

동력전달 시스템의 최적화를 위한 축 해석 모델 개발

이주연*, 김수철*[#]

*한국기계연구원 스마트산업기계연구실

Development of Shaft Analysis Model for Power Transmission System Optimization

Ju-Yeon Lee*, Su-Chul Kim*[#]

*Korea Institute of Machinery and Materials

(Received 15 February 2021; received in revised form 24 February 2021; accepted 27 February 2021)

ABSTRACT

This study develops a shaft analysis model for the optimization of the power transmission system. The finite element method was used for the shaft analysis model. The shaft and gear were assumed Timoshenko beams. Strength was evaluated according to DIN 743, and gear misalignment was calculated through ISO 6336 and the coordinate system rotation. The analysis software for a power transmission system was developed using Visual Studio 2019. The analysis results of the developed program were compared with those of commercial software (MASTA, KISSsoft, and Romax). We confirmed that the force, deformation, and safety factors at each node were the same as those of the commercial software. The absolute value of the gear misalignment of the developed program and commercial software was different. However, the gear misalignment tended to increase with increasing the displacement in the tooth width direction.

Key Words : Finite Element Method(유한요소법), Gear Misalignment(기어 정렬오차), Power Transmission System(동력전달 시스템), Strength Evaluation(강도평가), Timoshenko Beam(티모센코 보)

1. 서 론

동력전달 시스템은 축, 기어, 베어링 등으로 구성되며, 평행하게 구성된 축과 기어는 동력을 전달하는 가장 일반적인 방법이다. 동력전달 시스템의 최적 설계는 원가 절감 및 효율 증대를 위해 중요하다. 그중 축의 형상 최적화는 무게 저감에 상당한

이점이 있어 시스템 경량화에 큰 도움을 준다. 축의 최적 설계 시 제약조건으로 고려해야 하는 설계 인자로는 강도와 변형이 있다. 축은 최적설계 후에도 적절한 강도를 확보해야 하며, 기어의 정렬오차 등에 악영향을 미치지 않도록 적절한 범위내에서 변형되어야 한다.

축의 강도 및 변형은 작동조건에 따라 발생하는 힘과 모멘트에 의해 결정된다. MASTA, KISSsoft, ROMAX 등 대부분의 상용 소프트웨어에서는 이를 계산하기 위해 축을 보 형상으로 가정하고 유한요

Corresponding Author : sckim@kimm.re.kr

Tel: +82-42-868-7918, Fax: +82-42-868-7474

소법을 적용하여 축의 힘과 변위를 해석한다.

축의 강도는 일반적으로 정적강도 및 피로 강도로 나눌 수 있다. 이를 평가하기 위한 대표적인 국제 규정으로는 DIN 743이 있다. Bhat^[1]은 DIN 743에 기반하여 7단 DCT 축의 각도와 위치에 따른 축의 응력과 수명을 계산하였다. Lee et al.^[2]는 선박용 디젤엔진의 크랭크 축 강도 해석을 위해 DIN 743을 활용하였다. 이와 같이 많은 연구에서 축 강도 평가방법으로 DIN 743을 따르고 있다.

축 변형을 계산하기 위해 보 형상 구조물의 거동을 수학적으로 표현한 이론은 대표적으로 오일러-베르누이 보 이론과 티모센코 보 이론이 있다. 오일러-베르누이 보 이론은 외부에서 가한 일과 구조물 내부에 저장되는 굽힘 변형에너지는 같다는 원리로부터 유도되며, 구조물의 두께가 증가 할수록 전단변형이 증가하기 때문에 정확도가 떨어지게 된다. 티모센코 보 이론은 이러한 단점을 보완하기 위해 전단변형과 회전 관성에 대한 영향을 추가한 이론이다.^[3-4] Song et al.^[5]은 오일러 베르누이 보 이론을 기반으로 절삭 공정을 해석하며 발생하는 문제점을 지적하고, 절삭물을 티모센코 보로 가정하여 해석하고 개선된 결과를 도출하였다.

축 변형으로부터 기어의 정렬오차를 계산하기 위한 방법은 많은 선행연구에서 다양하게 제시되었다. 일반적으로 축과 기어의 형상은 티모센코 보로 가정하였고 기어 치 강성은 기준원(reference circle), 이뿌리원(root circle), 피치원(pitch circle) 등에서의 치 강성을 이용하였다.^[6-7] 축의 변형량을 작용선 상으로 나타내기 위한 기준으로는 축직각 압력각(transverse pressure angle)을 이용하는 방법^[8], 치직각 압력각(normal pressure angle)을 이용하는 방법^[9] 등 기준이 다양하다. Ganti et al.^[10]는 치직각 압력각과 축직각 압력각을 각각 계산 하여 총 정렬오차는 그 합으로 나타내었다.

상용소프트웨어는 축 해석을 위해 필요한 형상 계수, 기어접촉강성 등 다양한 설계변수들에 대한 접근이 어렵다. 또한 축 강도평가와 기어 정렬오차를 계산하는 방법이 상용소프트웨어마다 다르며, 계산 과정과 정의가 명확히 제시 되어있지 않고 사용자가 직접 수식을 정의하여 계산하기도 쉽지 않다. 따라서 상용소프트웨어를 이용한 축의 최적설

계는 많은 제약 하에서 수행되어야 한다. 본 연구는 동력전달 시스템의 최적화를 위해 명확한 정의와 평가방법에 기반한 축 해석 모델을 개발하기 위해 수행되었다. 개발된 해석 모델을 기반으로 소프트웨어를 개발하였으며, 상용 해석 소프트웨어와 비교 및 검증을 수행하였다.

2. 재료 및 방법

2.1 유한요소 해석 모델 개발

2.1.1 축 요소 해석 모델

기어 시스템에서의 축은 각 요소에서 병진자유도(translation)와 회전자유도(rotation)를 각각 3개씩 총 6개의 자유도를 가진 티모센코 보 형상으로 가정하였다. Fig. 1과 같이 z축 방향 변형은 단면의 기울기인 β 에 전단각이 추가 된다. 임의의 좌표(x, y, z)에서 x, y, z방향의 변형량(u_x, u_y, u_z)는 식 1-3과 같이 정의 된다. φ 은 중립면의 기울기, β 는 단면의 회전각, γ 는 전단각을 나타내며 φ 는 회전각과 전단각의 합으로 정의 된다. ($\varphi = \theta + \gamma$) 힘과 모멘트의 평형조건과 티모센코 보 이론을 이용하여 도출한 축의 강성 행렬은 Fig. 2와 같다.

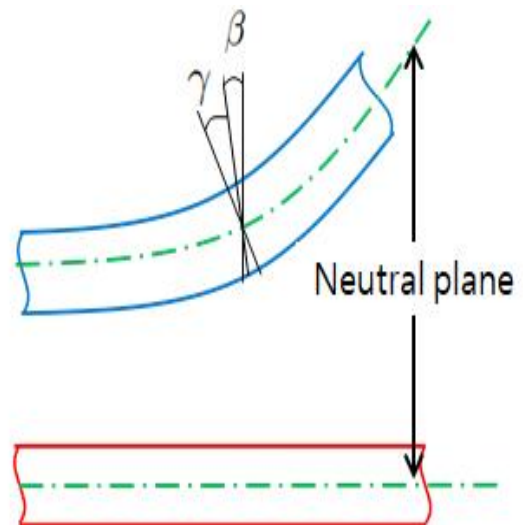


Fig. 1 Timoshenko beam theory model

$$\begin{pmatrix}
 \frac{E^*A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E^*A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12^*E^*I}{((1+Q)^*L^3)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & -\frac{12^*E^*I}{((1+Q)^*L^3)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} \\
 0 & 0 & \frac{12^*E^*I}{((1+Q)^*L^3)} & 0 & -\frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12^*E^*I}{((1+Q)^*L^3)} & 0 & -\frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{G^*2^*I}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G^*2^*I}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & \frac{(4+Q)^*E^*I}{(1+Q)^*L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & \frac{(2-Q)^*E^*I}{(1+Q)^*L} & 0 \\
 0 & \frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+Q)^*E^*I}{(1+Q)^*L} & 0 & -\frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-Q)^*E^*I}{(1+Q)^*L} \\
 -\frac{E^*A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E^*A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12^*E^*I}{((1+Q)^*L^3)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & \frac{12^*E^*I}{((1+Q)^*L^3)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} \\
 0 & 0 & -\frac{12^*E^*I}{((1+Q)^*L^3)} & 0 & \frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{12^*E^*I}{((1+Q)^*L^3)} & 0 & \frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{G^*2^*I}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G^*2^*I}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & \frac{(2-Q)^*E^*I}{(1+Q)^*L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & \frac{(4+Q)^*E^*I}{(1+Q)^*L} & 0 \\
 0 & \frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-Q)^*E^*I}{(1+Q)^*L} & 0 & -\frac{6^*E^*I}{((1+Q)^*L^2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+Q)^*E^*I}{(1+Q)^*L}
 \end{pmatrix}$$

Fig. 2 Stiffness matrix of timoshenko beam

$$u_x(x, y, z) = w(z) \quad (1)$$

$$u_y(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

$$u_z(x, y) = -x\varphi(z) \quad (3)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

$$Q = \frac{12^*E^*I}{0.9\pi^*G^*\left(\frac{D}{2}\right)^2^*L^2} \quad (5)$$

I = 단면이차모멘트

E = 영률

L = 요소의 길이

ν = 푸아송 비

$$K_{bearing} = \begin{pmatrix}
 As_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & As_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & As_z & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & Ts_x & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & Ts_y & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \quad (6)$$

As_x = x축 방향 강성

As_y = y축 방향 강성

As_z = z축 방향 강성

Ts_x = x축 회전 강성

Ts_y = y축 회전 강성

2.1.2 베어링 요소 해석 모델

베어링은 회전축과 지지대의 마찰을 줄여주는 기계요소로, 축 방향 회전이 자유로운 특징을 가지고 있다. 따라서 축 방향을 제외한 5개의 자유도에 대한 강성을 가지고 있는 스프링요소로 구성하였다. 베어링 요소의 절점은 축의 절점과 고정된 절점(변형 = 0)으로 구성하였다. 따라서 베어링 요소의 강성행렬은 식 6과 같다.

2.1.3 기어 치 강성 모델

기어치강성은 reference circle을 기준으로 총 5개의 축 요소의 집합으로 정의하였다. 기어의 강성행렬은 기어의 물림으로 인한 단일 치면 접촉강성 (Single contact stiffness, c')이 고려되어야 한다. 단일 치면 접촉강성 (c')은 ISO 6336 Standard^[11]에 따라 계산된 값을 사용하였다. 기어 쌍의 접촉강성의 작용방향은 기어의 압력각 및 비틀림 각에 의해 결정되며, 기어의 물림을 고려한 강성행렬은 식 7과 같다.

$$\begin{aligned}
 k_G = & [-\sin(S) \cdot \cos(B), \cos(S) \cdot \cos(B), \\
 & sgn \cdot \sin(B), Rp \cdot \sin(S) \cdot \sin(B), \\
 & -Rp \cdot \cos(S) \cdot \sin(B), sgn \cdot Rp \cdot \cos(B), \\
 & \sin(S) \cdot \cos(B), -\cos(S) \cdot \cos(B), \\
 & -sgn \cdot \sin(B), Rw \cdot \sin(S) \cdot \sin(B), \\
 & -Rw \cdot \cos(S) \cdot \sin(B), sgn \cdot Rw \cdot \cos(B)]
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$K_{Gear} = c' * (k_G * k_G')$$

c' = 기어 단일 접촉 강성

S = 작동 축직각 압력각

B = 작동 비틀림각

R_p = 피니언 기어의 기준원

R_w = 휠 기어의 기준원

2.1.4 전체 시스템 해석 모델

시스템을 해석하기 위해 각각의 구성 요소를 결합해야 한다. 축 요소는 Fig. 3과 같이 선 요소로 결합한다. 각 요소의 강성 행렬을 대각선으로 배치하고 공통 절점의 경우 값을 합하여 구성한다. 베어링의 강성행렬은 스프링 요소로 가정하여 Fig. 4과 같이 연결된 두 절점에 더하도록 배치한다. 기어의 강성행렬은 티모센코 보로 가정한 축 요소 성분과 접촉강성에 의한 성분을 모두 가진다. 따라서 축 요소와 같이 대각선으로 배치하여 결합한 뒤 스프링 요소와 같이 해당 절점에 추가로 배치한다.^[12]

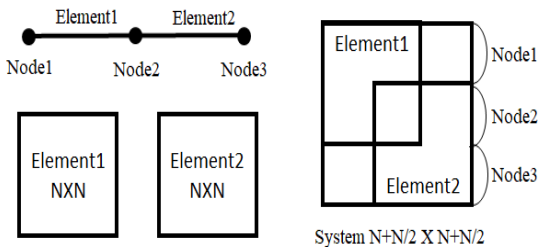


Fig. 3 Assembly of linear element

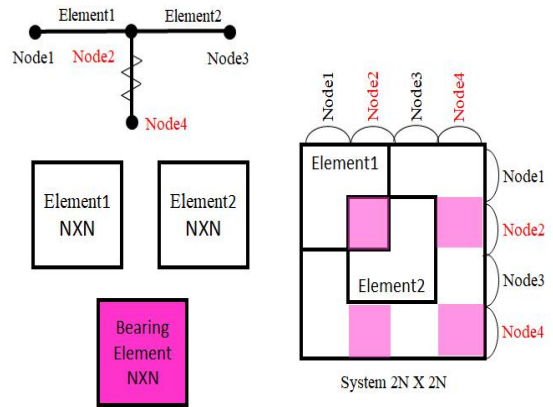


Fig. 4 Assembly of spring element

2.2 축 강도평가 해석 모델

축 강도는 축 단면의 반경, 재질 및 형상에 대한 데이터와 단면에서 발생하는 힘과 모멘트를 이용하여 국제 규격인 DIN 743:2012^[13-16]으로 평가하였다. 축 강도평가는 소성변형에 대한 정적 안전율과 반복하중에 의한 피로파괴 안전율로 나뉜다. 각각의 계산 과정은 Fig. 5와 같다.

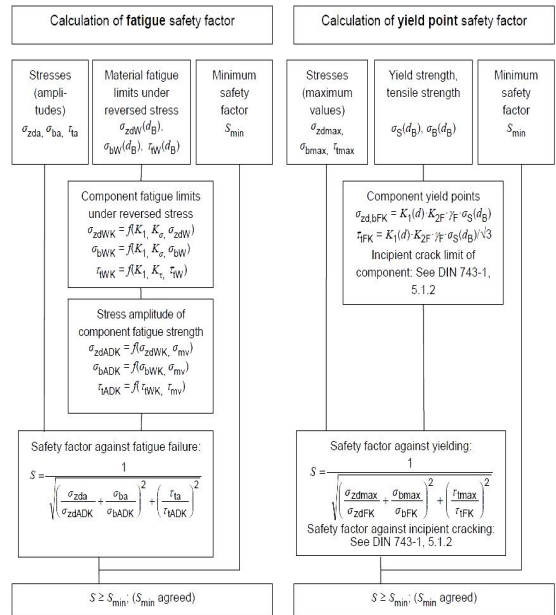


Fig. 5 Safety factor calculation flowchart(DIN 743, 2012)

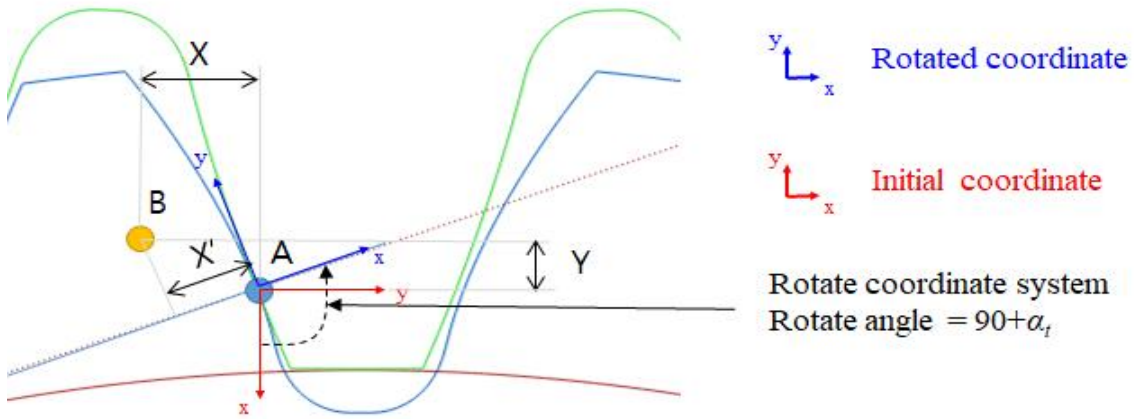


Fig. 6 Definition of gear mesh misalignment

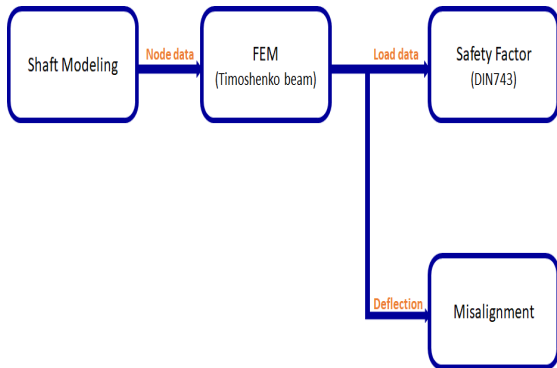


Fig. 7 The entire analysis process of the developed software

2.3 기어 정렬오차 해석 모델

기어 정렬오차는 기어의 이상적인 물림위치(A)와 실제 치 물림 위치(B)의 기어의 작용선 상에서의 편차로 정의된다. 따라서 기어의 정렬오차를 정의하기 위해 Fig. 6과 같이 기준좌표계로 표현된 기어의 변형량(X, Y)을 작용선을 x 축으로 하는 회전좌표계(X', Y')로 변환하였다. 기어정렬오차는 식 8과 같이 변환된 X 좌표(X')의 절댓값으로 정의하였다.

$$X' = X \cos(90 + \alpha_t) - Y \sin(90 + \alpha_t) \quad (8)$$

$$\alpha_t = \text{작동 축직각 압력각}$$

2.4 동력전달 시스템 해석 소프트웨어 개발

동력전달 시스템 해석 소프트웨어는 C# 기반으로 개발하였다. 시스템 모델링은 축, 기어, 베어링, 힘 요소를 이용하여 모델링 할 수 있도록 구성하였으며, 강도평가에 영향을 주는 스플라인과 노치도 모델링이 가능하도록 구성하였다. 동력전달 시스템의 전체 해석 프로세스는 Fig. 7과 같다. 시스템 모델링 데이터 구성을 통해 전체 시스템의 구성요소를 유한요소로 정리한다. 시스템 유한요소 해석을 통해 각 절점에서 힘과 변형량이 결정되며, 도출된 변형량을 기반으로 축 강도평가와 기어정렬오차 해석이 수행된다. 각각의 해석 결과는 표와 차트로 확인할 수 있다.

3. 결과 및 분석

3.1 기어시스템 해석 프로그램 검증

개발된 프로그램의 해석 결과를 검증하기 위해 예제를 통해 해석 결과를 상용 소프트웨어의 결과와 비교하였다. 해석 예제는 Fig. 8과 같이 한 쌍의 헬리컬 기어, 2개의 축, 2개의 베어링, 입·출력 토크로 이루어진 동력전달 시스템이며, 모델의 제원은 Table 1과 같다.

유한요소 해석을 통해 동력전달 시스템의 각 절점에서의 힘과 변형량을 도출하였다. Fig. 9은 상용

소프트웨어(MASTA)와 개발된 소프트웨어의 힘 분석 결과이며, Fig. 10은 변형량 분석 결과이다. 각각의 절점에서 계산된 값의 편차는 모두 0으로 개발된 소프트웨어의 결과와 상용 해석 소프트웨어의 결과가 일치함을 확인할 수 있다.

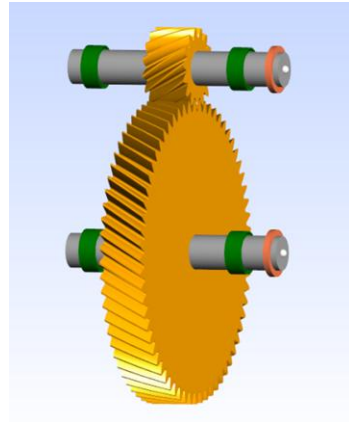
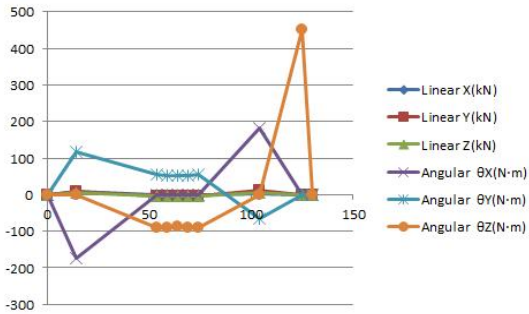


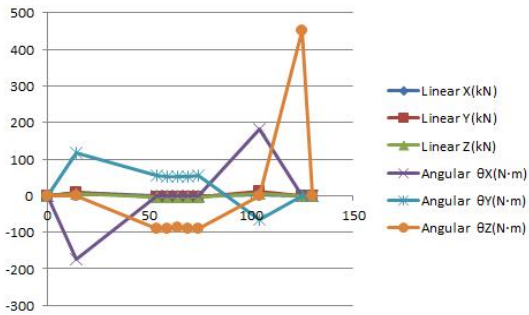
Fig. 8 Shape of example 1

Table 1 Specification of example 1

Shaft			
Endurance Limit (MPa)			500
Bending Stresses (MPa)	σ bW		500
Compression/Tensio Stresses (MPa)	σ zdW		400
Torsional Stresses (MPa)	τ tW		300
Density(kg/m3)	ρ		7800
Modulus Of Elasticity(MPa)	E		207000
Poisson's Ratio	ν		0.29
Gear		Pinion	Wheel
Number of Teeth	z	15	64
Normal Module(mm)	mm		2.25
Normal Pressure Angle(°)	α n		17.5
Helix Angle(°)	β		30
Hand		Left	Right
Transverse Pressure Angle(°)	α t		20.0053
Reference Diameter(mm)	d	38.97	166.27
Bearing			
Radial Stiffness(N/m)			10^9
Tilt Stiffness(Nm/rad)			10^6

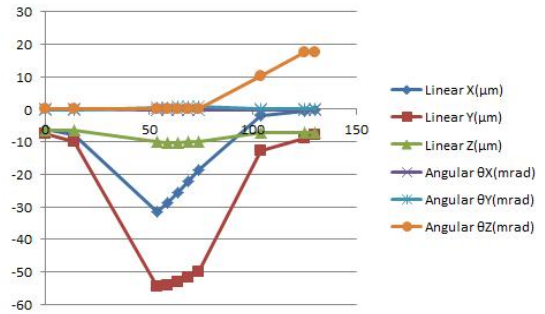


(a) Commercial S/W

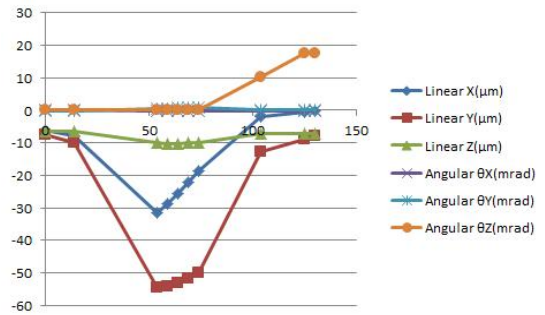


(b) Developed S/W

Fig. 9 Finite element analysis of force



(a) Commercial S/W



(b) Developed S/W

Fig. 10 Finite element analysis of displacement

Table 2 Safety factor of the shaft

Position (mm)	Fatigue			Yield		
	Commercial S/W	Developed S/W	Error	Commercial S/W	Developed S/W	Error
0	-	-	-	-	-	-
14	8.524	8.524	0	6.207	6.207	0
54	1.121	1.121	0	0.912	0.912	0
59	0.958	0.958	0	0.663	0.663	0
64	0.855	0.855	0	0.538	0.538	0
69	0.793	0.793	0	0.666	0.666	0
74	0.767	0.767	0	0.564	0.564	0
104	0.690	0.690	0	0.483	0.483	0
125	0.750	0.750	0	0.539	0.539	0
130	-	-	-	-	-	-

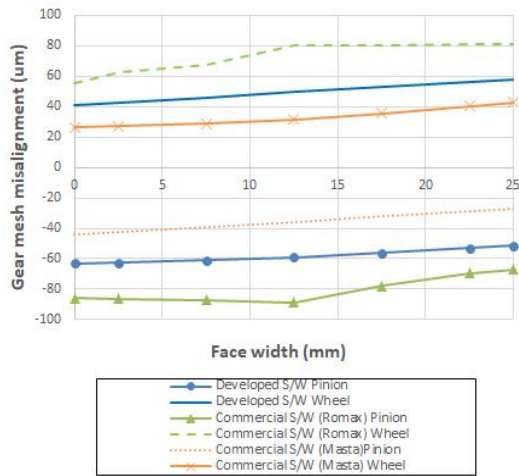


Fig. 11 Gear mesh misalignment results

축 강도평가는 계산 결과에 대한 상세 리포트를 보여주는 상용 소프트웨어인 KISSsoft와 비교하였으며, 개발된 소프트웨어와 상용소프트웨어의 결과가 일치함을 Table 2와 같이 확인하였다. 해당절점에 가해지는 힘이 0인 경우 안전율은 계산되지 않는다.

Fig. 11는 상용 소프트웨어와 개발된 프로그램의 기어정렬오차 해석 결과이다. 기어 정렬오차는 MASTA, Romax 와 개발된 소프트웨어의 결과의 절대값은 다르나 경향은 동일하게 나타나는 것을 확인하였다. 각각의 결과 값은 모두 치폭 방향 변위가 커질수록 증가하는 경향을 나타내었다. 각 절점에서 축의 변형량은 동일함으로 개발된 소프트웨어와 상용 소프트웨어에서의 기어 정렬오차 결과 값의 차이는 기어 정렬오차의 정의의 차이로부터 기인한 것으로 판단된다.

4. 결론

본 연구는 동력전달 시스템의 최적화를 위한 축 해석 모델을 개발하기 위해 수행되었다. 축 강도평가 및 변형량 해석 이론을 정리하고 유한요소해석 모델을 개발하였다. 개발한 해석 모델을 기반으로 소프트웨어를 개발하였으며, 상용 해석 소프트웨어와 비교 및 검증은 수행하였다.

1. 개발된 유한요소 해석 모델의 축과 기어는 티모센코 보로 가정하여 축 요소로 구성하였으며 베어링은 스프링 요소로 구성하였다. 각 요소의 강성 행렬을 작성하고 시스템행렬을 구성하여 유한요소 모델을 해석하였다. 축 강도평가는 DIN 743에 따라 계산하였으며, 기어정렬오차는 ISO 6336과 좌표계 회전을 통해 계산하였다.
2. 동력전달 시스템 해석 소프트웨어를 개발하였다. 소프트웨어는 모델링을 기반으로 유한요소 해석을 통해 각 절점에서의 힘과 모멘트, 변형량 해석을 수행하고 이를 바탕으로 강도평가와 기어정렬오차를 계산한다.
3. 예제 모델을 통해 개발된 프로그램의 축 변형량, 힘, 강도평가 해석 결과와 상용 소프트웨어의 결과가 일치함을 확인하였다.
4. 개발된 프로그램과 상용소프트웨어의 기어 정렬오차 해석 결과의 절대값은 다르나 경향성은 일치하였다. 이는 기어정렬오차의 정의 차이로 인해 상이한 결과가 도출된 것으로 판단된다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소의 지원(No. UC170031JD)으로 수행되었습니다.

REFERENCES

1. Bhat, M., "New Seven Speed DCT Transaxle and Effect of Angular Positioning of Shaft" SAE Technical Paper. 2020.
2. Lee, D. C., Park, S. H., Kang, D. S., and Kim, T. U. "A study on the strength analysis of crankshaft for 4 stroke marine diesel engine," In Proceedings of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering Conference, The Korean Society for Noise and Vibration Engineering. 2006.
3. Lee J. Y., "Finite Elements Method," Munundang, pp. 23-26, 2011.
4. Logan L. D., A first course in the finite element method, Cengage, Stamford, pp. 78-91, 2017.

5. Song, G., Li, H., Hou, J., Li, S., Wen, B. "A stability analysis of turning process considering the workpiece as a timoshenko beam," *Journal of Vibroengineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 1927-1939, 2013.
6. Koide, T., Oda, S., Matsuura, S., Kubo, A. "Equivalent misalignment of gears due to deformation of shafts, bearings and gears," *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, Vol. 46, No. 4, pp. 1563-1571, 2003.
7. Ming, Y., Liu, H. Q. "A dynamic modeling method for helical gear systems," *Journal of Vibroengineering*, Vol. 19, No. 1, pp. 111-124, 2017.
8. Palermo, A., Mundo, D., Hadjit, R., Desmet, W. "Multibody element for spur and helical gear meshing based on detailed three-dimensional contact calculations," *Mechanism and machine theory*, Vol. 62, pp. 13-30, 2013.
9. Jiang, H., Shao, Y., Mechefske, C. K., Chen, X. "The influence of mesh misalignment on the dynamic characteristics of helical gears including sliding friction," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 29, No. 11, pp. 4563-4573, 2015.
10. Ganti, V., Dewangan, Y. K. and Subramanian, G. "Influence of Gear Web and Macro Geometry on Mesh Misalignment," *SAE Technical Paper*, 2016.
11. ISO 6336, "Calculation and load capacity of spur and helical gears," 2006.
12. Peter K., *MATLAB Guide to Finite Elements*, Springer, pp. 183-195, 2007.