 개방성이 높다. 문제 <1>은 공간과 입체 단원에서 특히 '공간

방향'을 중점으로 하여 공간 대상을 다양한 위치와 방향에서 본 모양을 상상하고, 물체 간 상대적인 위치, 방향, 거리 관계를 인식하는 추론 내용이 포함되어 있다. 지도를 활용하므로 도해력과 축척에 대한 이해가 요구된다. 문제 <1>의 상황은 [부록 1]에 수록하였고, 차시별 활동 내용은 [Table 2]와 같다.

[Table 2] Lesson plan of ill-structured problem <1>

Problem <1> Where should be a security camera?		
lesson	phase	activity
4	Analyze Browse	·Identifying what to solve ·Analyzing 4 information(incident location, camera location, scene, model) and planning solutions.
5	Create	·Setting camera installation criteria ·Creating candidates for installation location and direction of camera according to standards.
6	Decision Making	·Comparison of features and advantages of camera candidates ·Selecting and justifying the final three installation locations ·Drawing the expected scene of camera
7	Evaluate	·Sharing solutions for each group ·Evaluating other solutions and supplementing ours.

두 번째 문제 '이런 건축물이 필요해요'는 의뢰인이 요구하는 여러 가지 조건(건물의 넓이, 모양, 예산, 층수, 수용 인원 등)을 반영하여 쌓기나무로 건축물을 만드는 문제이다. 만든 건축물이 어떻게 조건을 충족하고, 그 특징은 무엇인지 설명하고 3차원의 건축물을 다양한 방법으로 2차원 평면에 표현하여 완성한다. 문제 <2>는 '건축'의 실생활 소재를 도입하고, 건축물을 만들 때, 여러 가지 조건을 동시에 만족하여야 하며 실생활에서 사용되는 표현(예산, 인원 등)을 수학적으로 변환(크기, 개수, 넓이 등)하여 계산해야 하므로 복잡성이 높은 편이다. 또한 조건을 만족하는 선에서 다양하고 개성 있는 형태의 건축물을 만들 수 있어 개방성이 높다. 문제 <2>는 공간과 입체 단원의 '공간 시각화'를 중점적으로 활용한다. 쌓기나무의 개수를 구하거나 쌓은 모양을 상상하며 여러 가지 모양을 만들고 재배열하는 능력, 쌓기나무의 구조를 파악하고 다양한 방법으로 평면에 표현하는 능력 등이 요구된다. 문제 <2>의 상황은 [부록 2]에 수록하였고, 차시별 활동 내용은 [Table 3]과 같다.

[Table 3] Lesson plan of ill-structured problem <2>

Problem <2> Design my building, please!		
lesson	phase	activity
8	Analyze Browse	·Identifying what to solve ·Analyzing 4 information(budget, capacity, design, size of site etc) and planning solutions.
9	Create	·Making buildings in various forms that meet the conditions ·Explaining the characteristics of a building
10	Decision Making	·Comparing buildings in various perspective and confirming if it meets conditions. ·Selecting and justifying the final building design. ·representing 3d buildings into 2d paper in various ways.
11	Evaluate	·Sharing solutions for each group ·Evaluating other solutions and supplementing ours.

3. 연구 절차

연구자는 문헌과 선행연구에 대한 고찰을 기반으로 도형 단원의 비구조화된 문제를 개발하였고 이들의 제한점을 보완하기 위하여 사전 연구를 실시하고 전문가에게 문제의 비구조성을 검토받았다. 그 결과 난이도 조절, 문제의 상황·용어의 구체화, 자료 재구성의 방향으로 문제와 활동지를 수정하였다. 전문가의 평가 결과는 다음과 같다. 우선, 초등학생을 대상으로 하는 비구조화된 문제로서는 복잡성과 개방성이 지나치게 높아 문제의 범위를 줄이고, 가이드라인을 제시하여 해결 과정을 어느 정도 수렴시킬 것을 제안하였다. 이에 대한 대표적인 수정 방안으로 문제 <1>에서 CCTV의 위치와 방향을 제한된 범위 내에서 결정할 수 있도록 CCTV의 가시거리는 50m, 촬영 범위는 90°, 회전이 아닌 고정형 등으로 그 정보를 구체화하여 문제 해결에 활용할 수 있는 수학적 요소를 명확히 하였다. 또한 문제 <2>에서는 만들어야 할 건축물을 5개에서 2개로 줄이고, 건축물의 크기를 결정하는 데에 있어서 기존에는 부지의 크기만이 조건으로 제시되었지만 수용 가능한 인원이 몇 명인지 등의 실제적인 조

건을 추가하는 방향으로 문제를 보완하였다. 9~10월에는 비구조화된 문제 해결을 적용한 수학 수업 11차시를 5회에 거쳐 진행하며 자료를 수집하고 분석 및 평가하였다. 공간 추론 능력과 문제 해결 능력 평가틀을 전문가에게 검토받아 3단계 평가 중 ‘중’수준의 평가 기준을 명확히 하는 방향으로 수정·보완하고 평가자 2인이 채점함으로써 연구의 타당도와 신뢰도를 확보하고자 하였다. 평가자 2인은 함께 문제 <1>과 <2>의 해결 과정 중에 어떤 발화, 행동, 기술에서 각 요소를 평가할 수 있는지 평가의 항목을 분류하였고 각자 평가한 뒤 점수가 다른 것은 협의하여 재평가하거나, 평균 내어 활용하였다.

4. 자료 수집 및 분석 방법

1) 자료 수집

학생들의 공간 추론 능력과 문제 해결 능력을 다면적으로 살펴보기 위해 활동지, 비디오 녹화, 인터뷰, 연구노트, 사진, 발표 ppt 등의 여러 가지 자료를 종합적으로 수집하고 활용하였다. 비구조화된 문제 <1>은 zoom을 통한 쌍방향 원격수업으로 해결하였으므로, 학생들의 소회의실 활동 모습을 화면 녹화 기능을 통해 수집하였으며 개별 활동지를 수합하였다. 의미 있는 장면은 캡쳐하고 발표 ppt를 수집하였다. 본 문제 <2>의 경우 대면 수업으로 이루어져, 문제 해결 과정을 교실에서 녹화하였고 모둠별 활동지와 발표 ppt를 수합하였다. 학생들이 찍은 다양한 건축물 사진도 수집하였다.

문제 해결 활동 중에 연구자는 개인과 모둠을 인터뷰하였고, 활동이 끝난 직후 연구노트(field note)를 작성하여 학생들의 문제 해결 과정에서의 관찰 내용, 의미 있는 부분, 고민해 볼 부분 등을 정리하였다. 소집단 활동을 녹화한 10개의 영상은 여러 번 들으며 모두 전사하였고, 학생들이 작성한 42개의 활동지, 사진 여러 장, 10개의 ppt 파일을 비교·대조하며 자료를 정리하였다.

2) 분석 방법

학생들의 비구조화된 문제 해결 과정을 분석하는 축은 공간 추론 능력과 문제 해결 능력 두 가지이다. 공간 추론의 유형은 Ramey 외(2020)가 제시한 내적-정적 추론, 내적-동적 추론, 외적-정적 추론, 외적-동적 추론 4가지이다. 본 연구에서 개발한 비구조화된 문제의 특성과 범위에 맞게 공간 추론 유형을 재구성하여 [Table 1]에서 ‘내적-정적 추론’의 하위 요소인 해체(disembedding), 내적-동적 추론의 하위 요소인 ‘정신적 접기’와 ‘스케일 변화’를 삭제하여 활용하고자 한다. 이 하위요소는 Ramey 외(2020)의 STEAM활동에 포함된 요소들로 본 연구의 문제에서는 배경과 물체를 분리하거나(해체), 접거나 구부리고, 크기를 변화시키는 활동과 관련이 없기 때문이다. 문제 해결 능력의 하위 요소로는 Park 외(2015)가 제시한 문제 이해 및 전략 탐색, 계획 실행 및 반성, 협력적 문제 해결, 수학적 모델링 네 가지를 활용한다. 이 또한 본 연구에 맞게 기존의 다섯 가지 문제 해결의 하위 요소 중 ‘문제 만들기’를 삭제하였다. 본 연구는 문제를 해결하는 과정을 주로 분석하고 문제를 만드는 활동은 포함하지 않기 때문이다.

평가는 분석틀의 4가지 유형 및 요소별로 상(3점), 중(2점), 하(1점)의 3단계로 평가한다. 따라서 각 문제당 공간 추론 능력과 문제 해결 능력의 총점은 12점이다. 문제 <1>과 <2>에서 받은 점수를 토대로 그 이유를 해석하고, 모둠별 점수를 비교하여 특정 모둠에서 나타나는 특징을 분석하고자 한다. 분석틀과 평가 루브릭은 초등수학교육 전문가에게 검토 받은 후 수정·보완하였으며 평가 루브릭은 [부록 3]에 수록하였다.

3점 척도의 평가는 1점, 2점, 3점으로 점수를 매기는 것이 원칙이나, 다음과 같은 경우 1.5점, 2.5점과 같이 소수점 처리를 하기도 하였다. 우선 평가자 2인의 채점 결과가 다른 경우 평균을 내어 활용하였다. 또한 본 연구에서는 모둠을 기준으로 점수를 부여하였으나 종종 모둠 내에서 의견이 합의되지 않고, 개인마다 해결 방안과 그 수준이 다른 경우가 있었다. 이 경우, 두 수준에 맞는 점수를 따로 산출한 뒤 평균내어 소수점 점수가 발생하였다.

본 연구에서는 모둠을 단위로 사례 분석을 하여 각 모둠 내에서 나타나는 공간 추론과 문제 해결의 특징을 밝힌다. 뿐만 아니라 여러 모둠 간의 공통점과 차이점을 비교하여 사례들이 가진 차별적 요소나, 경향을 설명하고자 한다. 이후 분석 결과를 근거로 의미, 해석, 패턴 등을 도출하였다. 이를 위해 대표적인 사례를 선정하여 구체적인 담화, 활동지, 사진 등과 함께 그 내용과 의미를 기술하였다.

Ⅳ. 결과분석 및 논의

1. 공간 추론 능력

비구조화된 문제에 따른 공간 추론 능력 평가 결과는 [Table 4]와 같다. 학생들의 공간 추론 능력은 본 연구에서 설정한 3점 척도(상, 중, 하)에 의해 평가했을 때 평균적으로 중상(2.4점) 수준에 분포하였다. 공간 추론의 유형별 점수 비교 결과, 외적 추론이 내적 추론에 비해 평균점수가 높고 모둠별 점수 편차는 작게 나타났다. 특히 학생들은 내적 추론의 공간 정량화, 2차원과 3차원의 변환, 정신적 회전 활동에서 어려움을 표했다. 정확한 수치를 계산하거나, 정확한 위치를 표시해야 하는 정교한 추론이 요구되는 경우에 공통적인 오류 유형이 발견되었다. 공간 추론 능력의 총점 평균은 문제 <1>에서 9.9점, 문제 <2>에서 9.1로 하락하였으며 이는 문제 <2>가 학생들이 어렵게 느끼거나 더 높은 수준의 공간 추론 능력을 요구하는 활동으로 이루어졌음을 보여준다.

[Table 4] The score of spatial reasoning ability

Spatial reasoning	Task	Group 1	2	3	4	5	m
Intrinsic Static	<1>	2.5	1.5	1.5	3.0	3.0	2.3
	<2>	2.0	2.0	3.0	2.5	2.0	2.3
Intrinsic Dynamic	<1>	2.0	2.5	2.5	3.0	3.0	2.6
	<2>	1.5	2.0	2.5	2.5	1.5	2.0
Extrinsic Static	<1>	3.0	2.0	2.5	3.0	2.0	2.5
	<2>	2.0	3.0	3.0	2.0	2.0	2.4
Extrinsic Dynamic	<1>	2.0	2.5	2.0	3.0	3.0	2.5
	<2>	2.0	3.0	2.0	3.0	2.0	2.4
Total	<1>	9.5	8.5	8.5	12.0	11.0	9.9
	<2>	7.5	10.0	10.5	10.0	7.5	9.1

1) 내적-정적 추론

문제 <1>의 경우 [Table 4]에서와 같이, 4모둠과 5모둠은 상(3점)수준, 1모둠은 중상(2.5점)수준, 2모둠과 3모둠은 중하(1.5점)수준의 내적-정적 추론 능력을 평가받았다. 4모둠, 5모둠은 다양한 건축물과 지형의 공간적 특성을 묘사하며 의사소통을 하고, CCTV의 가시거리 50m와 각도가 90°라는 정보를 지도와 연결하여 정확한 거리와 각도를 수치화하여 높은 점수를 받았고, 1모둠, 2모둠, 3모둠은 공간 묘사와 정량화에 미흡한 점이 있었다. 문제 <2>의 경우, 3모둠과 4모둠은 중상(2.5점)~상(3점)수준, 1모둠, 2모둠, 5모둠은 중(2점)수준으로 평가받아 대체로 중 수준 이상의 내적-정적 추론 능력을 보여 주었다. 모든 모둠에서 건축물을 전체적, 세부적으로 적절하게 묘사하고 분류하였다. 그러나 건축물의 여러 가지 측정값을 정량화하는 과정에서는 1모둠, 2모둠, 5모둠에서 측정이 필요함에도 하지 않거나, 계산 실수, 단위 혼동 같은 오류가 발견되었다.

내적-정적 추론의 사례로 4모둠의 문제 <1>의 해결 과정, 1모둠의 문제 <2>의 해결 과정을 살펴보고자 한다. 많은 학생들이 공간 정량화에서 어려움을 겪었으나 두 사례는 분석적이고 정확하게 공간을 수치화하는 모습을 보여준다. [Episode. 1]에서 4모둠은 축척을 활용하여 지도상 CCTV와 사건 발생 지역의 거리를 직접 자로 재어 몇 미터인지 정량화하였다. 또한 활동지에 직접 90°를 표시하며 정확한 수치를 근거로 해결 방안을 판단하였다. 다른 모둠이 눈대중으로 거리를 어림한 것과 달리 문제에서 제시된 수학적 요소를 정확하게 활용한 모범 사례이다.

[Episode. 1] 축적과 자가 있다면 실제 거리를 알 수 있어!
동원 : 리을은 너무 멀어 100m까지는 안보여.
민재 : (자로 재며) 축척이 1:1000이니까 리을에서 도로까지 거리가 90m야 보일 수도 있어.
(중략)
예림 : 오른쪽 아래 후보의 각도를 더 공원 쪽으로 바꾸고 싶어요. 여기 쌓기나무 쪽에서 위로 찍고 싶어요. 이유는 여기 공터 부분이 안 찍힌 것 같아요.

1모둠의 문제 <2> 사례에서는 분석적인 정량화 방법과 필수적 정량화 과정의 누락으로 인한 오류 사례를 모두 보여준다. [Fig. 1]와 같이, 1모둠은 건축물에 사용된 쌓기나무를 하나씩 일일이 세는 것이 아니라 가로와 세로를 나누고 층별로 다시 나누어 그 개수를 분석적인 방법으로 세어 높은 정확성을 나타냈다. 하지만 수정전의 모습을 보면 초등학교의 가로 길이가 건축 부지의 가로 길이를 초과하는데, 이는 건축물의 가로와 세로 길이를

정량화하는 과정이 누락되었기 때문에 발생한 문제이다. 건축물의 크기가 부지 안에 포함되는지를 확인하기 위해서는 가로, 세로의 길이를 분리하여 각각 비교해 보아야 하지만, 1모둠과 다른 모둠 또한 가로와 세로를 곱한 넓이로만 비교하는 공통적인 오류가 나타났다.

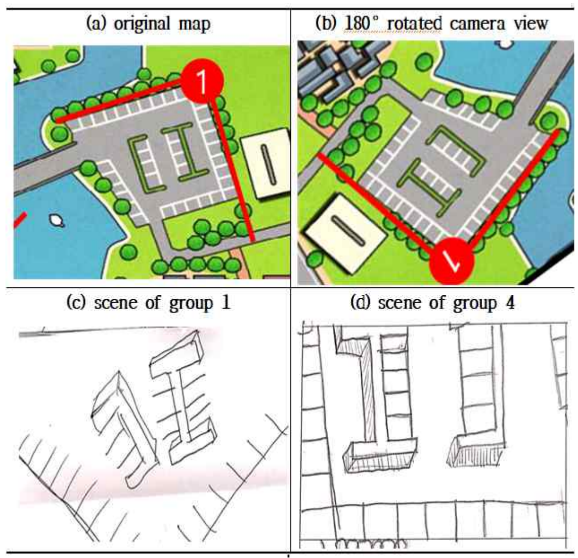
[Fig. 1] PPT presentation of Group 1 on task <2>

내적-정적 추론활동에서 학생들은 공간을 시각적으로 묘사하고 표현하는 데에는 어려움이 없었지만, 공간 정보를 구체적인 수치로 정량화하는 부분에서 미흡함이 나타났다. 특히 공간 추론이 연산, 측정의 기능과 함께 활용되고 그 측정값들이 복잡해질수록 학생들의 오류도 증가하였다. 이와 같은 결과로 미루어 보아 공간 추론을 수와 연산, 측정 등 다른 수학 영역과 함께 사용하도록 요구하는 과제는 학생들에게 도전정신을 불러일으키고 학생들의 공간적 사고를 자극한다는 것을 알 수 있다. 따라서 학교 수학에서 공간 학습을 측정 영역과 연결하여 다룬다면 공간 추론을 더욱 높은 수준에서 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

2) 내적-동적 추론

문제 <1>에서는 [Table 4]와 같이 4모둠과 5모둠은 상(3점)수준, 2모둠, 3모둠은 중상(2.5점)수준, 1모둠은 중(2점)수준으로 중간 이상의 점수를 받았다. CCTV 설치 위치에 따라 예상화면을 그릴 때에 '정신적 회전' 활동이 포함되는데 4모둠, 5모둠을 제외한 다른 모둠에서 어려움을 겪었다. 특히, 지도를 보는 방향과 역방향으로 CCTV가 설치된 경우 물체를 180° 회전시킨 모습을 묘사하는 과정에서 많은 오류가 발생하였다. 문제 <2>에서는 3차원 건축물을 2차원으로 나타내는 과제로 내적-동적 추론을 평가하였다. 표현의 정확성과 다양성을 기준으로 3모둠과 4모둠은 중상(2.5점) 수준, 1모둠, 2모둠, 5모둠은 중(2점)~중하(1.5점) 수준의 점수를 받았다. 학생들은 교과서에서 강조하고 있는 세 가지 방법(위, 앞, 옆에서 본 모양으로 나타내는 방법, 위에서 본 모양에 수를 적는 방법, 층별로 나타내는 방법)을 주로 사용하였으며, 교과서에서 제시되지 않은 방법을 새롭게 고안해 내기도 하였다.

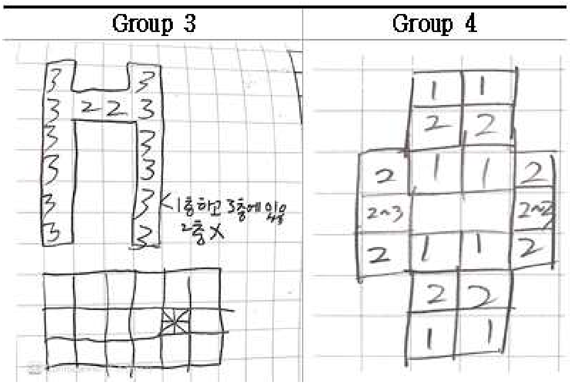
문제<1>에서의 내적-동적 추론의 사례로 1모둠과 4모둠을 비교해보고자 한다. 두 사례는 특정 무늬를 회전시키고 뒤집는 등의 정신적 회전 수준의 차이를 보여준다. 두 모둠은 주차장 모서리에 CCTV를 설치하여 이를 기준으로 주차장의 모습을 180° 회전시켜야 했다. [Fig. 2]에서와 같이 (c)의 1모둠의 경우 ㄷ모양은 잘 회전시켰으나 I모양과의 순서가 잘못 표시되었고, (d)의 4모둠은 회전된 결과를 정확하게 반영하여 나타내었다. 이를 통해 학생들은 180° 회전에서 어려움을 겪는다는 것을 알 수 있다.



[Fig. 2] Worksheets of Group 1 and 4 on task <1>

문제 <2>에서 3모둠과 4모둠의 경우, 입체 쌓기나무를 평면에 표현하기 위해 새로운 방법을 제시한 것이 주목

할 만한 사례이다. 건축물에 빈 공간이 있는 경우, 위에서 본 모양에 수를 쓸 때 교육과정에 제시된 방식으로 표현할 수 없었다. 가장 높은 층수와 사용된 쌓기나무의 개수가 다르기 때문이다. [Fig. 3]와 같이, 3모둠은 가장 높은 층수를 쌓되, 옆에서 본 모양을 함께 그려 비어있는 공간에 별 표시를 하여 2층이 비어있다는 것을 나타내었고 4모둠은 “2~3”과 같이 표현하여 3층이지만 2개의 쌓기나무만 사용했다는 것을 나타냈다. 이 사례는 실제적이면서 복잡한 문제 상황에 노출된 학생들이 다양하고 창의적인 해결 방법을 스스로 고안해 낼 수 있다는 것을 보여준다.



[Fig. 3] Worksheets of Group 3 and 4 on task <2>

학생들은 내적-동적 추론 활동에서 교과서에서 학습한 다양한 표현 방법을 활용하여 3차원 물체를 2차원 평면에 표현하였다. 모눈종이에 정확한 위치와 개수를 표현할 때 정확성이 떨어지는 경향이 나타났으나 문제 <2>의 쌓기나무의 쌓은 모양이 교과서에서보다 더 복잡했다는 점을 감안할 필요가 있다. 비구조화된 문제의 특성상 본 문제 상황의 실제성과 복잡성이 높아, 학생들은 어려움을 느낄 수 있지만 학생들의 수준과 특성에 따라 교과서에서 제시된 방법을 넘어 창의적인 공간 표현 방법을 고안해 내는 기회가 될 수 있다. 연구 결과, 내적-동적 추론에서 좌우 방향에 대한 회전과 모눈종이를 활용한 입체표현에서 오류가 많이 나타나므로 초등학교 고학년 학생들에게 관련 활동에 대한 충분한 연습이 요구된다.

3) 외적-정적 추론

문제 <1>의 경우 공간과 물체 간의 관계를 통해 문제를 해결하는 과제에서 [Table 4]와 같이 1모둠과 4모둠은 상(3점)수준, 3모둠은 중상(2.5점)수준, 2모둠과 5모둠은 중(2점)수준의 평가를 받았다. 물체의 앞, 뒤, 오른쪽, 왼쪽과 같은 위치와 방향 관계를 분석하여 CCTV의 장면별 위치나 사각지대를 파악하는 활동을 주로 평가하였다. 문제 <2>의 경우, 2모둠과 3모둠이 상(3점)수준의 점수를 받았고, 1모둠, 4모둠, 5모둠은 중(2점)수준에 위치하였다. 모든 모둠에서 초등학교의 형태와 크기에 따라 운동장의 크기도 달라진다는 것을 파악하고 이를 고려하여 문제를 해결하였다. 이 중에서 특히 2모둠과 3모둠은 운동장을 넓히기 위해 초등학교를 좁고 높게 쌓아야 한다는 것에 대해 깊이 있게 토의하였다.

문제 <1>에서 높은 점수를 받은 1모둠의 사례는 지도에서 두 물체가 어느 것이 앞에 있는지, 혹은 어느 방향인지의 상대적 관계를 적절히 분석한 모범적인 사례이다. [Episode. 2]에서 가로수와 물가, 건물의 오른쪽, 왼쪽, 앞, 뒤 위치를 비교하여 CCTV의 위치를 분석적으로 추론한 점이 돋보인다.

[Episode. 2] 이 건물이 왼쪽에 있다는 것은?

진솔 : 가로수를 잘 보면 나와.

태윤 : 물가가 있네.

진솔 : 물가가 건물 옆에 있다는 거는 건물 뒤에서 찍은 건 아니야. 그럼 ㉢CCTV야. 물이 옆에 있으면 ㉢방향에서 찍어야 물도 나오고 건물(만화 박물관)도 나와. ㉤에서 찍으면 가로수가 먼저 앞으로 나와야 해.

(중략)

지원 : 이건 ㉡CCTV야. 강이 먼저 나오고 그 뒤에 한옥마을이 있잖아.

문제 <2>에서 초등학교와 운동장의 관계에 대해 깊이 있게 탐구한 2모둠의 추론 사례는 다음과 같다. 2모둠은 학교를 최대한 높고 좁게 만들어서 운동장의 넓이를 넓히는 것을 중요한 조건으로 삼아 초등학교의 형태별로 면적을 얼마나 차지하는지 계속해서 점검하였다. [Episode. 3]에서 학교 건물과 운동장의 넓이를 독립적으로 설정하려고 하는 의견㉠에 반하여 의견㉡에서는 두 변수는 상관관계를 발견한 것과 이를 어떻게 활용하려고 하는지 드러난다.

[Episode. 3] 운동장이 넓어지려면 1층의 면적이 중요해!

민경 : 3000m^2가 주어졌는데 이게 운동장을 포함하는 거네. 학교랑 운동장.

지윤 : 운동장을 크게 하고.

㉠재호 : 그럼 운동장을 50mX25m정도로 하고, 반반.

민경 : 학교를 최대한 높이 쌓아야 하지 않아? 넓은 면적을 차지하면 안되니까.

재호 : 운동장 면적을 얼마나 정할거야?

㉡민경 : 그럼 우리가 건물부터 예시를 든 다음에 그 중에서 가장 운동장이 넓은걸 고르면 될 것 같거든?? 근데 맨 밑 1층 부분에 몇 개를 쌓을 것인가 그게 문제야. 1층 면적에 따라서 운동장의 크기가 정해지기 때문에.

전반적으로 학생들의 외적-정적 추론 수준은 다른 추론 유형에 비해 높게 나타났다. 공간에서 두 개의 물체의 관계를 파악해야 하는 문제 <2>에서는 대부분의 모둠이 성공적으로 과제를 수행하고 문제 <1>에서는 사건 발생 장소와 CCTV가 여러 개 있었고 공간을 복합적으로 파악해야 했기 때문에 일부 모둠에서 정확하게 공간 관계를 파악하지 못하였다. 반면 공간 관계를 거시적인 방법과 분석적인 방법을 종합적으로 활용하여 파악한 모둠의 경우 최종 해결 방안의 정확성이 높게 나타났다.

4) 외적-동적 추론

문제 <1>의 경우 [Table 4]와 같이, 4모둠과 5모둠은 상(3점)수준, 2모둠은 중상(2.5점)수준, 1모둠과 3모둠은 중(2점)수준으로 평가되었다. 학생들은 CCTV의 관점을 상상하며 촬영하고자 하는 공간과 물체가 포함되도록 그 위치를 조정하였다. 하지만 CCTV 예상 화면을 그릴 때에는 관점을 정확하게 반영하는 데에 어려움이 있어 물체의 방향을 반대로 표현하거나 촬영 범위를 잘못 나타낸 오류 등이 발견되었다. 문제 <2>에서는 쌓기나무로 쌓은 모양을 다양한 관점에서 관찰한 모습을 묘사할 수 있는지 위, 앞, 옆에서 본 모양을 그린 그림과 직접 촬영한 사진으로 평가하였다. 정확하고 다양하게 표현한 2모둠과 4모둠은 상(3점)수준, 1모둠, 3모둠, 5모둠에서는 각각 오류가 있어 중(2점) 수준의 점수를 받았다.

외적-동적 추론의 사례로 문제 <1>의 1모둠과 3모둠의 활동 내용을 살펴보고자 한다. [Episode. 4]는 1모둠이 관찰자의 관점에 따라 예상되는 장면을 자세하게 묘사하며 문제를 해결한 사례이다. 의견㉠에서 CCTV 기종에 따른 촬영 범위와 관점을 고려하여 전체 주차장이 보이게 하기 위해서는 모서리에 설치해야 한다고 주장하고 의견 ㉡에서도 CCTV의 위치가 조금 더 뒤로 가면 다리뿐 아니라 건물 뒤편도 찍을 수 있다고 한다. 이는 관찰자의 위치변화에 따른 관점의 차이를 알고 해결 방안을 정교화하는 모습으로서 외적-동적 추론을 활용하는 대표적인 사례이다.

[Episode. 4] CCTV 위치가 이렇게 바뀐다면....

지원 : 일단 주차장은 꼭 해야 할 것 같아.

진솔 : 가운데에 해

지원 : 그럼 사각지대가 생기잖아.

태윤 : 오른쪽 도로 쪽에도 필요해.

진솔 : 그럼 주차장과 차선이 같이 보이는 위치는 어때?

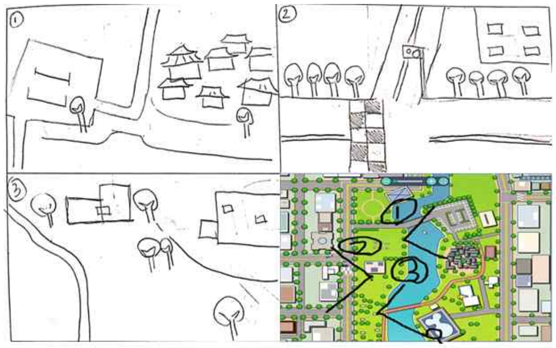
㉠지원 : 주차장이 50m쯤 될 텐데. 주차장과 길을 따로 하는 것이 좋을 것 같은데? 여기 모서리에 딱 설치하면, 다 보여.

(중략)

㉡진솔 : 여기서 조금 더 뒤로 가면 다리도 포함하면서 건물 뒤도 찍을 수 있어. 수정하자 수정 조금 더 뒤로 보내. 사고가 많이 나는 다리를 포함하기도 하네.

3모둠의 사례에서는 CCTV의 관점을 반영하는 활동에서의 몇 가지 오류를 확인할 수 있으며

다른 모둠에서도 공통적으로 겪은 어려움을 포함한다. [Fig. 4]의 ②CCTV의 예상 장면에서는 가운데로 도로가 뻗어나가지만, 지도에서 같은 도로는 오른쪽에 있다. 이 경우, CCTV의 시야 각도를 반영하지 못한 오류이다. ③CCTV의 경우도 지도상에서는 주황색 다리가 중앙으로 뻗어나가며 화면 오른쪽으로 조형물이 비춰질 것이다. 그러나 예상 화면에는 도로가 왼쪽으로 치우쳐져 있고 조형물이 표현되지 않았다. 이는 지도를 위에서 바라보는 학생의 관점과 수직인 CCTV의 관점을 변환하는 데에서 왜곡이 일어났음을 보여준다. 3모둠의 사례를 통해 학생들은 관점이 달라졌을 때, 거리나 순서, 방향, 시야 각도 변화를 추론하는 과정에서 공통적인 어려움을 겪는다는 것을 알 수 있었다.



[Fig. 4] Worksheet of group 3 on task <1>

학생들은 관점에 따라 물체가 다르게 보인다는 것을 인식하고 그 모습을 말과 그림으로 표현하였다. 이 때 학생들은 변화된 시야의 범위나 거리, 방향을 정확히 반영하여 표현할 때 정확성이 떨어지는 경향이 있었다. 이 지점을 교사가 미리 파악하고, 도움을 제공한다면 더욱 효과적인 외적-동적 추론 학습을 가능케 할 것이다.

공간 추론 능력의 네 가지 유형에서 공통적으로 나타나는 특성은 거시적인 추론과 분석적인 추론이 모두 활용된다는 것이다. 전자의 경우 공간의 정보를 전체적이고 직관적으로 파악하고 묘사하는 활동으로 이루어졌으며 학생들은 상대적으로 수월하게 답안을 도출하였다. 그러나 후자의 경우, 방향 회전, 수치 계산, 측정 등 다른 수학적 요소를 함께 활용해야 했으므로 여러 가지 실수와 오류가 나타났다. 위의 결과는 공간 학습이 특히 수와 연산, 측정의 영역과 밀접하게 연결되어 있으며 다른 영역과의 연결성이 높은 문제 상황을 제시할 때 더 높은 수준의 추론 능력을 요구하는 도전적인 과제로 자리매김할 수 있음을 시사한다.

2. 문제 해결 능력

비구조화된 문제에 따른 공간 추론 능력 평가 결과는 [Table 5]와 같다. 학생들의 문제 해결 능력은 본 연구에서 설정한 3점 척도(상, 중, 하)에 의해 평가했을 때 평균 점수가 2.2점으로 중수준에 가깝게 나타났다. 네 가지 하위 요소 간 점수 차이는 크지 않으나 수학적 모델링, 협력적 문제 해결, 계획 실행 및 반성, 문제 이해 및 전략 탐색 순으로 높다. 문제 해결 능력의 총점 평균은 문제 <1>에서 9.3점, 문제 <2>에서 8.2점으로 하락하였으며 이는 문제 <2>가 복잡한 문제 해결 과정으로 이루어졌음을 보여준다.

[Table 5] The score of problem-solving ability

Problem solving	task	Group 1	2	3	4	5	m
understanding problems ·exploring strategies	<1>	2.0	1.5	1.5	3.0	2.5	**2.1**
	<2>	2.0	2.0	2.5	2.5	1.0	**2.0**
executing plans ·reflecting	<1>	3.0	2.0	2.0	2.0	3.0	**2.4**
	<2>	1.5	2.5	2.0	2.0	1.5	**1.9**
cooperative problem solving	<1>	3.0	2.0	2.5	2.0	3.0	**2.4**
	<2>	2.0	2.5	2.5	1.0	2.0	**2.0**
mathematical modeling	<1>	2.5	2.0	2.0	2.5	2.5	**2.3**
	<2>	2.0	2.5	3.0	2.5	1.5	**2.3**
Total	<1>	10.5	7.5	8.0	9.5	11.0	**9.3**
	<2>	7.5	9.5	10.0	8.0	6.0	**8.2**

1) 문제 이해 및 전략 탐색

문제 <1>에서 문제 이해 및 전략 탐색 능력은 [Table 5]에서와 같이, 4모둠과 5모둠이 상(3점)~중상(2.5)수준, 1모둠은 중(2점)수준, 2모둠과 3모둠은 중하(1.5점)수준의 평가를 받았다. 3모둠은 문제를 제대로 이해하지 못해 CCTV 설치 기준을 새롭게 세우지 못하였고 3모둠과 4모둠은 자료 1부터 4까지 통합적이고, 정확하게 분석하며 성공적으로 전략을 탐색하였다. CCTV의 사각지대를 파악할 때 1모둠, 4모둠, 5모둠은 수학적 요소를 활용하여 효과적인 전략을 세웠다. 문제 <2>에서 3모둠과 4모둠은 중상(2.5점)수준, 1모둠과 2모둠은 중(2점)수준, 5모둠은 하(1점)수준의 평가를 받았다. 공통적으로 면적당 수용인원을 통한 최소 쌓기나무 개수 구하기와 부지 면적 정보 활용에 어려움을 겪었고 특히 5모둠은 쌓기나무의 개수와 형태를 결정하는 전략 모두에서 오류를 보여 1점을 받게 되었다.

문제 이해 및 전략 탐색의 모범 사례로 4모둠의 문제 <1>에서의 대화를, 오류 사례로 5모둠의 문제 <2>에서의 해결 과정을 살펴보고자 한다. [Episode. 5]에서 4모둠은 해결 전략을 성공적으로 수립한 사례로서 ㉠예림의 발화

와 같이 분절적으로 제시된 자료 1~4를 번갈아 확인하며 정보를 종합하여 사건 발생 장소 중에서 CCTV에 찍히지 않은 곳을 전략적으로 찾아내었다. 또한 ㉡민재의 발화와 같이 CCTV 촬영 각도와 거리를 수학적으로 계산하여 CCTV 설치 위치를 결정하기 위한 근거를 마련하였다.

[Episode. 5] 다른 자료를 같이 보면 알 수 있어!

찬혁 : (자료1 사진에 90° 표시를 하며) ㉣CCTV는 약간 꺾여있어서 잘 안보일 것 같아.

예림 : 자료 4를 참고하면 돼. 거기서 다 보이잖아.

찬혁 : 요즘 CCTV같은 경우에는 회전도 하고 그러잖아.

㉠ **예림** : 자료 3을 봐봐. CCTV 촬영 각이 90°잖아.

찬혁 : 90°면 가능하지 이렇게 보일 수도 있어.

민재 : 50m에서 100m까지 보일 수도 있어.

예림 : 여길 보면 안보이잖아. 이걸(자료) 봐야해.

동원 : ㉣은 너무 멀어 100m까지는 안보여.

민재 : 축척이 1:1000이니까 ㉣에서 도로까지 거리가 90m야 보일 수도 있어.

찬혁 : 분명히 보일걸?

㉡ **민재** : 자료 4보면 ㉡CCTV 예시인데, 절대 안보여. ㉣에서는 구석까지 거리가 90m야. 100m까진 흐릿하게 보여.

5모둠은 문제 이해 및 전략 탐색에서 오류를 가장 많이 보인 사례이다. 문제에서 구해야 할 것이 무엇인지는 파악했으나, 여러 가지 조건을 이용해 전략을 탐색하는 데에 어려움을 겪었다. [Episode. 6]의 대화에서 보이는 오류는 길이 정보가 나오면 무조건 곱해서 넓이나 부피를 구하려고 하는 기계적인 계산 습관에 기인하며, 필요한 값을 구하기 위해 그 값과 관련 있는 조건들을 파악하지 못하고 수학적으로 연결하는 능력이 부족하기 때문이다. [Episode. 6]의 대화 (a)에서는 문제 해결에 쌓기나무의 부피는 무의미했으나 가로, 세로, 높이의 길이를 보고 기계적으로 부피를 구하였다. 대화 (b)에서는 전체 부지를 모두 쌓기나무로 채우는 것이 아니므로 부지의 넓이를 쌓기나무 하나의 면적으로 나눌 필요가 없었으나 필요한 정보와 제시된 조건을 연결하지 못하여 이러한 오류가 발생했다. 대화 (c)에서 수용 인원은 건축물에 해당하는 수치이나 부지 넓이를 기준으로 수용 인원을 구하였고, 대화 (d)와 같은 단순 계산 오류도 발견되었다.

[Episode. 6] 숫자가 나오면? 일단 계산하고 봐!

대화 (a)

승은 : 넓이 49에 7을 곱할 수 있잖아. 높이가 있으니

원준 : 어쨌든 높이가 중요한게 아니라 면적이...

동우 : 그러면 7, 7, 7 343m^3.

대화 (b)

승은 : 면적은 3000m^2이고...예산으로는 쌓기나무 40개 살 수 있고..면적 3000m^2안에는 몇 개 넣을 수 있지? 3000나누기 49 해봐.

동우 : 61개. 3000 나누기 49는 몫 61에 나머지 11이야.

승은 : 학교 부지에 쌓기나무 61개 넣을 수 있다.

대화 (c)

승은 : 면적 50m^2당 수용 인원이 20명이었어.

민수 : 50m^2짜리가 몇 개 있으면 한 학년이 만들어지네.

승은 : 학교 부지에는 1200명 들어갈 수 있어.

대화 (d)

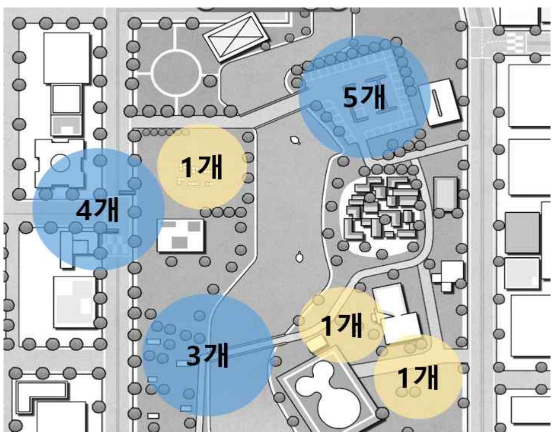
원준 : 전교생은 600~720명이니까 필요한 쌓기나무의 개수는 최소 18개지. (정답 : 30~36개 필요)

문제 <1>과 <2>에서 학생들은 문제를 이해하는 데에는 어려움이 없었고 다양한 전략을 활용하여 해결 계획을 세웠다. 하지만 비구조화된 문제는 여러 가지 수학적 요소나 원리가 불분명하고 복잡하게 제시된다는 특성이 있어 조건과 전략을 탐색하는 과정에서 오류가 일부 관찰되었다. 공통적인 오류로는 첫째, 문제에서 제시된 조건을 활용하지 않고 문제를 추측에 의존하여 부정확하게 해결한다. 둘째, 여러 가지 조건이 있을 때, 그 중 어떤 조건을 서로 연결하여 새로운 정보를 얻을 수 있는지 알지 못한다. 즉, 조건의 맥락적 의미를 파악하는 능력이 미흡한 것으로 나타났다.

2) 계획 실행 및 반성

문제 <1>에서는 [Table 5]와 같이 1모둠과 5모둠은 상(3점)수준, 2모둠, 3모둠, 4모둠은 중(2점)수준으로 평가받았다. 1모둠, 3모둠, 5모둠의 경우 CCTV가 필요한 곳과 각 모둠의 전략을 근거로 CCTV 위치를 선정하였고, 조건을 기준으로 해결 방안을 평가하며 계속적으로 수정하였다. 2모둠, 3모둠, 4모둠의 경우에는 6개의 CCTV 후보 중에 세 개를 최종 선택할 때 조건을 다각적으로 점

검하지 않아서 기존의 CCTV위치와 겹치거나 사고가 일어났던 지역을 포함하지 않는 등의 문제를 보였다. 문제 <2>에서는 2모둠은 중상(2.5점) 수준, 3모둠과 4모둠은 중(2점) 수준, 1모둠과 5모둠은 중하(1.5점)수준의 계획 실행 및 반성 능력을 보여주었다. 1모둠과 5모둠은 해결 전략 탐색 과정에서 오류가 있었기 때문에, 이것이 계획 실행 과정에도 영향을 미쳤고, 모둠원끼리 검증하는 과정을 소홀히 하여 문제점을 스스로 발견하고 수정하지 못하였다. 반면 2모둠과 3모둠은 건축물의 조건을 충분히 탐색하고, 형태를 미리 계획하여 여러 가지 후보들을 쌓기나무로 실현시켰고, 이 과정에서 부족한 점과 고칠 점에 대해 토의하며 수정하는 등 높은 반성적 사고 능력을 보였다. 그러나 모든 모둠이 전체적으로 건축물에 대한 자기 평가와 상호평가를 할 때 평가 기준을 세분화 하지 못했다.



[Fig. 5] Places where students decided to set cameras.

계획 실행 및 반성의 사례로 문제 <1>에서 각 모둠에서 선정한 CCTV의 위치 경향성을 분석해 보고 문제 <2>에서 2모둠의 높은 계획 실행과 반성 수준을 살펴보고자 한다. [Fig. 5]는 지도에서 각 모둠이 선정한 CCTV 3개의 위치를 표시한 것이다. 대체로 파란색 원으로 표시한 세 곳을 가장 적절한 위치로 선정 하였고 이는 문제에서 사고 발생지역이면서 사각지대인 곳이라는 공통점이 있다. 반면 다른 곳에 CCTV를 설치한 모둠도 종종 있었는데, 이 곳은 기존의 CCTV위치와 중복되거나, 사고 발생 지역을 누락하고 너무 멀어 촬영하지 못하는 등의 문제점을 가지고 있다. 이러한 일부 오류는 절반 정도의 모둠에서 선택한 해결 방안이 문제의 기준을 모두 충족하는지 점검·수정하지 못하였다는 것을 보여준다.

2모둠은 문제 <2>의 해결 계획을 실제로 실현시키며 그 장단점을 깊이 있게 평가하였다. [Episode. 7]과 [Fig. 6]에서 2모둠은 ㉠발화에서 처럼 예산을 초과한 피라미드형 후보를 탈락시키고 ㉡과 같이 실행 과정에서 수용인원이나 예산을 수시로 평가하였다. [Fig. 6]에서 볼 수 있는 각각의 후보들을 꼼꼼히 점검하고 다양한 기준에 비추어 평가하면서 높은 수준의 반성적 사고 능력을 보여 주었다.

[Episode. 7] 후보 1 탈락, 후보 3은 통과!

민경 : 피라미드는 너가 1층에 14개 넣는다고 했으니 7개씩 2줄도 괜찮고.

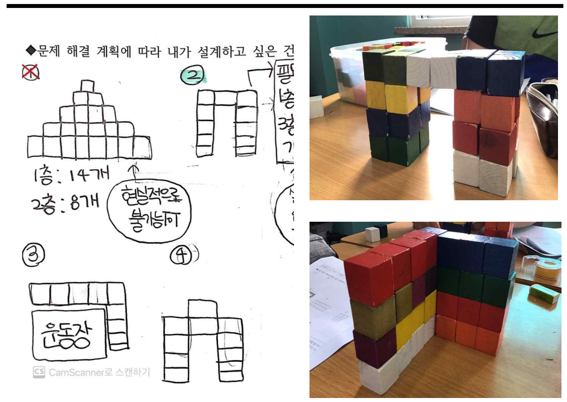
㉠재호 : 밑에게 28개는 되어야 할 것 같은데 그 다음에는 38개까지만 쓸 수 있으니 딱 3층까지만 돼. 피라미드 모양은 현실적으로 힘들다. 잘 쌓아지지가 않아. 피라미드는 빼는게 나을 것 같아.

지윤 : 피라미드가 현실적으로 불가능한 것 같아.

재호 : 층마다 개수는 수학적으론 되는데, 위에 더할 때는 모양이 안돼 40개가 넘어가. 또 다른 후보 뭐야?

우형 : 기억모양.

㉡지윤 : 아 이거 너무 좋은데? 내가 만들어보니까 32개 필요하고 4층까지 돼. 가격도 6천 2백만원이면 돼.



[Fig. 6] Worksheet and photos of group 2 on task <2>

반성적 사고 능력의 사례로 문제 <2>의 1모둠과 2모둠의 상호 평가 내용을 비교해 보고자 한다. 1모둠은 평가의 기준을 굉장히 세분화하여 다각도로 평가하였다. 예를 들어, ‘모든 학생이 들어갈 수 없다.’, ‘ 같은 학년 학생이 같은 층을 사용하기 어렵다.’, ‘운동장을 최대한 크게 나타내었다.’와 같은 기존의 조건에 비추어 평가하기도 하고, ‘통로가 있어서 이동하기 편하다.’와 같은 조건 외의 기준을 활용하면서도 객관적으로 평가하였다. 반면 2모둠은 ‘우주정거장의 모양이 특이한 것 같다.’, ‘초등학교의 모양이 간단하면서도 효율적이다.’ 등과 같이 건물의 외형에만 초점을 맞춘 평가를 하였다. 문제의 조건에 비추어 점검하고 평가하는 능력이 다소 부족하였다.

문제 <1>과 <2>에서의 계획 실행 및 반성 요인은 모둠별 차이가 크게 나타났다. 계획을 잘 세운 모둠일수록 계획을 수행하는 데에 오류가 적었고, 이후에 해결책을 수정하거나 선택하는 데에도 계획과 기준에 근거하므로 용이했다. 또 다른 특징은 전체적으로 우리 모둠의 해결책을 점검하여 더 나은 방향으로 수정하는 과정을 소홀히 하는 경우가 많았다. 계획 실행 및 반성의 평균적인 점수는 낮지 않지만, 이는 ‘계획 실행’의 높은 점수가 ‘반성’의 미흡함을 상쇄시켰기 때문이다. 학생들은 문제의 해답을 도출하는 것은 중요시하지만, 해답을 한 번 도출하면 되돌아보지 않는 경향이 있었다. 학생들에게 문제의 조건에 맞추어 해결 과정을 돌아보며 수정하는 훈련이 필요하다.

3) 협력적 문제 해결

문제 <1>의 경우 [Table 5]에서와 같이 1모둠과 5모둠은 상(3점)수준의 협력능력을 보였고, 3모둠은 중상(2.5점)수준, 2모둠과 4모둠은 중(2점)수준의 평가를 받았다. 대부분의 모둠은 원격 상황에서도 서로 질의하며 자료를 분석하고, 해결책을 다양하게 제시하고 평가하는 등 깊이 있게 상호작용을 하였다. 그러나 2모둠과 4모둠의 경우는 모둠원 간 의견 차이가 있을 때 협의 과정을 거치지 않고, 모둠 내 다른 답을 내거나, 일방적으로 한 학생이 선택하는 모습이 아쉬운 점으로 꼽혔다. 문제 <2>의 경우, 2모둠과 3모둠이 중상(2.5점) 수준, 1모둠과 5모둠은 중(2점) 수준, 4모둠은 하(1점)수준의 평가를 받았다. 의사소통의 질이 높은 모둠은 2모둠과 3모둠으로 문제에 핵심이 되는 부분에 대해 오랜 시간을 들여 의견을 나누었고, 건축물 후보에 문제점이 있을 시 지적하고, 의견을 조율하며 함께 건축물을 수정해 나갔다. 1모둠, 4모둠, 5모둠은 개인적으로 문제를 해결하느라 서로 대화, 토의하는 기회를 충분히 갖지 못하였다.

4모둠의 사례를 통해 비구조화된 문제가 협력을 촉진하는 모습을 살펴보고자 한다. 비구조화된 문제는 그 복잡성과 개방성으로 인해 문제를 혼자 해결하기 어렵다는 특성을 가지고 있다. 4모둠은 특히 문제 <1>의 해결에서 대화를 많이 나누었다. 특히 [Episode. 8]과 같이 모둠원 모두 각자의 의견을 풍부하게 제시하고, 서로의 의견을 비판함으로써 해결책을 정교화해 나가는 모습을 보여주었다. [Episode. 8]의 발화는 의견 제시-비동의-근거 제시 - 반대 의견 제시-보완의 구조를 가지는데, 이는 문제 해결이 한 학생의 주도로 이루어지는 것이 아니라 모둠원 모두가 참여하여 서로 다른 의견을 근거와 함께 개진하며 깊이 있는 토의가 일어나고 있음을 나타낸다. 4모둠은 다양한 시각을 공유하며 협력과 상호작용을 활발히 하였다.

[Episode. 8] 그런데 내 생각은 달라!

찬혁 : 아 그럼 뒷장 봐봐. CCTV 화면 있어. 그럼 1번 삼거리에서 사고 난건 ㉠CCTV에서 보이지 않을까? <u>**(의견 제시)**</u>

예림 : 근데 좀 멀어서 잘 안 보일 것 같은데? <u>**(비동의)**</u>

찬혁 : 2번 사건은 ㉢은 절대 아닌 것 같아. 완전 반대방향이야. <u>**(근거 제시)**</u>

민재 : 2번 사건 위치는 주황색 다리 시작점이니까 ㉣이 그나마 잘 보여. <u>**(보완)**</u>

예림 : 근데 자료 3을 보면 안 보여. <u>**(비동의)**</u>

민재 : 그래도 사이드로 보이지 않을까? <u>**(의견 제시)**</u>

찬혁 : (90도 표시하며) 리을이 약간 꺾여 있어서 잘 안보일 것 같아. <u>**(반대 의견 제시)**</u>

반면 협력적 문제해결에서 미흡한 점을 보인 사례를 통해, 초등학생들이 비구조화된 문제를 모둠 중심으로 해결할 때 발생할 수 있는 문제점을 살펴보고자 한다. 비구조화된 문제는 모둠원마다 다른 해결책을 떠올릴 수 있고 이를 선택하는 과정을 거쳐야 한다. 그러나 [Episode. 9]에서 4모둠은 해결 방안 선택 과정에서 충분한 협의나

정당화 과정 없이 ㉠발화에 나타난 것처럼 한 학생이 주도로 결정했고 결국 최종 해결책에 오류가 발견되었다.

[Episode. 9] 이걸로 한다. 다들 불만 없지?

민재 : 나는 1, 4, 5번.

찬혁 : 난 1, 3, 6. **왜 4번은 필요없잖아.**

민재 : 4번으로 다리, 5번으로 뒷골목 봐야지. 나는 3번 이유를 모르겠어.

㉠찬혁 : 3번이 여기 박물관 뒤쪽을 비추잖아. 그리고 도로도 보여. 사각지대야. 6번을 한 이유는 카메라를 다 훑어보니까 이쪽이 없어. 리을이 아무리 해도 100m까지는 안보이니까. **이걸로 한다. 다들 불만 없지?**

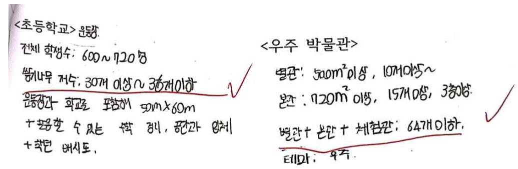
이 외에도 문제 <1>과 <2>에서 나타나는 협력적 문제 해결의 공통적 특성으로는 모둠마다 주도하는 학생과 따르는 학생이 나뉘어 균등한 참여가 이루어지지 않는 장면이 많았다는 것이다. 또한 의사결정 과정에서 충분한 의견 교환과 정당화 과정 없이 간단히 투표하거나 한 학생이 주도해서 결정하기도 했다. 답이 한 가지로 정해지는 정형화된 수학 문제와 달리 해결책이 여러 가지인 비구조화된 문제의 경우 해결 방법을 여러 조건에 의거해 비교하고 선택하는 과정이 익숙하지 않았던 것으로 보인다. 그러나 문제의 복잡한 정보와 조건을 이해하고 문제를 해결하기 위해 서로 의견을 나누고 맡은 역할을 수행하면서 협력이 촉진되었다는 긍정적인 결과도 나타났다.

단, 코로나 19로 인한 등교 중지로 인해 불가피하게 문제 해결 상황이 온라인 및 오프라인으로 나뉜 점이 협력적 문제해결 요소에 영향을 미치는 변수로 작용하였다는 제한점이 있다. 대면 상황에서 활발한 소통과 협력이 일어나는 모둠도 있었으나, 비대면 상황에서도 소통에 제약을 느끼지 않고 오히려 대면 상황에서보다 문제해결에 집중하고 충분한 토의가 이루어진 모둠도 있었다. 온·오프라인 상황에 대한 모둠별 반응과 협력 양상이 달랐다는 것이 흥미로운 점이다. 일반적으로 원격수업에서 의사소통과 상호작용의 원활하지 않을 것이라는 우려와 달리 원격 상황에서 초등학생들도 협력적으로 문제를 해결할 수 있다는 점이 의미있는 결과이다.

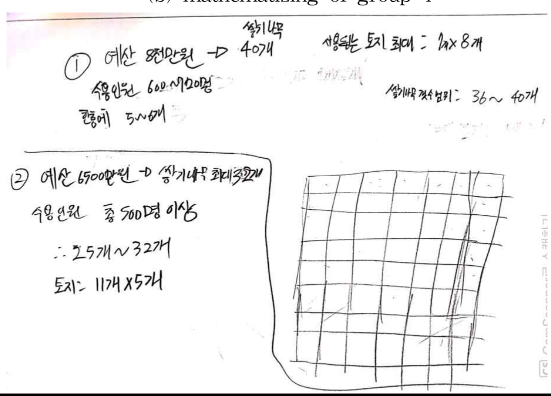
4) 수학적 모델링

문제 <1>에서는 [Table 5]와 같이 1모둠, 4모둠, 5모둠은 중상(2.5점) 수준, 2모둠과 3모둠은 중(2점)수준의 평가를 받았다. 학생들은 실생활 문제를 공간과 입체의 지식을 활용하여 지도를 읽고 CCTV의 위치와 방향을 분석해 내었으나, 1모둠, 2모둠, 3모둠의 경우 축척과 CCTV 기종 정보를 수학화하는 데에는 어려움을 겪었다. 최종 해결 방안에 대하여 1모둠은 가장 맥락적, 종합적으로 분석 및 해석하였다. 문제 <2>에서는 2모둠, 3모둠, 4모둠은 중상(2.5점)~상(3점)수준에, 1모둠과 5모둠은 중하(1.5점)~중(2점)수준에 머물렀다. 건축물을 만드는 상황에서, 예산, 수용 인원, 층수, 면적 등의 실제적 의미의 조건들을 수학적 요소로 연결시키는 과정에서 절반 정도의 학생이 어려움을 겪었다. 또한 처음 초등학교를 만들 때는 수학화 과정이 오래 걸리고 어려웠지만, 우주박물관을 만들 때에는 초등학교를 만들며 얻은 수학적 모델을 활용하여 비교적 수월하게 해결하였다.

(a) mathematizing of group 1



(b) mathematizing of group 4



[Fig. 7] Worksheets of group 1 and 4 on task <2>

수학적 모델링의 사례로 1모둠과 4모둠이 문제 <2>의 상황을 수학적으로 분석한 결과를 비교해 보고자 한다. [Fig. 7]의 (a)에서 1모둠은 쌓기나무 개수에서 오류가 있었고, 조건을 수학적으로 분석하지 않고 재서술한 데 그쳤다. 반면 (b)의 4모둠의 경우 예산 조건, 수용 인원 조

건을 수학화 과정을 통해 쌓기나무의 개수로 변환시켰고, 토지의 크기 정보 또한 최종적으로 쌓기나무를 가로, 세로로 몇 칸까지 쓸 수 있는지 구하여 수학적 모델을 성공적으로 만들었다.

2모둠의 사례는 건축물의 유의미성과 장단점을 가장 맥락적으로 해석하고 비교하는 모습이다. [Episode. 10]에서 2모둠은 건축물의 효율성, 운동장 넓이와 예산, 수용인원, 층수 등을 수학적으로 비교하면서도 건축물이 가지는 의미와 장점을 실생활 측면에서 자세히 설명하였다.

[Episode. 10] 가장 효율적인 건물은?

민경 : 그럼 후보가 1번 피라미드형 2번 H형 3번이 기억형이 있거든? 뭐가 제일 효율적일 것 같니?

우형 : 기억형이 효율적이지

지윤 : 얘도 괜찮은 것 같긴 하다.

민경 : 얘보다는 많은 **면적**을 차지하지 않으니까

지윤 : 그럼 이걸로 정하자. 은수걸로.

재호 : 근데 이거 **수용인원**이 너무 적은거 아니야?

지윤 : 근데 어차피 우리 후보들은 모두 조건을 만족하게 걸렀잖아. 그러니까 **운동장 넓이**만으로 결정하면 될 것 같아. 근데 나는 2000만원이나 **예산을 절약**할 수 있다고 엄청난 액수야.

지윤 : 그럼 차라리 1번으로 하자. 왜냐하면 **인원**은 많을수록 좋고. **가격**도 뭐 안 넘치니까.

본 연구에서는 학생들의 수학적 모델링 수준이 중상수준에 가깝게 나타났다. 이는 학생들이 실제 상황을 수학적 상황으로 변환하여 문제를 해결하는 경험을 다수 가졌으며, 실제성이 높은 비구조화된 문제를 해결하면서 자연스럽게 수학적 모델을 형성하였기 때문이라고 해석할 수 있다. 특히 문제 <2>에서는 다양하고 복잡한 수학적 요소가 포함되어 수학화 과정에서 오류가 발견되었지만 이후 건축물을 맥락적으로 해석하는 것은 수월하게 이루어졌다. 특히 초등학교 건축물은 학생들의 삶과 매우 밀접하기 때문에 더욱 쉽게 의미를 해석했다고 볼 수 있다.

초등학생들의 비구조화된 문제 해결에서 나타나는 문제 해결 능력을 종합해보면, 학생들의 문제 해결 4단계 중 전략 탐색과 반성이 해결 결과의 완성도에 큰 영향을 미치는 것으로 나타났다. 잘못된 전략을 세운 모둠은 계획을 실행하고 점검하는 과정에서도 오류가 지속되었다. 비구조화된 문제의 복잡성으로 인해 오류가 발생할 여지가 많고 이를 스스로 발견하고 수정하기 위해서는 반성적 사고 능력이 필수적인데 전반적으로 반성 과정의 미흡함이 나타났다. 초등학생의 문제 해결 능력 향상을 위해 문제의 조건을 근거로 해결 방안을 정교화하고, 점검하는 연습이 요구된다. 마지막으로 초등학교 수학 수업에서 상호작용과 협력이 훈련된다면 비구조화된 문제를 온라인 상황에서 해결하는 것이 충분히 가능하며 수학적 모델링 수업을 초등 현장에서 실행하는 것에 대한 긍정적인 시사점을 얻을 수 있었다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 비구조화된 수학 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 초등학교 6학년 학생들의 공간 추론 능력과 문제 해결 능력을 평가 및 분석하였다. 공간 추론 능력과 문제 해결 능력을 유형과 요소별로 4가지로 나누어 각각 3수준 평가 루브릭에 의해 평가하였고, 모둠별 활동 과정을 사례로 제시하여 학생들의 공간 추론과 문제 해결의 특징을 비교하고 해석하였다. 그 결과는 다음과 같다.

첫째, 초등학교 6학년 학생들의 비구조화된 문제 해결 과정에서 나타나는 '공간 추론 능력'은 본 연구에서 설정한 3점 척도의 상, 중, 하 단계를 기준으로 평균 2.4점으로 중상수준에 주로 분포하였다. 하위 요소 간 점수 차는 크지 않았으나 학생들은 내적-정적 추론과 내적-동적 추론에 비해 외적-정적 추론, 외적-동적 추론활동을 더욱 수월하게 해결하였다. 이를 통해 공간을 전체적으로 파악하고 그 관계를 살피는 외적 추론보다 하나의 공간 대상에 대해 세밀하게 탐구하는 내적 추론 활동이 초등학생에게 더욱 도전적인 과제임을 알 수 있다. 특히 내적 추론의 공간 정량화, 2차원과 3차원의 변환, 정신적 회전 등의 활동에서 다양한 오류가 발견되었다. 또한 학생들은 공간의 정보를 연산과 측정 등 다른 수학 영역의 기능을 활용할 때 분석적이고 더 높은 수준의 추론을 할 수 있었다. 공간 추론 학습이 다른 영역의 학습도 촉진할 수 있다는 NCTM(2000)의 입장과 같이, 수학 내적, 외적 연결성이 높은 공간 학습이 효과적으로 활용될 수 있다.

둘째, 초등학교 6학년 학생들의 비구조화된 문제 해결

과정에서 나타나는 '문제 해결 능력'은 평균 2.2점으로 중 수준에 가깝게 분포하였다. 공통적으로 문제 전략 탐색 과정에서 다수의 오류가 발견되었으며 반성 과정이 미흡하게 나타났다. 이는 초등학생들의 비구조화된 문제 해결 과정에서 반성 능력이 부족하다는 Kim, Kim(2016)의 연구 결과와 맥을 같이 하며 Do, Paik(2019)의 연구와 같이 학생들이 스스로 해결 과정을 돌아보고 평가 및 보완하는 과정을 강조할 필요가 있음을 시사한다. 협력적 문제 해결 요소는 모둠 활동에 익숙했던 본 연구 대상 학생들에게서 각자 의견을 제시하고 질문, 비판, 보완하며 협력하는 모습이 돋보였으나, 모둠원 간 참여도가 고르지 않고, 의사결정 과정을 소홀히 했다는 아쉬운 점도 나타났다. 대면과 비대면의 수업 방식에 따라 참여도, 상호작용의 양과 질 등에서 차이가 나타났으나 서로 의견을 나누고 토의하는 연습이 되어있다면 원격 상황에서도 협력적 문제 해결이 가능하다는 결과를 얻었다. 마지막 요소인 수학적 모델링을 학생들은 대체로 성공적으로 수행하였다. 이는 학생들이 지금까지 실생활에 관한 수학문제를 많이 접했고, 현실 상황을 수학적 상황으로 또 그 반대로 변환하며 문제를 해결하는 경험이 어느 정도 쌓여있기 때문이라고 해석할 수 있다. Oh, Park(2019)은 초등학생 수준에서 수학적 모델링 활동이 어려움을 야기한다고 하였지만, 본 연구에서는 초등학생들의 비교적 높은 수학적 모델링 수준이 나타난 점이 차별화된 결과이다.

위의 공간 추론 능력과 문제 해결 능력은 비구조화된 문제 해결 상황에서 분석된 것이므로, 비구조화된 문제의 특수성이 반영되었다. 첫 번째로, 비구조화된 문제는 학생들의 삶과 밀접하게 연결된 공간에 대한 활발한 추론을 가능하게 하였다. 예를 들어, CCTV 기종을 활용할 때와 초등학교를 만들 때, 학생들은 본인의 경험을 기반으로 추론하는 모습을 보여주었다. 또한 비구조화된 문제는 실생활 상황을 기반으로 하고 일상의 문제 해결은 다양한 영역의 능력이 혼합적으로 활용되기에 개발된 문제는 공간 추론 활동을 중심으로 다른 수학 영역의 능력을 함께 요구한다는 특징이 나타났다. 특히 공간을 정량화하거나 공간 관계를 파악하는 추론 과정에서 연산이나 측정의 기능을 함께 활용하였다. 두 번째로, 비구조화된 문제는 문제 해결 능력의 모든 요소와 관련이 깊다. 비구조화된 문제 해결 과정은 문제 이해, 전략 탐색, 계획 실행, 반성의 과정을 따른다. 비교적 문제가 복잡하고 해결 방안이 다양하게 도출되는 비구조화된 문제의 특성으로 인해 문제 해결 전략이 매우 다양하게 나타난다. 또한 복잡한 조건을 반영하는 과정에서 실수가 발생하기 쉬워 오류들을 발견하고 스스로 수정할 수 있는 반성적 사고 능력이 더욱 요구된다. 뿐만 아니라 복잡한 문제 상황은 협력과 의견 교환을 촉진하고 비구조화된 문제는 현실 상황을 수학화 하며, 수학적 요소를 활용하여 도출된 결과를 다시 현실 맥락에서 해석한다는 측면에서 수학적 모델링 활동과도 맞닿아 있다.

이상의 연구 결과를 바탕으로 도출한 결론은 다음과 같다. 첫째, 교사는 공간 추론의 네 가지 유형에 대한 이해를 바탕으로 학생들에게 부족한 추론 유형을 파악하고 도움을 줄 수 있다. 이를 위해 학생의 수준과 특성에 따라 수학 내·외적 연결성이 높은 기하 학습을 제공한다면 더욱 깊이 있는 공간 추론 활동의 기회가 될 수 있다. 둘째, 문제 해결 능력의 향상을 위해, 문제 해결 과정 중 반성 단계를 강조하여 학생들이 충분히 연습할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 또한 비구조화된 문제를 활용하는 것이 협력적 문제 해결과 수학적 모델링을 촉진할 수 있다. 셋째, 비구조화된 문제 해결 과정에서 학생들이 보인 공간 추론과 문제 해결에 관한 여러 가지 오류와 오개념을 토대로 학생들이 어려워 하는 지점을 교사가 이해하고 비계를 제공할 수 있다. 본 연구에서는 공간 회전 시 방향 표시에 대한 오류, 쌓기나무의 쌓은 모양을 평면에 표현할 때 발생하는 오류, 문제의 조건을 활용하지 않고 추측에 의해 해결하는 오류, 수학적 조건을 현실의 의미와 연결시키지 못하는 오류 등이 발견되었다.

본 연구는 초등수학 도형 영역을 기반으로 비구조화된 문제를 개발하고 이를 적용하며 학생들의 공간 추론 능력과 문제 해결 능력을 평가 및 해석하였다는 데에 의의가 있다. 하지만 표본의 수가 적고 연구자의 관점에 의해 현상을 해석했기에 연구 결과를 일반화하는 데에 어려움이 있다. 또한 등교 중지 조치로 인하여 문제 해결 활동이 온·오프라인 환경이 혼합되어 이루어진 점과 활동과 평가가 모두 모둠 단위로 이루어져 모둠의 점수가 전체 학생의 점수를 완전하게 대표하지 못한다는 제한점이 있다. 이를 바탕으로 후속연구에 대해 다음과 같이 제안하고자 한다.

먼저 더욱 다양한 실생활 맥락의 도형 영역 비구조화된 문제의 개발과 연구가 필요하다. '공간'이라는 소재는 학생들의 삶과 맞닿아 있어 다양한 비구조화된 문제로 개발될 가능성이 무궁무진하다. 또한 공간 추론 능력과 문제 해결 능력의 관련성을 밝힌다면 도형 학습에서 비구조화된 문제 해결 활동의 효과를 다시 한번 확인할 수 있을 것이다. 본 연구에서는 두 능력 간의 관련성을 발견하였지만 그 정도가 약하고 표본의 수가 작아 뚜렷한 정적 관계를 입증하는 데에 어려움이 있었다. 마지막으로, 본 연구에서 문제 해결에 일부 영향을 미친 온라인 기반 학습의 특징이나 효과에 관한 후속연구가 필요하다. 이는 온라인 학습 환경이 확대될 것으로 예상되는 미래 교육현장에 중요한 시사점을 제공할 것이다.

참 고 문 헌

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York, NY: National Council of Teachers of Mathematics, Macmillan Publishing Co.

Burte, H., Gardony, A. L., Hutton, A., & Taylor, H. A. (2017). Think 3d!: Improving mathematics learning through embodied spatial training. *Cognitive Research, 2*(13), 1-18.

Chang, H. S., Hong, J. A., & Lee, B. (2020). An analysis on middle school students' space geometrical thinking based on cylinder. *The Mathematical Education, 59*(2), 113-130.

Cho, H. J. (2008). An analysis of face-to-face and web-based collaborative problem solving process on ill-structured problem. *The Korean Journal of Educational Methodology Studies*, *20*(1). 173-195.

Cho, M. K. (2016). *A study on ill-structured mathematical problem-solving and peer interactions according to teacher's scaffolding* (Doctoral dissertation). Ewha Womans University. Seoul.

Choi, J. (2021). *A study on spatial reasoning ability and problem solving ability of elementary school student while solving ill-structured problems - Based on the unit of 6th grade 'Three dimensional space'-* (Master's thesis). Ewha Womans University. Seoul.

Chong, Y. (2004). On the teaching of building with blocks in primary school mathematics. *The Journal of Curriculum & Evaluation, 7*(2), 75-101.

Clements, D. H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. In V. C. Juanita (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 66-79). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

de Moor, E. (1990). Geometry instruction in the Netherlands (ages 4-14): The realistic approach. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 119-138). Culembog: Technipress.

Do, J., & Paik, S. (2019). Analysis of characteristics from meta-affect viewpoint on problem-solving activities of mathematically gifted children. *The Mathematical Education, 58*(4), 519-530.

Gagne, E. D. (1985). *The cognitive psychology of school learning*. Boston, MA: Little, Brown Company.

Ge, X., & Land, S. M. (2004). A conceptual framework for scaffolding ill-structured problem-solving process using question prompts and peer interactions. *Educational Technology Research and Development, 52*(2), 5-22. The Pennsylvania State University.

Hong, J. Y. (2013). *A study on the mathematical abstraction and proportional reasoning of elementary school students in the process of solving an ill-structured problem* (Doctoral dissertation). Ewha Womans University. Seoul.

Jonassen, D. H. (1997). Instructional design models for well-structured and ill-structured problem-solving learning outcomes. *Educational Technology Research and Development, 45*(1), 65-94.

Kim, A. R. (2019). *The effects of the discussion using errors on mathematical problem solving abilities and mathematical dispositions* (Master's thesis). Seoul National University of Education. Seoul.

Kim, D., & Kim, M. K. (2016). A study on creativity · integrated thinking and problem solving of elementary school students in ill-structured mathematics problems. *School Mathematics, 18*(3), 541-569.

Kim, M. K., Kim, H. W., Min, S. H., Park, E. J., Lee. J., Cho, M. K., …, Hong, J. Y. (2014). *Elementary mathematics problem solving enhancing thinking ability - ill-structured problem and problem soving-*. Seoul: Kyungmoonsa.

Kim, M. K., Heo, J. Y., & Park, E. J. (2014). Design, application, and its educational implication of ill-structured problem solving in elementary mathematics education. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 18*(2), 189-209.

Kim, Y. K., & Pang, J. S. (2007). An investigation on 6th grade students' spatial sense and spatial reasoning. *School Mathematics, 9*(3), 353-373.

Koo, M. J. (2007). *An analysis of the spatial reasoning ability of middle and senior grade students in elementary school* (Master's thesis). Korea National University of Education. Chung-buk.

Lee, H. (2014). *Comparative analysis of elementary mathematics textbooks of Korea, USA, Japan and Finland on the mathematical connections* (Master's thesis). Seoul National University of Education. Seoul.

Lee, H. J. (2016). *The effects of the collaborative problem solving on scholastic achievement and character strengths in sixth grade elementary students in mathematics* (Master's thesis). Gyeongin National University of Education. Gyeong-gi.

Ministry of Education (2018a). *Korean national elementary mathematics 6-2.* Seoul: Chunjae Education.

Ministry of Education (2018b). *Korean national elementary mathematics 6-2 teachers' guide.* Seoul: Chunjae Education.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Oh, Y. Y., & Park, J. K. (2019). Exploring the task types of mathematical modeling applied to elementary school. *The Journal of Korea Elementary Education, 30*(1), 87-99.

Park, K., Lee, H., Park, S., Kwon, J. R., Yoon, S., Kang, H., …, Jeon, I. (2015). *Study on development of mathematics curriculum according to 2015 revised curriculum II*. Korea Foundation for the Advancement of Science and Creativity BD15120005.

Polya, G. (1957). *How to solve it?.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ramey, K. E., Stevens, R., & Uttal, D. H. (2020). In-FUSE-ing STEAM learning with spatial reasoning: Distributed spatial sensemaking in school-based making activities. *Journal of Educational Psychology, 112*(3), 466 - 493.

Shin, K. M., & Shin, H. K. (2010). The effect of geometry learning through spatial reasoning activities on mathematical problem solving ability and mathematical attitude. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 14*(2), 401-420.

Spiro, R. J., Vispoel, W. P., Schmitz, J. G., Ala, S., & Boerger, A. E. (1987). *Knowledge acquisition for application: Cognitive flexibility and transfer in complex content domains* (Tech. Rep. No. 409). Champaign, IL: University of Illinois, Center for the Study of Reading.

Sung, C., & Park, S. (2012). Analysis on analogical transfer between mathematical isomorphic problems with different level of structuredness. *Education of Primary School Mathematics, 15*(2), 59-75.

[부록 1] Choi(2021)의 비구조화된 문제 <1>

‘사각지대 제로! CCTV는 어디에?’

◆ 2020년 여름, 서울시 ○○구에 ‘스마트 자연 공원’이 문을 열었습니다. 많은 어린이들과 가족단위의 방문이 있었습니다. 하지만, 개장한 지 얼마 되지 않아 보안 관리가 탄탄하지 못한 탓인지, 지난 열흘간 사고 및 사건 5개가 접수되었습니다.

◆ 위 사건을 정황과 관련 인물을 찾기 위해서 스마트 자연 공원에 설치된 총 6개의 CCTV를 살펴보려고 합니다. 그런데, CCTV의 촬영 기능 한계 때문에, 모든 사건을 CCTV로 확인할 수는 없었습니다.

◆ 스마트 자연 공원의 관리팀은 CCTV 사각지대에서 사고가 종종 발생한다는 분석에 따라 CCTV를 세 대 더 설치하기로 하였습니다. 이 때 어느 위치에, 어느 방향으로 CCTV를 달아야 할지 결정해야 합니다. <u>① CCTV를 설치하기 위한 기준을 정하고, 기준에 따라 ②최적의 위치와 방향을 정해봅시다. ③추가된 CCTV의 예상 화면을 함께 제시해 주세요.</u> CCTV는 기존에 사용하던 것과 같은 기종을 사용합니다.

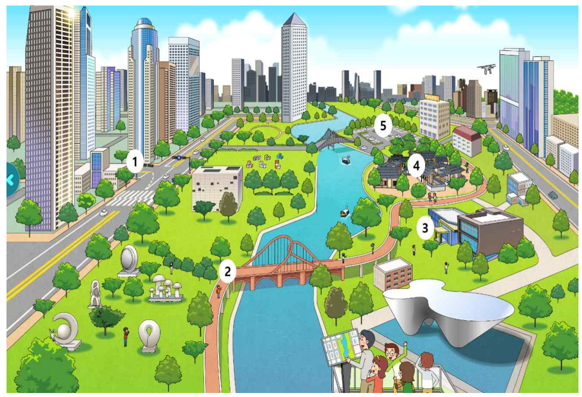
< CCTV 설치 기준 >
①사각지대를 최소화 하는 위치
②사고 발생 구역 중 CCTV에 잘 확인할 수 없었던 부분을 포함하는 위치
③
④

◆ 스마트 자연공원 관리팀은 이 문제 해결에 필요한 다양한 자료들을 모았습니다. 다음 자료를 활용하여 문제를 해결해 봅시다.

♣ 자료 1 ♣ 사건 기록 일지

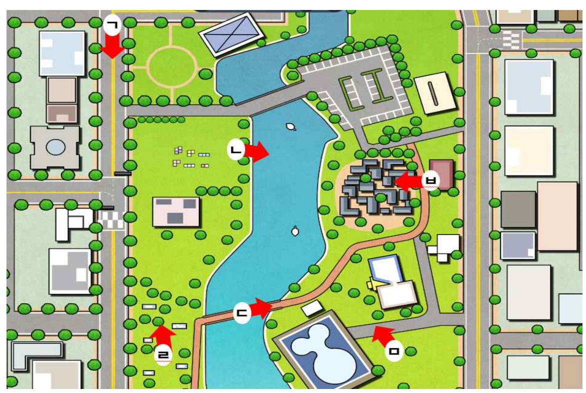
① 8월 21일 낮2시경, 삼거리에서, 스마트 자연 공원에 진입하려던 자동차와 자전거가 부딪히는 접촉사고가 있었습니다.
② 8월 22일 밤 10시경, 버섯 조각 옆, 다리 위에서 강물로 뛰어들려는 소동이 있었습니다.
③ 8월 25일 밤 11시 30분경, 만화 박물관의 만화 상영관에 침입하려는 시도가 있었는지, 비상벨이 수차례 울렸습니다.
④ 8월 27일 오후 5시경, 한옥단지에 있는 2채의 한옥의 벽과 마루에 스프레이를 뿌려 훼손한 사고가 있었습니다.
⑤ 8월 30일 오전 10시 30분경, 주차장에서 한 운전자가 자동차와 충돌하여 심각하게 파손시킨 후 말없이 사라졌습니다. 파손된 자동차는 다리에 서서 주차장을 보았을 때 왼쪽 위의 구석에 주차되어 있었습니다.

※스마트 자연 공원에 사건이 발생한 번호를 표시한 지도입니다. (사진 출처 : 교육부, 수학 6학년2학기 교과서 p. 50~51)



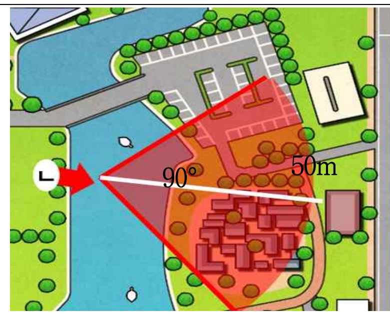
♣ 자료2 ♣ CCTV 지도

다음은 스마트 자연 공원을 위에서 본 모습에 cctv설치 위치와 방향을 표시한 지도입니다. 화살표 방향은 촬영 방향을 나타내며 6대의 CCTV외의 다른 CCTV는 없습니다. (사진 출처 : 교육부, 수학 6학년2학기 교과서 p. 50~51)



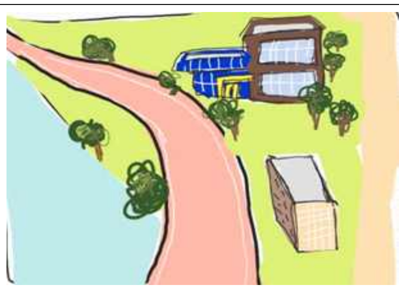
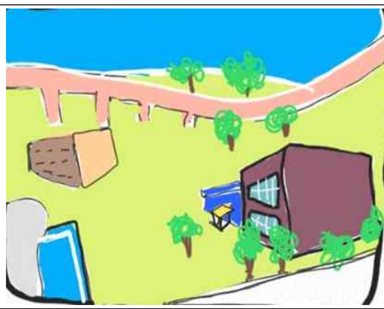
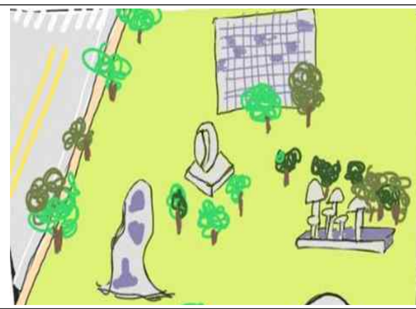
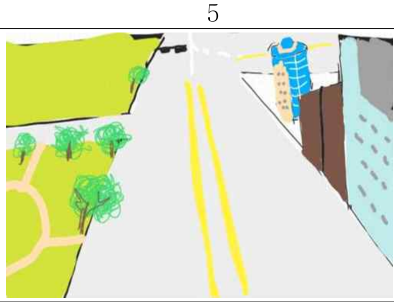
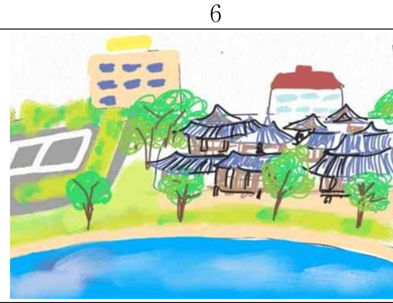
♣ 자료3 ♣ 스마트 자연공원에 설치된 CCTV의 기종 (CCTV 모두 동일)

- 촬영 각도: 90°
- 화질: 300만 화소
- 촬영 거리 : 100m 이내이나
  50m까지 선명
- 회전형 (X), 고정형 (O)
- 야간 촬영 가능



<촬영 범위 예시>

♣ 자료4 ♣ 6개의 CCTV별 장면 예시 (CCTV 기호 순서와 무관)

1	2
	
3	4
	
5	6
	

[부록 2] Choi(2021)의 비구조화된 문제 <2>

'이런 건축물이 필요해요!'

<아름다운 우리 동네 건축 프로젝트>

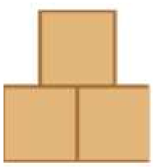
여러분께 새로 지을 건축물에 대한
설계를 의뢰합니다.
○○구의 건축 조건과 의뢰인의 요구를 반영하여
효율적이고 아름다운 건축물을 설계해 주세요!

재료 : 쌓기 나무 (7m × 7m × 7m), 한 개 당 200만원

새로 짓는 건물은 최대 4층까지 지을 수 있다.

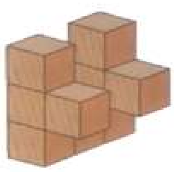
면적 $50m^2$ 당 적정 수용 인원은 20명이다.

건축물을 설계하기 전 스케치를 하며
여러 가지 아이디어를 떠올려보고,
설계 이후에는 건축물의 쌓은 모양을
다양한 방법으로 평면에 나타내 봅시다.



(X)

쌓기나무는 정해진 칸에 쌓고, 아래 쌓기 나무 경계선 중간에 쌓을 수 없다.



(O)

쌓기나무를 쌓을 때 아래에 쌓기나무가 없어도 옆면이 연결되면 공중에 띄울 수 있다.

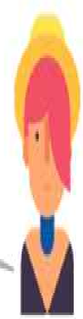
(1) 의뢰인 A - 초등학교

학생들이 마음껏 뛰놀고, 즐겁게 공부할 수 있는 **초등학교**를 지으려고 합니다. 학생과 교사 수는 **한 학년에 100~120명** 정도를 받을 예정입니다. 예산은 **8천만 원**입니다. ○○구에서 허가받은 학교 부지는 운동장을 포함하여 **50m X 60m**의 직사각형 형태입니다. 학교 건물을 짓고 남은 공간이 운동장이 되는데, **운동장이 최대한 넓으면** 좋겠습니다. 건물 모양을 위에서 보았을 때 **ㅡ형, ㄱ형, ㄷ형, ㅁ형, 방사형** * 등 다양한 형태가 가능합니다. 창의적이면서도 효율적인 건축물을 설계해 주세요! **학년 배치도**를 함께 만들어주세요.

* 방사형 : 중앙의 한 점에서 사방으로 뻗어 나간 모양

(2) 의뢰인 B - 우주 박물관

학생들이 많은 ○○구에는 우주 박물관이 지어지면 좋겠다는 의견이 가장 많았습니다. 박물관은 전시를 위한 본관과 체험관, 휴식공간인 별관으로 이루어지면 좋겠습니다. 본관은 최소 300명, 별관은 최소 200명 이상 수용 가능해야 합니다. 본관의 경우 3층 이상으로 지어 공간을 확보하고, 각 층의 모양이 모두 다르게 하여 개성 있는 디자인을 해 주세요. 우주 박물관인 만큼 '우주'를 테마로 디자인하면 더욱 좋습니다. 박물관을 지을 수 있는 부지는 **80m X 40m**의 직사각형 형태입니다. 건축 예산은 **6천 500만원**입니다. 박물관의 **층별 안내도**를 함께 만들어 주세요.



[부록 3] Choi(2021)의 공간 추론 능력과 문제 해결 능력 평가 루브릭

공간 추론 능력			
유형	상(3점)	중(2점)	하(1점)
내적-정적 추론	공간에서 3차원 물체의 구성과 형태를 전체적, 부분적으로 정확하게 인식하고 묘사함. 공간에서 물체와 관련된 개수, 길이, 넓이, 부피 등의 값을 정확하게 측정함.	공간에서 3차원 물체의 형태를 인식하나 묘사가 자세하지 않음. 공간에서 물체와 관련된 개수, 길이, 넓이, 부피 등의 값을 측정하나 일부 오류가 있음.	공간에서 3차원 물체의 형태를 인식하고 묘사하는 데 어려움이 있음. 공간에서 물체의 측정 대상을 인식하지 못하고, 수치화하지 못함.
내적-동적 추론	2차원 정보를 가지고 3차원으로 나타내거나 3차원 물체를 2차원으로 나타낼 수 있는 다양한 방법을 알고 표현함. 공간상에서 2차원, 3차원 물체를 마음속으로 회전시키고 그에 따른 변화를 인식하며 시각화 함.	2차원 정보를 가지고 3차원으로 나타내거나 3차원 물체를 2차원으로 나타내는 방법을 제한적으로 알고 있어 일부 방법으로만 표현함. 2차원, 3차원 물체를 마음속으로 회전시킬 수 있지만 정확성이 다소 떨어짐.	물체를 2차원과 3차원으로 서로 바꾸지 못하고 연결하지 못함. 공간상에서 2차원, 3차원 물체를 마음속으로 회전시키지 못하고 구체물이 필요함. 회전에 따른 변화를 인식할 수 없음.
외적-정적 추론	물체와 물체 혹은 관찰자와 물체 간 관계를 묘사하고 시각화함. 두 물체의 관계를 바탕으로 물체 사이의 상대적 특성과 물체의 상대적 위치, 크기를 구체적으로 파악함.	공간에서의 관계를 부분적으로 파악하고 묘사함. 한 물체나 관찰자를 기준으로 다른 물체의 상대적 특성과 위치, 크기를 대략적으로 파악함.	물체와 물체 혹은 관찰자와 물체 간 관계를 고려하지 못함. 물체 사이의 상대적 특성과 물체의 상대적 위치, 크기가 아닌 개별적 특성과 위치, 크기만 파악함.
외적-동적 추론	관찰자의 관점에 따라 공간에서 물체가 다르게 보인다는 것을 인식하고, 관점을 반영하여 물체를 표현함. 물체의 움직임에 따라 공간을 다르게 표현함.	하나의 물체도 바라보는 위치에 따라 다르게 보인다는 것을 알지만, 관찰자의 관점을 반영하여 위, 앞, 옆에서 나타날 때 다소 부정확함.	바라보는 위치에 따라 공간과 물체가 다르게 보인다는 것을 이해하지 못하고, 관찰자의 관점을 반영하여 표현하지 못함.

문제 해결 능력			
요소	상(3점)	중(2점)	하(1점)
문제 이해 및 전략 탐색	문제에서 구하고자 하는 것과 주어진 조건 및 정보를 정확히 파악함. 이를 분석한 내용을 바탕으로 적절한 해결 전략을 탐색하여 타당한 풀이 계획을 세움.	문제에서 구하고자 하는 것과 주어진 조건을 파악할 수 있으나, 이를 정확하게 분석하지 못함. 해결 전략을 탐색하여 풀이 계획을 세우는데 일부 오류가 있음.	문제에서 구하고자 하는 것과 주어진 조건을 파악하지 못하고, 적절한 해결 전략을 탐색하여 풀이 계획을 수립하는 데에 어려움이 있음.
계획 실행 및 반성	계획한 풀이 과정을 성공적으로 수행함. 여러 측면에서 검증하고 반성하여 해결 방법과 해답을 평가하고 이를 바탕으로 수정할 수 있음.	계획한 풀이 과정을 수행하나 일부 오류가 있음. 단일한 기준으로 해결 방법과 해답을 평가하여 일부 오류를 수정하지 못함.	계획한 풀이 과정을 수행하고 검증 및 반성을 통하여 해결 방법과 해답을 평가 및 수정하는 데에 어려움이 있음.
협력적 문제 해결	균형 있는 책임 분담과 깊이 있는 상호 작용을 통해 집단적으로 문제 해결을 수행함. 모둠원 모두 적극 참여하여 풍부하게 의견을 제시하며, 효율적으로 의사 결정함.	모둠원의 책임 분담과 문제 해결 참여도가 고르지 못해, 상호 작용이 풍부하지 못함. 각자 의견을 제안하고 설명하나 의견 조정과 의사 결정이 효율적이지 못함.	참여도가 부족하고 역할이 고르게 분담되지 않아, 상호 작용의 양과 질이 부족함. 의견 교환이 제한적이며 의사 결정 과정에 어려움을 겪음. 존중하는 태도가 부족함.
수학적 모델링	실생활 문제 상황을 수학적으로 나타내고 이를 정확하게 분석하여 결론을 도출함. 해결 방법을 상황 맥락에 맞게 그 유의미성을 평가하고 해석함.	실생활 문제 상황을 수학적으로 나타내고 분석하여 결론을 도출하는 과정에서 일부 오류가 있음. 해결 방법에 대한 맥락적 평가와 해석이 제한적임.	실생활 문제 상황을 수학적으로 나타내지 못하고, 이를 분석하여 결론을 도출하는 데에 어려움이 있음. 해결 방법을 맥락에 맞지 않게 해석함.