



J. Korean Soc. Aeronaut. Space Sci. 49(6), 449-456(2021)

DOI:https://doi.org/10.5139/JKSAS.2021.49.6.449

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

## 비압축성 유동 해석을 위한 압축성 유동 해석자 확장

김동욱<sup>1</sup>, 김민수<sup>2</sup>, 이승수<sup>3</sup>

### Extension of Compressible Flow Solver to Incompressible Flow Analysis

Donguk Kim<sup>1</sup>, Minsoo Kim<sup>2</sup> and Seungsoo Lee<sup>3</sup>

Department of Aerospace Engineering, Inha university

#### ABSTRACT

In this paper, we present a strategy to extend solution capability of an existing low Mach number preconditioned compressible solver to incompressible flows with a little modification. To this end, the energy equation that is of the same form of the total energy equation of compressible flows is used. The energy equation is obtained by a linear combination of the thermal energy equation, the continuity equation and the mechanical energy equation. Subsequently, a modified artificial compressibility method in conjunction with a time marching technique is applied to these incompressible governing equations for steady flow solutions. It is found that the Roe average of the common governing equations is equally valid for both the compressible and incompressible flow conditions. The extension of an existing compressible solver to incompressible flows does not affect the original compressible flow analysis. Validity for incompressible flow analysis of the extended solver is examined for various inviscid, laminar and turbulent flows.

#### 초 록

본 연구에서는 저마하수 예조건화 기법이 적용된 기존 압축성 해석자의 해석 범위를 최소한의 수정으로 비압축성 유동해석이 가능하도록 확장하는 전략을 제시하였다. 이를 위해 압축성 총 에너지 방정식과 동일한 형태의 에너지 방정식을 사용하였다. 이러한 에너지 방정식은 비압축성 지배방정식인 연속방정식, 열에너지 방정식과 역학적 에너지 방정식의 선형 조합을 통해 얻어진다. 이렇듯 압축성 방정식과 동일한 형태를 갖는 비압축성 지배방정식에 시간 전진 기법을 적용하기 위해 Turkel의 가상 압축성 기법을 적용하였다. 또한 Roe 평균이 공통의 압축성/비압축성 지배방정식에서 모두 유효함을 보였다. 압축성 해석자에 위 내용을 적용하여 비압축성 해석이 가능하도록 확장하는 과정은 본래의 압축성 해석자를 이용한 압축성 해석에 아무런 영향이 없다. 확장된 해석자를 통한 비압축성 해석 검증을 위해 비점성, 층류 그리고 난류 유동에 대한 순차적 해석을 수행하였다.

**Key Words** : Compressible/Incompressible Governing Equations(압축성/비압축성 지배방정식), Artificial Compressibility Method(가상 압축성 기법), Roe's Approximate Riemann Solver(Roe 근사 리만 해법), Roe Average(Roe 평균)

† Received : December 8, 2020    Revised : March 4, 2021    Accepted : April 5, 2021

<sup>1,2</sup> Graduate student, <sup>3</sup> Professor

<sup>3</sup> Corresponding author, E-mail : slee@inha.ac.kr

© 2021 The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences

## I. 서 론

비압축성 유동 해석 방법에는 pressure stabilization techniques, penalty methods, operating splitting methods, artificial compressibility methods 등의 방법들 이외에도 굉장히 다양한 기법들이 존재한다[1]. 본 연구는 이 중 가상 압축성 기법(artificial compressibility method)에 초점을 맞춰 수행되었다.

가상 압축성 기법은 elliptic 형태의 비압축성 지배방정식을 hyperbolic 형태로 바꿈으로써 시간 전진 기법 사용을 가능하게 하는 수치 기법이다. 이에 따라 hyperbolic 형태의 방정식 해석을 위해 개발된 다양한 수치 기법 적용을 가능하게 하여 압축성 해석자의 구조를 기반으로 비압축성 해석자 개발을 가능하게 한다.

이러한 가상 압축성 기법은 Chorin[2]에 의해 제안되었으며, 이 후 많은 연구들이 진행되어 왔다. Steger와 Kutler[3], Chang과 Kwak[4], Choi와 Merkle[5], Lee H. R. et al.[6] 등은 가상 압축성 기법을 적용하여 정상 상태 문제를 해석하였다. 비정상 해석은 Merkle과 Athavale[7], Soh와 Goodrich[8], Lee H. R. et al.[9] 등에 의해 연구가 수행되었다.

하지만 이러한 연구는 가상 압축성 기법을 적용함으로써 압축성 해석자의 구조를 기반으로 하더라도 비압축성 해석자를 별도로 개발해야 한다는 사실에는 변함이 없다. 이는 가상 압축성 기법이 거의 대부분 비압축성 지배방정식에 적용되는 것과 관련돼 있다.

한편, 일반적으로 압축성 해석자에서 비압축성 유동이라고 가정할 수 있는 저 마하수 해석 시 큰 조건수(condition number)가 발생하므로 해의 수렴성과 정확도에 문제가 발생한다[10]. 이러한 문제는 예조건화 기법(preconditioning method)을 압축성 해석자에 적용하여 해결할 수 있다. 하지만 예조건화 기법이 적용된 압축성 해석자라도 Mach number가 zero로 정의되는 비압축성 유체 해석까지는 가능하지 않다. 이는 예조건화 행렬이  $1/M^2$  요소를 포함하여 행렬 자체가 정의되지 않는 것에 기인한다[11].

본 연구에서는 예조건화 기법과 가상 압축성 기법의 통합을 위한 사전 연구로 기존 예조건화 기법이 적용된 압축성 해석자에 최소한의 변환으로 두 기법의 분리 적용이 가능하도록 하는 방안을 제시하였다. 다시 말하면 저마하수 압축성 해석 시에는 기존에 적용돼 있는 예조건화 기법이, Mach number가 zero로 정의되는 비압축성 유체 해석 시에는 가상 압축성 기법이 분리 적용되는 것이다.

본 논문은 다음과 같은 구성을 가진다. 우선 II장에서는 기존과 동일한 해로 계산되면서 압축성 방정식 형태를 갖는 비압축성 지배방정식 구성에 대해 살펴본다. 이어서 압축성 방정식과 동일한 형태의 비압축성 지배방정식에 Turkel의 가상압축성 기법[12]과 Roe

의 근사 리만 해법[13]을 적용하기 위한 내용과 이에 대한 고찰을 살펴본다. 다음으로 III장에서는 이들 기법이 적용된, 확장된 해석자로 비점성, 층류 그리고 난류 유동에 대한 비압축성 해석 검증을 수행한다. 마지막으로 IV장에서는 내용 요약 및 향후 계획을 다룬다.

## II. 수치 해석 기법

### 2.1 동일 형태의 압축성/비압축성 지배방정식

본 연구의 목표를 위해서는 기본적으로 압축성 방정식 형태의 비압축성 지배방정식을 구성하여 동일 형태의 압축성/비압축성 지배방정식을 갖춰야 한다.

압축성 지배방정식에 비압축성 가정이 적용되면 밀도는 상수가 되고 열역학적 변수 사이의 관계인 상태방정식의 정의가 사라진다. 따라서 연속방정식과 운동량 방정식은 에너지 방정식과 분리(decouple)된다[14]. 이에 따라 많은 비압축성 해석자는 에너지 방정식을 풀지 않거나 온도가 필요한 경우 수렴된 해를 이용해 계산한다.

이러한 비압축성 가정의 적용은 압축성 지배방정식을 비압축성 지배방정식으로 바꾼다. 이때 연속 방정식과 운동량 방정식은 밀도가 상수가 될 뿐 압축성 지배방정식과 동일한 형태를 갖는다. 비압축성 에너지 방정식의 경우 온도 결정을 위한 방정식으로써 일반적으로 아래 식 (1)과 같이 보다 간단한 형태인 열(thermal)에너지 방정식으로 분리해 계산한다.

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \nabla \cdot (T \vec{v}) = k \nabla \cdot (\nabla T) \quad (1)$$

여기서  $\rho$ 는 밀도,  $c_v$ 는 정적 비열,  $T$ 는 온도,  $\vec{v}$ 는 속도 벡터,  $k$ 는 열전도 계수이다.

이렇듯 비압축성 에너지 방정식은 압축성 지배방정식과 형태 측면에서 가장 큰 차이를 보인다. 따라서 동일 형태의 압축성/비압축성 지배방정식 구성을 위해 이를 역학적(mechanical) 에너지 방정식과 분리해 기 전의 총(total) 에너지 방정식 형태로 되돌렸다. 이러한 과정은 아래 식 (2)~식 (5)로부터 확인 가능하다.

$$\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_v T \vec{v}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + (\nabla \vec{v}) : \vec{\tau} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho V^2 \vec{v} \right) + \vec{v} \cdot (\nabla p) = \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{\tau}) \quad (3)$$

$$p(\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho c_v T + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \vec{v} \left( \rho c_v T + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) \right\} + \nabla \cdot (p \vec{v}) \\ & = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $p$ 는 압력,  $\vec{\tau}$ 는 stress tensor,  $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$ 이다. 식 (2)는 비압축성 지배방정식에서 효과가 미비해 무시 가능했던 dissipation function 항을 포함한 열에너지 방정식이다. 식 (3)은 운동량 방정식에 속도 벡터를 내적한 역학적 에너지 방정식이며, 식 (4)는 연속방정식에 압력을 곱한 식이다. 식 (5)는 식 (2), 식 (3) 그리고 식 (4)를 더한 총 에너지 방정식이다. 즉, 비압축성 에너지 방정식을 총 에너지 방정식 형태로 되돌리는 과정은 비압축성 지배방정식 간의 완전한 선형 조합을 통해 이루어진다. 그러므로 기존의 열에너지 방정식으로 구성된 비압축성 지배방정식과 동일한 해로 계산됨을 알 수 있다. 더불어 비압축성 해석으로의 확장을 고려하고 있으므로 비압축성 방정식에서 정의되지 않는 정압 비열의 표현을 배제하여 지배방정식을 나타냈다.

## 2.2 가상 압축성 기법

가상 압축성 기법은 elliptic 형태의 비압축성 지배방정식에 가상의 시간 미분항을 추가하여 hyperbolic 형태로 바꿈으로써 시간 전진 기법 사용을 가능하게 한다. 본 연구에서는 수치 효율 향상을 위해 가상의 시간 미분항을 연속 방정식뿐만 아니라 운동량 방정식에도 추가한 Turkel의 가상 압축성 기법[12]을 적용하였다. 아래 Navier-Stokes 방정식, 식 (6)에서는 가상 압축성 기법 적용으로 시간 미분항 부분에 가상 압축성 기법 행렬,  $\Gamma$ 가 적용되어 있다.

$$\Gamma \frac{\partial Q_p}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \frac{\partial G_v}{\partial z} \quad (6)$$

여기서  $Q_p = [p \ u \ v \ w \ T]^T$ , 원시형 유동 변수 벡터이고,  $E, F$ 와  $G$ 는 비점성 유속 벡터(inviscid flux vector),  $E_v, F_v$ 와  $G_v$ 는 점성 유속 벡터(viscous flux vector)이다.

Turkel에 의해 제안된 가상 압축성 기법 행렬은 열에너지 방정식으로 구성된 기존 비압축성 지배방정식에서 다음 식 (7)과 같다.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_u}{\beta} u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_u}{\beta} v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_u}{\beta} w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

식 (7)에서  $\alpha_u$ 와  $\beta$ 는 각각 preconditioning factor와 artificial compressibility이며, 가상 압축성 기법 적용으로 등장하는 매개변수이다. 여기서  $\alpha_u = 0.0$ 인 경우 식 (7)의 행렬은 Chorin의 가상 압축성 기법 행렬[2]이 된다.

이러한 가상 압축성 기법 행렬은 압축성 방정식과 동일한 형태의 비압축성 지배방정식에서 식 (7)의 기존 가상 압축성 기법 행렬에 몇 가지 항들이 추가되어 나타난다. 이는 아래 식 (8)과 같다. 식 (8)의 가상 압축성 기법 행렬에서는 식 (7)과 비교해 추가된 항들이 있으며, 이는 비압축성 에너지 방정식을 총 에너지 방정식과 동일한 형태를 갖도록 한 것의 영향임을 알 수 있다.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_u}{\beta} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_u}{\beta} v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_u}{\beta} w & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho c_v \end{bmatrix} \quad (8)$$

즉, 지배방정식의 형태가 달라짐에 따라 가상 압축성 기법 행렬도 그에 알맞게 형태가 달라진 것일 뿐 그 본질은 기존 행렬과 동일하다. 따라서 본 연구에서는 식 (8)의 가상 압축성 기법 행렬을 적용하여 해석을 수행하였다.

또한 가상 압축성 기법 적용으로 등장하는 두 매개변수  $\alpha_u$ 와  $\beta$ 는 사용자에게 의해 결정되는 값이다. Michelassi et al.[15]과 Kiris et al.[16] 등은 이러한 매개 변수에 따른 계산의 안정성 및 수렴 특성 연구를 수행하였다. 그리고 Turkel[12]은 계산을 위한 최적의  $\alpha_u$ 와  $\beta$ 에 대해 제시하고 있으며, 이는 Turkel의 가상 압축성 기법을 적용한 본 연구에도 동일하게 적용된다. 여기서  $\beta$ 는 임의의 양의 값으로 결정되며, 일반적으로 상수 값을 사용하는 것이 수렴성에 있어 가장 좋다고 알려져 있다[17]. 이러한 내용과 관련하여 두 매개변수 값은 시스템 고유값에 직접적으로 영향을 미친다. 즉, 이는 해의 수렴성과 크게 관련돼 있으므로 적절한 값 선정이 필요하다.

더불어 식 (8)의 가상 압축성 기법 행렬은 Choi & Merkle[18] 그리고 Weiss & Smith[19] 등에 의해 개발된 국소(local) 예조건화 기법 행렬과 상당히 유사하다. 따라서 이러한 행렬들을 하나로 통합할 수 있는 가능성을 확인하였다.

## 2.3 Roe의 근사 리만 해법 & Roe 평균

Roe의 근사 리만 해법은 리만 문제를 선형 근사하여 계산하는 해법으로 비선형 Jacobian 행렬을 경계면 양쪽 해를 이용해 선형화한다. 이러한 선형화된 Jacobian 행렬을 갖는 근사 시스템은 마땅히 본래 시스템의 성질을 따라야 한다. 이에 따라 선형화된 Jacobian 행렬이 가져야 하는 조건들에는 'Hyperbolicity', 'Consistency', 'Property U'가 있다. Roe는 이러한 조건들을 만족하는 Jacobian 행렬을 정의하기

위해 parameter 벡터를 도입하였고, 이를 통해 계산된 선형화된 Jacobian 행렬에 나타나는 유동 변수 평균을 Roe 평균으로 정의하였다[13].

한편, 기존 비압축성 지배방정식에서의 Roe 평균은 속도와 온도의 산술평균으로 나타난다. 하지만 압축성 방정식과 동일한 형태의 비압축성 지배방정식에서는 산술평균으로 나타나는 Roe 평균이 위 조건을 만족하지 않음을 확인하였다. 따라서 이에 부합하는 Roe 평균을 찾기 위해 아래 식 (9)와 같은 새로운 parameter 벡터를 정의하였다.

$$Z = \begin{bmatrix} p \\ u \\ c_v T + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \end{bmatrix}, \quad Z_{com} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} u \\ \sqrt{\rho} h \end{bmatrix} \quad (9)$$

식 (9)는 간략화를 위해 1차원 기준으로 나타난 것이며,  $u$ 는 속도 성분이고,  $h$ 는 엔탈피(enthalpy)이다.  $Z$  벡터가 새롭게 정의한 parameter 벡터이고,  $Z_{com}$ 은 압축성 지배방정식에서 Roe에 의해 정의된 parameter 벡터이다.

이와 같이 새롭게 정의한 parameter 벡터,  $Z$ 로부터 위 3가지 조건들을 만족하는 선형화된 Jacobian 행렬을 계산하였다. 이를 아래 식 (10)에 나타내었다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \rho & 0 \\ 1 & 2\rho \bar{u} & 0 \\ \bar{u} & \rho \left\{ \bar{u}^2 + \left( c_v T + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right\} & \rho c_v \bar{u} \end{bmatrix} \quad (10)$$

식 (10)에서 bar가 붙은 변수는 경계면 양쪽 해의 산술평균을 의미한다.

식 (10)의 선형화된 Jacobian 행렬로부터 나타나는 Roe 평균을 압축성 지배방정식에서의 Roe 평균과 함께 아래 식 (11)에 나타내었다.

$$\bar{v}_i = \frac{(\sqrt{\rho} v_i)_R + (\sqrt{\rho} v_i)_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}, \quad \bar{H} = \frac{(\sqrt{\rho} H)_R + (\sqrt{\rho} H)_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \quad (11a)$$

$$\bar{v}_i = \frac{(v_i)_R + (v_i)_L}{2}, \quad \bar{H}^* = \frac{(H^*)_R + (H^*)_L}{2} \quad (11b)$$

$$\left( H^* = c_v T + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right)$$

식 (11a)는 압축성 지배방정식에서의 Roe 평균, 식 (11b)는 압축성 방정식과 동일한 형태의 비압축성 지배방정식에서의 Roe 평균이다. 식 (11b)에서  $H^*$ 는 압축성 방정식에서 정의되는 전(total) 엔탈피,  $H$ 와 동일한 형태를 갖지만 물리적 의미는 없는 항이다.

이를 통해 압축성 방정식과 동일한 형태의 비압축성 지배방정식의 Roe 평균은 속도와 압축성 방정식에서 전 엔탈피로 정의되는 항의 산술 평균임을 확인하였다. 다시 말해 압축성/비압축성 지배방정식의

Roe 평균은 밀도가 상수가 되느냐 유동의 해가 되느냐를 따를 뿐 동일한 형태임을 알 수 있었다. 따라서 압축성 방정식에서 정의되는 전 엔탈피를 정적 비열을 이용해 풀어서 정의하면 공통의 압축성/비압축성 방정식에서 모두 유효한 Roe 평균이 됨을 확인하였고 이를 본 연구에 적용하였다.

한편, 압축성 방정식과 동일한 형태의 비압축성 지배방정식에 가상 압축성 기법을 적용함으로써 계산되는 시스템 행렬을  $A_T$ , 이것의 고유벡터 행렬을  $X_T$ 라고 하면  $X_T$ 의 행렬식(determinant)은 식 (12)와 같다.

$$\text{Det}(X_T) = 2\rho c_v^2 c' \left[ (1 - \alpha_u) k^2 + \beta \right] \quad (12)$$

$$c' = \sqrt{\left\{ \frac{k}{2} (2 - \alpha_u) \right\}^2 + \beta}$$

$k$ 는 cell 표면에 수직인 속도 성분이고  $c'$ 는 가상 압축성 기법 적용으로 정의되는 가상 음속이다. 식(12)는  $\alpha_u > 1$ 인 경우 행렬식이 0이 되는 singularity가 발생할 수 있음을 보여준다. 즉,  $X_T$ 의 행렬식이 0에 가까울수록 비점성 유속(flux) 벡터를 발산시키는 문제를 일으킬 수 있다[20]. 더불어  $X_T$ 의 행렬식이 0인 경우, 특성치(characteristic) 정보를 이용한 경계 조건 결정 방법을 사용할 수 없다. 따라서 앞서 언급한 바와 같이 매개 변수,  $\alpha_u$  그리고  $\beta$ 에 대한 적절한 값 선정이 필요함을 알 수 있다. 이에 따라 식 (12)에서  $\alpha_u = 2.0$ 인 경우  $\beta$ 는 전 계산 영역에 걸쳐 아래 식 (13)을 만족하는 값을 가져야 한다. 이는 기존 비압축성 지배방정식에 가상 압축성 기법을 적용한 Lee H. R. et al.의 선형연구[20]와 동일한 조건임을 확인하였다.

$$\beta > k^2 \quad (13)$$

### III. 수치 해석 결과

본 연구의 기반이 된 압축성 해석자는 압축성 난류 유동 해석을 위한 3차원 RANS 방정식 기반 in-house 해석자인 MSAPv[21]이다. 해당 해석자에 앞서 언급한 사항들과 Turkel의 가상 압축성 기법을 적용하였다. 확장된 해석자로 비점성, 층류 그리고 난류 유동에 대한 비압축성 해석을 수행하였다.

확장된 해석자의 비압축성 해석 검증 및 계산된 해의 정확도 확인을 위해 선행 연구자들의 수치 해석 결과와 비교하였다. 또한 압축성 방정식과 동일한 형태의 비압축성 지배방정식에 적용된 가상 압축성 기법의 수치적 특성을 살펴보았다. 이를 위해 두 매개 변수에 따른 수렴도와 해를 비교하였다. 이때 매개 변수는 선행 연구[6,15-17,20]를 참고하여  $\alpha_u = 0.0 \sim 2.0$ ,  $\beta = 0.1 \sim 10.0$  범위를 갖도록 하였으며, CFL 수는 그 효과를 배제하기 위해 각 문제에서 특정 값으로 고정하였다.



### 3.1 NACA0012 익형 주위 비점성 유동

먼저 NACA0012 익형 주위 비점성(inviscid) 유동을 해석하였다. 257×65 크기의 격자를 이용해 span 방향으로 주기(periodic) 경계 조건을 주어 2D 유동 해석을 수행하였다. 해석에 사용한 CFL 수는 10.0이고, 받음각은 0°이다.

Figure 1은  $\alpha_u$ 와  $\beta$ 에 따른 표면 압력 계수 분포를 XFOIL 결과(Mach number=0)와 비교한 것이다. 도시된 모든  $\alpha_u$ 와  $\beta$  조합에 대해 XFOIL 결과와 일치하는 것을 볼 수 있다.

Figure 2는  $\alpha_u$ 와  $\beta$ 에 따른 수렴도를 나타낸 그림이다. 그림에서 residual이 0을 나타내는 그래프는 해가 발산한 경우이다. 전체적인 경향은  $\beta$ 가 커질수록 수렴도는 향상되는 모습을 보인다. 하지만 일정 크기 이상의  $\beta$ 에서는 수렴도가 오히려 감소하며,  $\alpha_u$ 가 커질수록 수렴도가 감소하기 시작하는  $\beta$  값이 작아짐을 확인할 수 있다.  $\beta=0.5$  이상에서 정상적으로 수렴한 경우에 대해서는  $\alpha_u=0.0$ 인 Chorin의 가상 압축성 기법[2]보다  $\alpha_u$ 에 값이 주어진 Turkel의 가상 압축성 기법[12]이 더 나은 수렴성을 보였다.  $\beta=0.1$ 의 작은 값에 대해서는 모든  $\alpha_u$ 에 대해 해가 발산하

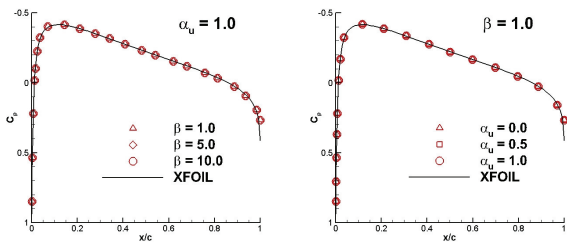


Fig. 1. Surface pressure coefficient distribution of NACA0012 airfoil (AOA=0°)

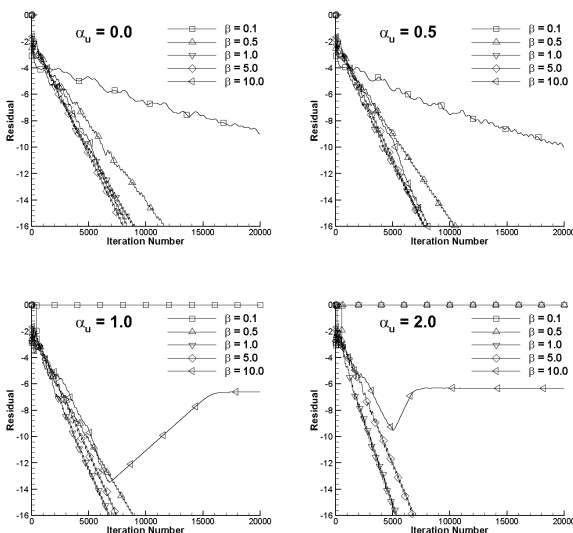


Fig. 2. Convergence histories for NACA0012 airfoil problem

거나 낮은 수렴성을 보였다. 또한  $\alpha_u = 2.0$ 에서는 고유벡터 행렬의 singularity 문제로  $\beta = 0.5$ 인 경우까지 해가 발산하는 모습을 볼 수 있다. 전체적으로  $\beta = 1.0$ 에서 가장 높은 수렴도를 보였다.

### 3.2 원형 실린더 주위 층류 유동

층류(laminar) 유동 검증을 위해 원형 실린더(cylinder) 주위 유동을 해석하였다. 원형 실린더 주위 유동은 레이놀즈 수에 따라 유동 특성이 크게 변한다. 레이놀즈 수 40 이하에서는 정상 유동이지만 그 이상의 값에서는 실린더 후방에서 비정상 유동이 발생한다.

257×257 크기의 격자를 이용해 span 방향으로 주기(periodic) 경계 조건을 주어 2D 유동 해석을 수행하였다. 레이놀즈 수 40의 정상 유동에 대해 해석하였으며, 계산에 사용된 CFL 수는 20이다.

Figure 3은  $\beta=5.0$ 에서 원형 실린더 주위 streamlines를 보인 것이다. 정상 유동 해석 결과로 원형 실린더 후방에서 유동박리가 대칭으로 나타나는 것을 볼 수 있다.

Figure 4와 Table 1은  $\beta=5.0$ 에서  $\alpha_u$ 에 따른 해석 결과를 선행 연구자들의 결과[6,22-24]와 비교한 것이다. Fig. 4는 표면 압력 계수를 비교한 것으로 선행 연구자들의 결과와 일치하는 것을 볼 수 있다. 또한 Table 1로부터 항력 계수가 선행 연구자들의 결과에서 크게 벗어나지 않는다.

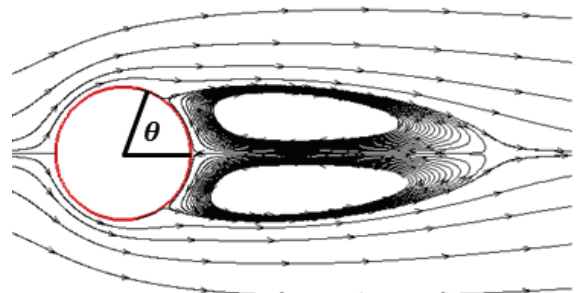


Fig. 3. Streamlines around circular cylinder

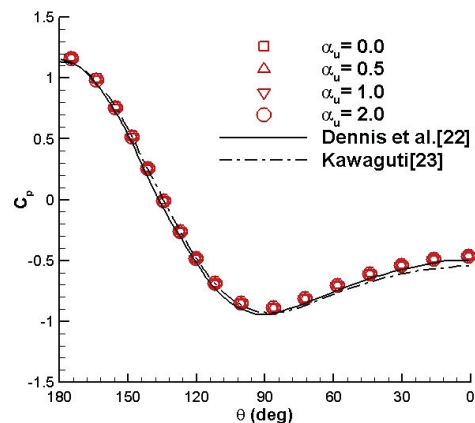


Fig. 4. Surface pressure coefficient distribution of circular cylinder

Table 1. Compare drag coefficients

	Drag coefficient
Dennis et al.[22]	1.522
Takami et al.[24]	1.536
Lee H.R. et al.[6]	1.570
$\alpha_u = 0.0$	1.528
$\alpha_u = 0.5$	1.526
$\alpha_u = 1.0$	1.523
$\alpha_u = 2.0$	1.516

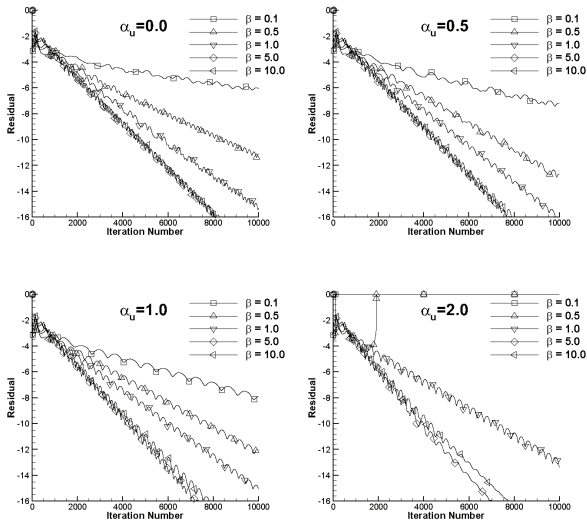


Fig. 5. Convergence histories for circular cylinder problem

Figure 5는 원형 실린더 문제의 수렴도를 나타낸 그림이다. 해당 문제에서도 전체적인 경향은  $\beta$ 가 커질수록 수렴도는 향상되는 모습을 보이나,  $\beta=5.0$  이상에서는 감소하려는 경향을 나타낸다.  $\beta=5.0, 10.0$ 인 경우에 한해 Chorin의 가상 압축성 기법보다 Turkel의 가상 압축성 기법이 더 나은 수렴성을 보이나 그 정도는 매우 미비하다.  $\alpha_u=2.0$ 인 경우 고유 벡터 행렬의 singularity 문제로 비교적 작은 값인  $\beta=0.1, 0.5$ 에서 발산하는 모습을 확인할 수 있다.

### 3.3 3D 범프 주위 난류 유동

난류(turbulent) 유동 검증을 위해 3D 범프(bump) 주위 유동을 해석하였다. 해당 case는 spanwise(y축) 방향으로 변형이 가해진 bump이다. 격자계는 Fig. 6과 같으며, NASA Langley Research Center에서 제공된 것을 사용하였다. 경계층 해석을 위해 벽면으로부터 첫 번째 격자 간격은  $y^+ < 1$ 을 만족한다. 레이놀즈 수는  $3.0 \times 10^6$ , CFL 수는 5이며, 난류 모델은  $k-\omega$  SST 모델을 사용하였다.

Figure 7은  $\beta=0.5$ 에서  $\alpha_u$ 에 따른 압력 계수 분포를 NASA의 CFL3D 결과와 비교한 것이다. CFL3D의

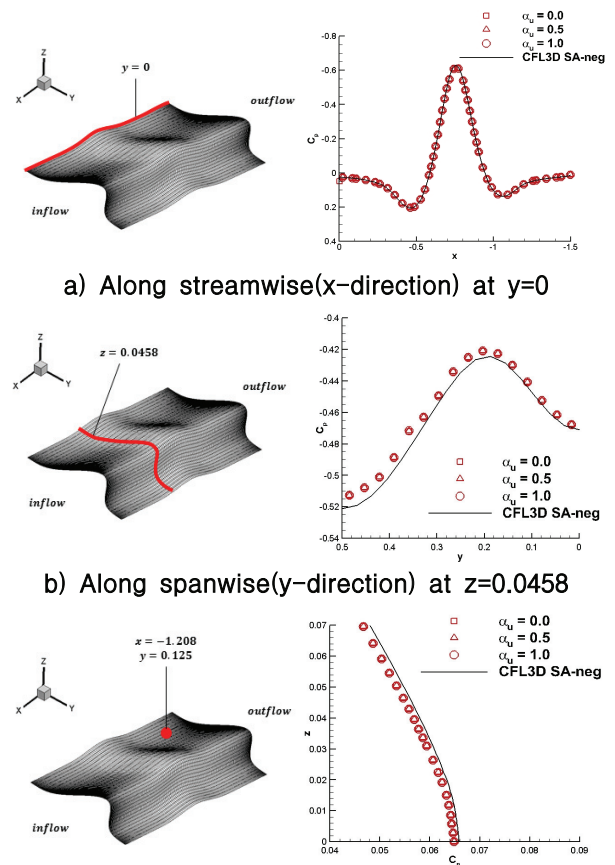


Fig. 7. Pressure coefficient distribution of 3D bump

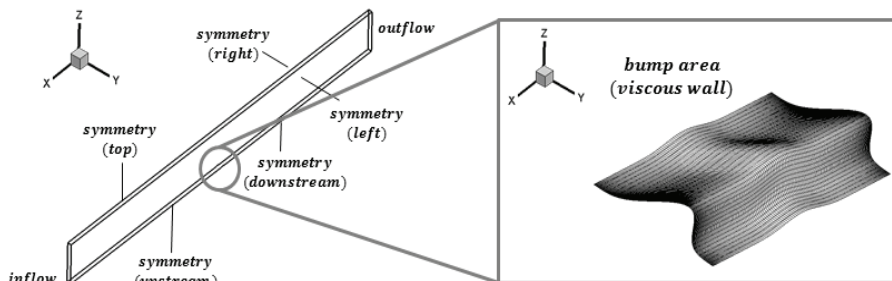


Fig. 6. 353x33x161 grid system for 3D bump

해석 조건은 Mach number 0.2로 비압축성 유동으로 가정할 수 있는 저마하수이다. Fig. 7의 a)와 b)는 각각 streamwise(x축) 그리고 spanwise(y축) 방향으로의 표면 압력 계수 분포로, CFL3D 결과와 일치 및 근사함을 볼 수 있다. Fig. 7의 c)는 vertical(z축) 방향으로의 압력 계수 분포로, 역시 CFL3D 결과와 근사함을 확인할 수 있다.

Figure 8은  $\beta = 0.5$ 에서  $\alpha_u$ 에 따른 난류 점성 계수를 CFL3D 결과와 비교한 모습이다.  $x = -0.3$ 에서의 난류 점성 계수 contour가 CFL3D 결과와 동일한 경향으로 나타남을 볼 수 있다.

Figure 9는  $\alpha_u$ 와  $\beta$ 에 따른 3D 범프 문제의 수렴도를 나타낸 것이다. 고유 벡터 행렬에 singularity 문제가 발생할 수 있는  $\alpha_u = 2.0$ 인 경우,  $\beta = 0.1$ 의 작은 값에 대해서만 발산한 나머지 경우와 달리  $\beta = 1.0$  까지도 해가 발산하는 모습을 보인다.  $\alpha_u = 2.0$ 인 경우를 제외하고 모두 비슷한 경향의 수렴도를 나타내고 있다. 이는 비점성, 층류 해석 결과와 달리 Turkel의 가상 압축성 기법의 효율성이 나타나지 않았음을

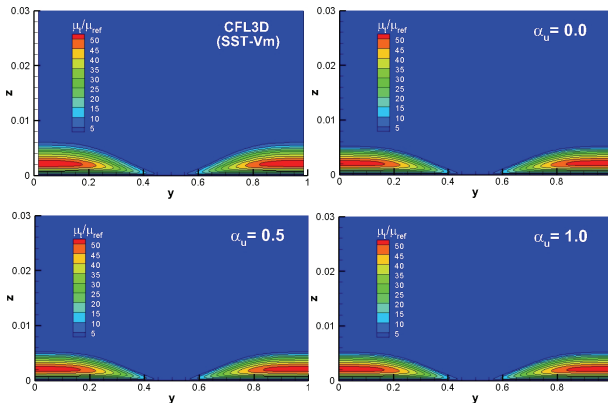


Fig. 8. Turbulent viscosity coefficient contours at  $x=-0.3$

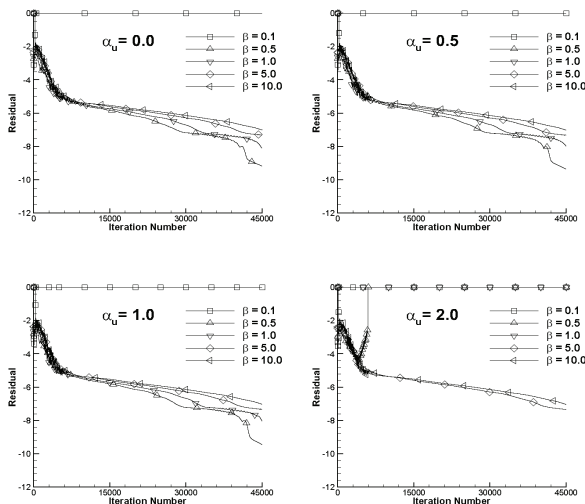


Fig. 9. Convergence histories for 3D bump problem

보여준다. 전체적으로  $\beta = 0.5$ 에서 수렴성이 가장 좋았고, 그 이상의  $\beta$ 값에서는 점차 수렴성의 감소 경향이 나타났다.

#### IV. 요약 및 향후 계획

본 연구에서는 예조건화 기법과 가상 압축성 기법 통합을 위한 사전 연구로써, 예조건화 기법이 적용돼 있는 압축성 해석자를 기반으로 가상 압축성 기법을 적용한 비압축성 해석자 개발 연구를 수행하였다. 이러한 과정은 본래 압축성 해석에 아무런 영향을 미치지 않으면서, 최소한의 변환을 거치도록 하였다. 이에 따라 확장된 해석자는 저마하수 압축성 해석 시에는 기존에 적용돼 있는 예조건화 기법을, 비압축성 유체 해석 시에는 가상 압축성 기법을 분리 적용한다. 이는 비압축성 유체 해석을 위해 비압축성 해석자를 별도로 개발하는 것이 아니라 압축성 해석자를 확장함으로써 이러한 과정을 생략한 것에 그 의미가 있다.

이를 위해 먼저 기존과 동일한 해로 계산되면서 압축성 방정식과 동일한 형태를 갖는 비압축성 지배 방정식을 구성하였다. 이어서 이러한 비압축성 지배 방정식에 가상 압축성 기법을 적용함에 있어 기존 가상 압축성 기법 행렬에 몇 가지 항들이 추가되는 것을 확인하였다. 또한 Roe의 근사 리만 해법 적용에 있어 압축성/비압축성 지배방정식에 공통으로 적용 가능한 Roe 평균을 계산하였다. 이러한 사항들이 적용된 확장된 해석자를 통한 비압축성 해석 검증에 대해 비점성, 층류 그리고 난류 유동에 대한 해석을 수행하였다.

해석 결과는 선행 연구자들의 수치 해석 결과와 비교하였다. 또한 압축성 방정식과 동일한 형태의 비압축성 지배방정식에 적용된 가상 압축성 기법의 수치적 특성을 살펴보기 위해 두 매개변수  $\alpha_u$ 와  $\beta$ 에 따른 해와 수렴도를 비교하였다. 계산 결과는 수렴된 해에 대해 선행 연구자들의 결과와 상당히 유사하거나 일치하는 모습을 보였다. 수렴도의 경우 작은  $\beta$ 값에 대해서는 전체적으로 수렴성이 좋지 않거나 발산하였다. 또한  $\beta$  값이 커질수록 수렴성이 향상되는 모습을 보였으며, 다시 감소하는 경향을 나타내는  $\beta$  값은 문제에 따라 다름을 확인하였다. 더불어  $\alpha_u = 0.0$ 인 Chorin의 기법보다  $\alpha_u$ 에 값이 존재하는 Turkel의 기법이 전반적으로 더 좋은 수렴성을 보였다. 고유 벡터 행렬에 singularity 문제가 발생할 수 있는  $\alpha_u = 2.0$ 에서 해가 발산하는 상황이 가장 많이 발생하였다.

향후 계획으로 다양한 case와 비정상 유동에 대한 해석 및 검증을 수행할 예정이다. 또한 해당 사전 연구를 기반으로 본 연구의 최종 목표인 가상 압축성 기법과 예조건화 기법의 통합 연구를 수행할 것이다. 이를 위해 가상 압축성 기법 행렬을 Choi & Merkle

[18] 그리고 Weiss & Smith[19] 등에 의해 개발된 여러 국소 예조건화 기법 행렬과 비교할 예정이다.

## References

- 1) Langtangen, H. P., Mardal, K. A. and Winther, R., "Numerical methods for incompressible viscous flow," *Advances in water Resources*, Vol. 25, 2002, pp. 1125~1146.
- 2) Chorin, A. J., "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems," *Journal of computational physics*, Vol. 135, No. 2, 1997, pp. 118~125.
- 3) Steger, J. L. and Kutler, P., "Implicit finite-difference procedures for the computation of vortex wakes," *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 4, 1977, pp. 581~590.
- 4) Chang, J. and Kwak, D., "On the method of pseudo compressibility for numerically solving incompressible flows," *In 22<sup>nd</sup> Aerospace Meeting*, 1984, p. 252.
- 5) Choi, D. and Merkle, C. L., "Application of time-iterative schemes to incompressible flow," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 10, 1985, pp. 1518~1524.
- 6) Lee, H. R., Kwak, E. K. and Lee, S., "Investigation on Characteristics of Modified Artificial Compressibility Method," *Proceeding of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences Fall Conference*, November 2010, pp.39~43.
- 7) Merkle, C., "Time-accurate unsteady incompressible flow algorithms based on artificial compressibility," *In 8<sup>th</sup> Computational Fluid Dynamics Conference*, 1987, p. 1137.
- 8) Soh, W. Y. and Goodrich, J. W., "Unsteady solution of incompressible Navier-Stokes equations," *Journal of computational physics*, Vol. 79, No. 1, 1988, pp. 113~134.
- 9) Lee, H. R., Yoo, I. Y., Kwak, E. K. and Lee, S., "Numerical Simulations of Two Dimensional Incompressible Flows Using Artificial Compressibility Method," *Korean Journal of Computational Fluids Engineering*, 2010, pp. 389~396.
- 10) Volpe, G., "On the use and the accuracy of compressible flow codes at low Mach numbers," *22<sup>nd</sup> Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*, 1991, pp. 1662.
- 11) Venkateswaran, S., and Merkle, L., "Analysis of preconditioning methods for the Euler and Navier-Stokes equations," *Lecture series-van Karemman Institute for fluid dynamics*, Vol. 3, 1999, pp. B1~B155.
- 12) Turkel, Eli., "Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations," *Journal of computational physics*, Vol. 72, No. 2, 1987, pp. 277~298.
- 13) Roe, P. L., "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes," *Journal of computational physics*, Vol. 43, No. 2, 1981, pp. 357~372.
- 14) Panton, R. L., *Incompressible flow*, John Wiley & Sons, 2013.
- 15) Michelassi, V., Migliorini, F. and Martelli, F., "Preconditioned scalar approximate factorization method for incompressible fluid flows," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 7, No. 4, 1996, pp. 311~325.
- 16) Kiris, C., Housman, J. and Kwak, D., "Comparison of artificial compressibility methods," *Computational Fluid Dynamics*, 2004, pp. 475~480.
- 17) Turkel, E., "Review of preconditioning methods for fluid dynamics," *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 12, No. 1-3, pp. 257~284.
- 18) Choi, Y. H. and Merkle, C. L., "The application of preconditioning in viscous flows," *Journal of computational physics*, Vol. 105, No. 2, 1993, pp. 207~223.
- 19) Weiss, J. M. and Smith, W. A., "Preconditioning applied to variable and constant density flows," *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 11, 1995, pp. 2050~2057.
- 20) Lee, H. and Lee, S., "Convergence characteristics of upwind method for modified artificial compressibility method," *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 12, No. 4, 2011, pp. 318~330.
- 21) Lee, S. and Whan Choi, D., "On coupling the Reynolds averaged Navier - Stokes equations with two equation turbulence model equations," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 50, No. 2, 2006, pp. 165~197.
- 22) Dennis, S. C. R. and Chang, G. Z., "Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 42, No. 3, 1970, pp. 471~489.
- 23) Kawaguti, M., "Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow around a circular cylinder at Reynolds number 40," *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 8, No. 6, 1953, pp. 747~757.
- 24) Takami, H. and Keller, H. B., "Steady two dimensional viscous flow of an incompressible fluid past a circular cylinder," *The Physics of Fluids*, Vol. 12, No. 12, 1969, pp. II~51.