韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2021.60.1.229
2021. 5. 제 60권, 제 2호, 229-247.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
May. 2021, Vol. 60, No. 2, 229-247.

학생의 문제해결전략에 대한 교사의 노티싱 역량 분석: 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 나타난 오류를 중심으로

손태권(한국교원대학교대학원, 학생)・황성환(서울가주초등학교, 교사)†
†교신저자

Examining teachers′ noticing competency on students′ problem-solving strategies: Focusing on errors in fraction addition and subtraction with uncommon denominators problems

Son, Taekwon(Korea National University of Education, sontaekwon7@gmail.com)
Hwang, Sunghwan(Seoul Gaju Elementary School, ihwang413@gmail.com)†
†Corresponding Author

초록

학생의 수학적 사고는 다양한 형태의 산출물로 나타나며, 교사는 이를 통해 학생의 수학적 사고를 추론하고 반응할 수 있어야 한다. 본 연구는 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 중심으로 오류가 포함된 문제해결전략에 대한 39명의 현직 초등교사의 노티싱 역량을 분석하였다. 그로부터 다음과 같은 연구 결과를 도출하였다. 첫째, 교사의 노티싱 역량은 식별하기, 해석하기, 반응하기 순으로 낮아지는 경향을 보였다. 둘째, 반응하기는 교사의 의도와 문제 유형에 따라 범주화할 수 있었다. 이를 바탕으로 교사 노티싱 연구의 시사점을 제언하였다.

Abstract

Students′ mathematical thinking is represented via various forms of outcomes, such as written response and verbal expression, and teachers could infer and respond to their mathematical thinking by using them. This study analyzed 39 elementary teachers′ competency to notice students′ problem-solving strategies containing mathematical errors in fraction addition and subtraction with uncommon denominators problems. Participants were provided three types of students′ problem-solving strategies with regard to fraction addition and subtraction problems and asked to identify and interpret students′ mathematical understanding and errors represented in their artifacts. Moreover, participants were asked to design additional questions and problems to correct students′ mathematical errors. The findings revealed that first, teachers′ noticing competency was the highest on identifying, followed by interpreting and responding. Second, responding could be categorized according to the teachers′ intentions and the types of problem, and it tended to focus on certain types of responding. For example, in giving questions responding type, checking the hypothesized error took the largest proportion, followed by checking the student's prior knowledge. Moreover, in posing problems responding type, posing problems related to student's prior knowledge with simple computation took the largest proportion. Based on these findings, we suggested implications for the teacher noticing research on students′ artifacts.

* 주요어 : 문제해결전략, 수학적 사고, 오류, 교사 노티싱, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, 학생 산출물
* **Key words** : problem-solving strategy, mathematical thinking, error, teacher noticing, fraction addition and subtraction with uncommon denominators, student materials
* **Address**: Department of Mathematics Education, Korea National University of Education, Cheongju-si, Chungcheongbuk-do, Korea
* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97C70
* **Received**: April 26, 2021 **Revised**: May 13, 2021 **Accepted**: May 27, 2021

Ⅰ. 서론

수학 교수는 근본적으로 학생의 수학적 사고에 대한 증거를 기반으로 이루어져야 하며, 학생의 수학적 이해가 어떻게 이루어지고 있는지를 지속적으로 평가하여 학습을 지원하고 확장해 나가야 한다(Ball, 1997; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014). 수학 교수에서 이러한 관행은 도출된 학생의 수학적 사고를 식별하고 학생의 아이디어와 지식을 추론하며 학생의 수학적 사고를 토대로 반응하는 교사의 역량에 달려있다. 이처럼 복잡한 수업 상황에서 학생의 수학적 사고에 능동적으로 대응하는 교사의 역량을 교사 노티싱(noticing)이라고 하며, 효율적인 수학 교수에 있어서 필수적인 교사 관행으로 인정받고 있다(Jacobs et al., 2010; Sherin & van Es, 2009).

노티싱은 전문가적 안목(professional vision; Goodwin, 1994)을 지닌 교사가 복잡한 교실 상황에서 일반인들과 다른 특별한 의미를 포착할 수 있다는 것을 가정한다(Mason, 2002). 이러한 관점에서 노티싱의 개념은 그동안 다양한 영역으로 발전해왔다. 예컨대, 수업 상황에서의 교사 노티싱(Sherin & van Es, 2009; van Es & Sherin, 2008), 교육과정에 관한 노티싱(Dietiker et al., 2018; Hwang et al,, 2020), 학생의 수학적 사고에 관한 노티싱(Jacobs et al., 2010), 공정성에 관한 노티싱(Jackson & Jong, 2017) 등 수학교육에서 중요한 여러 영역 및 개념들과 노티싱의 관련성을 다룬 다양한 연구들이 이루어져 왔다. 이 중 학생의 수학적 사고에 특화된 개념으로서, Jacobs et al.(2010)은 학생의 수학적 사고에 대한 전문적인 노티싱(professional noticing of children's mathematical thinking)이라는 개념을 소개하였다. 이들은 노티싱의 요소를 학생의 전략에 주의 기울이기, 학생의 사고 해석하기, 학생의 수학적 이해를 기반으로 반응하기의 세 요소로 보았으며, 교사의 노티싱 역량을 판단하는 기준으로 학생의 수학적 사고에 대한 증거가 충분히 반영되었는지에 대한 여부를 측정하였다. 이는 수학 교수가 학생의 수학적 사고를 기반으로 이루어져야 하듯이(NCTM, 2014), 교사의 노티싱 또한 학습자의 수학적 사고와 경험을 바탕으로 이루어져야 한다는 점을 시사한다.

이처럼 학생의 수학적 사고는 교사 노티싱 역량을 판단하는데 핵심적인 요소이지만, 학생의 수학적 사고는 직접적으로 평가되기보다는 관찰된 증거로부터의 추론에 의존한다. 즉, 학생의 사고는 직접적으로 드러나기 보다는 그림, 텍스트, 행동, 발화 등 다양한 형태의 증거들을 통해 간접적으로 드러난다. 따라서 단순히 관찰만으로 학생의 사고를 직접적으로 평가하기란 어려운 일이며, 교사는 다양한 형태의 증거들로부터 학생의 수학적 사고를 추론할 수 있어야 한다(Land et al., 2019). 이와 같이 학생의 수학적 사고는 다양한 형태의 산출물로 표현되나, 그동안 이루어진 노티싱 연구들은 주로 수업 영상을 관찰하는데 초점을 맞추어 왔다(e.g., Han et al., 2018; Jacobs et al., 2010; van Es & Sherin, 2002). 이러한 연구들은 수업 상황에서의 교사 노티싱 역량을 측정한다는 점에서 의의가 있으나, 비디오 상으로 관찰하기 어려운 학생의 문제해결 산출물과 이에 따른 수학적 사고, 오류 유형 등을 노티싱하기에는 한계가 있다. 또한 학생의 산출물과 같은 정적인 자료를 활용해 교사의 노티싱 역량을 평가할 경우, 교사가 학생의 수학적 사고를 어떻게 해석하는지 그리고 이를 수정하기 위해 어떤 교수 전략으로 반응하는지에 대한 구체적인 분석이 이루어질 수 있다(Land et al., 2019). 특히, 오류가 포함된 문제해결과정은 학생의 수학적 사고에 대한 정확한 정보를 제공할 뿐만 아니라 교사가 어떠한 교수적 결정을 내리는지에 대한 면밀한 분석을 가능하게 한다(Kim & Kim, 2013).

이에 본 연구는 학생의 문제해결전략이 드러난 산출물에서 나타나는 오류와 수학적 사고를 교사가 어떻게 노티싱하는지 살펴보고자 한다. 이를 위해 학생이 학습하고 교사가 지도하기에 어려운 주제 중 하나인 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈(Park & Park, 2017)에 대한 학생 산출물을 활용하였으며, 교사들이 학생 산출물에서 드러난 오류에 대해서 어떻게 반응하는지를 유형별로 범주화하여 분석하였다. 이를 통해 교사의 노티싱에 대한 시사점과 후속 연구를 제언하고자 한다. 이러한 연구 목적에 따라 설정한 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 나타난 학생의 문제해결전략에 대한 교사의 노티싱 역량은 어떠한가?

둘째, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 나타난 학생의 문제해결전략에 대한 반응하기의 유형은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 노티싱의 개념과 수학적 사고

노티싱 개념의 근원은 특정 분야의 전문가는 같은 현상을 보더라도 일반인과 다른 안목으로 설명한다는 용어인 ‘전문가적 안목’을 주창한 Goodwin(1994)에서 비롯한다(Amador et al., 2021). 이 후, Mason(2002)은 Goodwin의 전문가적 안목을 교실 상황에서의 교수 전문성으로 바라보았으며, 교수 전문가는 일상적인 상황에서 주목하는 것과는 달리 의미 있는 패턴을 인식할 수 있다고 주장하였다. 이 후 연구자들의 관점에 따라 다양한 분석틀과 노티싱 개념을 제시되었으나(e.g., Kilic, 2018; Son, 2013), van Es & Sherin(2002)과 Jacobs et al.(2010)의 노티싱 정의와 분류틀이 노티싱 연구에서 가장 많이 활용되고 있다(Amador et al., 2021; Stockero & Rupnow, 2017).

van Es & Sherin(2002)은 노티싱을 1) 교실 상황에서 중요하거나 가치 있는 사건 주목하기 2) 특정한 교실 상호작용과 더 넓은 교수･학습 원리를 연결하기 3) 교실 상호작용을 추론하기 위한 맥락 정보 활용하기로 구성되어 있다고 설명하였다. 또한 Jacobs et al.(2010)은 노티싱을 ‘학생의 수학적 사고에 대한 전문적인 노티싱’이라 정의하고 교사의 노티싱을 1) 학생의 수학적 사고에 주목하기 2) 학생의 이해를 해석하기 3) 학생의 이해에 기초하여 어떻게 반응할지 결정하기로 구성되어 있다고 설명하였다. 이 두 정의는 교사가 학생의 수학적 사고를 기반으로 교수적 움직임을 계획해야 한다는 반응적 교수 관행(Robertson et al., 2015)을 따른다는 공통점이 있다. 그러나 van Es & Sherin(2002)이 노티싱을 교실 상황에서 식별하고 해석한 정보를 수학적 원리와 연결하는 것으로 보았다면, Jacobs et al.(2010)는 정보를 식별하고 해석하는데 그치지 않고, 해석한 정보를 바탕으로 교수적 의사결정을 내리는 과정을 포함한다는 점에서 차이가 있다.

이처럼 두 연구는 노티싱 개념의 정의에서 차이를 보이지만, 학생의 수학적 사고는 교사 노티싱 역량 평가의 공통적인 근간으로 가정된다. 예컨대, van Es & Sherin(2002)은 노티싱의 대상이 교사에서 학생의 수학적 사고로 바뀌어가는 것을 교사 노티싱 역량의 향상으로 바라보았으며, Jacobs et al.(2010) 역시 학생의 수학적 사고에 초점을 맞추고 학생의 이해와 교사의 지식이 구체적인 증거로서 노티싱한 내용을 뒷받침하는가를 기준으로 수준을 분류하였다.

종합하면, 연구자들의 관점에 따라 노티싱의 정의와 접근 방법은 달라질 수 있으나, 학생의 수학적 사고는 효율적인 교수･학습을 위한 근간이자 노티싱 역량을 평가하는 핵심 지표임을 알 수 있다. 이에 본 연구는 Jacobs et al.(2010)의 노티싱 정의를 따르며, 학생의 수학적 사고에 초점을 맞추어 교사의 노티싱 역량을 분석하고자 한다.

2. 학생 산출물에 대한 노티싱 연구 고찰

Mason(2002)의 연구가 발표된 이래로, 약 20년 간 다양한 노티싱 연구들이 수행되어 왔으나 교사의 노티싱 역량을 측정하기 위하여 주로 활용한 방법은 비디오 분석법이다(e.g., Jacobs et al., 2010; Males, 2017; Star & Strickland, 2008; van Es & Sherin, 2008). 비디오 분석법은 연구의 목적에 따라 다양한 구성과 형태로 참여자에게 제공된다. 예를 들어, 수업 상황에서 참여자가 어떤 요소를 노티싱하는지 파악하기 위한 목적으로 수행된 연구들(Star & Strickland, 2008; van Es & Sherin, 2008)의 경우, 수업 전체를 녹화한 비디오를 분석 자료로 활용하였다. 반면, 학생의 수학적 사고에 초점을 맞춘 연구(Jacobs et al., 2010)의 경우, 학생의 수학적 사고가 담긴 짧은 비디오 클립을 분석 자료로 활용하였다. 이처럼 비디오 분석법은 수업 상황이 자연스럽게 드러나며 영구적인 기록을 제공하므로 교사가 노티싱한 내용을 되돌아보고 반성할 수 있는 시간을 제공한다는 장점을 지니고 있다(van Es & Sherin, 2008). 이러한 장점으로 인해, 비디오 분석법은 교사의 노티싱 역량을 분석하고 향상시키기 위한 지원 도구로서 오랫동안 활용되어 왔다(van Es & Sherin, 2008).

한편, 교사가 교실에서 마주하게 되는 학생의 수학적 사고는 표면적으로 드러나는 수업 상황에만 국한되지 않는다. 학생은 학습과정에서 필기를 하고 문제를 풀며, 그림을 그리는 등 스스로의 사고가 내재된 다양한 형태의 산출물을 남기며(Pang & Cho, 2019), 이러한 산출물들은 교사의 노티싱 역량을 향상시키기 위한 가치 있는 자료와 맥락을 제공한다. 또한 학생 산출물에 대한 교사의 추론은 교사의 지식, 신념, 경험에 영향을 받으며, 학생의

산출물에 대한 교사의 주의 깊은 분석은 학생의 수학적 사고에 초점을 두는 노티싱 전략의 개발에 도움을 준다 (Goldsmith & Seago, 2011). 따라서 학생 산출물에 대한 교사 노티싱을 분석하는 과정은 지도해야하는 교수 주제에 대한 더 깊은 이해를 교사에게 제공할 뿐만 아니라 학생의 수학적 사고에 밀접하게 다가갈 수 있는 새로운 관점을 제공할 수 있다.

학생의 문제해결전략을 담은 텍스트 자료는 교사들이 가장 일반적으로 다루는 학생 산출물 중 하나이다. 이로 인해, 학생의 문제해결에 대한 텍스트 자료를 분석한 노티싱 연구들이 최근 들어 수행되고 있다. 예를 들어, Land et al.(2019)은 범자연수의 곱셈과 뺄셈에 관한 두 개의 실생활 맥락 문제를 세 명의 학생들에게 제공하고, '반응하기 루브릭(존재하는 학생 전략 고려하기, 학생의 미래 전략 예상하기, 반응적 문제 제기하기)을 통해 학생의 문제해결전략에 대한 교사들의 반응하기를 살펴보았다. 그 결과, 교사들이 낮은 수준부터 높은 수준까지 다양한 수준의 노티싱 역량을 갖고 있음을 보고하였다. 또한, Sun & Pang(2020)은 반응하기를 1) 주요 수학적 요소에 대해 반응하기 2) 학생의 수학적 사고에 대한 이해와 추론을 토대로 반응하기 3) 학생의 수학적 신장을 도모하는 반응하기 4) 타당한 근거를 토대로 반응하기 5) 학생의 향후 전략을 고려하여 반응하기의 다섯 가지 요소로 구분하고 예비 교사들이 학생의 문제해결전략에 어떻게 반응하지를 분석하였다. 그 결과, 예비교사들은 학생의 향후 전략을 고려하여 반응하기에 가장 낮은 점수를 보였으며 학생의 이해 정도를 파악하여 구체적인 지도 방안을 모색할 필요가 있다고 제언하였다.

이처럼 학생의 산출물에 대한 노티싱은 학생의 수학적 사고에 대한 교사의 민감성을 증진시키고 교수 주제에 대하여 더 깊은 이해를 연구자에게 제공해 줄 수 있다. 그러나 학생의 산출물에 대한 교사들의 노티싱 연구는 여전히 부족한 실정이며, 현직 교사에 대한 노티싱 경향을 살펴본 연구는 국내에서 수행된 바가 없다. 이에 본 연구에서는 Land et al.(2019)의 연구를 바탕으로 학생의 문제해결전략이 담긴 텍스트 자료에 대한 초등학교 현직 교사의 노티싱 역량을 살펴보았다. 더불어, 교사의 반응하기의 유형을 발문 제시와 문제 제기로 구분하고 구체적으로 어떠한 경향이 나타나는지 세밀하게 분석하였다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 참여자 및 자료 수집

연구 참여자는 A교육대학원에 재학 중인 초등교사 39명(남 5명, 여 34명)이며, 교육경력은 1-10년(평균 5.3년)이다. 참여자들은 모두 석사과정에 재학 중이며, 자료 수집은 강의 첫 시간에 이루어졌으므로 강의 내용이 참여자들의 노티싱 역량에 미치는 영향은 미비할 것으로 판단된다. 모든 참여자들은 연구의 목적을 충분히 이해하고 자발적으로 참여했으며 사전에 검사의 목적과 방법을 안내 받았다. 자료 수집 과정은 온라인으로 이루어졌으며 참여자들은 검사지를 동일한 시각에 개별로 제공받았다. 참여자들이 인터넷이나 참고 자료 등을 활용하여 검사에 응할 경우를 방지하기 위해 화상회의에 접속한 상태로 검사지의 질문에 응답하였다. 검사는 2시간동안 이루어졌으며 검사가 종료되는 시각까지 연구자의 메일로 작성한 검사지를 송부하도록 하였다. 참여자들은 한글 프로그램을 이용하여 검사지를 작성하거나 수기로 작성하고 촬영하거나 스캔한 후 제출하였다.

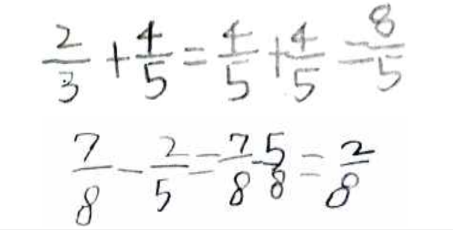
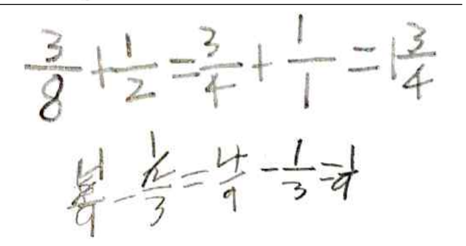
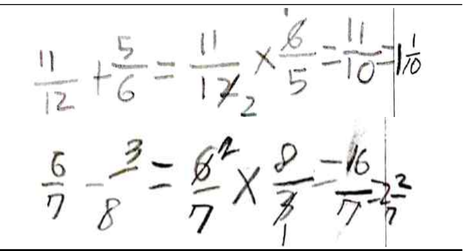
2. 검사 도구

이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 교사의 노티싱 특성을 살펴보기 위해 실제 5, 6학년 학생들의 문제해결과정에서 발생한 오류들 중 [Table 1]과 같이 세 가지 오류 유형(통분, 약분, 연산자 오류)을 선별하였다. 선별된 오류 유형들은 여러 선행 연구들(Eom & Ryu, 2009; Park & Park, 2017)을 참고하여 선정하였으며, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 연산에서 가장 빈번하게 발생하는 오류 유형들이다(Eom & Ryu, 2009). 각 오류 유형들을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

오류 유형 1은 통분 오류로서 작은 분모를 가진 분수의 분자와 분모에 같은 수를 더하여 큰 분모를 가진 분수와 같은 분모로 만드는 오류이다. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$를 계산하는 과정에서, $\frac{2}{3}$의 분모를 5로 만들기 위해 분모와 분자에 2씩 더하여 $\frac{2}{3}$를 $\frac{4}{5}$로 변환하는 경우를 말한다. 통분하는 과정에서 두 분모의 공배수를 활용하지 않고 덧셈으로 같은 분모를 만들며, 통분의 이유에 대한 이해가 부족하

거나 알고리즘만을 학습하는 경우 발생할 수 있다.

[Table 1] Error types for fraction addition and subtraction with unlike denominator problems

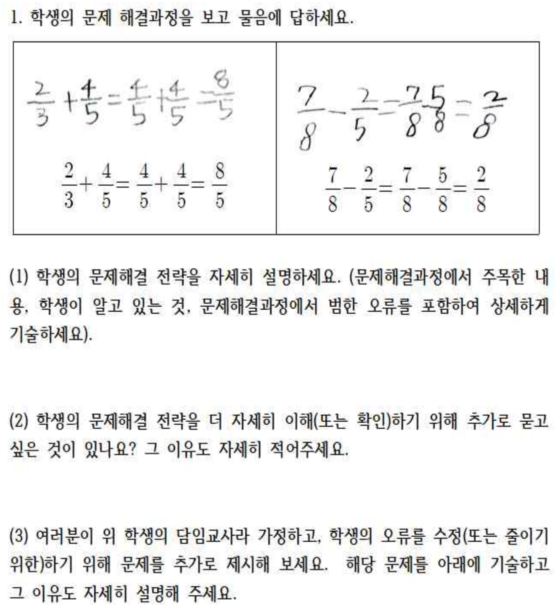
Error type	Example
1	
2	
3	

오류 유형 2는 약분 오류로서 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 과정에서 분자와 분자, 분모와 분모끼리 약분하는 오류이다. $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$을 계산하는 과정에서 분모인 8과 2를 2로 약분하여 $\frac{3}{8}$을 $\frac{3}{4}$로 $\frac{1}{2}$은 $\frac{1}{1}$로 변환하는 경우를 예로 들 수 있다. 이는 계산과정의 편리성을 추구하거나 약분의 의미를 이해하지 못하고 유리수 비동치 개념의 이해부족에서 발생할 수 있다.

오류 유형 3은 연산자 오류로서 분수의 덧셈과 뺄셈을 해야 하는 문제 상황에서 분수의 나눗셈 연산을 적용하여 계산하는 오류이다. $\frac{11}{12}+\frac{5}{6}$를 계산하는 과정에서, $\frac{5}{6}$을 $\frac{6}{5}$으로 변환한 후 분수의 곱셈으로 문제를 해결한 경우를 예로 들 수 있다. 읽기 능력의 부족으로 연산자를 잘못 가져오거나 나눗셈 연산을 익히고 난 뒤 이에 대한 스킴이 강하게 작용하여 덧셈과 뺄셈을 나눗셈으로 계산하는 경우 발생할 수 있다.

본 연구에서는 선별한 오류 유형을 바탕으로 오류가 포함된 문제해결전략에 대한 교사들의 노티싱 과정을 가정하였다. 예컨대, 교사가 학생의 문제해결과정을 살펴보는 상황을 상상해보자. 먼저 교사는 학생의 문제해결과정을 살펴보고 정답인지 오답인지를 판단한다. 만약 교사가 정답이라고 판단한다면 다음 교수 활동을 이어나간다. 그러나 학생의 문제해결과정이 오답이라면 어떠한 오류와 수학적 사고가 문제해결전략에 나타나는지 식별하고 해석한다. 이 후 식별하고 해석한 내용을 바탕으로 교사는 오류를 교정하기 위한 추가적인 발문과 문제를 제시한다. 이 때, 교사가 학생의 오류를 교정하기 위한 교수적 움직임은 설명, 구체물과 표상 활용, 문제 제기 등으로 다양할 수 있다(Jacobs et al., 2010). 본 연구에서는 여러 교수 움직임 중 학생의 수학적 사고에 대한 정보를 추가적으로 얻기 위한 발문과 학생의 오류를 교정하기 위한 문제 제기에 초점을 두므로(Sun & Pang, 2020), 교사의 반응하기 역량도 이 두 가지 교수적 움직임으로 한정된다.

이러한 가정에 따라, 교사의 노티싱 역량을 측정하기 위한 세 개의 문항을 구성하고 검사지를 개발하였다. 세 개의 문항은 학생의 오류와 수학적 사고를 식별하고 이를 해석하며, 그에 대한 발문과 문제를 제시하는 과정을 따른다. 먼저 문항(1)은 교사의 식별하기 및 해석하기 역량을 측정하며, 오류가 포함된 학생의 문제해결전략에서 오류와 수학적 사고를 식별할 수 있는지 그리고 문제해결전략에 나타난 학생들의 수학적 사고를 해석할 수 있는지 살펴보았다. 문항(2)와 문항(3)에서는 문항(1)에서 식별하고 해석한 학생의 오류와 수학적 사고에 대하여 교사가 어떠한 발문과 문제를 학생에게 제공하는지 살펴보았다. 검사에 사용된 문항들은 Sun & Pang(2020)의 검사 문항을 참고하였으며, 세 개의 질문 문항은 세 개의 오류 유형에 대하여 동일하게 적용되었다. 따라서 참여자 39명이 응답한 문항은 총 351개(문항(1): 117개, 문항(2): 117개, 문항(3): 117개)이며, 구체적인 검사지 내용에 대한 예시는 [Fig. 1]과 같다.


1. 학생의 문제 해결과정을 보고 물음에 답하세요.

$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$	$\frac{7}{8}-\frac{2}{5}=\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=\frac{2}{8}$

(1) 학생의 문제해결 전략을 자세히 설명하세요. (문제해결과정에서 주목한 내용, 학생이 알고 있는 것, 문제해결과정에서 범한 오류를 포함하여 상세하게 기술하세요).

(2) 학생의 문제해결 전략을 더 자세히 이해(또는 확인)하기 위해 추가로 묻고 싶은 것이 있나요? 그 이유도 자세히 적어주세요.

(3) 여러분이 위 학생의 담임교사라 가정하고, 학생의 오류를 수정(또는 줄이기 위한)하기 위해 문제를 추가로 제시해 보세요. 해당 문제를 아래에 기술하고 그 이유도 자세히 설명해 주세요.

[Fig. 1] An example of the instrument for measuring teacher's noticing competency to students' problem solving strategies

3. 분석틀

Jacobs et al.(2010)은 학생의 수학적 사고에 대한 교사의 노티싱 역량을 파악하기 위해 교수・학습에 대한 일반적인 언급에서 학생의 이해에 대한 구체적인 언급으로의 전환, 학생의 수학적 이해를 일반화하는 것에서 구체적이고 신중하게 해석하는 것으로의 전환, 일반적인 문제 제기에서 숫자 선택을 고려한 구체적인 문제 제기로의 전환을 등을 중요 지표로 제시하였다. 또한 학생의 문제 해결전략을 담은 텍스트 자료를 통해 교사의 노티싱 역량을 분석한 Land et al.(2019)와 Sun & Pang(2020)은 교사가 학생의 오개념과 아는 것을 식별할 수 있는지, 식별한 내용에 대한 이해와 추론을 토대로 반응할 수 있는지, 적절한 근거를 바탕으로 학생의 수학적 신장을 도모하는 질문과 문제를 제시할 수 있는지를 등을 평가의 척도로 사용하였다. 이 지표들의 핵심 키워드는 학생의 수학적 사고(이해)와 구체적인 숫자의 제시와 같은 구체성으로 볼 수 있으며, 교사의 노티싱이 얼마나 학생의 수학적 사고를 증거로서 반영하는지 그리고 그 설명과 추론이 얼마나 구체적인지가 노티싱 역량을 판단하는 중요 요소임을 알 수 있다. 본 연구에서는 이러한 지표와 분석틀을 토대로 학생의 문제해결전략에서 나타나는 학생의 수학적 사고를 어떻게 식별하고 해석하는지, 그리고 발문과 문제를 제시할 때 학생의 산출물에서 식별하고 해석한 내용을 어떻게 반영하는지를 기준으로 분석틀을 개발하였다. 분석틀의 구체적인 내용은 [Table 2]와 같다.

먼저 식별하기는 교사가 학생의 문제해결전략에서 드러난 오류와 수학적 이해를 식별할 수 있는지 여부를 분석하였다. 문제해결 과정에서 나타난 오류와 수학적 이해에 대하여 식별하지 못한 경우 0점, 오류만 식별한 경우 1점, 오류와 문제해결을 위한 수학적 사고과정을 모두 식별한 경우 2점으로 코딩하였다. 연구에서 활용한 오류 유형들은 모두 통분 과정에서 이루어지는 오류들이다. 따라서 구체적인 오류 유형을 기술하지 않은 채 단순히 통분 오류라고만 기술할 경우, 학생이 범한 오류 유형을 피상적으로 식별한 답변으로 보고 1점으로 코딩하였다.

해석하기는 학생의 문제해결전략을 바탕으로 이루어지

[Table 2] Rubric to analyze teacher's noticing competency to student's problem solving strategies

Point	Attending	Interpreting	Responding	
			Giving questions	Posing problems
2	Attending student's error and mathematical understanding	Interpreting student's problem-solving strategies in detail	Giving questions that are specifically related to the student's problem-solving strategies	Posing problems that are specifically related to the student's problem-solving strategies
1	Attending only student's error	Superficially interpreting student's problem-solving strategies	Giving questions that are superficially related to the student's problem-solving strategies	Posing problems that are superficially related to the student's problem-solving strategies
0	Not attending student's problem-solving strategies	Failure to correctly interpreting student's problem-solving strategies	Giving questions that are irrelevant to the student's problem-solving strategies	Posing problems that are irrelevant to the student's problem-solving strategies

는 교사의 추론과정이 얼마나 정확하고 구체적인지를 분석하였다. 학생의 문제해결전략을 제대로 해석하지 못하는 경우 0점, 피상적인 수준에서 해석하는 경우 1점, 구체적으로 추론한 경우 2점으로 코딩하였다.

마지막으로 반응하기는 학생의 수학적 사고에 대한 정보를 추가적으로 요구하는 발문 제시와 학생의 오류를 교정하기 위한 문제 제기로 나뉘며, 학생의 문제해결전략과 관련되어 반응하는지에 초점을 두었다(Jacobs et al., 2010). 따라서 발문과 문제가 학생의 문제해결전략과 관련되지 않는 경우 0점, 피상적으로 관련된 경우 1점, 구체적으로 관련된 경우 2점으로 코딩하였다. 이 분석틀에서 피상적이라는 수준을 판단하는 기준은 구체성과 학생의 수학적 사고가 명확한 증거로 반영된 정도이며, 그 증거가 부족하거나 구체적이지 않을 경우 피상적이라고 판단하였다.

[Table 3] Responding types for giving questions and posing problems

Giving questions	Posing problems	
	Teacher's intention	Problem type
Checking the hypothesized error	Posing problems related to student's prior knowledge	Simple computation
Checking the student's prior knowledge	Posing problems for eliciting cognitive conflict	Representation problem
Giving the student the opportunity to rethink their problem content	Posing similar problems	Simple written language
	Estimation	Real-world context
		Concrete materials

반응하기 유형을 분류하기 위해 30%의 문항을 무작위로 추출하고 두 명의 연구자가 교사들의 응답을 귀납적으로 살펴본 후 응답의 패턴을 사전 분석하였다. 그 결과, 반응하기는 해당 발문과 문제를 왜 제시했는지에 대한 '교사의 의도'와 문제 제기에서 나타난 '문제 유형'으로 구분할 수 있었다. 구체적으로 살펴보면, 발문 제시는 교사의 의도에 따라 '가정한 학생의 오류 확인하기', '학생의 선지식 확인하기', '학생에게 문제 내용을 확인할 기회 제공하기'의 세 개의 범주로 나눌 수 있었으며, 문제 제기는 '학생의 선지식과 관련된 문제', '인지적 갈등 유발 문제', '유사 문제', '어림하기'로 구분할 수 있었다. 또한, 문제 제기에서 나타난 문제 유형은 문제 자체의 형식과 관련되며, '단순 산술식', '표상 문제', '단순 문장제', '실생활 맥락 문제', '구체물'로 구분할 수 있었다. 구체적인 반응하기 유형 분류틀은 [Table 3]과 같다.

4. 코딩 및 자료 분석

수집한 자료는 [Table 2]와 [Table 3]의 분석틀에 따라 식별하기, 해석하기, 반응하기의 세 요소로 나누어 코딩하였다. 오류 유형 1에 대한 코딩 과정의 구체적인 예시는 [Table 4]와 같다.

문항 1은 식별하기와 해석하기의 예시이다. 이 참여자는 학생의 문제해결전략에서 나타난 오류의 유형이 분모, 분자의 차가 같은 분수는 같은 크기의 분수라고 생각하는 오류($\frac{2}{3}=\frac{4}{5}$, $\frac{2}{5}=\frac{5}{8}$)와 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 위해 분수의 분모를 같게 만들어 줘야 한다고 인식하는 학생의 수학적 이해를 식별하고 있다.

또한 해석하기와 관련하여, 학생이 자연수의 덧셈과 뺄셈처럼 분수를 통분하므로 통분 개념을 제대로 인식하지 못하고 있으며 학생의 문제해결과정을 살펴보고 동분모 분수의 계산을 할 수 있다는 것을 추론하고 있다. 따라서 이 참여자는 학생의 오류와 수학적 사고를 식별하고 있으며, 학생의 수학적 사고를 명확한 증거로 활용하여 학생의 오류와 부족한 수학적 개념에 대하여 구체적이고 논리적으로 추론하고 있다.

문항 2는 발문 제시 반응하기의 예시이다. 이 참여자는 학생의 문제해결전략 과정에 대하여 묻고 있으며, 통분 개념을 제대로 이해하지 못하고 있음을 발문에 대한 증거로 제시하였다. 그러나 '$\frac{2}{3}$를 $\frac{4}{5}$를 같다고 생각하니?'라는 발문이 구체적으로 어떻게 학생의 통분의 개념을 확인할 수 있는 발문인지는 명확하지 않다. 따라서 이 참여자는 학생의 문제해결전략을 해석한 결과를 바탕으로 발문을 제시하고 있으나, 그 근거는 구체적이지 않고 피상적이다. 또한 교사가 이 발문을 제시한 의도는 식별하기와 해석하기에서 추론한 학생의 오류가 맞는지 확인하기 위한 반응으로써 '가정한 학생의 오류 확인하기'로 분류될 수 있다.

문항 3은 문제 제기의 예시이다. 이 참여자는 유사한

[Table 4] Examples of coding teachers' responses

<table>
<tr><th rowspan="2">A teacher responses for error type 1($\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$)</th><th rowspan="2">Attending</th><th rowspan="2">Interpreting</th><th colspan="2">Responding</th></tr>
<tr><th>Giving questions</th><th>Posing problems</th></tr>
<tr><td>[Response to item 1-attending & interpreting]
위 학생은 $\frac{2}{3}=\frac{4}{5}$로, $\frac{2}{5}=\frac{5}{8}$로 생각하는 오류가 있다. 그 이유는 분모에서 분자를 뺐을 때 동일하기 때문이다. 학생이 알고 있는 것은 분모가 다를 때 분모를 같게 맞추어줘야한다는 것과 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다는 것이다. 또한, 분수를 통분할 때 자연수 체계가 익숙하므로 자연수의 덧셈과 뺄셈처럼 통분하므로 통분의 개념을 제대로 이해 못하고 있다는 것을 알 수 있다.

[Response to item 2-giving questions]
$\frac{2}{3}$를 왜 $\frac{4}{5}$라고 생각하니? $\frac{2}{5}$와 $\frac{5}{8}$는 왜 같다고 생각하니? 라고 묻고 싶다. $\frac{2}{3}$을 $\frac{4}{5}$로 나타낸 것은 통분의 개념을 제대로 이해하지 못한 것인데 이 발문을 통해 그 이유를 확인할 수 있다.

[Response to item3-posing problems]
학생이 오류를 교정할 수 있도록 $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=$ 같이 유사 문제를 추가로 제시한다.</td><td>2</td><td>2</td><td>1 (Checking the hypothesized error)</td><td>0 (Posing similar problems) (Simple computation)</td></tr>
</table>

문제를 학생들에게 제기하면 학생이 자신의 오류를 스스로 교정할 수 있다고 생각하고 있다. 그러나 이 문제를 통해 오류가 어떤 방식으로 교정될 수 있는지에 대한 증거는 없으며, 학생의 수학적 사고와 아무런 관련이 없다. 따라서 학생의 문제해결전략과 관련 없는 문제 제기 반응하기를 보였다고 판단할 수 있다. 또한 이 참여자는 학생의 오류를 교정하기 위하여 기존에 제시된 문제와 비슷한 '유사 문제'를 제시하고 있으며, 문제의 유형은 기호와 상징으로만 표현된 '단순 산술식'이다.

코딩 신뢰도는 두 명의 연구자 간 코딩 신뢰도를 산출하는 카파 상관계수(Cohen's kappa coefficient)를 활용하였다. 1차 코딩에서 두 명의 연구자는 전체 분석 사례 351개의 30%를 각각 코딩하고, 코딩이 일치하지 않는 경우 정기적인 화상회의를 통해 기준을 재수정하였다. 재수정한 기준을 바탕으로 1차 코딩 결과를 재코딩하였으며, 그 결과 연구자 간 내적 일치도는 모든 요소에서 0.9이상의 일치율을 보였다(Viera & Garrett, 2005). 이 후 나머지 70%의 검사지를 두 명의 연구자가 나누어 각자 코딩하였다.

교사들이 학생의 문제해결전략을 어떻게 노티싱하는지 살펴보기 위해, 먼저 분석틀에 따라 코딩한 결과를 바탕으로 전반적인 노티싱 역량을 분석하였다. 이 후 오류 유형에 따라 교사의 노티싱 역량이 차이나는지 살펴보았으며, 반응하기에서 교사들이 제시한 발문과 문제를 유형별로 범주화하고 어떠한 발문과 문제를 제시하는지 그 경향을 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 교사들의 전반적인 노티싱 역량 분석 결과

분석틀에 따른 참여자들의 오류 유형별 노티싱 빈도는 [Table 5]과 같으며, 전반적인 노티싱 빈도를 분석한 결과는 [Table 6]과 같다. 먼저 오류 유형별 노티싱 빈도를 살펴보면, 오류 유형1의 식별하기는 1.77점, 해석하기는 1.46점, 반응하기는 발문 제시가 1.1점, 문제 제기가 1.05점으로서 다른 오류 유형에 비해 점수가 높게 나타났다. 그러나 그 차는 크지 않으며, 오류 유형이 달라지더라도 전반적인 경향은 유사하게 나타났다. 전반적인 노티싱 빈도에서 식별하기는 1.57점, 해석하기는 1.23점, 반응하기는 발문 제시가 1점, 문제 제기가 0.95점으로 나타났다. 이처럼 참여자들의 노티싱은 오류 유형이 달라지더라도 식별하기에서 반응하기로 갈수록 전반적으로 점수가 낮아지

[Table 5] Frequency of teachers' noticing according to error types(n=39)

Error type	Attending				Interpreting				Responding							
									Giving questions				Posing problems			
	Point			M(SD)	Point			M(SD)	Point			M(SD)	Point			M(SD)
	0	1	2		0	1	2		0	1	2		0	1	2	
1	0	9	30	1.77(0.50)	1	19	19	1.46(0.52)	5	25	9	1.10(0.63)	3	31	5	1.05(0.61)
2	0	18	21	1.54(0.50)	2	29	8	1.15(0.52)	8	23	8	1.00(0.63)	8	26	5	0.92(0.61)
3	0	20	19	1.49(0.49)	1	31	7	1.15(0.52)	9	24	6	0.92(0.62)	10	20	9	0.97(0.61)

[Table 6] Frequency of teachers' noticing across three elements(n=117)

Point	Attending	Interpreting	Responding	
			Giving questions	Posing problems
2	67(57.3%)	34(29%)	23(19.7%)	19(16.2%)
1	50(42.7%)	76(65%)	72(61.5%)	73(62.4%)
0	0(0%)	7(6%)	22(18.8%)	25(21.4%)
M(SD)	1.57(0.5)	1.23(0.55)	1(0.63)	0.95(0.6)

는 경향을 보였다. 이는 교사가 학생의 문제해결전략에서 나타난 오류와 수학적 이해를 식별하는 역량에 비해, 이를 추론하는 해석하기 역량과 그 결과를 바탕으로 발문이나 문제를 제시하는 반응하기 역량은 상대적으로 부족함을 시사한다.

1) 식별하기와 해석하기

식별하기에서 학생의 오류와 수학적 이해를 모두 식별한 문항은 57.3%이며 오류만 식별한 문항은 42.7%로 나타났다. 참여자들이 오류와 수학적 이해를 둘 다 식별하지 못한 문항은 없었다. 이처럼 참여자들은 모든 문항에서 오류를 식별할 수 있었으나 42.7%의 문항에 대해서는 학생의 수학적 이해를 식별하지 못하고 있었다. 해석하기에서 학생의 문제해결전략을 구체적으로 해석한 문항은 29%로 나타났으며 문제해결전략을 피상적으로 해석한 문항은 65%, 해석하지 못한 문항은 6%로 나타났다.

분석틀에 따른 식별하기와 해석하기의 구체적인 예시는 [Table 7]과 같다. T2는 오류 유형1에 대하여 한 분모의 수를 다른 분모의 수와 같게 맞추는 학생의 오류를

[Table 7] Examples of attending and interpreting

Point	Examples
2	T2: 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서, 한 분수를 다른 분수의 분모와 같도록 맞추었다. 우선, 분모 3과 5을 5로 통분하고 8과 5은 8로 통분한 것으로 보아, 이 학생은 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 첫 과정은 '분모'를 통분하는 것이라는 것은 알고 있다. 또한 통분한 뒤 분자 4와 4를 더하고, 7과 5를 뺀 것으로 보아 분모는 그대로 두고, 분자끼리 빼야 한다는 동분모 분수의 계산 원리도 알고 있다. 하지만, 분모를 단순히 같게 할 뿐, 3와 5을 5로 통분한 것으로 보아 최소공배수를 이용한 통분 과정은 제대로 알지 못하며, 등호의 개념 또한 이해하지 못하고 있다. 이로 인해, $\frac{2}{3}$는 $\frac{4}{5}$로, $\frac{2}{5}$는 $\frac{5}{8}$라 생각하는 오류가 나타났다. 이는 분수의 덧셈과 뺄셈을 위해 분모'만' 같게 고치면 맞는 계산 방법이라고 생각하는 것이다. 따라서 이는 동치분수 개념과 등호의 개념이 제대로 잡히지 않은 것이라 판단된다. [Error type 1]
1	T29: 이 학생은 통분과 약분의 개념을 헷갈려서 통분을 해야 하는 상황에서 약분을 하였다. 또한 이 학생은 분모와 분자를 같이 약분 하는 것이 아니라 분모끼리 약분을 하거나, 분자끼리 약분을 하는 등 맘대로 약분(이라고 본인이 생각하지만 약분은 아닌)을 하는 오류를 범하였다. [Error type 2]
0	T9: 이 학생은 자신이 편한대로 계산하려는 경향이 있다. 분수의 덧셈과 뺄셈을 나눗셈으로 바꾸어 분자의 덧셈과 뺄셈을 편하게 하는 것이다. 따라서 계산을 편리하게 위해 꼼수를 쓰다 틀린 결과를 맞이하게 된 것이다. [Error type 3]

식별하였으며, 식별한 내용을 바탕으로 학생이 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 통분이 필요하다는 점과 동분모 분수의 계산 원리를 알고 있다는 것을 추론하였다. 이는 학생의 문제해결전략에서 드러난 명확한 증거를 기반으

로 한다. 따라서 T2의 식별하기와 해석하기는 문제해결전략에서 나타나는 '학생이 무엇을 이해하고 있는지 혹은 이해하고 있지 않은지'에 대한 수학적 사고를 바탕으로 하고 있으며, 학생의 오류와 부족한 수학적 개념에 대한 추론 또한 구체적이고 논리적이다.

T29는 오류 유형2에 대하여 학생의 오류를 식별하였다. 그러나 이러한 판단이 학생의 어떤 문제해결전략에서 비롯한 것인지에 대한 구체성은 참여자 T2에 비해 부족하며 '맘대로 약분'이라는 다소 모호한 표현을 사용하고 있다. 또한 학생이 통분과 약분의 개념을 헷갈려 한다는 것은 추론하였으나 그에 대한 근거가 없고 학생이 어떤 수학적 사고(e.g., 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있는지 여부)를 지니고 있는지 추론하지 못하였으므로 피상적인 해석하기라 볼 수 있다.

T9는 오류 유형 3에 대하여 학생이 분모를 통분했다는 일부 전략을 추론하였으며 학생이 계산을 편리하게 만들기 위하여 꼼수를 사용했다고 주장한다. 그러나 이 참여자가 추론한 학생의 수학적 사고는 주장을 뒷받침하는 증거가 되지 않으므로 참여자의 추론이 학생의 수학적 사고에서 비롯했다고 보기는 어렵다. 따라서 이 참여자는 학생의 문제해결전략을 제대로 해석하지 못하고 있다고 볼 수 있다.

2) 반응하기

[Table 6]에서 나타나듯이, 먼저 발문 제시는 학생의 문제해결전략과 피상적으로 관련된 발문이 61.5%로 가장 많은 비중을 차지했으며 이어서 구체적으로 관련된 발문이 19.7%, 문제해결전략과 관련이 없는 발문이 18.8%로 나타났다. 문제 제기의 경우 학생의 문제해결전략과 피상적으로 관련된 문제가 62.4%로 가장 높은 비중을 차지했으며, 문제해결전략과 관련이 없는 문제가 21.4%, 구체적으로 관련된 문제가 16.2%로 나타났다. 이처럼 참여자들은 추론한 정보를 바탕으로 학생에게 발문이나 문제를 제공할 때 학생의 수학적 사고와 구체적으로 관련된 발문을 제시하기보다는 피상적인 발문과 문제를 주로 제시하는 경향을 보였다. 발문 제시에 대한 구체적인 예시는 [Table 8]과 같다.

T21은 $\frac{2}{3}$가 계산과정에서 왜 $\frac{4}{5}$로 바뀌었는지 그리고 $\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{5}$의 의미가 무엇인지에 대하여 학생에게 발문한다고 응답하였다. 이에 대한 증거로서 학생의 문제해결과정에서 식별하고 해석했던 학생의 문제해결전략과 이를 통해 추론한 학생의 부족한 선지식(동치분수의 개념)을 들고 있다. 따라서 이 참여자의 발문 제시는 학생의 문제해결전략을 명시적으로 고려하며, 수학적 이해를 증거로 활용하여 학생의 부족한 선지식을 진단하고 있다고 볼 수 있다.

[Table 8] Examples of giving questions in responding

Point	Examples
2	T21: 먼저 $\frac{2}{3}$가 어떻게 $\frac{4}{5}$가 되었는지 물어보고, $\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{5}$가 뜻하는 것이 무엇인지 묻는다. 학생이 문제를 푼 것을 보면, $\frac{2}{3}$를 $\frac{4}{5}$로 바꾸어 표현하고 있으며, 이를 등호로 표현하였다. 따라서 이 학생은 $\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{5}$을 같은 크기의 동치분수라고 생각하는 것으로 보인다. 따라서 $\frac{2}{3}$가 $\frac{4}{5}$로 어떻게 바뀌게 되었는지 그리고 $\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{5}$가 뜻하는 것이 무엇인지 물어보면 학생이 동치분수의 개념을 아는지 그리고 동치분수라고 생각한 학생의 오류가 맞는지 판단할 수 있을 것이라 생각한다. [Error type 1]
1	T28: $\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{5}$는 같은 수인가요? 라고 묻고 싶다. $\frac{2}{3}$를 $\frac{4}{5}$로 나타낸 것으로 보아 분수의 개념을 제대로 이해하지 못한 것 같아서이다. [Error type 1]
0	T36: 분수를 통분할 때 같은 수를 더하는게 맞나요? 라고 묻고 싶다. 왜냐하면 분수의 덧셈에서 통분이 중요하기 때문이다. [Error type 1]

T28은 '$\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{5}$는 같은 수 인가요?'와 같이 참여자 T21과 유사한 발문을 제시하고 있으며, 이에 대한 증거로서 학생이 분수의 개념을 이해 못했기 때문이라고 응

답하였다. 그러나 이 참여자가 내세운 증거에서 $\frac{2}{3}$이 $\frac{4}{5}$로 계산된 것이 왜 분수 개념이 부족한 것인지 그리고 $\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{5}$가 같은 수인지 묻는 발문이 어떻게 학생의 분수 개념을 확인할 수 있는 것인지는 모호하다. 따라서 이 참여자는 발문 제시에 학생의 문제해결전략을 피상적으로 반영하고 있으며 그 증거는 제한적이다.

T36은 '분수를 더할 때 같은 수를 더하는게 맞나요?' 라는 발문을 제시하였다. 또한 그에 대한 증거로 통분이 중요하다고 응답하고 있으며, 이는 학생의 문제해결전략과 관련되기 보다는 일반적인 발문이며 발문에 대한 구체적인 증거는 제시되지 않았다.

[Table 9] Examples of posing problems in responding

Point	Example
2	T37: $\frac{4}{6} \div \frac{1}{2} =$, $\frac{4}{6} + \frac{1}{2} =$  분수의 나눗셈은 분수의 사칙연산에서 가장 마지막으로 배우게 되는 내용이다. 따라서 앞선 개념을 기억하지 못하고, 가장 마지막으로 배운 개념이 앞서 배운 원리에 잘못 적용된 경우이다. 따라서 $\frac{4}{6} \div \frac{1}{2} =$, $\frac{4}{6} + \frac{1}{2} =$ 라는 문제를 주고 이분모 분수의 덧셈과 나눗셈을 구분하여 시각적으로 표현하도록 한다. 이를 통해 분수의 나눗셈과 덧셈, 뺄셈이 다른 연산이며 같은 방법으로 계산한다면 잘못된 결과가 나타난다는 것을 확인하도록 한다. 이러한 방법을 통해 학생이 오류를 깨닫게 되면, 여러 예시를 제시하여 분수의 덧셈과 뺄셈 그리고 나눗셈의 원리를 재지도하도록 한다. [Error type 3]
1	T32: $\frac{1}{100} + \frac{1}{2} =$ 위 학생이 푼 방법대로라면 $\frac{1}{100} + \frac{99}{100} = 1$ 이라고 계산할 텐데, 모눈종이를 이용해 오류를 스스로 찾아내어 교정할 수 있도록 한다. [Error type 1]
0	T15: 구체물을 활용하여 문제를 해결할 수 있도록 새로운 문제를 추가 제시한다. 구체물을 활용하면 학생이 스스로 오류를 확인하고 교정할 수 있다. [Error type 2]

문제 제기에 관한 구체적인 예시는 [Table 9]과 같다. T37은 오류 유형 3에 관하여 학생에게 분수를 시각적으로 표현하는 문제를 제기했으며, 이에 대한 증거로서 분수의 나눗셈에 대한 원리가 분수의 덧셈과 뺄셈에 영향을 미쳤음을 학생의 문제해결전략을 통해 지적하고 있다. 또한, 학생의 오류를 해결하기 위해 분수의 나눗셈과 분수의 덧셈 문제를 함께 제시하여 시각적으로 오류를 깨닫게 하고 향후 여러 예시 문제를 제공하여 재지도 한다는 교정 전략을 세웠다. 이 참여자의 문제 제기는 학생의 기존 문제해결전략을 고려하여 향후 전략과 그 다음 교수 움직임까지 예상하고 있으므로 학생의 문제해결전략과 구체적으로 관련된 반응하기라 볼 수 있다.

T32는 오류 유형 1에 관하여 '$\frac{1}{100} + \frac{1}{2}$' 라는 문제를 제기하였으며, 학생의 예상 전략을 고려하고 모눈종이를 활용하여 오류를 찾아낼 수 있다고 주장한다. 학생의 기존 문제해결전략이 문제 제기와 관련되어 있으나, 어떻게 오류를 스스로 찾아내어 교정할 수 있는지에 대한 구체성은 부족하며 모눈종이를 활용하는 방법 또한 구체적이지 않고 모호하다.

T15는 오류 유형 2에 관하여 구체물을 활용한 문제를 제기하고 그에 대한 근거로 구체물의 활용을 통해 학생이 스스로 오류를 확인하고 교정할 수 있다고 주장한다. 그러나 이러한 추론에서 학생의 수학적 사고와 문제해결전략은 반영되어 있지 않으며 제시된 문제는 구체적인 수식이 나타나지 않고 일반적이다.

한 가지 흥미로운 점은 일부 참여자들이 오류 유형이 달라지더라도 유사한 유형의 문제를 제기하고 있다는 점이다. 이는 교사들이 학생의 전략이나 문제의 유형이 변화함에 따라 그에 맞는 문제 제기에 어려움이 있다는 점을 시사한다. 예컨대, [Table 10]은 T4의 세 가지 오류 유형에 대한 문제 제기 예시이다. T4는 학생의 기존 사고로 해결하는데 어려움이 있는 문제(결과가 음수 또는 0인 문제 상황)를 제기하면, 학생이 오류를 스스로 인식할 수 있을 것이라 생각하고 있었다. 또한 학생의 문제해결전략에서 나타난 학생의 수학적 사고와 오류 유형이 모두 다른데도 불구하고, 하나의 방법과 문제 유형(단순 산술식)을 모든 오류 유형에 적용하고 있었다. 물론, 특정 문제나 학생의 인지적 갈등을 유발하는 방법이 학생이 오류를 스스로 인식하고 교정할 수 있는 방법이 될 수

있다. 그러나 분수의 덧셈과 뺄셈 오류에 활용할 수 있는 방법은 수직선, 표상, 분수표 등 다양하며, 여러 선행연구에서 오류의 유형을 구체화하여 차별화된 교정 방안을 적용할 것을 제안하고 있다(e.g., An & Choi, 2016; Kim & Kim, 2014). 따라서 교사는 학생의 문제해결전략에서 드러나는 오류와 수학적 사고를 추론하고 그에 대응할 수 있는 유연한 지식을 갖출 필요가 있음을 시사한다.

[Table 10] Examples of posing problems of T4

Error type	Example
1	$\frac{5}{8}-\frac{2}{4}$처럼 위의 학생의 문제해결과정으로 풀었을 때 빼는 수가 더 크다면 학생은 어떻게 해결할 것인지 물어보고 싶다. 자연수의 덧셈, 뺄셈 개념을 이해했다면 인지적 갈등이 일어나 자신의 문제해결방법이 잘못되었음을 알 수 있을 것 같다.
2	'$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=$' 이 문제를 학생들이 풀도록 주면, 학생이 분모끼리 약분하여 $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=$ 이라고 바꾸어 풀기 때문에 이상함을 느끼고 문제해결방법을 수정해야한다는 것을 알 수 있을 것이다.
3	'$\frac{4}{8}-\frac{4}{8}=$' 이 문제를 학생의 방법대로 계산하면 $\frac{4}{8}\times\frac{4}{8}=1$이 되므로 $\frac{4}{8}-\frac{4}{8}=0$이 되는 것이 직관적으로 알 수 있는 것과 비교하여, 스스로 오류가 있음을 인식할 수 있을 것이다.

2. 반응하기 유형

반응하기 유형을 분석하기 위해 반응하기 분류틀(c.f. [Table 3])을 적용한 결과, 사전 분석 결과와 다른 유형은 발견되지 않았다. 따라서 이 절에서는 분류틀을 기준으로 분류한 발문 제시 유형과 문제 제기 유형의 빈도와 예시를 살펴보도록 한다.

1) 발문 제시 유형

발문 제시 유형은 참여자가 해당 발문을 제시한 의도에 따라 범주화 하였다. 제대로 응답하지 못하거나 모호한 발문은 제외하였으며, 여러 개의 발문을 제시한 경우 중복 코딩하였다. 구체적인 발문 제시 유형은 [Table 11]과 같다.

발문 제시 유형은 크게 '가정한 학생의 오류 확인하기', '학생의 선지식 확인하기', '학생에게 문제 내용을 확인할 기회 제공하기'의 세 개의 범주로 나눌 수 있었다. 먼저 '가정한 학생의 오류 확인하기'는 참여자가 학생의 문제해결전략을 바탕으로 판단한 학생의 오류를 재확인하는 발문이다. 이러한 유형의 발문은 교사가 가정한 오류가 학생의 응답을 통해 드러나기를 의도하는 발문이며, 63.7%로 가장 많은 비중을 차지했다. '학생의 선지식 확인하기'는 학생의 문제해결전략을 보고 학생의 부족한 선지식을 확인하는 발문이다. 이 유형은 추론한 학생의 오류를 확신하고 그 오류가 발생한 근원을 파악하기 위한 발문으로써, 두 번째로 많은 비중인 33.1%를 차지했다. 마지막 유형은 '학생에게 문제 내용을 확인할 기회 제공하기'로서 학생의 문제해결전략에서 발생한 오류를 스스로 발견하

[Table 11] The types of giving questions in responding(n=124)

Type	Frequency(%)	Example
Checking the hypothesized error	79(63.7%)	T34: 분수의 나눗셈이 아니라 덧셈으로 계산해야 되지 않나요? 라고 묻고 싶다. 이를 통해 예상했던 분수의 나눗셈 선행학습으로 인한 개념 혼동이 맞는지 확인할 수 있다. [Error type 3]
Checking the student's prior knowledge	41(33.1%)	T38: $\frac{2}{3}$는 전체 몇 개 중에 몇 개를 의미하니? 학생이 분수의 개념을 제대로 알고 있는 확인할 수 있다. [Error type 1]
Giving the student the opportunity to rethink their problem content	4(3.2%)	T19: '$\frac{12}{11}+\frac{5}{6}$'를 소리 내서 읽어볼래? 학생이 분수의 덧셈과 뺄셈을 나눗셈처럼 계산하고 있으므로 이를 통해 학생이 문제와 자신의 계산과정을 다시 한번 되돌아 볼 수 있다. [Error type 3]

기를 기대하는 발문이다. 이러한 유형의 발문은 학생의 오류가 습관화된 것이 아니라 문제를 잘못 이해한 것으로 판단하는 경향이 있으며, 3.2%로 가장 적은 비중을 차지했다. 이처럼 발문 제시 유형은 교사의 발문이 주로 자신이 추론하여 판단한 오류가 맞는지 확인하거나 혹은 학습자의 개념적 지식의 이해 정도를 확인하는 발문에 집중되어 있었다.

'가정한 학생의 오류 확인하기'에서 참여자들은 자신이 생각한 오류가 맞는지 확인하기 위해 단순히 오류 그 자체의 현상에 초점을 맞추어 직접적인 발문을 제시하는 경향이 있었다. 예컨대, 다음은 T7, T16 교사가 통분 오류(오류 유형1)와 약분 오류(오류 유형2)를 확인하기 위한 발문 제시의 예이다.

> T7: $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}$이면 분모에 3+2=5라 계산하고 분자에 2+2=4라고 계산했는게 맞나요? 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈에서 분자와 분모에 같은 수를 더하여 계산했는게 맞는지 확인할 수 있다. [Error type 1에 대한 반응하기]
>
> T16: $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$은 덧셈인데 왜 분모끼리 약분해서 더했나요? 분모 8과 2를 통분하면 8이 되어야 되는게 맞지 않나요? 이러한 발문을 통해 왜 통분하지 않고 약분했는지 알 수 있다. [Error type 2에 대한 반응하기]

T7, T16 교사는 학생의 문제해결전략에서 나타난 학생의 오류를 식별하고 각각 통분 오류와 약분 오류라고 판단했다. 그리고 이 가정을 확인하기 위해 학생의 문제해결과정이 '틀렸다'라는 전제를 바탕으로 오류 현상 그 자체를 묻고 있다. 이러한 발문은 학생의 문제해결전략이 '틀렸다'라는 사실에 집중하고 있으므로 학생의 응답은 '예', '아니오'와 같이 제한적일 수밖에 없다. 따라서 이러한 발문을 통해 학생의 수학적 사고를 촉진하거나 학생의 지식을 이끌어내기란 어려운 일이다.

'학생의 선지식 확인하기' 발문들은 주로 교사가 학습 결손이라 판단한 개념에 대한 기억 여부만을 확인하고 있었다. 예를 들어, 참여자 T10, T18의 경우 오류 유형1에 대해 학생의 오류가 분수의 개념 부족이라고 판단하였으며, 이를 확인하기 위하여 다음과 같은 발문을 제시하고 있다.

> T10: $\frac{2}{3}$는 전체 몇 개 중에 몇 개를 의미하니? 분수의 개념이 부족하므로 분수의 개념을 알고 있는지 확인할 수 있다. [Error type 1에 대한 반응하기]
>
> T18: $\frac{2}{3}$는 분수에서 뭐라고 읽지? 분수 개념 자체를 이해하지 못하므로 분수의 개념을 알고 있는지 확인해봐야 한다. [Error type 1에 대한 반응하기]

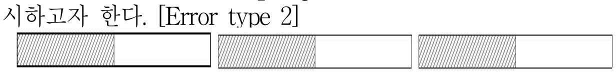
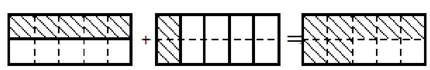
T10, T18은 학생이 분수의 개념을 알고 있는지 확인하기 위해 $\frac{2}{3}$가 전체의 얼마를 의미하는지와 분수를 읽는 방법을 묻고 있다. 그러나 이러한 유형의 발문은 분수 개념과 학생의 문제해결전략과의 연결성이 부족할 뿐만 아니라 학습한 분수 개념의 여러 부속 개념 중 일부일 뿐이다. 이는 일부 교사들은 학생의 선지식을 확인하기 위해 학습한 개념이 회상가능한지 여부만을 확인하거나 확인하고 싶은 핵심 개념을 선정하여 발문하는데 어려움이 있음을 의미한다.

2) 문제 제기 유형

문제 제기는 두 가지 기준을 바탕으로 유형을 범주화하였다. 하나는 교사의 의도(학생의 오류를 교정하기 위해 어떤 문제를 제시하면 되는지)이며, 다른 하나는 제시한 문제 유형(단순 산술식, 단순 문장제, 표상 문제, 실생활 맥락 문제, 구체물)이다. 제대로 응답하지 못하거나 모호한 문제는 제외하였으며, 여러 개의 문제를 제시한 경우 중복 코딩하였다. 이를 정리한 내용은 [Table 12]와 같다.

교사의 의도는 '이러한 문제를 제시하면 학생의 오류가 교정될 수 있다'는 교사의 믿음을 전제로 하며, '학생의 선지식과 관련된 문제', '인지적 갈등 유발 문제', '유사 문제', '어림하기'로 구분할 수 있었다. 이 중 '학생의 선지식과 관련된 문제'가 53.5%로 가장 많은 비중을 차지했으며, 이어서 '인지적 갈등 유발 문제'가 27.2%, '유사 문제'

[Table 12] The types of posing problems in responding(n=114)

<table>
<tr><th>Index</th><th>Type</th><th>Frequency (%)</th><th>Example</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Teachers' intention</td><td>Posing problems related to student's prior knowledge</td><td>61 (53.5%)</td><td>T25: $\frac{1}{2}$과 크기가 같은 분수를 써 보세요. 위 학생은 약분하는 오류를 보이므로 동치분수의 개념부터 먼저 학습하고 그 이후 통분 방법에 대해 재지도할 필요가 있다. [Error type 2]</td></tr>
<tr><td>Posing problems for eliciting cognitive conflict</td><td>31 (27.2%)</td><td>T17: $\frac{5}{8}-\frac{3}{5}=$ 위 학생의 문제해결과정으로 이 문제를 풀었을 때 $\frac{5}{8}-\frac{3}{5}=\frac{5}{8}-\frac{6}{8}$이 되므로 빼는 수가 더 커지게 된다. 이런 경우 학생은 어떻게 해결할 것인지 물어보고 싶다. 자연수의 덧셈, 뺄셈 개념을 이해한다면 인지적 갈등이 일어나 자신의 문제해결방법이 잘못되었음을 알 수 있다. [Error type 1]</td></tr>
<tr><td>Posing similar problem</td><td>20(17.5%)</td><td>T9: $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=$, $\frac{1}{6}\div\frac{1}{3}=$ 위 학생은 분수의 덧셈과 뺄셈을 나눗셈처럼 풀고 있으므로 여러 문제를 제공하면 학생이 문제를 오류를 스스로 깨달을 수 있다. 특히 단위 분수 문제의 경우 나눗셈으로 계산하면 직관적으로 결과와 다르다는 것을 이해하기 쉽다. [Error type 3]</td></tr>
<tr><td>Estimation</td><td>2(1.8%)</td><td>T32: $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=$에서 계산 결과는 1보다 클까요? 계산을 하기 전 답을 어림하고, 계산 결과와 비교하여 학생 스스로 자신의 답이 오답임을 확인하고 수정할 수 있다. [Error type 2]</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Problem types</td><td>Simple computation</td><td>57(50%)</td><td>T28: : $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=$ 이 학생은 분수의 기본적인 개념에 대한 이해가 부족하기 때문에 분모가 같아야 분수의 덧셈 또는 뺄셈이 가능함을 파악하기 위해서는 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 접근하는 것이 필요하다. [Error type 1]</td></tr>
<tr><td>Representation problem</td><td>42(36.8%)</td><td>T10: 위 학생은 분모끼리 약분하는 오류가 있으므로 먼저 $\frac{3}{8}$과 $\frac{3}{4}$이 크기가 다른 분수임을 알 수 있도록 해야한다. 따라서 먼저 $\frac{1}{2}$과 크기가 같은 동치분수($\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$)를 시각적으로 표현하는 문제를 제시하고자 한다. [Error type 2]
</td></tr>
<tr><td>Simple written language</td><td>9(7.9%)</td><td>T1: $\frac{3}{8}$과 크기가 같은 분수를 3개 쓰세요. 동치분수의 개념이 부족하므로 크기가 같은 분수를 만드는 문제를 제시하여 동치분수의 개념을 먼저 익히도록 한다. [Error type 2]</td></tr>
<tr><td>Real- world context</td><td>3(2.6%)</td><td>T35: 같은 크기의 피자 2판이 있습니다. 형은 한 판의 $\frac{2}{3}$를 먹었고, 동생은 $\frac{4}{5}$를 먹었을 때, 둘이 먹은 양을 비교해 보시오.
실생활 문제를 제시하면 학생들이 문제의 맥락을 통해 자연수의 연산과는 다른 분수 연산의 의미를 이해하고 오류를 수정할 수 있을 것이다. [Error type 1]</td></tr>
<tr><td>Concrete materials</td><td>3(2.6%)</td><td>T34: : 
통분이 필요한 간단한 분수의 덧셈과 뺄셈 문제를 제시하되, 먼저 동분모 분수의 개념을 이해하도록 수모형으로 위와 같은 문제를 제시하고 학생들이 시각적으로 오류를 교정할 수 있다. [Error type 2]</td></tr>
</table>

가 17.5%, '어림하기'가 1.8%로 나타났다. 이는 교사들이 주로 분수의 학습 경로에 대한 지식을 기반으로 학생들의 학습 결손을 추론하고 그 결손을 재지도하면 오류가 수정된다고 생각하는 경향이 있음을 시사한다.

문제 유형은 문제 자체의 형식과 관련되며, '단순 산술식', '표상 문제', '단순 문장제', '실생활 맥락 문제', '구체물'로 구분할 수 있었다. '단순 산술식'은 $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$과 같이 기호와 상징으로만 표현된 문제이며, 50%로 가장 많은 비중을 차지하고 있었다. 표상 문제는 모델, 그림, 수직선 등이 활용된 문제로서 36.8%의 비중을 차지했으며, 단순 문장제는 현실 맥락이 없이 문장을 통해 내용을 안내하는 문제로 7.9%의 비중을 차지했다. 실생활 맥락 문제는 문제 맥락에 현실 상황이 포함된 경우로서 2.6%의 비중을 차지했으며, 구체물은 수모형, 분수막대 등의 구체적 조작 도구를 활용한 문제로서 2.6%의 비중을 차지했다. 이처럼 교사들은 학생의 오류를 교정하기 위한 문제 제기에서 주로 단순 산술식 문제나 표상 문제로 학생의 오류를 교정하려는 경향이 있었으며, 실생활 맥락 문제나 구체물은 거의 활용하지 않았다.

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구는 오류를 포함한 학생의 문제해결전략에 대한 교사의 노티싱 역량을 분석하기 위해, 학생의 문제해결 산출물에 대한 교사의 노티싱 경향을 살펴보았다. 그동안의 교사 노티싱 연구가 수업 상황을 녹화한 비디오 분석법을 통해 이루어진 것과는 달리, 학생의 수학적 사고에 초점을 맞추어 학생의 산출물에 대한 교사의 노티싱 역량을 분석하고 반응하기 유형을 발문 제시와 문제 제기로 구분하여 심도 있게 분석했다는 점에서 본 연구의 의의가 있다. 분석 결과를 토대로 도출한 결론을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 학생의 문제해결전략에 나타난 교사의 노티싱 역량은 식별하기, 해석하기, 반응하기 순으로 점수가 낮아지는 경향을 보였다. 분석틀에 따른 전반적인 노티싱 경향을 분석한 결과에 따르면, 식별하기는 1.57점, 해석하기는 1.23점, 발문 제시 반응하기는 1점, 문제 제기 반응하기는 0.95점으로 나타났다. 구체적으로 살펴보면, 먼저 식별하기에서 교사들은 모든 문항에 나타난 학생의 오류를 식별하였으나, 총 문항 중 42.7%에 대해서는 학생의 수학적 사고를 제대로 식별하지 못했다. 또한, 해석하기, 발문 제시형 반응하기, 문제 제기형 반응하기에서 학생의 사고와 관련하여 구체적으로 관련된 문항은 각각 29%, 19.7%와 16.2%에 불과하였다. 물론, 단순히 평균 점수만을 바탕으로 교사들의 노티싱 요소별 역량을 비교하는 것은 한계가 있다. 그러나 연구 결과에서 드러나듯이, 학생의 문제해결전략에서 나타난 학생의 수학적 사고를 식별하지 못하는 참여자가 존재하며 이는 일부 교사들이 학생의 수학적 사고와 상황을 피상적으로 해석하고 반응하고 있음을 의미한다. 또한 교사들은 반응하기에 대한 노티싱을 가장 어려워했으며, 이는 Jacobs et al.(2010)의 연구 결과와 맥을 함께 한다.

둘째, 교사들은 학생의 사고를 토대로 유연하게 반응할 수 있는 역량이 부족한 경향을 보였다. 전반적인 노티싱 역량 분석 결과에 따르면, 교사들은 대부분의 문항에 대하여 피상적이거나 학생의 사고와 관련 없는 반응하기를 보였다. 또한 학생의 문제해결전략과 수학적 사고에 따라 개별화된 문제를 제기하기보다는 회상 가능한 하나의 전략이나 일반적인 지식을 모든 문제에 적용하려는 경향을 보였다. 학생의 문제해결전략은 복잡한 요인들로 구성되어 있으며 교사의 노티싱은 관찰한 상황의 맥락과 연결되는 '유연한' 지식의 적용을 요구한다(Seidel & Stürmer, 2014). 이러한 관점에서 보았을 때, 교사들은 학생의 문제해결전략과 연결할 수 있는 전문적인 지식이 부족하거나 이를 적절하고 유연하게 적용하는데 어려움이 있다고 볼 수 있다.

셋째, 발문 제시 반응하기는 교사의 의도에 따라 '가정한 학생의 오류 확인하기', '학생의 선지식 확인하기', '학생에게 문제해결전략을 되돌아볼 기회 제공하기'의 세 범주로 구분할 수 있었다. 이 중 '가정한 학생의 오류 확인하기(63.7%)'와 '학생의 선지식 확인하기(33.1%)'는 96.8%로 대부분의 비중을 차지했으며 '학생에게 문제해결전략 되돌아볼 기회 제공하기'는 3.2%에 불과하였다. 또한 '가정한 학생의 오류 확인하기' 발문은 학생의 문제해결전략이 '틀렸다' 라는 것을 전제로 오류 현상 자체에 초점을 맞추는 경향을 보였다. Cho & Paik(2013)은 오류의 체계성을 간과하고 제시하는 발문과 그러한 고려 없이 '정답

이 아니다'라는 사실에만 집중하여 제시하는 발문은 학생의 수학적 사고 촉진과 오류 개선에 차이를 보인다고 하였다. 이는 교사들이 학생의 오류 자체에만 초점을 두기보다는 오류와 관련된 주변 개념들과 학생의 수학적 사고와의 연결성을 고려한 발문이 제시 되어야함을 의미한다. 또한 '학생의 선지식 확인하기' 발문은 학생의 문제해결전략과의 연결성이 부족하였으며 핵심 개념을 묻기보다는 부속 개념 중 일부만을 묻는 경향을 보였다. 그러나 학생의 이해 정도를 묻는 발문은 그 개념의 핵심을 짚어줄 수 있어야 하며 단순히 기억 여부를 확인하는 정도로 그쳐서는 안된다(Cho & Paik, 2013). 결국, 교사들은 학생의 개념적·절차적 지식을 확인하기 위하여 핵심 개념을 파악하고 이를 발문으로 제시하는데 어려움이 있다고 볼 수 있다.

넷째, 학생의 오류를 교정하기 위한 문제 제기 반응하기는 교수적 전략에 따라 네 가지 유형으로 구분할 수 있었다. 구체적으로 살펴보면, 학생의 선지식과 관련된 문제가 53.5%, 인지적 갈등 유발 문제가 27.2%, 유사 문제가 17.5%, 어림 전략이 1.8%로 나타났다. 이러한 결과를 통해 교사들이 학생의 오류를 교정할 때 어떠한 믿음을 가지고 있는지 간접적으로 유추할 수 있다. 즉, 대부분의 교사들은 학습 결손이라고 판단한 학생의 선지식을 재지도하고 인지적 갈등을 유발하며 유사한 문제를 제시하면 오류가 교정될 것이라 생각하고 있었다. 그러나 교사들의 반응하기가 대부분 피상적이었다는 점을 고려할 때, 이러한 전략들은 학생의 사고를 구체적으로 반영하기보다는 일반적인 진술이 대부분이었다. 이는 교사들이 결손 개념을 재지도한다는 일반적인 지식은 알고 있지만 학생에게 적용하는 방안은 구체적이지 않으며, 학생의 전략을 예상하거나 학생의 수학적 발달 수준은 거의 고려하지 않고 문제를 제기하고 있음을 의미한다. 또한 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈이라는 추상적인 과정을 학생들에게 지도하기 위해 구체적인 전략은 거의 나타나지 않았으며, 일부 교사들은 오류 교정을 위한 구체적인 청사진을 그리지 못하고 단편적인 오류 교정 지식을 적용하고 있었다.

다섯째, 교사들은 학생의 오류 교정을 위한 문제 제기에서 단순 산술식과 표상 문제를 주로 활용하였다. 문제 제기 반응하기에 사용된 문제들을 다섯 가지 유형으로 분류한 결과, 단순 산술식 50%, 표상 문제 36.8%, 단순 문장제 7.9%, 실생활 맥락 문제 2.6%, 구체물 2.6%로 나타났다. 이처럼 교사들은 문제 제기 반응하기에서 단순 산술식을 가장 많이 활용하고 있었으며, 이는 교사들이 표준 알고리즘의 일반적인 표기법과 절차적인 방식을 중요하게 인식하는 경향을 보인다고 보고한 Sun & Pang(2020)의 연구 결과와 유사하다. 학생들은 단순 산술식보다는 다양한 표현 양식을 사용하여 분수의 연산과정을 개념적으로 이해할 수 있어야 하며(An & Choi, 2016), 그림, 실생활과 관련된 문장제 문제 등 다양한 문제 상황을 경험할 수 있는 기회를 제공해주어야 한다. 그러나 연구 결과에서 실생활 맥락 문제와 구체물은 거의 활용되지 않았으며 대부분 표상과 단순 산술식에 문제 제기가 집중되어 있었다. 같은 수학적 개념이나 원리를 지도하더라도 주어진 문제의 맥락에 따라 수학 개념과 원리에 대한 학생들의 이해 정도가 다르게 나타난다는 점을 고려할 때(Li, 2000), 문제 제기 방식의 다양성에 대하여 숙고해볼 필요가 있다.

이상의 결론을 토대로 도출한 교사교육에 대한 시사점은 다음과 같다.

첫째, 노티싱 요소의 연결성을 고려한 노티싱 역량 향상 방안이 마련될 필요가 있다. 연구 결과에 따르면, 대부분의 교사들은 학생의 오류는 식별했으나 학생의 문제해결전략에 내재된 수학적 사고를 해석하는데 어려움이 있었으며, 이를 바탕으로 발문을 제시하고 문제를 제기하는 반응하기 역량은 더욱 낮은 경향을 보였다. 하지만 반응하기 역량이 식별하기와 해석하기 역량에 비해 낮다고 하여 반응하기만을 분절적으로 지도하려는 시도는 유의할 필요가 있다. Jacobs et al.(2010)은 노티싱의 세 요소가 단계적으로 수행되지만 찰나의 순간에 동시에 발생하는 통합적인 개념으로 보았다. 이러한 관점에서 볼 때, 교사들이 학생의 사고를 식별하지 못한다면 이를 적절하게 해석하고 반응하지 못하며, 학생의 사고를 식별하더라도 이를 적절하게 해석하지 못한다면 반응하는데 어려움을 겪게 된다고 볼 수 있다. 따라서 교사의 반응하기 역량을 지도하더라도 세 요소를 분절적인 개념으로 바라보고 지도하기보다는 하나의 통합된 단위로 바라보고 지도할 필요가 있다. 특히, 연구 참여자들이 학생의 수학적 사고와 이해를 해석하고 이를 토대로 반응하는 역량이 미흡하므로, 학생의 문제해결과정에서 나타난 수학적 사고를 포착

하는 경험을 충분히 가질 필요가 있다. 예를 들어, 문제해결과정, 그림, 텍스트 자료 등에 나타난 학생의 수학적 이해, 전략, 오류 등을 사전에 정리하고 교사의 추론과 비교하며 토의하거나, 수업에서 나타난 교사의 교수적 움직임이 교사가 추론한 학생의 사고와 어떻게 관련되어 있는지 살펴보는 활동 등은 노티싱의 각 요소들을 통합적으로 고려한 반응하기 지도 방안이 될 수 있다.

둘째, 교사의 노티싱 역량 향상을 위해 '구체성'과 '다양성'이 더욱 강조될 필요가 있다. 연구에 참여한 교사들은 해석한 수학적 사고를 증거로 해당 주제(이분모 분수의 덧셈과 뺄셈)에 대한 지식을 구체적인 반응하기로 풀어내지 못하는 경향을 보였다. 즉, '구체성'은 교사가 노티싱 과정에서 학생의 사고를 구체적인 증거로서 어떻게 반영하는지와 관련될 뿐만 아니라(Jacobs et al., 2010) 반영한 수학적 사고를 전문적 지식과 융합하여 설명할 수 있는 측면과도 관련되어 있다. 따라서 교사의 노티싱에서 '구체성'을 기르기 위해 교사들이 학생의 수학적 사고를 해석하고, 추론하고, 어떠한 교수 움직임을 보일 것인지에 대해 각 단계별로 구체적으로 고민해 볼 기회가 제공되어야 한다.

'다양성'은 교사가 학생의 수학적 사고를 기반으로 얼마나 다양한 교수적 전략을 활용할 수 있는지와 관련된다. 교사들은 오류 유형과 무관하게 하나의 교수 전략을 모든 문제 유형에 적용하는 경향을 보였으며(c.f. [Table 10]), 이는 오류 유형별로 적절하게 대응할 수 있는 역량이 부족함을 의미한다. 물론, 하나의 전략과 문제가 특정 학생에게 효과적일 수 있다. 그러나 교사의 노티싱은 상황과 맥락에 맞게 대응할 수 있는 지식과 유연성을 요구한다. 따라서 교사의 노티싱에서 '다양성'을 기르기 위해 교사들이 인지적 유연성, 교수 주제, 교수 방법에 대한 폭넓은 전문 지식을 함양할 수 있는 방안이 마련될 필요가 있다.

셋째, 교사의 노티싱 역량 향상을 위해 수학 내용에 관한 지식과 그 지식의 활용에 대한 교사 교육이 이루어질 필요가 있다. 연구 결과, 교사들은 발문 제시 반응하기에서 오류 그 자체의 현상에 초점을 두거나 핵심 개념을 포착하지 못하는 경우가 나타났으며, 문제 제기 반응하기 또한 특정 유형의 문제(단순 산술식)를 피상적으로 제기하려는 경향이 보였다. Sherin & van Es(2009)와 Schoenfeld(2011)에 따르면, 교사 노티싱의 과정과 결과는 교사의 지식에서 비롯한다. 이러한 관점과 연구 결과를 종합하면, 교사들은 학생의 문제해결전략에서 오류를 식별하고 해석하고 반응할 수 있으나 적용할 수 있는 내용 지식은 한정적이며 상황에 따라 유연하게 대응할 수 있는 지식 간의 연결성이 부족하다고 볼 수 있다. 결국, 교사의 노티싱 역량은 교사의 전문적인 지식이 바탕이 되어야 충분한 발현이 가능하며 수학 내용과 오류 유형, 지도 방안 등에 대한 지식 습득뿐만 아니라 활용이 함께 수행되어야 할 것이다.

넷째, 현직 교사들의 노티싱 역량 향상을 위한 방안이 마련될 필요가 있다. 본 연구의 참여자들은 수학과 교육대학원에 다닐 정도로 일반교사들에 비해 수학교육에 관심이 많고 일부는 전문성을 갖추고 있다. 그럼에도 불구하고, 현직 교사들의 노티싱 역량은 예비교사들의 노티싱 역량을 분석한 Sun & Pang(2020)의 연구 결과와 일부 유사하게 나타났다. 이는 교사의 노티싱 역량은 교직 경력에 따라 자연스럽게 향상되는 것이 아니며, 노티싱과 관련된 전문적인 지식과 기술을 습득하기 위한 의도적인 개입이 요구됨을 의미한다. 따라서 예비교사들뿐만 아니라 현직교사들의 노티싱 역량을 함양하기 위한 방안이 마련될 필요가 있다. 예를 들어, 본 연구에서 사용한 검사도구와 같이 학생의 산출물에 나타나는 오류를 구체적으로 어떻게 인식하고 해석할지에 대해 탐구할 기회를 제공하고 학생의 문제해결력 신장을 위해 다양한 발문과 문제 제기를 어떻게 사용할 지에 대한 노티싱 역량 개발 연수과정 운영을 숙고해볼 필요가 있다.

마지막으로 후속연구에 대한 시사점으로 학생의 산출물을 활용한 노티싱 연구의 확산을 제안하고자 한다. 노티싱은 대부분 녹화된 비디오 영상으로 이루어져 왔으나 비디오에 녹화되지 않는 학생의 메모, 그림, 공책 등의 산출물에는 다양한 학생의 수학적 사고와 이해 정도가 반영되어 있다. 따라서 교사의 노티싱 역량을 분석하기 위해 비디오 자료뿐만 아니라 학생의 산출물을 활용하여 교사가 학생의 수학적 사고와 오류를 어떻게 분석하는지에 대한 연구가 보다 확산될 필요가 있다. 특히, 이러한 산출물에 대한 노티싱은 수업 중 찰나의 순간에 일어나기보다는 지연된(delayed) 노티싱이므로 다른 측면에서 교사 노티싱 역량을 기르는데 도움을 줄 것이라 기대할

수 있다.

본 연구는 오류가 포함된 학생의 문제해결전략에 대한 교사의 노티싱 특성과 경향을 살펴보고 교사 교육과 후속연구를 위한 시사점을 제언하였다. 그러나 본 연구는 다음과 같은 제한점을 가지고 있다. 첫째, 연구의 참여자는 39명으로서 모든 교사의 노티싱 특성을 대표한다고 말하기에 한계가 있다. 둘째, 학생의 오류가 포함된 문제해결전략이 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에만 한정되어 있으므로, 다른 주제에 대한 노티싱 특성은 달라질 수도 있다. 셋째, 학생의 문제해결전략에 대한 교사의 노티싱 역량을 분석하기 위해 텍스트 데이터를 분석하였으며, 추가적인 검증을 위한 인터뷰는 실시하지 않았다. 따라서 데이터에 대한 연구자들의 해석이 실제 교사의 의도와 완벽하게 일치하지 않을 수도 있다. 후속 연구에서는 이러한 제한점을 고려하여 교사가 문제해결과정에서 나타난 학생의 수학적 사고를 어떻게 노티싱하는지 살펴볼 필요가 있다.

교사는 근본적으로 학생의 수학적 사고에 주목해야 하며, 이를 바탕으로 다음 교수적 움직임을 계획해야 한다 (Ball, 1997). 오류가 포함된 학생의 문제해결전략은 이미 형성된 학생의 지식과 새로운 지식 간의 연결성을 볼 수 있다는 점에서 노티싱 연구에 시사하는 바가 크다. 본 연구의 결과가 향후 교사 노티싱 역량 향상을 위한 기초자료로 활용되기를 기대한다.

참 고 문 헌

Amador, J. M., Bragelman, J., & Superfine, A. C. (2021). Prospective teachers' noticing: A literature review of methodological approaches to support and analyze noticing. Teaching and Teacher Education, 99, 103256.

An, S. H., & Choi, C. W. (2016). A study of diagnosis and prescription of errors of fractional multiplication and division. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 20(3), 457 - 477.

Ball, D. L. (1997). What do students know? Facing challenges of distance, context, and desire in trying to hear children. In B. J. Biddle, T. L. Good, & I. F. Goodson (Eds.), International handbook of teachers and teaching (Vol. II, pp. 769-818). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Cho, N. R., & Paik, S. Y. (2013). Comparison of pre- and in-service elementary school teachers' PCK about questioning in mathematics class. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 17(1), 39-65.

Dietiker, L., Males, L. M., Amador, J. M., & Earnest, D. (2018). Research commentary: Curricular noticing: a framework to describe teachers' interactions with curriculum materials. Journal for Research in Mathematics Education, 49(5), 521-532.

Eom, J. Y., & Ryu, S. R. (2009). An analysis of children's error types in fractional computation. Journal of Elementary Education, 25(2), 67-91.

Goldsmith, L. T., & Seago, N. (2011). Using classroom artifacts to focus teachers' noticing: Affordances and opportunities. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes (pp. 169-187). London, England: Routlege.

Goodwin, C. (1994). Professional vision. American Anthropologist, 96(3), 606-633.

Han, C., Kim, H. J., & Kwon, O. N. (2018). Teacher noticing on students' reasoning of statistical variability. Journal of the Korean School Mathematics Society, 21(2), 183-206.

Hwang, S., Cho, E., & Albert, L. R. (2020). Examining mathematics teachers' perception toward multicultural education: Teachers' noticing of multicultural contents in mathematics textbooks. Research in Mathematical Education, 23(2), 93-111.

Jackson, C., & Jong, C. (2017). Reading and reflecting: Elementary preservice teachers' conceptions about teaching mathematics for equity. Mathematics Teacher Education and Development, 19(1), 66-81.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 41(2), 169-202.

Kilic, H. (2018). Pre-service mathematics teachers' noticing skills and scaffolding practices. International Journal of Science and Mathematics Education, 16(2), 377-400.

Kim, M. K., & Kim, S. Y. (2014). The relations between children's fraction operation skills and error types on constructed-response items. Journal of the Korean School Mathematics Society, 17(3), 409-435.

Kim, Y. A., & Kim, S. J. (2013). An analysis on elementary students' error types of word problem solving strategy. Journal of the Korean School Mathematics Society, 16(1), 113-139.

Land, T. J., Tyminski, A. M., & Drake, C. (2019). Examining aspects of teachers' posing of problems in response to children's mathematical thinking. Journal of Mathematics Teacher Education, 22(4), 331-353.

Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. Journal for Research in Mathematics Education, 32(2), 234-241.

Males, L.M., Using video of peer teaching to examine grades 6-12 preservice teachers'noticing. In E. O. Schack, M. H. Fisher, J. A. Wilhelm (Eds.) Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks (pp. 91-112). New York, NY: Springer.

Mason, J. (2002). Researching your own practice: The discipline of noticing. London: Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). Principles to actions. Reston, VA: Author.

Pang, J. S., & Cho, S. M. (2019). An analysis of solution methods by fifth grade students about 'reverse fraction problems'. The Mathematics Education, 58(1), 1-20.

Park, M. Y., & Park, Y. H. (2017). An analysis on the error according to academic achievement level in the fractional computation error of elementary sixth graders. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 21(1), 23-47.

Robertson, A. D., Scherr, R., & Hammer, D. (2015). Responsive Teaching in Science and Mathematics. New York, NY: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (2011). Noticing matters. A lot. Now what? In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Phillipp (Eds.), Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes (pp. 223-238). New York, NY: Routledge.

Seidel, T., & Stürmer, K. (2014). Modeling and measuring the structure of professional vision in preservice teachers. American Educational Research Journal, 51(4), 739-771.

Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers′ professional vision. Journal of Teacher Education, 60(1), 20-37.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. Educational Studies in Mathematics, 84, 49-70.

Star, J. R., & Strickland, S. K. (2008). Learning to observe: Using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. Journal of Mathematics Teacher Education, 11(2), 107-125.

Stockero, S. L., & Rupnow, R. L. (2017). Measuring noticing within complex mathematics classroom interactions. In E. O. Schack, M. H. Fisher, & J. A. Wilhelm (Eds.), Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks (pp. 281-301). New York, NY: Springer.

Sun, W. J., & Pang, J. S. (2020). How do prospective elementary school teachers respond to students' mathematical thinking? The Journal of Educational Research in Mathematics, 30(4), 751-772.

van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. Philipp, (Eds.), Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes (pp. 134-151). New York, NY: Routledge.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. Journal of Technology and Teacher Education, 10(4), 571-597.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. Teaching and Teacher Education, 24(2), 244-276.

Viera, A. J., & Garrett, J. M. (2005). Understanding interobserver agreement: The kappa statistic. Fam med, 37(5), 360-363.