韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2021.35.1.119
제 35집 제 1호, 2021. 3. 119-136

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 35, No. 1, Mar. 2021. 119-136

수학 사사과정에서 공학도구를 이용한 창의력 증진

부 덕 훈 (충남대학교, 교수)

과학영재교육원 사사과정에서 Mathematica, Microsoft Excel, GeoGebra 등 공학도구를 사용하여 탐구과정을 진행하였다. 탐구팀은 주제에 따라 적절한 공학도구를 선정하였으며, 공학도구를 사용하여 특정한 상황에서 문제를 해결하고 그 결과를 관찰하여 규칙을 찾았으며, 찾은 규칙을 일반화하여 수학적으로 증명하였다. 수학 전문 소프트웨어인 Mathematica를 순환소수의 순환마디와 순환마디의 길이를 구하는 탐구활동에서 사용하였으며, 스프레드시트 소프트웨어인 Microsoft Excel을 이용하여 Beatty 수열을 탐구하였다. 동적 기하 소프트웨어인 GeoGebra를 Voronoi 다이어그램의 탐구활동에 사용하였으며 Voronoi 게임을 고안하고 게임을 진행하는 Voronoi 게임판을 만들었다. 공학도구를 이용하여 문제를 해결하고, 결과를 관찰하여 찾아낸 성질들을 수학적으로 표현하고 일반화하는 과정에서 사사과정 학생들의 수학적 창의력과 논리적 사고력이 증진되었다.

Ⅰ. 서론

지식·정보화 사회에서 지식 관리자, 새로운 지식창출자로서의 영재들을 발굴하고 지도하는 것은 국가경쟁력 차원에서 매우 중요한 일이며, 동시에 수학 영재교육의 필요성도 여기에 있다고 말할 수 있다. 따라서 수학 영재교육은 영재 스스로 정보를 탐색하고 조직하여 새로운 정보를 창출할 수 있는 능력을 개발하여야 하고, 영재 학생의 특성에 맞는 교육과정과 프로그램의 개발을 동반하여야 한다. 그것은 영재라 할지라도 교사 중심의 일방통행식 강의에서는 그들이 가지고 있는 재능을 발휘하지 못하거나 사라질 수 있기 때문이다. 수학영재는 광범위한 수학적 재능을 가지고 있으며 수학의 여러 분야에서 강한 지적 욕구를 분출한다. 따라서 수학영재의 재능과 지적 호기심을 충족시켜 줄 수 있는 새로운 형태의 교수·학습 방법이 요구된다.

교육부는 2000년 영재교육 진흥법을 제정 · 공포한 후, 제1차 영재교육진흥종합계획(2003~2007년), 제2차 영재교육진흥종합계획(2008~2012년) 그리고 제3차 영재교육진흥종합계획(2013~2017년)을 시행하였으며 그동안 시행된 영재교육의 추진 성과와 한계를 분석하여 새로운 영재교육진흥종합계획의 추진 방향을 정하여 2018년 제4차 영재교육진흥종합계획(2018~2022)을 발표하였다. 제4차 영재교육진흥종합계획에서는 지능정보기술을 통해 산업의 구조변화를 촉발하는 4차산업혁명 변화에 대응하는 영재교육 체계를 마련하고, 4차산업혁명에 대비한 새로운 영재교육 비전과 국가의 미래를 견인할 창의·융합형 인재 양성을 위한 영재교육 혁신의 필요함을 추진 배경으로 하였다. 그리고 5대 추진 분야로 학생 수요 중심의 영재교육을 통한 재능 계발, 영재 선발의 다양성 제고, 영재교육의 연계성 확보, 영재교육 담당교원의 전문성 강화, 영재교육 지원체계 구축을 선정하였다(교육부, 2018). 제4차 영재교육진흥종합계획에서 교육부(2018)는 5대 추진 분야 중 첫째 분야인 학생 수요 중심의 영재교육을 통한 재능 계발의 세부 항목 중 하나인 영재교육 프로그램 질적 고도화 및 다양화의 추진을 위하여 교과 중심의 프로그램에서 핵심 역량 중심 프로그램으로의 개편을 권장하고 있으며, 이를 위하여 미래사회 핵심 역량으로 강조되는 창의적 문제해결력, 소통, 협업, 창의성, 혁신 중심으로 프로그램의 목표 및 내용을 재구조화하고 영재교육대상 학생들이 사회적 책무성과 윤리의식을 가질 수 있도록 영재교육프로그램에 관련 내용을 포함하도

* 접수일(2021년 3월 2일), 심사(수정)일(2021년 3월 19일), 게재확정일(2021년 3월 25일)
* MSC2000분류 : 97U70
* 주제어 : 공학도구, 사사과정, Mathematica, Microsoft Excel, GeoGebra
* 이 연구는 충남대학교 학술연구비의 지원을 받았음.

록 권장하고 있다.

Renzulli(1978)는 영재가 갖는 특성으로 평균 이상의 지능, 창의성, 높은 과제집착력을 꼽았으며, 그 중 과제집착력은 실제행동으로 전환되는 동기로서 특정 문제나 과제 수행에 집중되는 에너지를 의미하며, 창의적이고 생산적인 사람들은 일반인들보다 훨씬 더 과제 지향적이고 그들의 일에 집중한다고 하였다.

특히 수학영재 학생들에게서는 또래의 일반 학생들과 비교할 때 추상화 능력, 논리력, 지적 능력 등이 월등히 높게 나타난다. 이경화, 안민웅, 고은성, 최성이, 문성재(2019)는 수학영재 학생들이 우수한 능력을 보이는 대표적인 수학적 능력으로 추상화, 일반화, 그리고 논리적 추론 능력을 지적하였다. 수학영재 학생들은 구체적 수량 관계와 공간에 존재하는 모양을 추상화하고, 관계와 연결의 구조를 가진 형식적 구조를 조작하는 능력이 우수하며, 또한 수학 내용을 일반화하고, 본질적 요소와 비본질적 요소를 식별하는 추상화 능력이 뛰어날 뿐만 아니라 증명, 연역 추론에 바탕이 되는 논리적 추론 능력이 우수하다고 하였다(이경화 외, 2019).

따라서 수학영재를 대상으로 하는 영재교육에서 지식전달 위주의 학습, 입시를 대비하는 학습 등 수동적으로 참여하는 학습은 바람직하지 않으며, 학생들이 자기 주도적 학습을 할 수 있도록 하는 것이 필요하다. 그리고 학생의 수준에 적당하고, 창의적으로 활동하고 성취감을 느끼게 해주는 다양한 형태의 수학영재 교수･학습 자료가 개발되어야 한다.

수학영재교육에서 교수･학습 자료에 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 수학공부가 어렵다는 인식을 완화하고 수학적 사고력을 향상하는 연구들을 찾아볼 수 있다. 황우형과 차순규(2002)는 컴퓨터의 시각화 기능이 학생들로 하여금 추상적인 수학 내용을 직관적으로 사고하게 할 수 있을 뿐만 아니라 수학적인 경험을 제공할 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 줄 수 있다고 하였다. 그리고 강문봉(2009)은 수학 문제에 주어진 조건을 변경해서 문제를 해결하는 경우, 즉 What if not 인 경우에 그 결과를 추론해 보고, 이를 소프트웨어로 확인하는 과정에서 ‘왜 그렇게 되는지’를 생각해 봄으로써 수학적 사고력이 신장될 수 있다고 하였다. 그리고 미국의 NCTM(1989)은 학생들의 수학 문제를 탐구하고 해결하는 도구로 계산기와 컴퓨터를 적절하게 사용할 필요가 있음을 강조하고 있다. 특히 평면도형의 교수･학습에서 컴퓨터 프로그램을 활용하면 평면도형에 대한 시각화를 바탕으로 학습자 스스로 수학적 지식을 추론하고 그 사실을 확인하는 능동적 학습환경이 제공될 수 있다고 하였다.

중등학교 수학 교수·학습에 Mathematica, Microsoft Excel, GeoGebra 등 컴퓨터 소프트웨어를 적용하는 사례를 많이 찾아볼 수 있다. Mathematica는 수학을 비롯하여 이공계 분야의 연구와 교육에서 활발하게 사용되고는 전문 소프트웨어로서 다양한 분야에 사용되는 뛰어난 성능을 가지고 있다. 중등학교 교사들이 사용하기에는 다른 두 소프트웨어보다 불편하고 라이센스 문제가 있지만, 엄태홍(2006)과 우연희(2008)는 고등학교 학생을 대상으로 수학 교수·학습에 Mathematica를 사용하는 방안을 제시하고 있다. Mathematica의 기능이 뛰어나지만, 명령어의 사용이 어렵고, 계산 결과의 표시 등이 직관적이지 않아 교사들이 Mathematica를 중등학교 교육과정에 사용하기에는 불편함이 크다. 하지만, 지도교수를 중심으로 소수의 학생의 팀 활동으로 진행되는 영재교육원 사사과정에서는 탐구하는 주제에 따라 Mathematica가 유용한 도구가 될 수 있다.

Microsoft Excel은 회계 관리 등 전문적인 분야에서도 사용되는 대표적인 스프레드시트 소프트웨어이며 중등학교 수학과의 수업에서 필요한 기능을 넘어서는 전문 소프트웨어이다. 하지만 Microsoft Excel은 중학교 학생들이 사용하는 거의 모든 컴퓨터에 기본적으로 설치되어있어 학생들에게 친숙하며 기본적인 사용 방법을 알고 있는 경우가 많다. 많은 수를 여러 가지 방법으로 계산할 때 함수를 사용하여 많은 계산을 한 번에 처리하고 그 결과를 화면에 모두 표시하는 Microsoft Excel의 기본적인 기능을 활용하여 중등학교 교수 학습에서 다양하게 이용하고 있다(고래영, 2011; 고명석, 2005; 유재근, 이정아, 박문환, 장혜원 2020). 특히 Microsoft Excel은 알고리즘을 개발하고 수학적 문제의 답을 모델링하는데 있어서 학생들의 통찰력을 증가시킬 수 있으며, 학생들이 수를 다루는 번거로움에서 지유롭게 하고 문제 자체에 집중할 수 있게 한다. 따라서 수학문제 해결 과정에 초점을

맞출 수 있어 복잡한 계산을 하지 않고 수학적 응용을 깊이 탐색할 수 있다(고명석, 2005).

중등수학에서 평면도형 영역에는 수학 창의성 및 사고력 발달을 자극하는 내용이 많아 수학 영재교육에서 탐구활동의 소재로 많이 활용되고 있다. 이러한 평면도형 영역의 탐구활동에 도움이 되는 공학도구인 GeoGebra는 초등학교부터 대학교 수준의 대수학, 기하학, 미적분학, 통계학, 이산수학, 3차원 기하를 다룰 수 있는 수학교육용 무료 소프트웨어이다. 이상희, 이종학과 김원경(2012)은 GeoGebra가 학생들로 하여금 대수적 표현과 기하적 표현을 동시에 경험하게 함으로써 고등학교 해석·기하 단원에서 표상 간의 연결을 통해 인식론적 어려움을 완화시켜 줄 수 있다고 하였다. 권윤신과 류성림(2013)은 GeoGebra를 활용한 귀납활동을 통한 증명 학습이 전통적인 증명 학습보다 긍정적 효과를 보여주고 있으며, GeoGebra의 측정 및 끌기 기능을 통해 도형의 불변적인 성질을 탐구하여 직접 명제를 만듦으로써 증명 학습에 긍정적 효과가 있음을 알아내었다. 김무진, 이종학과 김원경(2014)은 GeoGebra를 활용한 교수・학습 자료를 과학고등학교 수학영재 학생들에게 적용하였을 때 직관적 통찰, 논리적 사고, 구조파악, 수학적 추론, 반성적 사고, 일반화 및 적용 등의 인지적 특성들이 강하게 나타났으며 수학적 사고력이 향상됨을 관찰하였다.

공학도구를 중등학교 수학 교수·학습에 사용하여 학생들의 수학적 사고력을 증진할 수 있음을 여러 사례에서 볼 수 있었다. 이 논문에서는 대학교 부설 과학영재교육원 사사과정의 세 탐구 팀에서 공학도구를 이용하여 탐구활동을 수행하고 탐구활동의 결과 수학적인 지식을 찾아가는 과정을 소개한다. 이 논문에서 소개하는 탐구과정에서는 중등학교에서 공학도구를 이용하여 제작된 교수·학습 자료를 사용하는 기존의 방법과 달리 영재교육원 사사과정 학생들이 지도교수의 지도하에 학생들이 직접 공학도구를 이용하여 문제를 만들고 수학적인 지식을 찾아가게 된다. 이러한 과정에서 학생들의 창의력, 사고력의 변화를 알아보도록 한다. 사용하는 공학도구는 사사과정의 탐구주제에 따라 다르며 세 팀이 사용한 공학도구는 각각 Mathematica, Microsoft Excel, GeoGebra이다.

Ⅱ. 연구의 배경 및 연구 방법

1. 연구의 배경

수학영재는 수학적 사고력, 논리력, 창의성 등이 평균적인 학생들에 비하여 높은 편이며 특히 수학 문제의 해결 능력이 뛰어나다. 따라서 수학영재들에게 일방적인 지식을 전달하는 형식의 학습, 입시를 대비하는 주입식 교육을 제공하는 것은 가능한 한 지양하고, 학생 개개인의 수준에 적합한 콘텐츠를 제공하여 학생 중심의 자기 주도적 교수·학습을 수행하도록 하는 것이 필요하다.

수학영재를 위한 교수·학습 과정에서 컴퓨터 소프트웨어를 활용하면 컴퓨터의 시각화 기능이 추상적인 수학 내용을 시각적으로 관찰하는 경험을 제공할 수 있으며 수학 학습의 어려움을 완화하여 영재 학생들의 수학적 사고력을 신장할 수 있을 것이다. 따라서 수학영재 학생의 탐구활동에 Mathematica, Microsoft Excel, GeoGebra 등 다양한 공학적 도구를 활용하도록 하여 수학영재의 논리적 사고력과 창의력, 문제해결력의 향상을 기대할 수 있다. 전문 수학 프로그램인 Mathematica를 이용하면 정밀한 계산이 가능하므로 고도의 계산이 필요한 주제의 탐구에 도움이 된다. 또한 스프레드시트 프로그램인 Microsoft Excel을 이용하면 탐구과정에서 얻어진 많은 자료를 신속하게 처리하거나, 많은 수를 대상으로 수의 패턴을 관찰하여 규칙을 찾아내는 데 도움이 되며 학생들의 수학 창의력을 기르는 데 많은 도움이 된다. 따라서 수의 계산을 많이 하는 주제에 대한 탐구에는 Microsoft Excel이나 Mathematica를 이용하여 사고력과 창의력, 문제해결력을 증진할 수 있다. 교육용 동적 기하 소프트웨어 GeoGebra는 도형 등 시각적으로 접근할 수 있는 문제의 탐구에 활용할 수 있으며 화면에 나타나는 결과를 관찰하고 성질을 찾아내는 활동을 통하여 수학적 사고력과 창의력을 자극할 수 있다.

그리고 사사과정에서 지도교수는 탐구활동에서 학생들이 소프트웨어를 사용할 때 계산 결과와 함께 수학적인 탐구를 병행하도록 하여 학생들의 수학적 사고력과 창의력, 문제해결력을 신장할 수 있도록 학생들의 탐구활동을 지도할 필요가 있다.

2 연구 방법

이 연구에서는 D광역시 소재 C대학교 부설 과학영재교육원 수학 사사과정에서 D광역시 소재 중학교 3학년 학생 1~2명과 지도교수로 구성된 3개 팀(A, B C팀)의 탐구과정에서 공학도구를 사용하여 진행하는 탐구과정을 소개하고 학생들의 수학적 창의력과 논리적 사고력의 변화를 살펴보았다. 사사과정의 탐구활동은 매년 2월부터 11월 까지 10개월 동안 운영되고, 학생은 탐구결과를 논문으로 작성하며, 11월 중순 사사과정의 탐구논문을 발표하는 공개행사가 사사과정 수료식으로 실시된다.

연구 대상인 수학 사사과정의 탐구팀은 3개 팀(A, B C팀)으로, A팀은 2명의 학생과 지도교수 등 3명으로 구성되었으며, 순환소수의 순환마디와 순환마디의 길이의 성질을 탐구하고, 공학도구 Mathematica를 탐구활동에 사용하였다. B팀은 1명의 학생과 지도교수 등 2명으로 구성되었으며, Beatty 수열의 성질을 탐구하고, 공학도구 Microsoft Excel을 탐구활동에 이용하였다. 그리고 C팀은 2명의 학생과 지도교수 등 3명으로 구성되었으며, Voronoi 분할, Voronoi 다각형의 성질을 탐구하고, 공학도구 GeoGebra를 탐구활동에 사용하였다. 팀의 지도교수는 주제 선정, 주제 탐구, 수료 논문 작성까지 탐구활동의 전 과정을 관리하고 지도하였다.

사사과정 탐구활동을 시작하여 탐구주제를 설정하는 단계부터 지도교수가 주재하여 학생이 직접 참여하게 하여 학생들의 관심과 흥미를 반영하였다. 사사과정 학생들 각자에게 희망하는 주제를 정하여 주제에 대한 설명, 관련된 문제 및 해결하고 싶은 문제를 제안하게 하였다. 이어서 지도교수와 팀원 전체가 참가하는 주제 선정 세미나를 실시하여 학생들이 제안한 내용을 발표하게 하고 토론하였다. 학생들이 제안한 주제에는 고등학교 교과과정이나 대학교 수준에 해당하여 중학생에게 적절하지 않은 주제도 많았다. 지도교수는 중학교 3학년 학생인 사사과정 학생들의 수학 지식에서 크게 벗어나지 않고 수학적 사고력과 창의성을 기를 수 있는 주제를 선정하는 데 주안점을 두었다. 지도교수는 학생들이 제안한 주제의 내용, 난이도 등을 검토하여 주제가 학생들에게 적절한지 판단하고, 적절하지 않은 주제의 경우 이유를 설명하고 다시 주제를 제안하도록 하였다. 팀의 주제가 결정되기까지 학생들은 4~5회 계속하여 주제 선정 세미나에서 주제를 제안하여야 했다. 지도교수는 여러 차례에 걸친 주제 선정 세미나에서 학생들이 제안한 여러 주제에서 하나의 주제를 선택하거나 일부 수정하여 팀의 주제를 결정하고 탐구과정에 사용할 공학도구도 결정하였다.

탐구주제가 결정되고 탐구활동이 시작되면 지도교수는 학생들에게 주제와 관련하여 다양한 탐구 문제를 제시하도록 하였다. 학생들이 제시한 탐구 문제 중 일부의 문제는 너무 쉬운 문제 또는 틀린 문제도 있었지만, 풀이의 존재를 알 수 없는 문제들도 많았다. 지도교수는 풀이의 존재를 알 수 없는 문제를 해결하기 위하여 문제의 조건을 수정하여 특별한 경우에 관하여 탐구하고 규칙성을 찾도록 하였다. 탐구 문제에 따라 적당한 공학도구를 정하여 사용하였으며, 조건을 바꾸어 계산하는 등 다양한 방법으로 규칙을 찾는 탐구활동을 진행하였다.

탐구주제에 따라 지도교수가 Mathematica, Microsoft Excel, GeoGebra 등의 공학도구를 지정하여 탐구활동에 사용하였다. 공학도구 사용에 필요한 기본적인 사용법을 학생들에게 따로 교육하였으며 공학도구를 사용하는 탐구활동에서 다음의 사항을 고려하였다.

첫째, 공학도구를 다루는 능력이 향상될 수 있도록 지도교수가 지도하여야 한다. 공학도구를 사용하여 수학 문제의 해결에 도움을 받을 수 있도록 공학도구를 이용하여 계산하거나 그림을 그리는 연습을 제공하여야 한다. 이러한 과정에서 학생들은 수학 문제 해결의 보조도구로 공학도구를 이용하는 능력을 기를 수 있어야 한다.

둘째, 학생들의 논리적 사고능력과 문제해결력을 향상할 수 있어야 한다. 학생들이 공학도구를 이용하여 문제

를 분석하고 문제의 탐구과정을 단계적으로 나누어 구성하며, 단계별로 탐구하는 과정에서 논리적으로 사고하고 분석하여 문제에서 규칙을 찾아내고 문제의 해결을 위한 아이디어를 찾아내는 노력을 할 수 있어야 한다.

셋째, 학생들의 수학 학습에 긍정적인 태도와 창의력을 신장할 수 있어야 한다. 공학도구를 탐구활동에 사용하는 과정에서 문제의 변형이나 문제의 축소 확대 등 다양한 시도를 할 수 있다. 이러한 과정에서 다양한 관점으로 문제와 결과를 관찰하고 분석하게 하여 창의력을 신장할 수 있으며, 주제에 대한 흥미와 관심을 높일 수 있어야 한다.

넷째, 학생들의 수학에 대한 자신감을 높이고 신장할 수 있어야 한다. 공학도구를 이용하여 학습하고 탐구활동 함으로서 수학의 다른 주제에 대한 탐구활동에도 공학도구를 사용할 수 있는 능력을 기를 수 있다. 또한 실생활과 관련된 문제를 수학적으로 모델링하고 공학도구를 이용하여 문제를 분석하고 해결하도록 시도하는 과정을 통해 학생들의 수학에 대한 자신감과 성취감을 신장할 수 있어야 한다.

Ⅲ. 연구 결과 및 논의

1. 공학도구를 이용한 사사과정 탐구활동

대학부설 과학영재교육원 사사과정에서 Mathematica, Microsoft Excel, GeoGebra 등 공학도구를 사용한 3개 팀의 탐구활동 과정을 소개한다. 사사과정 3개 팀은 탐구과정에서 주제별로 서로 다른 공학도구를 사용했으며, 구체적이고 특정한 상황에서 공학도구를 이용하여 문제를 해결하여 관찰하고 규칙성을 찾았으며, 찾은 규칙을 일반화하여 정리로 구성하고 증명하였다.

가. Mathematica를 활용한 탐구활동

2명의 중학교 3학년 학생과 지도교수 등 3명으로 구성된 A팀은 순환소수의 순환마디의 길이에 대하여 탐구하였으며, 수학 전문 소프트웨어인 Mathematica를 탐구활동에 이용하였다.

순환소수의 순환마디의 성질을 탐구하는 사사과정 탐구활동에서 순환소수에 대한 기본 지식을 쌓기 위하여 p가 소수일 때 p^{-1}은 순환소수가 됨을 증명하고 순환마디의 길이 $D(p)$를 구하도록 하였다. 사사과정 학생들이 p^{-1}은 순환소수가 되는 것을 수학적으로 증명하는 것은 쉽게 할 수 있었지만, 순환마디의 길이 $D(p)$를 구하기는 쉽지 않은 일이었다. 학생들이 사용하는 스마트폰에 내장되어있는 계산기의 경우 소수점 이하 15자리까지만 표시하였다. 하지만 학생들은 n을 적당히 정하고, $10^n \times p^{-1}$을 계산하여 소수점 이하 15자리의 한계를 넘어서는 계산을 하여 다양한 수의 순환마디의 길이를 계산하였으며, $D(17)=16$, $D(23)=22$을 얻었다. 작은 소수의 경우 이러한 방법으로 순환마디의 길이를 구하는 계산이 가능하지만 좀 더 큰 소수 그리고 다양한 수에 대한 순환마디의 길이를 구하려면 좀 더 전문적인 공학도구가 필요하였다. 이에 지도교수는 소수점 이하 자릿수를 많이 표시하는 공학도구로 수학 전문 소프트웨어인 Mathematica를 선택하였으며 이를 이용하여 순환마디와 순환마디의 길이를 계산하도록 하였다.

학생들이 Mathematica를 이용하여 순환소수를 표시하고 순환마디를 찾아낼 수 있도록 지도교수는 필요한 Mathematica 명령어를 알려주고 사용법을 익히도록 하였다. 예를 들어 Mathematica의 명령어 N[1/29, 50]은 순환소수 29^{-1}을 소수점 이하 50자리까지 표시한다. 순환소수의 성질을 탐구할 때 처음에는 p가 소수일 때 순환소수 p^{-1}의 순환마디를 구하고 순환마디의 길이 $D(p)$를 구하는 문제에서 시작하였다. p가 소수이면 페르마 소정리에 의하여, $D(p) \mid (p-1)$가 성립하므로 순환마디의 길이 $D(p)$를 구하려면 소수점 이하 $2p$자리까지만 관찰하면 충분함을 알게 되었다. 지도교수가 주어진 소수 p의 역수 p^{-1}의 순환마디를 찾는 과정을 Mathematica

명령어로 구성하였으며 학생들이 명령어를 이해하고 사용할 수 있도록 교육하였다([그림 Ⅲ-1]). 그리고 [그림 Ⅲ-1]의 자료를 수정하면 9592번째 소수인 $p=99991$인 경우 $D(p)=49995$임을 계산할 수 있었다.

다음으로 소수의 거듭제곱 특히 소수 3의 거듭제곱의 경우에 대하며 계산한 결과 $D(3^1)=1=3^0$, $D(3^2)=3^0$, $D(3^3)=3^1$, $D(3^4)=3^2$이 성립함을 알게 되었다. 이러한 경우를 좀 더 탐구하기 위하여 Mathematica 자료를 이용하여 계산한 결과 $n=2,3,\cdots,10$일 때 $D(3^n)=3^{n-2}$이 성립함을 알게 되었다([그림 Ⅲ-2]). 관찰에 의한 이러한 성질이 일반적으로 성립함을 증명하려고 시도하였으며, $n \geq 2$이면 $D(3^n)=3^{n-2}$이 성립함을 증명하였다(오규빈, 최다빈, 유공주, 부덕훈, 2017).

```
In[24]:= n = 36;
x = Prime[n] ; (* x는 n 번째 소수이다 *)
a = ToString[N[1 / x, 2 x]]; (* 1/x을 소숫점이하 (2x) 자리까지 구하고 String으로 변환 *)
m = 10; (* 순환마디 확인 단위 : 1/x의 소숫점 이하 m자리 수 , m의 값을 크게 바꾸고 반복하여 계산한다 *)
b = StringTake[a, {3, 3 + n - 1}]; (* 1/x의 소숫점 이하 3째 부터 n번째 자리 까지 *)
c = StringPosition[a, b]; (* 1/x의 소숫점 표현에서 (b)가 나타나는 위치 , (시작자릿수 , 끝자리수 ) *)
d = First /@ c ; (* 1/x의 소숫점 표현에서 (b)가 나타나는 시작 위치 *)
e = Differences[d]; (* (d)에 나타나는 수들의 차 *)
L = If[Max[e] == Min[e], Max[e], "None"]; (* L=순환마디 길이 , (b)가 같은 간격으로 반복 *)
R = StringTake[a, {3, 3 + L - 1}]; (* 순환 마디 *)
(* 화면출력 *)
Print[Style[1 / x, Red, 20, Bold]]
Print[Style["순환마디 : ", Blue, 20, Bold], Style[R, Blue, 20, Bold]]
Print[Style["순환마디의 길이 = ", Blue, 20, Bold], Style[L, Blue, 20, Bold]]

 1
───
151

순환마디 :
006622516556291390728476821192052980132450331125827814569536-
  423841059602649

순환마디의 길이 = 75
```

[그림 Ⅲ-1] Mathematica를 이용한 1/151의 순환마디 계산

```
In[29]:= n = 10;
x = 3^n;
a = ToString[N[1 / x, 2 x]]; (* 1/x를 소숫점이하 (2x) 자리까지 구하고 String으로 변환 *)
m = 5; (* 순환마디 확인단위 : 소숫점 이하 m자리 까지 , m의 값을 바꾸꾸고 반복 계산한다 *)
b = StringTake[a, {3, 3 + m - 1}]; (* 1/x 의 소숫점 이하 3째 부터 m번째 자리 까지 *)
c = StringPosition[a, b]; (* 1/x의 소숫점 아래 (b)가 나타나는 위치 List, (시작자릿수 , 끝자리수 ) *)
d = First /@ c ; (* 1/x의 소숫점 표현에서 (b)가 나타나는 시작 위치 *)
e = Differences[d]; (* (d)에 나타나는 수들의 차 *)
L = If[Max[e] == Min[e], Max[e], "None"]; (* L=순환마디 길이 , (b)가 같은 간격으로 반복 *)
R = StringTake[a, {3, 3 + L - 1}]; (* 순환소수 1/x의 순환마디 *)
(* 화면 출력 *)
F = FractionBox[1, SuperscriptBox[3, n]] // DisplayForm;
Print[ Style[F, Red, 15, Bold] , Style["=", Red, 15, Bold], Style[1 / x, Red, 15, Bold] ,
 Style[": 순환마디의 길이 = "ToString[L], Blue, 20, Bold],
 Style[ " =" (Superscript @@@ FactorInteger[L]) [[1]], Blue, 20, Bold]]

 1      1
──── = ─────: 순환마디의 길이 = 6561 = 3^8
3^10   59049
```

[그림 Ⅲ-2] Mathematica 를 이용한 순환소수 3^{-10}의 순환마디의 길이 계산

여러 가지 다양한 상황에서 Mathematica를 이용하여 순환소수의 순환마디를 구하고 그 결과를 일반화하는 시도를 하였으며 많은 경우에 이러한 시도가 성공하였다. 소수 $p \neq 3$에 대하여 $D(p^n)$을 계산한 결과 $D(7^3) = D(7) \times 7^2$, $D(11^3) = D(11) \times 11^2$, $D(13^3) = D(13) \times 13^2$, $D(17^3) = D(17) \times 17^2$이 성립함을 알게 되었으며, $p > 5$인 소수일 때 $D(p^n) = D(p) \times p^{n-1}$이 성립함을 예상하고 증명을 시도하였으며 증명하는 데 성공하였다. 서로 다른 두 소수 p, q에 대하여 $D(p), D(q)$, $D(pq)$의 관계를 관찰한 결과 $D(3) = 1$, $D(7) = 6$, $D(3 \cdot 7) = 6$, $D(13) = 6$, $D(19) = 18$, $D(13 \cdot 19) = 18$이 성립하였으며 이러한 성질을 일반화하여 p, q가 $p \neq q$인 소수이고 $D(p) \mid D(q)$ 이면 $D(pq) = D(q)$가 성립한다는 정리를 증명할 수 있었다. 그리고 이 성질을 더 일반화하여 $p_i (i = 1, \cdots, n)$ 가 $p_i > 5$인 서로 다른 소수이면 $D(p_1 \cdot \cdots \cdot p_n) = lcm(D(p_1), \cdots, D(p_n))$가 성립함을 증명할 수 있었다. 이 외에도 Mathematica를 이용한 계산에서 아이디어를 얻어 순환소수의 순환마디의 구성과 순환마디의 길이에 대한 여러 가지 성질들을 증명할 수 있었다(오규빈 외, 2017).

나. Microsoft Excel을 이용한 탐구활동

중학교 3학년 학생 1명과 지도교수 등 2명으로 구성된 B팀은 Beatty 수열을 탐구하였으며 스프레드시트 소프트웨어인 Microsoft Excel를 탐구활동에 이용하였다.

양수인 무리수 r에 대하여 수열 $B_r = \{[r], [2r], [3r], \cdots\}$를 r에 의하여 생성되는 Beatty 수열이라 한다. 이때 실수 x에 대하여 $[x]$은 floor(x) 즉, x보다 크지 않은 최대의 정수이다. 사사과정에서 Beatty 수열을 주제로 하여 탐구할 때, 여러 가지 무리수 r에 대하여 Beatty 수열 B_r을 계산하여야 했다. 수열 B_r의 항 $[nr]$을 각각 계산하는 것은 어렵지 않지만, 수열 B_r의 성질을 알아내려면 수열의 항을 가능한 한 많이 계산하여 관찰하여야 했다. Beatty 수열 B_r의 n번째 항이 $[nr]$이므로 무리수 r을 소수점 이하 5자리까지 표시하면 수열 B_r의 항을 1000번째 항까지 정확하게 계산할 수 있다. 따라서 Beatty 수열의 항을 많이 구하여 수열의 성질을 관찰하려면 소수점 이하의 자릿수를 많이 계산하는 데 유용한 Mathematica 보다 많은 계산의 결과를 표시하고 결과를 분석할 수 있는 스프레드시트 소프트웨어인 Microsoft Excel이 효과적이라고 판단하여 사사과정 Beatty 수열 탐구팀의 소프트웨어로 Microsoft Excel을 선택하였다. 지도교수는 사사과정 학생들에게 탐구주제인 Beatty 수열 B_r 계산에 필요한 Microsoft Excel의 사용법을 교육하여, π, $\sqrt{5}$, 황금비 등 무리수에 대한 Beatty 수열 B_r을 계산하고, 계산 결과를 관찰하고 분석하여 수열의 특징을 찾는 실습을 하게 하였다. 그리고 Beatty 수열에 대하여 알려진 성질들, 예를 들면, 무리수 $r > 1$과 r의 공액(conjugate)인 $s = \dfrac{r}{r-1}$에 대하여 Beatty 수열 B_r, B_s을 계산하고 수열의 항을 관찰하여 두 수열 B_r, B_s가 자연수 전체집합을 분할하고 있으며, $m \in B_r$일 필요충분조건인 $1 - \dfrac{1}{r} < \left[\dfrac{m}{r}\right]_1$을 확인하고 $m = \left[\left(\left[\dfrac{m}{r}\right] + 1\right) r\right]$이 성립함을 확인할 수 있었다.

r이 황금비인 $1.618\cdots$일 때 두 Beatty 수열 B_r, B_s의 항을 관찰하면, $r - s = -1$이고 $[nr] - [ns] = -n$ $(n \leq 1000)$이 성립함을 관찰할 수 있었다. 또한 $r - s = 2$이면 $r = 2 + \sqrt{2}$, $s = \sqrt{2}$이고 $[nr] - [ns] = 2n$ $(n \leq 1000)$이 성립함을 관찰할 수 있었다. 그리고 $r - s = 3$인 경우와 $r - s = 4$인 경우에도 Microsoft Excel을 사용하여 얻은 두 Beatty 수열 B_r, B_s의 항 사이에 같은 성질이 성립하는 것을 관찰할 수 있었다([그림 Ⅲ-3]).

이러한 관찰 결과를 정리로 구성하여, $k \neq 0$가 정수, $r > 1$이 무리수, $s = \dfrac{r}{r-1}$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $[nr] - [ns] = nk$가 성립하기 위한 필요충분조건은 $r - s = k$이고 $r = \dfrac{k + 2 + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ 이 성립함을 증

명하였다(송민지, 부덕훈, 2018).

클립보드 글꼴 맞춤

C1 =SQRT(5)+3

	A	B	C	D	E	F
1		r	5.236067977	s : r/(r-1)	1.236067977	
2		[r]	**5**	n_0	**4**	
3		{r}	0.236067977	k=r-s	**4**	
4	n	nr	B_r=[nr]	ns	B_s=[ns]	[nr]-[ns]
5	1	5.236067977	5	1.236067977	1	4
6	2	10.47213595	10	2.472135955	2	8
7	3	15.70820393	15	3.708203932	3	12
8	4	20.94427191	20	4.94427191	4	16
9	5	26.18033989	26	6.180339887	6	20
10	6	31.41640786	31	7.416407865	7	24
11	7	36.65247584	36	8.652475842	8	28
12	8	41.88854382	41	9.88854382	9	32
13	9	47.1246118	47	11.1246118	11	36
14	10	52.36067977	52	12.36067977	12	40
15	11	57.59674775	57	13.59674775	13	44
16	12	62.83281573	62	14.83281573	14	48
17	13	68.06888371	68	16.06888371	16	52
18	14	73.30495168	73	17.30495168	17	56
19	15	78.54101966	78	18.54101966	18	60
20	16	83.77708764	83	19.77708764	19	64

[그림 Ⅲ-3] $r-s=4$인 경우

B1 =PI()+1

	A	B	C	D	E	F	G
1	r=pi+1	4.141592654	[r]	**4**		s=r/(r-1)	1.318309886
2			{r}	0.141592654		n_0	**7**
3	n	nr	B_r=[nr]	n[r]	[n([r]-1)s]+1	ns	B_s=[ns]
4	1	4.141592654	**4**	**4**	**4**	1.318309886	**1**
5	2	8.283185307	**8**	**8**	**8**	2.636619772	**2**
6	3	12.42477796	**12**	**12**	**12**	3.954929659	**3**
7	4	16.56637061	**16**	**16**	**16**	5.273239545	**5**
8	5	20.70796327	**20**	**20**	**20**	6.591549431	**6**
9	6	24.84955592	**24**	**24**	**24**	7.909859317	**7**
10	7	28.99114858	**28**	**28**	**28**	9.228169203	**9**
11	8	33.13274123	33	32	32	10.54647909	**10**
12	9	37.27433388	37	36	36	11.86478898	**11**
13	10	41.41592654	41	40	40	13.18309886	**13**
14	11	45.55751919	45	44	44	14.50140875	**14**
15	12	49.69911184	49	48	48	15.81971863	**15**
16	13	53.8407045	53	52	52	17.13802852	**17**
17	14	57.98229715	57	56	56	18.45633841	**18**
18	15	62.1238898	62	60	60	19.77464829	**19**
19	16	66.26548246	66	64	64	21.09295818	**21**
20	17	70.40707511	70	68	68	22.41126807	**22**
21	18	74.54866776	74	72	72	23.72957795	**23**
22	19	78.69026042	78	76	76	25.04788784	**25**
23	20	82.83185307	82	80	80	26.36619772	**26**
24	21	86.97344573	86	84	84	27.68450761	**27**
25	22	91.11503838	91	88	88	29.0028175	29
26	23	95.25663103	95	92	91	30.32112738	30

[그림 Ⅲ-4] $r=\pi+1,\ n_0=7$인 경우

$r>1$이 무리수일 때, 수열 B_r이 등차수열이 될 수 없음은 수학적으로 쉽게 증명된다. 하지만 수열 B_r의 앞부분 일부의 항은 등차수열이 될 수 있음을 관찰할 수 있었다. 특히 Beatty 수열의 앞부분 일부에서 $[nr]=n[r]$

이 성립함을 관찰할 수 있었다.

$r=\pi$인 경우 $1 \le n \le 7$일 때 $[nr]=n[r]$이 성립하며 다른 무리수에서도 유사한 성질이 성립함을 관찰할 수 있었다. 관찰 결과 $[nr]=n[r]$이 성립하는 n의 범위가 무리수 r의 소수부분 즉 $\{r\}=r-[r]$와 관련이 있음을 예상하게 되었다. 실제로 $[nr]=n[r]$이 성립하는 조건을 탐구한 결과 $n_0=[1/\{r\}]$이면, $1 \le n \le n_0$일 때만 $[nr]=n[r]$이 성립하며, $n[r]=[n([r]-1)s]+1$이 성립함을 증명하였다. 이때 $r>3$이 무리수이면 $1 \le n \le n_0-1$일 때 $[nr]$과 $[(n+1)r]$ 사이에 $[r]-1$개의 $[ks](n([r]-1) \le k \le (n+1)([r]-1)$가 들어 있다([그림 Ⅲ-4]). 따라서 수열 B_r에서 처음 n_0개의 항 $[r],[2r],\cdots,[n_0r]$에서 각 항의 앞에 수열 B_s의 처음 $n_0([r]-1)$개의 항 $[s],[2s],\cdots,[n_0([r]-1)s]$을 차례로 $[r]-1$개씩 넣으면 1부터 $n_0[r]$까지의 자연수가 모두 채워짐을 증명하였다(송민지, 부덕훈, 2018).

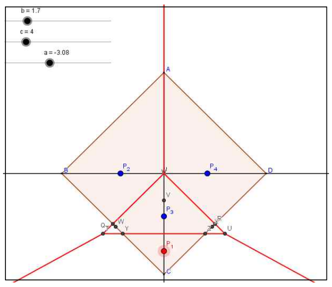
다. GeoGebra를 이용한 탐구활동

Voronoi 다이어그램에 대하여 탐구한 C팀은 중학교 3학년 학생 2명과 지도교수 등 3명으로 구성되었으며 동적 기하 소프트웨어인 GeoGebra를 탐구활동에 사용하였다.

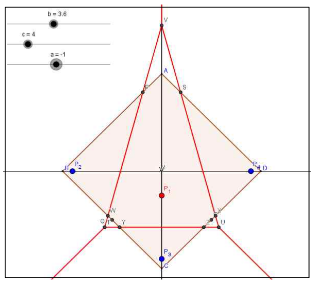
교육용으로 널리 사용되는 동적 기하 소프트웨어 GeoGebra는 특히 도형에 관련된 문제를 다룰 때 도움이 되는 공학도구이다. 이러한 이유로 Voronoi 다이어그램을 탐구하는 사사과정 팀에서는 GeoGebra를 보조도구로 사용하여 탐구활동을 진행하였다.

평면 위의 네 점 $P_1(0,a), P_2(-b,0), P_3(0,-b), P_4(b,0)$을 생성점으로 하는 Voronoi 다이어그램에 의하여 네 점 $A(0,c)$, $B(-c,0)$, $C(0,-c)$, $D(c,0)$ (단, $c>b>0$, a는 실수)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $ABCD$는 Voronoi 다이어그램에 의하여 네 영역 R_1, R_2, R_3, R_4로 나누어지는데, 점 P_1을 포함하는 영역 R_1의 모양과 넓이를 구하는 문제를 탐구하였다. 먼저 Voronoi 다이어그램이 정사각형 $ABCD$를 분할하여 만들어진 네 영역의 모양을 관찰하기 위하여 GeoGebra를 이용하였다. GeoGebra의 명령어 Voronoi($\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$)를 이용하여 Voronoi 다이어그램을 그리고 생성점 P_1을 y축을 따라 움직이면서 영역 R_1의 모양을 관찰하였다. b에 대하여 $0<b \le \frac{c}{2}$, $\frac{c}{2}<b \le \frac{3}{4}c$, $\frac{3}{4}c<b<c$ 등 세 가지 경우로 나누고, 또한 각각의 경우에서 a의 위치에 따라 4가지 경우로 나누어 모두 12가지의 경우로 나누어 관찰하였다. 각각의 경우에서 영역 R_1의 모양이 삼각형, 사각형, 오각형, 칠각형 등 다양한 다각형으로 나타나며 영역 R_1의 꼭짓점의 위치를 관찰할 수 있었다([그림 Ⅲ-5, 6]). 관찰 결과를 이용하여 각각의 경우에 직선의 교점을 계산하여 다각형의 꼭짓점을 구하고, 영역 R_1의 넓이를 구할 수 있었다(조강현, 이강, 부덕훈, 2019)

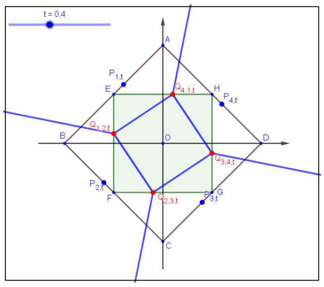
정사각형 $ABCD$의 꼭짓점이 $A(0,10)$, $B(-10,0)$, $C(0,-10)$, $D(10,0)$일 때, $P_{1,t}=(1-t)A+tB$, $P_{2,t}=(1-t)B+tC$, $P_{3,t}=(1-t)C+tD$, $P_{4,t}=(1-t)D+tA$ $(0 \le t \le 1)$와 원점 $O(0,0)$등 다섯 개의 점을 생성점으로 하는 Voronoi 다이어그램을 GeoGebra를 이용하여 그리고 관찰한 결과, 원점 $O(0,0)$를 포함하는 Voronoi 영역은 정사각형이고 Voronoi 정사각형의 꼭짓점들은 정사각형 $ABCD$의 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $EFGH$의 변 위를 시계 반대 방향으로 움직이며 생성점이 움직임에 따라 넓이가 변함을 확인할 수 있었다([그림 Ⅲ-7]). 이러한 성질을 일반화하여, 정사각형 $ABCD$의 변 위를 움직이는 네 점 $P_{1,t}$, $P_{2,t}$, $P_{3,t}$, $P_{4,t}$ $(0 \le t \le 1)$와 정사각형 $ABCD$의 중심 등 다섯 개의 점이 생성점인 Voronoi 다이어그램에서, 정사각형 $ABCD$의 중심을 포함하는 Voronoi 정사각형의 넓이는 $c^2(2t^2-2t+1)$이고, t가 증가함에 따라, Voronoi 정사각형의 꼭짓점들은 정사각형 $EFGH$의 네 변의 위를 시계 반대 방향으로 이동함을 증명하였다. 단, c는 정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이다(조강현 외, 2019).



[그림 III-5] $0 < b \le \frac{c}{2}$인 경우

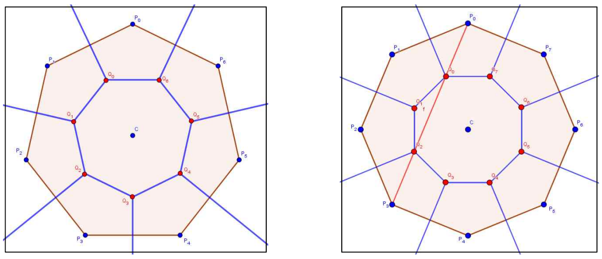


[그림 III-6] $\frac{3}{4}c < b < c$인 경우



[그림 III-7] 정사각형의 Voronoi 다각형

정n각형의 꼭짓점과 중심을 생성점으로 하는 Voronoi 다이어그램에서 중심을 포함하는 Voronoi 다각형을 탐구하기 위하여 GeoGebra를 이용하여 정7각형과 정8각형의 Voronoi 다이어그램을 그리고 관찰하였다([그림 III-8]). 관찰 결과 정다각형의 변의 수직이등분선이 Voronoi 다각형의 꼭짓점을 지나고, Voronoi 다각형의 넓이는 원래의 정다각형의 넓이의 $(2\cos(\pi/n))^{-1}$배가 됨을 알 수 있었다. 그리고 정n각형과 Voronoi 다각형의 대각선 사이의 평행관계도 n이 홀수인 경우와 짝수인 경우 서로 다른 성질을 가짐을 확인하였다. 이러한 성질들을 일반적인 정n각형에 대하여 정리로 서술하고 증명하였다(조강현 외, 2019).



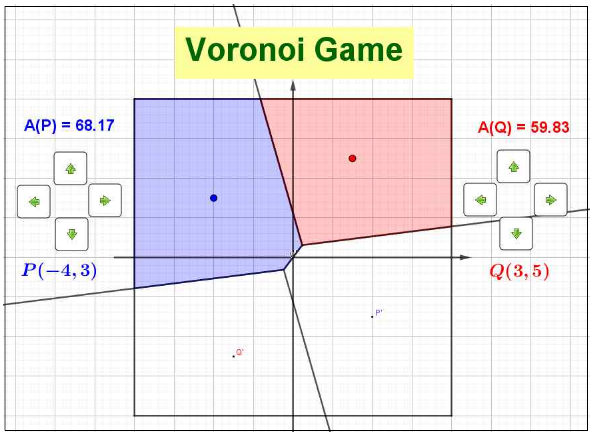
[그림 III-8] 정다각형의 꼭지점과 중심이 생성점인 Voronoi 다이어그램

다각형의 Voronoi 분할을 탐구하는 과정에서 Voronoi 다이어그램을 이용하는 게임을 개발하게 되었으며 Voronoi 게임이라 불렀다. Voronoi 게임은 Voronoi 다이어그램에 의하여 만들어지는 Voronoi 다각형의 넓이에 따라 승패를 결정하는 게임으로, 게임을 진행하려면 GeoGebra를 이용하여 Voronoi 다이어그램을 그리고 Voronoi 다각형의 넓이를 계산하여야 했다.

좌표평면의 두 점 P, Q가 네 점 $G_1(8,8)$, $G_2(-8,8)$, $G_3(-8,-8)$, $G_4(8,-8)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 S의 내부의 점이고, $P' = -P$, $Q' = -Q$일 때, 네 점 P, Q, P', Q'를 생성점으로 하는 S의 Voronoi 분할에서 P, Q를 포함하는 영역의 넓이를 각각 $A(P)$, $A(Q)$라 하였다. 두 참가자 P, Q가 각각 $P_1 = (-4,4)$, $Q_1 = (4,4)$에서 시작하여 P는 제2사분면에서, Q는 제1사분면에서 정사각형 영역 S의 정수점을 따라 움직일 때, Voronoi 분할의 넓이 $A(P)$와 $A(Q)$를 비교하여 넓이가 큰 참가자가 1점을 획득한다. 이러한 방법으로 5회까지 게임을 진행하고 득점의 합계에 따라 승자를 결정하였다. 이 게임에서 P', Q'이 각각 P, Q에 원점 대칭이므로 두 참가자 P와 Q가 차지하는 넓이의 합은 전체의 절반인 128이다. 그리고 P와 Q

가 움직이면 GeoGebra를 이용하여 각각의 넓이 $A(P)$, $A(Q)$를 계산하고 게임의 결과를 즉시 확인하였다.

Voronoi 게임을 진행하기 위하여 Voronoi 게임판을 GeoGebra를 사용하여 만들었다. Voronoi 게임판에 정사각형 영역 S를 중심에 배치하고, 점 P와 점 Q 각각을 상, 하, 좌, 우로 한 칸씩 움직이는 방향키를 좌우에 배치하였다. P와 Q가 이동하면 Voronoi 다이어그램이 그려지고, 두 참가자 P와 Q가 차지하는 영역 $A(P)$, $A(Q)$의 넓이를 계산하여 출력하도록 하여 게임의 승패를 즉시 확인할 수 있도록 하였다. GeoGebra를 사용하여 Voronoi 게임판을 만들 때 GeoGebra의 명령어와 Script를 일부 사용하여야 했으나 지도교수가 GeoGebra에서 필요한 부분을 교육하여 큰 어려움 없이 해결할 수 있었다.



[그림 III-9] Voronoi 게임판

Voronoi 게임판을 이용하여 다양한 방법으로 게임을 운영하고 승패를 분석하였으며 승리전략을 탐구하였다. 게임을 시작할 때, P와 Q의 넓이는 각각 64로 동점이다. 게임을 시작하여 P가 먼저 64보다 큰 넓이를 확보해도 Q가 P의 90° 회전이동 위치 또는 P와 y축 대칭인 위치로 이동한다면 P와 Q의 넓이는 다시 64가 되어 동점이 된다. 따라서 Q의 경우 게임 운영의 최선의 방법은 4회까지 동점을 유지하고, 5회에서 P보다 큰 넓이를 확보하여 승리하거나 여의치 않으면 동점을 유지하는 것이다. 따라서 이 게임에서 P가 승리하는 경우는 없으며 Q가 승리하거나 두 사람이 비기게 된다. 그리고 Q가 승리하는 경우는 전 단계인 4회에서 P의 위치에 의하여 결정되므로 P가 최선을 다하면 게임의 결과는 무승부가 됨을 증명하였다.

2. 논의

본 연구에서는 중학생 대상 사사과정의 탐구과정에서 학생들의 수학적 창의력과 논리적 사고력의 증진되었음을 소개한다. 영재교육에서 사사과정의 주요 목적은 학생들에게 수학의 연구과정을 체험하게 하는 데 있으며, 사사과정의 이러한 목적을 이루려면 사사과정 탐구주제의 선택과 탐구과정의 진행 방법이 중요하다. 탐구주제를 선정할 때 사사과정의 구성원인 중학생이 가지고 있는 수학 지식의 범위와 고등학교 이후의 교육과정을 고려하면 극한이나 미분, 적분이 사용되는 주제는 제외해야 한다고 생각한다. 따라서 중학생들의 창의력과 수학적 사고를 자극할 수 있으면서 중학생들의 지식의 범위에서 크게 벗어나지 않는 주제를 찾기 위하여 노력하였으며, 사사과정 학생들이 여러 차례 주제를 제안하게 하고, 주제선정 세미나에서 학생과 지도교수가 같이 토론하였다.

사사과정 탐구활동에서 지도교수는 학생들이 발표하는 세미나를 진행하여 학생들이 적극적으로 탐구주제에 대하여 탐구활동을 하도록 하였다. 학생들은 탐구주제에 관련된 문제를 제시하고, 제시한 문제를 변형하여 새로운 문제를 만들어내고, 이러한 문제들을 확인하고 해결하도록 하였으며, 이러한 과정에서 학생들은 수학적으로 사고하고 창의적으로 생각하여야 하였다. 학생들은 창의력을 발휘하여 주제와 관련하여 많은 문제를 제안하였지만, 공학도구를 사용하는 등 여러 가지 방법으로 확인한 결과 상당수의 문제가 틀린 문제임이 확인되어 폐기되었다. 문제가 틀렸다는 증거를 찾지 못하여 문제가 참이 됨을 예상하는 경우, 학생들은 문제의 수학적인 증명을 시도하였으며, 수학적 사고력과 창의력이 필요하고 어려움이 많은 과정이었다. 이러한 탐구활동은 한 문제씩 주어지는 계산 문제를 해결하는데 익숙한 중학생에게는 생소한 경험이었으며, 전문 수학자의 연구활동과 같아 수학적 사고력과 창의력이 매우 필요하였다. 실제로 학생들이 작성한 논문의 후기([부록 1], [부록 2], [부록 3])에서 탐구활동의 결과 수학적 창의력과 논리적 사고력이 증진되었음을 확인할 수 있다.

사사과정 지도교수는 주제에 따라 탐구활동에 사용할 적절한 공학도구를 결정하고, 학생들에게 탐구활동에 필요한 범위에서 공학도구의 사용 방법을 교육하였으며 사사과정 탐구활동의 모든 과정을 지도하였다.

공학도구를 사용하여 진행한 사사과정 탐구활동은 현대의 IT 환경에 익숙한 학생들의 수학에 대한 인식의 변화를 가져왔으며 수학에 대한 친밀도를 높이고 학습효과를 높일 수 있었다. 또한 기존의 형식과 다른 새로운 형식의 수학 학습 및 탐구를 경험한 영재 학생들에게 4차산업혁명의 시대를 맞이하는 미래의 다양한 변화에 능동적으로 대응할 수 있는 유연한 사고의 틀을 형성하게 하였다.

사사과정 학생들은 공학도구를 이용하여 문제를 해결하고 관찰하여 찾아낸 성질들을 일반화하여 수학적인 정리로 표현하였으며, 정리를 수학적인 엄밀한 논리의 방법으로 증명하였다. 사사과정 탐구활동에서 공학도구가 중요한 역할을 하였지만, 학생들은 수학적으로 표현된 성질은 공학도구를 이용한 관찰의 방법이 아닌 수학적 검증 즉, 논리적으로 이루어지는 증명이 이루어져야 수학적인 지식이 될 수 있음을 알게 되었으며, 공학도구는 수학의 탐구활동을 도와주는 훌륭한 보조도구가 됨을 알게 되었다.

사사과정 학생들은 탐구활동 보고서를 수학 논문의 형식에 맞추어 작성하였으며 사사과정 수료식에서 논문발표의 형식으로 발표하였다. 학생들은 탐구활동에 사용했던 여러 가지 배경지식, 공학도구를 사용하여 얻은 결과 그리고 탐구활동에서 찾아낸 정리와 정리의 증명을 논리적인 순서로 배열하였다. 학생들이 보고서를 수학 논문의 형식으로 작성할 때, 정리의 증명을 논리적으로 작성하는 것을 특히 어려워하였지만, 지도교수의 지도를 받아 잘 수행하였으며, 그 결과 수학적 논리력이 많이 향상되었다. 학생들은 사사과정 탐구활동에서 공학도구 사용, 수학 연구 활동, 수학 논문 작성 등 새로운 경험을 많이 하였으며, 수학에 대한 흥미와 적극적인 태도가 향상되었음을 확인할 수 있다([부록 1], [부록 2], [부록 3]).

사사과정 학생들은 탐구활동에서 주제와 관련하여 공학도구를 사용하였지만, 탐구활동을 진행하는 동안 공학도구 활용 능력이 많이 향상되었다. 따라서 수학의 다른 문제에서도 문제를 만들고, 문제를 해결하고, 문제를 변형하는 등 수학 학습 및 탐구활동에 공학도구를 다양하게 이용하려는 시도를 할 수 있게 되었다.

Ⅳ. 결론 및 제언

대학부설 과학영재교육원 사사과정에서 Mathematica, Microsoft Excel, GeoGebra 등 공학도구를 사용한 3개 팀의 탐구과정을 소개하고 학생들의 수학적 창의력과 논리적 사고력의 변화를 살펴보았다. 사사과정 3개 팀은 탐구과정에서 각각의 공학도구를 사용하여 문제를 해결하여 관찰하여 규칙성을 찾았으며, 찾은 규칙을 일반화하여 정리로 구성하고 증명하였다. 학생들은 주도적으로 탐구주제를 선택하였으며, 동료들과의 협력을 통하여 협동심과 책임감, 이타심을 키울 수 있었다. 또한 공학도구를 사용하여 진행한 탐구활동은 IT 환경에 익숙한 학생들

의 관심을 끌었으며 수학에 대한 친밀도를 높이고 학습효과를 높일 수 있었다. 3개 팀을 대상으로 공학도구를 사용하여 진행한 사사과정 탐구과정에서 다음의 결과를 얻을 수 있었다.

사사과정 학생들이 수행한 탐구활동은 전문 수학자의 수학 연구 활동과 같았으며, 중학생에게는 생소한 경험이 많았다. 학생들은 공학도구를 이용하는 새로운 탐구과정을 경험하였으며, 장시간 동안 이어지는 수학의 연구과정을 수행하는 동안 학생들의 수학적 창의력과 논리적 사고력이 많이 증진되었다.

사사과정 학생들은 공학도구를 이용한 관찰의 방법으로 얻어진 결과를 수학적 검증 즉, 논리적으로 이루어지는 증명이 이루어져야 수학적인 지식이 될 수 있음을 알게 되었으며 공학도구가 수학 탐구에서 편리하고 중요한 보조 수단이 됨을 알게 되었다.

사사과정 학생들은 공학도구의 사용, 수학 연구 활동을 비롯하여 탐구과정과 결과를 수학 논문의 형식에 맞추어 작성하는 등 여러 가지 새로운 경험을 하였으며, 수학에 대한 흥미와 적극적인 태도가 향상되었다.

사사과정 학생들은 탐구활동에서 공학도구를 제한된 부분에만 사용하였지만, 문제를 해결하고, 문제를 변형하여 새로운 문제를 만드는 등 공학도구를 다양하게 활용할 수 있는 능력을 기르게 되었다.

공학도구를 이용한 사사과정 탐구활동에서 공학도구의 사용은 문제의 변형, 문제의 해결과 규칙 찾기 등 탐구활동을 진행하는 데 많은 도움이 되었다. 따라서 수학 사사과정 영재교육에서 공학도구의 적극적인 사용을 권장하며, 수학 영재교육의 발전을 위하여 다음과 같이 제언한다.

수학 사사과정의 탐구주제에 따라 도움이 되는 공학도구가 다르므로 영재교육을 받는 학생에게 다양한 공학도구를 경험할 기회가 주어져야 한다. 이를 위하여 수학 영재교육에서 다양한 공학도구를 이용하는 수업을 제공하여 영재 학생들이 공학도구의 사용에 익숙해지게 할 필요가 있다. 또한 학생들이 공학도구를 이용하는 과정에서 수학적인 특징을 찾아내고, 그 특징을 일반화하는 경험을 제공할 필요가 있다.

영재 학생들은 수학의 다양한 주제에 대하여 탐구활동 자료를 직접 개발하여 자기 주도적으로 탐구활동을 할 수 있는 잠재력을 가지고 있다. 이러한 능력을 활용하여 영재 학생들이 공학도구를 이용하는 탐구활동 자료를 직접 개발하도록 권장하고 기회를 제공할 필요가 있다.

중학생을 대상으로 하는 수학 사사과정의 탐구활동에서 공학도구를 이용할 수 있는 다양한 탐구주제를 개발하고, 이러한 탐구주제에 대하여 공학도구를 이용한 사사과정 탐구활동을 지도할 수 있는 전문 교사의 양성이 필요하다.

참 고 문 헌

강문봉 (2009) 컴퓨터를 활용한 수학적 사고력 신장방안, 과학교육논총, 22(1), 37-53.

Kang, M. (2009) How to use the computer in order to develop the mathematical thinking, *Studies on Constitutional Cases, 22(1)*, 37-53.

고래영 (2011) Excel을 이용한 수학적 모델링-피보나치 수열과 신종인플루엔자 모델링, 석사학위논문, 성균관대학교, 서울.

Ko R. Y. (2011) *Mathematical Modeling with Excel-modeling of Fibonacci sequence and influenza virus subtype H1N1* (Master's thesis) Sungkyunkwan University, Seoul, Korea.

고명석 (2005) 엑셀을 이용한 고등학교 수학 학습자료 개발, 석사학위논문, 전남대학교, 전남.

Ko M. S. (2005) *A study on the development of teaching-learning materials for high school 10 steps mathematics by using Microsft Excel* (Master's thesis) Chonnam National University, Chonnam, Korea.

교육부 (2018). 4차 영재교육진흥종합계획, 교육부, 서울.

Ministry of Education (2018). *4th Master plan for promotion of gifted amd talented education in Korea,* Ministry of Education, Seoul, Korea.

권윤신・류성림 (2013). GeoGebra를 활용한 귀납활동이 초등수학영재의 증명능력 및 증명학습태도에 미치는 영향, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 16(2), 123-145.

Kwon, Y. S., & Ryu, S. R. (2013). The effects of Inductive activities using GeoGebra on the proof abilities and attitudes of mathematically gifted elementary students, *J. the Korea Soc. Math. Ed. Ser. C, **16(2)***, 123-145.

김무진・이종학・김원경 (2014). GeoGebra를 활용한 교수・학습이 과학고등학교 수학영재들의 인지적 측면에 미치는 영향, 한국학교수학회논문집, 17(3), 359-384.

Kim, M., Lee, J., & Kim, W. (2014). Development of teaching and learning materials by using GeoGebra and it's application effects for high school mathematically gifted students, *J. the Korean School Mathematics Society, **17(3)***, 359-384.

송민지・부덕훈 (2018) Beatty 수열에 대하여에 대하여, 과학영재교육, 10(2), 110-120.

Song, M.., & Boo, D. H. (2018) A study on Beatty sequences, *J. Science Education for the Gifted, **10(2)***, 110-120.

엄태홍 (2006) Mathematica를 활용한 구성주의적 수학 교수-학습, 석사학위논문, 신라대학교, 서울.

Eom T. H. (2006) *A study of constructed development in Mathematica based mathematics teaching and learning* (Master's thesis) Sila University, Busan, Korea.

오규빈・최다빈・유공주・부덕훈 (2017) 순환소수의 순환마디에 대하여, 과학영재교육, 9(3), 319-331.

Oh, K., Choi. D., Yu, G., & Boo, D. H. (2017) On the repeating portion of the repeating decimals, *J. Science Education for the Gifted, **9(3)***, 319-331.

우연희 (2008) 실업계 고등학교 함수 단원에서 mathematica를 활용한 수학실험수업의 효과, 석사학위논문, 이화여자대학교, 서울.

Woo Y. H. (2008) *Effect of mathematical experimental class on function using Mathematica in the vocational high school* (Master's thesis) Ewha Womans Univercity, Seoul, Korea.

유재근・이정아・박문환・장혜원 (2020) 스프레드시트 환경에서 근사 분수와 직선의 기울기를 이용한 무리수의 대안적 지도법 수학교육학연구, 30(2), 353-374.

Yoo J. G., Yi J. A, Park M. H, & Chang, H. (2020) Altenative method of irrational numbers using approximate fractions and slopes of straight lines in a spreadsheet environment, *J. Educational Research in Mathematics, **30(2)***, 353-374.

이경화・안민웅・고은성・최성이・문성재 (2019) 확률실험 환경에서 수학영재 학생과 일반학생의 확률 탐구 특성 비교, 학교수학, 21(2), 369-389.

Lee, K., Ann, M., Ko, E., Choi, S., & Moon, S. (2019) A comparative study on characteristics of mathematically gifted and non-gifted students exploration on probability using probability experiments, *School Mathematics, **21(2)***, 369-389.

이상희・이종학・김원경 (2012). 부등식 영역의 최대・최소문제에서 학생들의 수학적 사고에 GeoGebra가 미치는 영향 - 등고선 개념을 중심으로, 교원교육, 28(4), 1-44.

Lee, S., Lee, J., & Kim, W., (2012) The effects of using GeoGebra on the mathematical thinking in the optimization problems of regional inequalities-focus on level curve, *Korean Journal of Teacher Education, **28(4)***, 1-44.

조강현・이강・부덕훈 (2019) 다각형의 보로노이 분할, 과학영재교육, 11(3), 255-274.

Jo, K., Lee, K., & Boo, D. H. (2019) Voronoi Partitions on Polygons, *J. Science Education for the Gifted, **11(3)***, 255-274.

황우형・차순규 (2002) 탐구형 소프트웨어를 활용한 고등학교 해석 기하 교육에 관한 사례연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 41(3), 341-360.

Whang, W., & Cha, S. (2002) Study on the effectiveness of dynamic geometry software in solving high school analytic

geometry problems, *The Mathematical Education, 41(3)*, 341-360.
NCTM (1989). *Curriculum amd Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston. VA.
Renzulli, J. S.(1978). What makes giftedness-reexamining a definition. *Phi-Delta-Kappn*, *60*, 180-184.

Improvement of the Mathematical Creativity Using Engineering Tools in Mathematics Mentorship Program

Boo, Deok Hoon
34134, 99, Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon, Republic of Korea
E-mail : dhboo@cnu.ac.kr

We performed the research and education programs using engineering tools such as Mathematica, Microsoft Excel and GeoGebra for the students in mathematics mentorship program of the institute of science education for the gifted. We used the engineering tools to solve the problems and found the rules by observing the solutions. Then we generalized the rules to theorems by proving the rules.

Mathematica, the professional mathematical computation program, was used to calculate and find the length of the repeating portion of the repeating decimal. Microsoft Excel, the spreadsheet software, was used to investigate the Beatty sequences. Also GeoGebra, the dynamic geometric software, was used to investigate the Voronoi diagram and develop the Voronoi game. Using GeoGebra, we designed the Voronoi game plate for the game.

In this program, using engineering tools improved the mathematical creativity and the logical thinking of the gifted students in mathematics mentorship program

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U70
* Key words : engineering tools, mathematics mentorship program, mathematica, microsoft excel, geogebra

<부록 1> A팀의 논문 후기 (2016 충남대학교 과학영재교육원 사사과정 논문집, p.23)

V. 후 기

처음 이 주제는 순환마디의 성질을 탐구하는 것이 아닌, 단순히 모든 자연수에 대해 순환마디의 길이를 구하는 공식을 만들어내자는 것이었다. 하지만 우여곡절 끝에 이에 관한 여러 정리들을 발견해내면서 순환마디의 모양에도 의구심을 가지게 되었고, 차츰 주제를 확장시켜 나가 더 값진 결과물을 얻을 수 있었다.

순환소수라는 비교적 기초적이고 쉬워 보이는 주제를 다루면서, 어떠한 주제라도 깊이 파고들면 심오한 내용이 나온다는 것을 알았다. 연구 도중 규칙은 찾아냈지만 증명의 한계 때문에 어쩔 수 없이 포기한 정리들도 많았고, 많은 시간과 노력을 투자해 간신히 증명해낸 정리들도 있었다. 포기한 정리들에 대해서는 안타까웠지만, 우리의 실력을 갈고 닦아 후에 다시 증명을 시도해 보아야겠다는 생각을 할 수 있었다.

증명 과정에서 많은 실수들과 놓친 과정들을 되짚어 보면서 그동안 우리가 점검하지 않고 넘어간 것들도 있었다. 그런데 점검하는 과정에서 오류가 없나 살펴보던 중 점검하지 않은 것들에 대해 문제점들과 오류, 고쳐야 할 점이 수두룩하게 드러나면서 과정 하나하나의 중요성을 뼈저리게 느꼈다. 혹 나중에 이와 비슷한 상황에 마주친다면 여기에서의 경험을 좋은 디딤돌로 삼아 잘 해결해 나갈 수 있으리라고 생각한다.

이 연구를 마치기까지 많은 우여곡절과 어려움이 있었지만, 이렇게 논문을 잘 마칠 수 있었던 것은 교수님께서 잘 이끌어 주시고 조언을 해 주신 덕분인 것 같다. 연구를 통해 얻은 많은 것들이 우리의 삶에 더 큰 행복을 가져다 줄 것이라고 믿으며, 많은 도움을 주신 교수님께 다시 한 번 큰 감사를 드린다.

다음은 증명을 하지 못한 정리들이다.

[미해결 1] p가 (　　　)인 소수이면 다음이 성립한다.

$$D(p)=\frac{p-1}{2}$$

[미해결 2] p가 (　　　)인 소수이면 $p-1$의 약수가 되는 적당한 소수 q에 대하여 다음이 성립한다.

$$D(p)=q$$

[미해결 3] $N=p_1^{n_1}\times p_2^{n_2}\times\cdots\times p_m^{n_m}$이면 $D(N)=lcm(D(p_1^{n_1}),D(p_2^{n_2})\cdots D(p_m^{n_m}))$.

<부록 2> B팀의 논문 후기 (2017 충남대학교 과학영재교육원 사사과정 논문집, p. 24)

후 기

처음에는 충남대학교 영재교육원 사사과정을 무사히 끝마칠 수 있을지 의문이었다. 학기 초 앞으로 쓸 논문의 주제를 정하는 데에만 해도 많은 시간과 생각이 필요했다. 그동안 논문을 어떻게 쓰는지도 몰랐으며 '논문'이라는 단어가 무척 멀게만 느껴졌고, 우리 같은 중학생들은 할 수 없는 것이라고 생각했었다. 한 주제에 대해 심도 깊은 연구를 하는 것을 한 번도 경험해보지 못했기에 앞으로 가야 할 길이 막막하게만 느껴졌다.

하지만 Beatty 수열에 대해 알게 되고 이를 주제로 연구를 하면서 우려와는 반대로 잘 헤쳐 나갈 수 있었다. 하나하나 증명을 해 나가면서 학교의 수학 문제를 풀 때와는 또 다른 희열감을 맛보기도 했다. 반대로 잘 풀리지 않는 문제들 때문에 몇날 며칠 골머리를 앓았던 적도 많았다. 규칙성은 쉽게 발견됐지만 증명의 접근 방법을 찾는 것은 생각만큼 쉽지 않은 일이었다. 노력은 했지만 풀지 못한 문제들에 대해 많은 애착이 남는다.

이 Beatty 수열은 무리수 r이 1보다 클 때만 성립하는 수열이다. 따라서 이 연구를 통해 Beatty 수열을 확장해 무리수 r이 1보다 작을 때를 생각한 음의 Beatty 수열도 새로 정의했다. 하지만 시간이 부족해 이에 대한 정리와 특성을 많이 찾지 못해 아쉬움이 남는다. 나중에 기회가 되면 꼭 음의 Beatty 수열에 대한 연구를 이어서 진행해보고 싶다.

충남대학교 영재교육원 사사과정을 통해 우리가 얻어가는 게 무척 많다고 느끼고 있다. 정리에 대한 과정 하나하나 빠지지 않게 논문을 써보면서 수학에서 풀이과정의 중요성을 알게 되었다. 한 수학 주제에 대해 깊은 탐구와 연구를 하는 것을 경험할 수 있었고, 그 과정에서 다양한 시각으로 문제를 바라보는 눈을 가질 수 있게 된 것 같다. 머지않은 미래에 우리가 이와 같은 연구를 할 때 이번 경험을 토대로 잘 해나갈 수 있을 것이라 믿는다.

마지막으로 우리가 이 연구를 무사히 끝낼 수 있었던 것은 그동안 지도해주신 교수님 덕분이라고 생각한다. 이번 연구를 끝마치기까지 우리 옆에서 조언과 관심을 통해 잘 이끌어주셨던 교수님께 고개 숙여 감사를 드린다.

<부록 3> C팀의 논문 후기 (2018 충남대학교 과학영재교육원 사사과정 논문집, p. 31)

후 기

거의 1년에 가까운 시간을 들인 우리의 생애 첫 논문을 드디어 완성하게 되었다. 1년 전 논문을 쓰기 시작했을 때만 해도 어떻게 해야 할지 막막했는데 완성하고 나니 뿌듯하다.

이 논문을 쓰면서 많은 것을 얻게 되었다. 먼저 수학적 기술을 향상시킬 수 있었다. 그리고 수학 논문을 쓰는 일은 수학 문제를 해결하는 일과는 전혀 다른 일이었다. 단순히 수학 실력만 필요한 것이 아니라 논문을 작성하는 방법, 다른 사람과 함께 문제를 푸는 방법 등을 알아야 했고, 이와 같은 능력들을 성장시킬 수 있어 보람찼다. 그 전까지는 잘 모르던 분야인 보로노이 다이어그램에 대한 지식을 쌓는 값진 시간이기도 했다.

또 계산하는 일은 쉽지만 새로운 아이디어를 생각해 내는 일이 진짜로 어려운 일이라는 것을 깨달았다. 앞으로는 수학 문제를 다양한 시각에서 바라보는 힘을 더 길러야 할 것 같다.

논문을 작성하는 것은 이번이 처음인데, 만약 다음에 또 논문을 쓰게 된다면, 이번에 배운 것들이 정말 유용할 것 같고, 더 자신감을 가지고 논문을 쓸 수 있을 것 같다.

아쉬운 점이 있다면, 시간이 부족해서 더 작성하지 못한 문제들이 있다. 시간이 더 있었더라면 이 논문을 더 풍성하게 만들 수 있었을 텐데 안타깝다.

마지막으로, 주제 선정부터 문제 해결과 논문 작성에 이르는 모든 과정에 걸쳐서 우리에게 큰 도움을 주신 부덕훈 교수님께 진심으로 감사드린다. 교수님의 도움이 없었더라면 이 논문은 완성될 수 없었을 것이다.