韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2021.35.1.37
제 35집 제 1호, 2021. 3. 37-74

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 35, No. 1, Mar. 2021. 37-74

학생 사고기반 수학 수업의 특징과 그 실제

이 선 영 (백석고등학교, 교사)
한 선 영 (성균관대학교, 교수)†

본 연구는 학생의 수학적 사고를 수업의 중요한 자원으로 삼는 학생 참여형 수업을 학생 사고기반 수학 수업이라 명하고, 학생 사고기반 수학 수업의 주요 특징을 살펴보았다. 문헌 검토를 통해 확인된 학생 사고기반 수학 수업의 중요한 특징은 풍부한 수학 과제, 학생의 인지적·사회적 참여, 그리고 형성적 조력자 역할이다. 수업 사례 분석 결과에 의하면 학생 사고기반 수학 수업은 풍부한 수학 과제, 학생의 인지적·사회적 참여, 그리고 교사의 형성적 조력자 역할의 교집합 속에서 이루어졌다. 연구 결과는 학생 참여형 수업이 활동 자체에서 학생의 사고에 초점을 두었으며, 수업의 세 구성 요소의 상호작용이 수업 방향과 결과에 미치는 영향을 살펴보았다는 점에서 의미가 있다.

Ⅰ. 서론

2020년 COVID-19로 인한 사회적 혼란과 복합적인 사회경제적 문제 상황에 직면하면서 수학교육에서 수학적 사고력의 중요성은 더 커지게 되었다. 그 이유는 우리가 살아가면서 예상치 않게 마주하는 복잡하고 어려운 문제들은 단순히 지식을 암기하는 것을 넘어서 깊은 이해와 높은 수준의 사고력을 요구하기 때문이다. 또한, COVID-19로 우리가 경험한 것처럼 일상 속에서 습관적으로 하던 것을 갑자기 할 수 없게 되었을 때 능동적으로 사고하고 합리적으로 해결해나갈 필요성이 더욱 커졌기 때문이다.

수학적 사고력은 최근에 관심을 받게 된 것이 아니라 오래전부터 수학교육의 중요한 목표였다. 수학교육에서 학생들의 수학적 사고력을 함양시키기 위해 어떻게 수업해야 하는지는 수학교육 연구의 주요 관심사였다(Stacey, 2006). 처음에는 학생들의 수학적 사고력을 기르기 위해 교사가 지식을 전달하는 효과적인 방법에 초점을 두었지만, 점차 학생들의 사고를 촉진하려면 어떻게 해야 하는지, 학생의 사고를 활용하여 더 높은 수학적 사고를 구축하는 방법은 무엇인가로 초점이 이동했다. 수업에서의 내용, 학생, 교사의 유기적 관계의 이러한 변화를 Shepard(2000)는 1990년 이후의 새로운 패러다임이라 하였다.

NCTM & NCSM(2021)은 학생들의 개념적 이해를 위해 학생의 수학적 사고를 수업 자원으로 활용할 것을 강조했는데, 이를 위해서는 학생 참여가 필수적이다. 수학적 사고는 인간의 정신 과정이므로 의사소통을 통해 간접적으로만 관찰되기 때문이다(임형빈, 홍진곤, 2016; Chapin et al., 2013). 학생이 중요한 수학 개념과 관련하여 어떤 사고 수준에 있는지의 증거를 수집하기 위해서는 학생이 자신의 사고를 표현할 수 있는 참여 기회가 필요하다. 수업에서 학생의 참여가 중요하다는 것은 2015 개정 초·중등 교육과정 총론과 총론 해설 문서에 명시되어 있으며, 교과 특성에 맞는 다양한 학생 참여형 수업을 활성화할 것이 권고되어 있다.

그러나 실제 학교 현장에서는 학생 참여형 수업이 학생의 사고보다는 외현적 활동을 중심으로 한 수업으로 인식되고 있다. 일반적으로 교사들은 수학교육에서 학생 참여형 수업이 필요함에 공감했지만(한형주 외, 2018),

* 접수일(2020년 12월 15일), 심사(수정)일(2021년 3월 8일), 게재확정일(2021년 3월 18일)
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 수학적 사고, 학생 참여, 형성적 조력자
† 교신저자 : sy.han@skku.edu
* 이 논문은 성균관대학교의 2020학년도 성균학술연구비에 의하여 연구되었음

학생 참여형 수업에서 '참여'를 발표, 모둠 활동 등의 외현적인 활동 자체로 인식하는 경우가 많다(이종아, 2017). 이처럼 학생 참여형 수업에서 '참여'를 외현적 참여로만 인식할 경우 수업에서 학생의 수학적 사고가 축소되거나 제거될 우려가 있다. 예를 들어, 비주얼 씽킹(visual thinking) 활동을 이용하여 수학 문장제 과제를 표현하는 수업은 학생들의 흥미를 유발하고 자신의 아이디어를 시각적으로 표현해볼 수 있다는 장점이 있다. 그러나 문장제 과제를 해결하기 위해 주어진 문장을 수학적으로 분석하여 적절한 수학 모델로 표현하고, 적절한 해결 과정을 찾는 등의 중요한 수학적 사고과정이 축소되거나 제거된 채 그리기 활동으로 초점이 이동될 우려가 있다. 또한, 외현적 활동에만 초점을 둔 수업이 모든 학생에게 좋은 수업이 될 수 있는가에 대한 교사의 고민을 불러일으킴으로써 학생 참여형 수업에 실패하게 만들기도 한다(한형주 외, 2018).

학생의 수학적 사고를 중시하는 수업에서는 학생들이 도전적인 과제 해결과 관련하여 자신과 동료의 수학적 사고과정에 참여하는 데 초점을 두어야 한다(Chapin et al., 2013). 그러나 수학 수업에서 높은 수준의 수학적 사고력을 길러줘야 할 필요성이 더 커졌음에도 불구하고 아직 학교 현장에서는 학생 참여를 잘못 인식하거나(이종아, 2017; 한형주 외, 2018), 수업에서 학생의 수학적 사고를 중요한 자원으로 활용하지 못하고 있다(Stockero & Van Zoest, 2012). 교사가 학생의 수학적 사고를 중시하는 참여형 수업을 성공적으로 실천하도록 지원하려면 먼저 그러한 수업이란 무엇인지 명확히 정의하고, 수학적 사고와 수업에 관한 연구 문헌에 드러난 중요한 특징을 구체화할 필요가 있다. 본 연구는 연구의 편의를 위해 학생의 중요한 수학적 사고를 수업의 자원으로 활용하는 참여형 수업을 '학생 사고기반 수학 수업'이라 부른다.

본 연구는 학생 사고기반 수학 수업을 이해하기 위해 먼저 수학적 사고에 대한 이해를 통해 학생 사고기반 수학 수업이란 무엇인지 밝힌다. 그리고 기존의 연구를 통해 알려진 결과를 토대로 교사가 실제로 행한 수업이 학생 사고기반 수학 수업이라 판단하려면 어떤 특징을 확인해야 하는지를 명료화하고자 한다. 마지막으로 수학 수업 사례가 학생 사고기반 수학 수업의 주요한 특징을 가지는지를 판별하는 과정을 제시함으로써 학생 사고기반 수학 수업에 관한 이해를 돕는 것에 목적이 있다.

구체적인 연구 질문은 다음과 같다.

첫째, 학생 사고기반 수학 수업이란 무엇이며, 학생 사고기반 수학 수업임을 확인할 수 있는 중요한 특징은 무엇인가?

둘째, 다양한 사례 속에서 학생 사고기반 수학 수업의 특징을 가졌다고 판단되는 수업 장면을 확인할 수 있는가? 수업 장면에서 학생 사고기반 수학 수업의 구성 요소가 어떻게 상호작용하면서 영향을 주는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 학생 참여형 수업

학생의 수업 참여에 관한 일부 연구들은 학생 참여를 일반적으로 인지적, 행동적, 정서적 참여의 세 가지 차원으로 구분하였다(Fredricks, Wang, Linn, Hofkens, Sung, Parr, & Allentown, 2016). 인지적 참여(cognitive engagement)는 학생이 학습에 집중하는 수준이며, 주어진 과제에 주의를 기울이고, 전략적으로 복잡한 상황을 이해하기 위해 노력하는 것을 포함시킨다(Fredricks et al., 2016). 행동적 참여(behavioral engagement)는 수업 중 활동에의 참석, 노력, 주의 집중, 끈기, 긍정적 행동, 그리고 방해 행동의 부재를 의미한다(Fredricks et al., 2016). 마지막으로 정서적 참여는 교사와 동료, 교과 등에 대한 긍정적 또는 부정적인 반응, 소속감과 공감으로 정의된다(Finn, 1989). 최근에는 수학 수업에서 사회적 상호작용이 중요한 역할을 함에 따라 학생 참여에 대한 세 가지 차원과 함께 사회적 참여(social engagement)가 강조되고 있다(Finn, Zimmer, 2012; Rimm-Kaufman, Baroody, Larsen, Curby, & Abry, 2015). 사회적 참여란 수업에서 일어나는 사회적 상호작용, 즉 교사와 학생의 의사소통, 또는 소집단 내에서 자료를 공유하기 위해 발생하는 학생들 사이의 의사소통을 의미한다(Finn, Zimmer, 2012; Rimm-Kaufman, Baroody, Larsen, Curby, & Abry, 2015). 연구 문헌들에 제시된 수업에서의 학생 참여유형을 정리하면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

수학 수업에서 학생의 수학적 사고를 중요한 자원으로 활용하기 위해서는 인지적 측면과 사회적 측면에서 참여가 중요하다. 본 연구는 학생의 수학적 사고를 중요한 수업 자원으로 활용하는 수업을 위한 참여에 주목하므로 학생의 수학적 사고와 밀접하게 관련된 인지적 참여와 사회적 참여를 통합하여 이야기할 것이다. McMahon & Portelli(2004)는 앞으로 학생들의 형평성과 자율성, 그리고 토론을 중시하는 비판적·참여적 관점에서 연구가 이루어져야 한다고 하였으며, Fredrick et al.(2016)은 인지적·사회적 참여가 교육적 성과를 결정하는 중요한 요인이라 강조했다. 따라서 수학 수업에 학생이 참여한다는 것은 물리적인 공간에 참가(participation)하는 것 이상의 감정이나 이해를 내포하고 있으며(이종아, 2017), 유의미한 수학적 사고(thinking)에 지속성을 가지고 몰입(involvement)하는 것이라 할 수 있다.

<표 II-1> 학생 참여 유형(Fedricks et al., 2016; Martin & Rimm-Kaufman, 2015)

유형	세부 설명
행동적 참여 (behavioral engagement)	수업 중 활동에의 참석, 수업에 주의를 기울이기, 긍정적인 행동, 방해 행동의 부재(不在)
감정적/정서적 참여 (emotional/effective engagement)	학교, 교사, 동료 학생에 대한 긍정적 또는 부정적인 반응의 정도, 수학 교과 또는 수업 주제에 대한 공감
인지적 참여 (cognitive engagement)	전략적이고 주의 깊게 수학 과제의 복잡한 아이디어를 이해하거나 수학 기술 습득에 필요한 노력을 기울이는 등의 배움에 집중하는 수준
사회적 참여 (social engagement)	수학 수업의 일부로 갖는 사회적 상호작용, 수업내용과 관련된 동료 학생과의 의사소통(소집단 활동, 자료 공유 등)

수학교육에서 학생의 인지적·사회적 참여는 수학적 성취뿐 아니라 높은 수준의 수학적 사고를 촉진함으로써 비판적이고 민주적인 소양의 함양에 영향을 준다(Fredrick et al., 2016; McMahon & Portelli, 2004). 이에 우리나라는 학교 현장에서 학생 참여형 수업을 실천할 것을 강조하고 있다. 2015 개정 교육과정 문서에 학생 참여형 수업의 명확한 정의가 기술되어 있지는 않지만, 초·중등학교 교육과정 총론과 수학과 교육과정에 '학생 참여형 수업'이 강조되어 있음을 확인할 수 있다. 2015 초·중등학교 교육과정 총론의 '교육과정 구성의 중점'에는 '교과 특성에 맞는 다양한 학생 참여형 수업을 활성화하여 자기 주도적 학습 능력을 기르고 학습의 즐거움을 경험하도록 한다(p.3)'라고 하여 학생 참여형 수업의 용어를 사용했다.

2015 개정 수학과 교육과정에는 학생 참여형 수업이란 용어가 사용되지는 않았지만. 수학 교수·학습 방법(p.38-40)에서 앞서 살펴본 학생의 인지적·사회적 참여에 관한 증거를 발견할 수 있다. 예를 들어, 협력적 문제해결 과제에서 균형 있는 책임 분담과 상호작용을 통해 동료들과 협력하여 문제를 해결하게 하고, 학생 스스로 목표를 설정하고 학습을 수행하며, 학생의 사고를 촉진하는 다양한 발문을 통해 상호작용이 활발한 교실 환경을 구축하고 학생의 능동적 수업 참여를 독려해야 한다고 기술되어 있다. 또한, 교사의 설명식 교수에서도 학생의 수업 참여를 유도하고 사고를 촉진하는 발문을 활용해야 한다고 기술되어 있어 학생의 인지적 참여가 강조되어 있다.

2. 수학 수업의 구성 요소

Cohen et al.(2003)은 수업이란 환경 속에서 내용에 대한 교사와 학생 간의 역동적인 상호작용으로 구성된다는 것을 강조하면서 교수학적 삼각형(instructional triangle)을 제시하였다. 교수학적 삼각형에서 수업의 구성 요소로 교사, 학생, 내용을 제시하는 것은 이전의 수업 관점과 크게 다를 바가 없어 보인다. 그러나 Cohen et al.(2003)의 교수학적 삼각형은 수업이 한순간의 이벤트가 아니라 과제가 개발되고 학생의 참여와 이해로 이어지는 하나의 흐름이며, 이 흐름 속에 또 다른 교사와 학생, 학교 지도자, 학부모, 국가 기관 등을 포함한 환경이 유입되어 영향을 준다는 것을 보여준다는 점에서 의미가 있다. 즉, 수학 수업은 수학 내용, 학생, 그리고 교사의 세 가지 요소로 이루어지며, 세 가지는 각각 중요한 의미가 있다. 그러나 이 중 하나의 요소와 수업 결과를 단편적인 인과 관계로만 바라보는 것은 무리가 있다. Cohen et al.(2003)은 학교가 같은 자원을 가지더라도 이것을 어떻게 이용하는지에 따라 다른 교육적 결과를 만들어 낼 수 있다고 지적했으며, 수업을 여전히 학생을 위해 교사가 행하는 어떤 것이라 보는 일부 연구자들과 학교 실무자들의 관점을 비판했다.

일반적으로 수업은 어떤 맥락 안에서 특정한 주제에 대하여 교사와 학생이 말과 글로 의사소통하는 과정으로 진행된다. 따라서 Cohen et al.(2003)이 주장한 수업 자원들 사이의 역동적인 상호작용이 어떻게 일어나는지는 수업에서의 의사소통을 통해 확인할 수 있다. Rymes(2009)는 수업 담론(discourse)이 다양한 맥락에 걸쳐 다르게 나타나며, 동일 형식의 언어라도 맥락에 따라 다른 기능을 가진다고 주장했다. 또한, 교실에서의 언어 사용을 사회적 맥락, 상호작용적 맥락, 그리고 개인적 대응력의 세 차원에서 바라보았다.

사회적 맥락은 교육 정책, 교사와 학생의 문화·경제적 배경, 표준화된 성별 기대감 등 수업 외부의 맥락이 수업에 영향을 주는 것이다(Rymes, 2009). Cohen et al.(2003)의 연구에 기술된 한 가지 사례에는 초등학교 교사가 십진 블록을 이용하여 뺄셈을 지도하지만, '우리 아빠는 수학할 때 블록을 사용하는 건 어린 아기들이나 하는 것'이라 말하며 소극적인 행동과 낮은 성취도를 보이는 학생과 마주하는 순간이 묘사되어 있다. 이 수업 사례는 사회적 맥락이 수업의 말과 행동에 유입되어 수업 과정과 결과에 영향을 주고 있음을 보여준다.

상호작용적 맥락은 수업 내에서 순차적으로 이루어지는 이야기 패턴을 말한다(Rymes, 2009). 이러한 상호작용적 맥락은 예측 가능할 수도 있고, 예측이 가능하지 않을 수도 있다. 예측 가능한 상호작용 맥락이란 주어진 수업 맥락 속에서 첫 번째 발언이 다음 발언에 대한 기대를 산출해 내는 것이다. 예를 들어, 교사가 '이해됩니까?'라고 질문했을 때 학생들이 '네'라고 답변하는 것, 또는 교사가 '3쪽에 나오는 내용을 읽어 볼 수 있겠니?'라고 참여에 초대할 때 학생들이 '네'라고 수락하는 예측 가능한 방식으로 일어나는 말과 행동이 있다. 그러나 Cohen et al.(2003)의 연구처럼 수업에서 내용, 학생, 그리고 교사가 서로 영향을 주고받기 때문에 교사가 예측한 바대로만 수업이 흘러가지는 않는다.

사회적 맥락과 내용, 학생, 그리고 교사에 의한 복잡하고 역동적인 상호작용 맥락에 의해 수업 과정과 결과가 만들어진다면, 교사는 수업 개선을 위해 어떤 노력을 할 수 있을까? 예를 들어, 수학 교사가 학생들이 다양한 표현과 연결성을 이해하고 본인의 사고를 정당화하도록 뺄셈 수업을 계획했더라도 사회적 맥락 요인(예: 상급학교 진학을 위한 표준화된 시험의 준비, 학부모와 학생이 가진 배경 등)과 상호작용적 맥락 요인(예: 예측할 수 없는 학생의 반응, 침묵 등)에 의해 의도와 다른 결과가 만들어질 가능성이 있다. 수업을 어떻게 개선할 수 있는가에 대하여 Rymes(2003)는 교사가 다른 사람을 변화시킬 수는 없으며, 단지 그들이 반응하는 방식에 변화를 주려 노력해야 한다고 하였다. 즉, 수업은 다양한 자원들에 의해 변화되는 복잡성과 어려움을 내포하지만, 교사는 구체적인 수업 목표 달성을 위해 제어할 수 있는 부분에 집중해야 한다는 것이다. Rymes(2003)는 이것을 개인적 대응력이란 용어로 표현했다. 개인적 대응력이란 수업에서의 상호작용에서 말과 행동이 어떻게 사용되고 해석되는지에 관해 개인이 지니는 영향력을 말한다(Rymes, 2003). 맥락에 대한 인식 수준이 높을수록 개인적 대응력이 높아지므로(Rymes, 2009) 학생의 수학적 사고에 초점을 둔 학생 참여형 수업을 실천하기 위해서는 교사가 주어

진 환경 속에서 내용, 교사, 학생이 어떻게 상호작용해야 하는지 맥락에 관한 인식 수준을 높임으로써 교사의 개인적 대응력을 높이는 것이 중요하다. 예를 들어, 교사가 '12와 13의 최대공약수는 무엇일까요?'라고 질문했을 때 학생들이 교사가 예측한 대로 '1입니다'라고 답하지 않고 침묵으로 답할 수도 있다. 또는 '두 수의 최대공약수는 없다'와 같이 예상과 다른 답변을 할 수도 있다. 이럴 때 교사가 학생들의 침묵이나 다양한 답변을 어떻게 해석하고 상호작용할 것인가는 수업 흐름과 결과에 결정적인 영향을 준다. 다시 말해 교사가 어떻게 대응하는가는 학생들을 계속 침묵하게 하거나, 더 많은 학생이 계속해서 수학적으로 사고하고 토론에 참여하게 할 수도 있다 (Cohen, 2003; Rymes, 2009).

본 연구는 학생의 사고를 기반으로 한 참여형 수업이 특정한 유형의 수학 과제, 또는 교사의 말과 행동의 어느 한 가지만으로 결정되는 것이 아니라는 관점을 가지고 있다는 점에서 Cohen et al. (2003)의 관점과 일치한다. 교사가 학생의 사고를 기반으로 한 참여형 수업을 실천하려면 이러한 수업을 위한 자원이 필요하다. 그러나 특정한 자원의 존재가 학생의 사고를 기반으로 한 참여형 수업의 충분조건은 아니다. 앞에서 살펴보았듯이, 학생의 사고에 기반한 참여형 수업을 위해서는 수업 요소들이 어떤 특징을 가지고 상호작용하는지를 종합적으로 고려해야 한다. 학생의 사고에 기반한 참여형 수업의 각 구성 요소의 특징을 구체화하는 것은 수업이 사회적 맥락과 상호작용적 맥락에 의해 영향을 받더라도 높은 수준의 수학적 사고력 함양이라는 목표 달성을 위해 이러한 부분을 스스로 제어하는 개인적 대응력을 높일 수 있을 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 문헌 연구

첫 번째 연구 질문에 대한 답을 얻기 위해 수학적 사고, 수학과제, 학생 참여, 그리고 교사의 역할과 관련된 연구 영역에서 각각 연구되어 온 문헌들을 검토 및 종합하였다. 본 연구는 학생의 수학적 사고를 기반으로 한 학생 참여형 수업이 어떤 한 가지 요소로 결정되는 것이 아니며 수업 과제, 학생, 그리고 교사가 어떤 특징을 가지고 상호작용하는가에 따라 결정된다고 보았다. 그러므로 먼저 학생의 수학적 사고를 기반으로 한 학생 참여형 수업이란 무엇인지 명확히 정의하기 위해 수학적 사고와 관련된 선행 연구들을 검토했다. 그런 다음, Cohen et al.(2003)의 교수학적 삼각형(instructional triangle)의 세 꼭짓점에 있는 내용, 학생, 그리고 교사를 토대로 이 세 가지 수업 요소가 어떤 특징을 가지고 상호작용해야 학생의 사고를 기반으로 한 수학 수업이라 할 수 있을지, 그 특징을 조사하였다. 다시 말해, 학생의 수학적 사고를 기반으로 한 학생 참여형 수업이라 판단할 구체적인 근거를 찾기 위해 수학 과제, 학생의 학습 참여(학습 관행), 그리고 교사의 역할(교수 관행)에 관한 연구 문헌 중에서 학생의 수학적 사고에 초점을 둔 연구 문헌들을 검토하였다. 각각의 영역에서 검토된 연구 문헌들을 종합한 학생 사고기반 수학 수업의 의미와 학생 사고기반 수학 수업이라 판단할 수 있는 판단 근거에 대하여 수학교육 전문가로부터 검토를 받아 수정·보완함으로써 타당성을 확보하였다. 이 연구에서 검토된 연구 문헌들은 <표 Ⅲ-1>에 정리되어 있다.

<표 III-1> 검토된 연구 문헌 목록

영역	관련 문헌
수학적 사고	임형빈, 홍진군(2016); Breen & O'Shea(2010); Schoenfeld(2010); Stacey(2006); MathNIC Project 보고서(mathnic.org)
수학 과제	김대영, 김구연(2013), 김미희, 김구연(2013); 김원(2019); 김하림, 이경화(2016); 박정미 외(2017); 박진형(2019); 유재근, 박문환(2019); 이동근(2018); 이선정, 김구연(2019); 정혜윤, 이경화(2018); 최희선(2019); 홍창준, 김구연(2012); Choy & Dindyal(2018); Foster(2015); Mason & Johnston-Wilder(2004); Stein & Smith(1998); Stein et al.(2009); Sullivan et al.(2013); Swan(2008); Swan & Burjkhardt(2012); Watson & Thompson(2015)
학생의 참여	Astleiner(2018); Bahr & Bahr(2017); Fredricks et al. (2016); Martin & Rimm-Kaufman(2015); MathNIC Project 보고서(mathnic.org)
교사의 역할	임영빈(2018); 한채린 외(2018); Choy(2013, 2014); Choy & Dindyal(2017); Hiebert et al.(2013); Jacobs et al. (2010); Lee, M. Y.(2018); Leon et al. (2017); MathNIC Project 보고서(mathnic.org); McDuffie et al.(2018); Smith & Stein(2011); Stein et al.(2009); Stockero et al.(2012); van Es et al.(2017)

2. 수업 사례 분석

가. 연구 절차

두 번째 연구 문제를 위해 수업 사례들을 수집 및 분석하여 학생 사고기반 수학 수업이라고 판단할 수 있는 수업 장면을 확인하였다. 그리고 학생 사고기반 수학 수업이라고 판단된 장면을 다른 수업 장면들과 비교하였다. 이러한 비교는 수업이 좋고 나쁨을 판단하기 위한 것이 아니라 서로 다른 특징을 가진 것으로 확인된 수업 장면이 학생 사고에 초점을 두고 학생의 수학적 이해와 더 높은 사고를 지원할 수 가능성을 가졌는지의 증거를 찾기 위한 것이다. 이처럼 실제 수업 사례가 어떻게, 그리고 왜 그러한 현상을 일으키는지에 초점을 맞추고 현재 사건에 집중하며 행동 사건을 통제하지 않기 때문에 사례연구가 적합하다(박영은, 방정숙, 2016; Yin, 2016).

<표 III-2> 사례연구의 절차

연구 절차	세부 내용
연구 문제의 수립	• 교사가 제시하는 수업 과제의 특징은 무엇인가? • 수학 수업 사례에서 학생들의 참여 준거에 비추어 어떤 특징과 차이가 있는가? 그 원인은 무엇인가? • 수학 수업에서 교사의 수업 관행(practices) 특징에 비추어 어떤 차이를 보이는가? 그 원인은 무엇인가?
개념적 틀의 설정	• 개념적 틀과 코드의 설정
사례 및 분석단위 설정	• 사례 : 교육부 선정 수학 수업 및 중·고등학교의 수학 수업 사례 • 분석 단위 : 한 차시 수업별 수학 과제, 학생 참여유형, 교사의 촉진 유형
자료 분석 방법 선정	• 유형적(typological) 분석법 • 지속적 비교분석 및 설명하기
결과 해석 기준 설정	• 수학 과제 특성: 학년 수준에 따른 접근 가능성과 도전성, 개념표현과 절차의 연결성, 정당화 기회 제공의 차이와 그러한 차이의 발생 요인 • 학생 참여 유형: 수학적 사고양상이 변화되는 순간의 학생 말과 행동 패턴 • 교사 관행의 특징: 수학적 사고양상이 변화되는 순간의 교사 말과 행동 패턴

나. 자료 수집

본 연구는 중학교 수업 영상 4개, 그리고 고등학교 수학 수업 영상 9개의 총 13개의 수업 영상을 전사하여 분석하였다. 중학교 수학 수업 영상 중 1편, 고등학교 수학 수업 영상 중 1편은 교사들의 수업 전문성 향상을 위한 연구용으로 교육부에서 제공되는 우수수업 동영상이다. 이 수업을 선정한 이유는 가장 최근의 수업 동영상이었으며, 한 편은 플립러닝(Flipped Learning)이라는 수업 방식을, 다른 한 편은 짝 활동과 발표 수업 방식을 취하고 있기 때문이었다. 혼합된 수업(hybrid instruction) 유형 중 하나인(Ahmed, 2016) 플립러닝 수업은 학생을 능동적인 학습 주체로 보며 교사는 배움을 위한 조력자여야 함이 강조된다. 학생들이 온라인에서 스스로 이해하기 어려웠던 부분이나 복합적인 문제해결과정을 토론한다는 점에서 플립러닝은 학생의 수학적 사고를 기반으로 하는 수학 수업으로 볼 수 있다(Ahmed, 2016).

일반적으로 학교에서 이루어지는 수업 사례를 조사하기 위해 고등학교 수학교사 2명과 중학교 수학교사 1명의 수업을 관찰 및 분석하였다. 고등학교 교사 2명은 6개월간 4차시의 수업을 관찰했으며 교사와 수업 전·후에 면담하였다. 2020년 초에 추가로 관찰한 중학교 교사 1명은 사회적 상황에 의해 연구자가 직접 수업을 관찰하지 못했고 교사가 촬영한 3차시(1차시 90분)의 수업 영상을 메일로 받았다. 교사는 연구자가 쉽게 수업을 관찰하기 쉬운 학교에 근무하고, 수업에 학생이 참여하는 것이 중요하다는 신념을 가지며, 본 연구에 자발적으로 참여를 희망한 교사들을 대상으로 하였다. 또한, 교사와 학생의 상호작용을 조사하기 위해 그들이 가르치는 학생들도 연구 대상으로 하였다. 교사들에게 연구에 대하여 설명한 후 동의서를 받았으며, 연구에 동의한 교사들이 가르치는 학생들에게 연구의 목적과 절차, 방법 등을 충분히 설명하였다. 연구 참여를 거부한 학생이 존재하지 않은 학급을 교사별로 1개씩 선정하여 학생들의 가정으로 연구 동의서를 보내어 법정 대리인의 연구 참여에 대한 동의를 받았다. 연구 대상과 수업에 대한 정보는 <표 Ⅲ-3>에 정리되어 있다.

<표 Ⅲ-3> 수업 관찰 대상 및 수업 개요

교사	학교급	지도 학년(인원)	학생 성별	수업 개요	
A	중학교	1학년(22명)	남/여	1차	단원: 일차방정식 주제: 일차방정식 활용 과제 해결
B	고등학교	2학년(30명)	여	1차	단원: 순열과 조합 주제: 원순열
C	중학교	1, 2학년(50명)	남	1차	단원 : 소인수분해 주제 : 최대공약수와 최소공배수의 성질
				2차	단원 : 일차함수와 그래프 주제 : 일차함수의 그래프 해석하기
				3차	단원 : 일차함수와 그래프 주제 : 일차함수의 그래프와 식
D	고등학교	2학년(20명)	남	1차	단원 : 확률분포 주제 : 이항분포와 정규분포에 관한 문제해결
				2차	단원 : 통계적 추정 주제 : 모집단과 표본, 표본평균의 뜻
				3~4차	단원 : 확률과 통계, 기하, 미적분 주제 : 복합적인 문제 해결하기
E	고등학교	1학년(20명)	여	1~3차	단원 : 삼각함수 주제 : 삼각방정식과 삼각부등식의 해
				4차	단원 : 지수함수와 로그함수 주제 : 지수와 로그를 포함한 방정식과 부등식의 해

다. 자료 분석

본 연구는 학생 사고기반 수학 수업이라는 이미 결정된 유형에 기초하여 수집된 자료를 요소별로 분석한다는 점에서 유형별(typological) 분석 방법을 사용했다(Hatch, 2008). 학생 사고기반 수학 수업의 개념적 틀을 가지고 수업을 분석했으며, 문헌 검토를 통해 밝힌 풍부한 수학과제, 학생의 인지적·사회적 참여, 그리고 교사의 형성적 조력자 역할이라는 세 가지 범주를 사용하여 데이터를 해독했다. 그리고 세 가지 범주가 데이터에 의해 정당화되는지 연속적 비교법(constant comparative method)을 통해 연구 결과와 상충하는 부정적 사례가 있는지를 확인하여 타당성을 높였다(Hatch, 2008).

Ⅳ. 결과 및 논의

이 장에서는 선행 연구 문헌들을 고찰한 결과를 토대로 확인된 학생 사고기반 수학 수업의 의미와 학생 사고기반 수학 수업임을 확인할 수 있는 중요한 특징을 보고한다.

1. 학생 사고기반 수학 수업의 특징

가. 수학적 사고와 수학 수업

수학적 사고는 인간의 복합적인 정신적 활동이므로 명확하게 정의하기 어렵지만, 학생들이 수학적으로 사고한다는 것은 단순히 수학 용어나 기호, 절차 등을 암기하는 것을 넘어 어떤 상황을 수학적으로 이해하고 해결하는 것을 의미한다(Chapin, O'Connor & Anderson, 2013; Hilbert et al., 1993; Kilpatrick et al., 2001; Stacey, 2006). 예를 들어, 학생이 직각삼각형에서 sinA가 각 A에 대한 빗변과 높이의 비임을 단순히 암기했다고 해서 삼각비에 대한 수학적 사고를 했다고 볼 수 없다. 학생이 삼각비가 직각이 아닌 한 각의 크기가 같은 모든 직각삼각형이 닮음이라는 사실과 연관되어 있음을 이해하며, 이해한 개념을 문제해결에 이용할 수 있을 때 삼각비에 관한 수학적 사고를 했다고 볼 수 있을 것이다.

수학적 사고는 수학을 이해하는 측면과 이해한 것을 이용하는 측면에서 생각할 수 있다. 여기에서 수학을 이해한다는 것은 수학적 용어나 절차를 암기하고 재연하는 것이 아니라 개념들 사이의 연결성을 만드는 것을 의미한다(Chapin et al., 2013; Hiebert et al., 1997). 그리고 수학을 이용한다는 것은 문제 상황을 해결하기 위해 자신의 추론을 만들고, 협력적으로 의사소통한다는 것을 의미한다(Chapin et al., 2013; Kilpatrick et al., 2001). 따라서 본 연구는 학생들이 새로운 상황 속에서 이전에 배운 개념과 전략을 바탕으로 다양한 추론을 만들고, 자신의 추론을 주제로 의사소통하는 과정에서 긍정적인 수학적 신념과 더 높은 수학적 사고를 구축하는 수업을 학생의 사고를 기반으로 한 학생 참여형 수업이라 정의한다. 그리고 학생의 사고를 기반으로 한 학생 참여형 수업을 간단히 하여 학생 사고기반 수학 수업이라 한다.

나. 학생 사고기반 수학 수업의 세 가지 요소별 특징

(1) 풍부한 수학 과제

수학 과제란 학생들에게 중요한 수학적 정보를 제공하여 활동하게끔 하고, 학습의 출발점이자 맥락이 되는 지침을 담은 것이다(Watson & Sullivan, 2008). 본 연구는 수학 과제에 관한 문헌들을 고찰하여 학생 사고기반 수학 수업을 위해 필요한 수학 과제의 네 가지 특징을 발견했다. 과제 맥락을 강조한 연구도 있었지만(예: Sullivan et al, 2013; Choy & Dinyal, 2018), 연구에 따라 강조되는 맥락이 다르고 맥락을 제시하지 않는 연구도 있었기 때문에 본 연구에서 풍부한 수학 과제의 특징에 포함하지 않았다. 수학 과제와 관련하여 검토된 연구들

은 대부분 Stein & Smith(1998), Sullivan et al.(2013), 그리고 Choy & Dindyal(2018)이 제시한 과제의 중요한 특징을 이론적 배경으로 하여 교과서 및 수업 자료를 분석하였거나 일부 특징과 관련하여 연구되었기 때문에 <표 Ⅳ-1>에는 세 연구에 제시된 수학 과제의 특징만을 요약했다.

<표 Ⅳ-1> 선행 연구에 제시된 생산적인 수학 과제

핵심어	Stein & Smith(1998)	Sullivan et al.(2013)	Choy & Dindyal(2018)
개념적 이해	개념적 이해를 요구	중요한 수학적 아이디어를 가지고 수학적 이해를 도움	개념적 이해를 지원
연결성	개념적 이해에 근거한 연결성을 가진 절차를 요구	맥락과 맥락에 내재한 수학의 연결성을 제공	일반적인 패턴과 법칙을 발견할 기회를 제공
추론 및 정당화	개념, 절차, 관계의 특성을 탐구, 과제 분석과 조사를 요구	아이디어의 생성 및 정당화, 과제에 내재한 규칙성 파악 요구	
	인지 과정에 대한 자기 점검과 자기 조절 요구		
생산적 어려움과 다양한 표현	비알고리즘적이고 복잡한 사고 요구	다양한 답을 요구	다양한 변화(구체물, 표현법 등)
	다양한 방식(그림, 구체물, 기호, 문제 상황)으로 표현	개념과 밀접하게 연결된 모델, 표현, 도구를 포함	
과제 맥락	-	실제적·현실적인 맥락에 기반	-
		-	정형적인 과제(교과서 등)

(가) 학생들이 이해해야 할 중요한 수학 개념

수학 과제는 학생들이 수업 시간에 이해해야 할 중요한 수학적 개념을 포함해야 한다(유재근, 박문환, 2019; Munter, 2014; Sullivan et al., 2013; Swan & Burkhardt, 2012). 수업 시간에 제시된 수학 과제가 학생의 흥미를 고려했더라도 실생활과 피상적으로 관련되거나 수업에서 학생이 이해해야 할 중요한 수학적 개념을 학습할 기회를 포함하지 않았다면 학생들의 수학적 사고 발달을 위한 기회를 제한하고 단순한 놀이 활동에 그칠 우려가 있다(유재근, 박문환, 2019; Sullivan et al., 2013). 과제를 성공적으로 수행하고 해결하는 데 필요한 사고의 종류와 수준의 관점에서 수학 과제를 조사한 Stein & Smith(1998)는 학생들에게 계산기나 공학 도구를 제공하거나 소집단 활동을 시킨다고 해서 유의미한 배움의 기회가 만들어지는 것이 아니며 과제에 참여하는 수학적 사고 수준과 종류에 의해 결정된다고 보았다. 따라서 본 연구는 학생들의 수학적 사고를 촉진할 수 있는 풍부한 수학 과제는 학생들이 해당 학년에서 배워야 할 중요한 수학 개념을 포함해야 한다고 보았다.

(나) 접근 가능성과 도전성

수학 과제는 수업에 참여한 모든 학생에게 접근 가능한 동시에 도전적이어야 한다(Foster, 2015; Munter, 2014; Sullivan, Clarke & Clarke, 2013; Swan, 2008; Swan & Burkhardt, 2012). 즉, 수업에 참여한 모든 학생에게 다양한 진입점을 제공함과 동시에 생산적인 어려움을 제공해야 한다. Stein & Smith(1998)는 이전에 배웠던 사실, 규칙, 공식, 정의를 기억해내거나 이미 사용해야 할 절차가 명백하게 보이는 과제는 학생들의 높은 수준의 인지적 사고를 유발하지 못한다고 지적했다. 그러나 수업에 참여한 학생들의 수준에 비해 지나치게 높은 진입점을 가지고 있다면 학생들은 수업 목표를 달성하지 못하고 비생산적인 방법으로 오랜 시간 헤매거나 수업에 참여하지 못할 수 있다. Choy & Dindyal(2018)은 Stein & Smith(1998)와 마찬가지로 수학 과제의 질(quality)이 학생들의 수학적 사고 발달에 중요하지만, 지나치게 높은 인지적 노력 수준의 과제는 진입점이 너무 높아 학생

들의 학습과 교사의 수업 준비에 어려움을 줄 수 있다고 하였다. 이들은 위와 같은 제한점을 해결하기 위해 bianshi라는 개념을 소개했다. bianshi는 bian과 shi의 합성어로 bian는 중국말 變式으로 변형을, shi는 스타일(style)을 의미한다. 즉, bianshi는 교과서나 평가 문항 등의 정형적인 과제를 다루지만, 절차적 기술의 연습이 아닌 다양한 조건 및 형태를 가진 정형적 과제들의 변하지 않는 특성을 주목하게 함으로써 개념적 이해에 초점을 둔다(Li & Huang, 2013). Choy & Dindyal(2018)이 주장한 bianshi 교수를 위한 과제는 Stein & Smith (1998)과 Sullivan et al.,(2013)이 제안하는 수학 과제보다는 정형적인 연습 과제에 가깝지만, 변화와 불변의 패턴에 주목함으로써 학생들에게 생산적인 어려움을 제공하여 수학적으로 사고할 기회를 제공한다. 과제의 적절한 수준과 도전성에 대하여 Sullivan et al.(2013)은 바람직한 학습을 위해 과제가 갖추어야 할 조건으로 학생들이 그 해결 방법을 모르지만 도전할 수 있는 과제를 언급했다. 따라서 본 연구는 풍부한 수학 과제의 특징 중 하나를 수학 과제가 학생들이 이전에 배운 내용을 기반으로 접근할 수 있는지, 적절한 어려움을 제공하여 높은 수준의 사고를 촉발할 가능성이 있는지, 즉 과제에 대한 접근 가능성과 도전성으로 보았다.

(다) 다양한 표현과 정당화

과제를 통해 학생들이 각자의 수학적 아이디어와 추론을 다양하게 표현하고 정당화할 수 있어야 한다(김원, 2019; 이동근, 2018; Foster, 2015; Mason & Johnston-Wilder, 2004; Munter, 2014; Sullivan et al., 2013; Swan, 2008; Swan & Burkhardt, 2012). Stein & Smith(1998)는 높은 수준의 수학적 사고를 지원하는 과제란 주로 다양한 방식(시각적 그림, 구체물, 기호, 문제 상황)으로 표현되며 학생들이 과제를 분석하고 능동적으로 조사할 것을 요구한다고 하였다. Sullivan et al.(2013)은 중요한 수학 개념과 밀접하게 연결된 모델과 표현 등을 통해 학생들이 스스로 아이디어를 만들고 정당화하도록 하는 목적적 표현 과제, 그리고 학생들이 다양한 답을 논의하는 과정에서 추론과 정당화가 요구되는 내용 기반 개방형 과제를 제안했다. Choy & Dindyal(2018)은 학생들이 다양한 모양과 재질, 색감의 삼각형을 조사하는 과제를 통해 변화와 불편의 패턴을 탐구하거나 기본 문제를 해결한 후에 포함된 수를 다양하게 변화시키거나 표기법을 바꾸거나, 표현방식을 바꾸어 과제를 경험할 것을 강조했다. 즉, 수학 과제에 관한 연구마다 강조되는 맥락은 조금씩 다르지만, 학생 스스로 그림, 표, 수학 기호 등으로 표현해 볼 기회를 제공해야 하는 것이 학생들의 수학적 사고를 위해 중요함을 확인할 수 있었다. 따라서 다양한 표현 기회를 주는가를 풍부한 수학 과제의 특징 중 하나로 하였다.

학생들이 수업 중에 과제에 관한 자신의 수학적 사고를 자유롭게 표현하고 이를 정당화하지 못한다면 학생들이 더 높은 수학적 사고를 구축할 기회를 제한할 수 있다. 참여주의적(participationism) 입장에서 교과서 과제를 분석한 김원(2019)은 수학적 과정과 가치가 배제된 수학은 학생들의 명확한 개념 이해와 수학적 사고 구축에 어려움을 줄 수 있다고 주장했다. 그리고 우리나라의 수학 교과서의 그래프 과제들이 정보와 절차를 제공하여 일방적인 적용을 강요함을 지적하면서 과제는 다양한 상황 속에서 정보를 해석할 경험과 그러한 경험을 바탕으로 예상 및 선택할 기회를 제공해야 함을 강조했다(김원, 2019). Watson & Thompson(2015)은 교과서에 제시된 과제들이 학생들에게 스스로 해결 방법을 찾고 정당화할 기회를 주지 못하고 교과서의 저자들이 답안을 제공함으로 인해 수학에 대한 주도권을 쥐고 있음을 지적했다. 그들은 학생들이 여러 가지 해결 방법을 확인하고 이를 연결할 수 있는 과제를 제공함으로써 수학에 대한 주도권을 저자가 아닌 학생에게 주어야 한다고 주장했다. Watson & Thompson(2015)의 연구와 유사하게 이동근(2018), 이지현(2014), 조한혁, 최영기(1999)는 '$0.999\cdots = 1$'이라는 수학 개념을 학생들이 정당화할 기회 없이 교과서나 교사의 권위에 의해 수용함으로 인해 학생뿐 아니라 일부 교사들도 '$0.999\cdots = 1$'에 관련하여 과제의 형태 변형에 혼란을 느끼거나 깊은 수학적 사고를 하지 못한다고 지적했다. 따라서 본 연구는 학생들이 표현한 아이디어를 정당화할 기회를 포함하는가를 풍부한 수학 과제의 중요한 특징으로 하였다.

(라) 연결성과 일반화 가능성

학생들은 과제를 수행하면서 이전에 배운 수학 개념을 기반으로 새로운 개념을 발견하고 이를 다른 상황으로 일반화할 수 있어야 한다(Foster, 2015; Mason & Johnston-Wilder, 2004; Munter, 2014; Swan, 2008; Watson & Thompson, 2015). Stein & Smith(1998)는 학생들이 과제를 수행하면서 이전에 배운 관련 지식이나 경험을 적절히 활용해야 한다고 하였으며 수학적 개념, 절차, 관계의 특성을 이해하도록 요구해야 한다고 강조했다. Sullivan et al.(2013)은 모델, 표현, 도구를 포함한 과제를 통해 이들의 연결성을 학생들이 이해하게 도와야 한다고 했으며, 다양한 답을 논의하면서 내재한 규칙성을 파악하고 일반화할 수 있어야 한다고 제안하였다. Choy & Dindyal(2018)의 bianshi 교수에서도 학생들이 수학 과제에서 변화와 불편의 패턴 속에서 개념들 사이의 연결성과 일반화 가능성을 발견해야 한다고 주장했다. 예를 들면, '$x+1=5$'와 같은 기본 문제를 해결한 후에 포함된 수를 다양하게 변화시키거나 표기법을 바꾸거나, 표현방식을 바꾸어 과제를 경험하게 함으로써 학생들이 절차에 관한 일반적인 법칙과 패턴을 발견할 수 있다. 따라서 본 연구는 과제가 이미 학생들이 배운 개념과 관련지어 생각할 기회를 제공하는지, 이를 확장하여 일반화할 가능성을 제공하는지를 학생 사고를 촉진하는 풍부한 과제의 특징으로 보았다.

수학 과제에 관한 문헌들의 결과를 토대로 학생 사고기반 수학 수업을 돕는 수학 과제의 주요 특징을 정리하면 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 학생 사고기반 수학 수업을 위한 과제 특징

준거	세부 설명
풍부한 수학 과제	• 수업 목표와 밀접하게 관련하여 학생들이 이해해야 할 중요한 수학 개념을 포함한다 • 모든 학생이 과제에 접근 가능하며, 현재 수준에서 생산적인 어려움을 제공한다 • 각자의 수학적 아이디어, 추론을 다양하게 표현하고 정당화할 기회를 준다 • 이전 수업 아이디어와 연결성을 가지고 있거나, 일반화할 가능성이 있다

(2) 학생의 인지적·사회적 참여

Bahr & Bahr(2017), Fredrick et al.(2016), Helme & Clarke(2001), Hiebert et al.(1997) 등의 많은 연구자는 학생들의 높은 수학적 사고 구축을 위해서는 인지적 참여(cognitive engagement)와 사회적 참여(social engagement)가 중요하다고 강조했다. Common Core State Standards Initiative in Mathematics(CCSSM, 2015)도 수학의 중요한 측면으로 소집단 활동, 의사소통과 같이 학생들의 사회적 참여와 함께 복합적 문제해결, 추론, 정당화와 같은 인지적 참여를 강조하고 있다.

학생들의 높은 수학적 사고 구축을 위해서는 학생의 인지적 참여와 사회적 참여가 필요하므로 학생이 중요한 수학 내용과 관련하여 인지적·사회적으로 참여한다는 것이 무엇인지를 구체적으로 살펴볼 필요가 있다. 인지적 지표를 제안한 Helme & Clarke(2001), 인지적 참여를 위한 수학적 사고 수준과 듣기의 역할에 대한 틀(framework)을 제안한 Bahr & Bahr(2017), 그리고 CCSSM의 8가지 수학적 관행(mathematical practices)의 연구 결과를 종합해보면 학생의 인지적·사회적 참여는 크게 세 가지 측면에서 확인할 수 있다.

첫째, 학생들은 능동적인 사고자로서 문제를 이해하고 분석해야 한다. Helme & Clarke(2001)는 학생들의 인지적 참여가 개별 학생, 과제, 그리고 학습 환경의 상호작용에 영향을 받는다고 강조하면서 학생들의 인지적 참여는 그들의 언어적 사고(verbalizing thinking)와 자기 점검, 방해되는 것을 통제하고 집중하는 것을 통해 확인된다고 하였다. Bhar & Bahr(2017)는 간단한 답변이나 문제에 대한 정보를 포함하여 요약하여 답할 수 있는 질문, 정보를 추가하여 문제를 명확히 하게 만드는 질문을 통해 모든 학생을 이해 과정에 참여시켜야 한다고 제안했다. 그리고 CCSSM의 8가지 학생 관행(student practices) 중 문제를 이해하고 해결하기 위해 인내한다는 첫

번째 관행(MP 1)과 추상적이고 양적으로 추론한다는 두 번째 관행(MP 2), 그리고 다양한 상황 속에서 패턴과 구조를 인식하고 이용한다는 일곱 번째 관행(MP 7)은 학생들이 주어진 문제를 적극적으로 이해하고 분석하는데 참여해야 함을 보여준다.

둘째, 학생들은 자신의 수학적 사고를 표현하고 이를 정당화하는 과정에 참여해야 한다. Helme & Clarke(2001)는 교사와 동료 학생들과의 협력적 상호작용 속에서 추론을 설명하거나 정보를 제공하고, 아이디어에 참여하는 등의 행동 지표를 인지적 참여의 지표로 보았다. 또한, Bahr & Bahr(2017)는 학생들이 언어로 사고를 표현하고 그 사고가 합리적인가를 설명하도록 하여 인지적·사회적 참여를 촉진할 수 있다고 하였다. CCSSM의 상호 연관된 8가지 학생 관행(student practices) 중에서 가능한 논쟁을 구성하고(MP 3), 적절한 도구를 전략적으로 사용(MP 5)하여 주어진 상황을 수학적으로 모델링(MP 4)하며, 본인의 수학적 사고과정을 정확하고 분명하게 설명하기 위해 수학 개념을 정확히 사용해야 한다(MP 6)고 하여 학생들의 수학적 사고의 표현과 정당화를 강조했다.

셋째, 학생들은 서로 다른 수학적 아이디어를 종합하고 평가하는 과정에 참여해야 한다. Helme & Clarke(2001)는 학생들의 인지적 지표로 서로 다른 아이디어에 참여하여 정보 및 피드백을 제공하고, 반성적인 자기 질문을 하여 평가 의견을 만드는 것을 제안했다. Bahr & Bahr(2017)는 서로 다른 아이디어, 표현 등을 비교하고 타당성을 확인하며, 가장 효율적인 방법이 무엇인지 판단하고 최종적인 결과로 일반화할 수 있는 질문을 제기하여 학생들의 참여를 촉진해야 한다고 주장했다. 그리고 CCSSM의 8가지 학생 관행(student practices) 중에서 다른 사람의 추론 중에서 무엇이 옳은지를 비판하고(MP 3) 반복되는 추론에서 규칙성을 찾아 표현하고 이를 평가한다(MP 8)는 것은 학생들이 다양한 수학적 아이디어를 비교 및 평가하고 이를 종합하는 과정에 적극적인 주체로 참여해야 함을 보여준다.

본 연구는 학생 참여에 관한 문헌들에서 학생의 사고 촉진을 위해 공통적으로 강조된 세 가지 요소를 학생 사고기반 수학 수업을 위해 요구되는 학생 참여의 특징으로 보았으며, 이는 <표 Ⅳ-3>에 정리되어 있다.

<표 Ⅳ-3> 학생 사고기반 수학 수업을 위한 학생 참여 특징

준거	세부 설명
학생의 인지적·사회적 참여	• 문제의 이해 및 분석: 과제를 이해하고 해결하기 위해 규칙성이나 구조에 주의를 기울인다 • 표현 및 정당화 : 해결해야 할 문제에 대한 본인의 수학적 사고를 명확히 표현하고, 정당화한다 • 종합 및 평가 : 서로 다른 수학적 아이디어의 장단점을 분석하며, 본인의 수학적 사고와 비교하여 정교화 또는 일반화한다

(3) 교사의 형성적 조력자적 역할

학생들이 수학 개념을 이해하기 위해서는 자신들의 수학적 아이디어를 교사 및 동료와 공유하고 논의할 기회가 필요하다(Chapin et al., 2013). 그러나 학생들에게 수업과 관련하여 토론할 기회를 제공한다고 해서 항상 학생들의 배움으로 이어지는 것이 아니다. 수학 수업은 과제와 학생 참여뿐 아니라 교사가 어떤 역할을 하는가에 따라 그 방향과 결과가 달라진다(Cohen et al., 2003). 그러나 수학 교사들은 수학 수업에서 풍부한 수학 과제의 의도를 충분히 활용하지 못하거나 협력적인 수학 수업을 계획하고 실천하는데 여러 가지 어려움을 겪을 수 있다(Chapin et al., 2013; Smith & Stein, 2011). Math NIC은 연구를 통해 협력적인 수학 활동과 관련하여 수학 교사들이 일반적으로 시간적 압박(time pressures), 통제(control), 개인적 불안(personal insecurity), 그리고 학생, 교사, 학습에 대한 관점(views of students/the subject/learning)에서 어려움을 겪고 있음을 밝혔다. 즉, 교사들은

협력적인 수학 학습을 할 시간이 부족하며 대화는 시간 낭비라고 생각하며 대화로 인한 소음이 수업을 방해할 수 있다고 여긴다. 또한, 학생들이 토론할 능력이 없다고 생각하거나 수학은 정답이 확실하므로 토론 과정에서 오개념만 커질 수 있다고 생각하곤 한다. 이러한 교사들의 신념은 학생이 사고할 부분을 떠맡아 지나치게 구체적인 힌트를 제공할 뿐 아니라 수업의 초점을 개념의 이해로부터 정답을 빠르게 찾는 것으로 바꾸어 학생 사고기반 수학 수업을 저해하는 요인이 된다(Stein et al., 2009).

<표 Ⅳ-4> 선행 연구에 제시된 교사의 역할

교사 역할	Stein et al.(2009), Smith & Stein(2011)	Hiebert et al.(2004)	Chapin et al.(2013)	Leon et al.(2017)	Math NIC	Noticing[1]
구체적인 목표를 안내함	명확하고 분명한 수업 목표가 있어야 예상하기 가능	목표에 맞는 과제를 선정함	수업 계획에서 목표를 확인함	수업내용과 활동이 중요한 이유를 명확히 안내함	과제의 목표를 분명히 설명함	교수 상황에서 중요하거나 가치 있는 것을 확인함
수업문화의 조성함(실수와 다양한 아이디어 존중)	탐구하기에 적절한 시간을 제공함	협력적 의사소통, 성찰을 중시하는 문화 형성	존중하며 말하고 공평한 참여를 위한 규범을 세움	수업과 평가에서 느끼는 학생의 감정을 인정, 허용적 언어와 태도를 보임	서로의 의견을 중하며 책임감을 부여하는 규칙을 계획함	-
학생들이 스스로 아이디어를 명확하게 표현 및 정당화하게 함	학생의 정당화 및 설명을 요구함	목표를 향한 다양한 방법이 존재함을 인식시킴, 사회적 협약에 의한 정보를 알려주고 그 외의 것은 찾을 기회를 제공함	학생 본인의 생각을 명확히 표현할 수 있게 도움	학생에게 선택의 기회를 주고, 결과보다 과정을 강조함	본인의 수학적 사고를 적고, 설명 및 해석하도록 요구함	학생들의 전략에 주의를 기울이고, 이해를 해석함
모든 학생이 중요한 수학적 사고과정에 참여할 기회를 만듦	전체 논의할 답안을 선정함, 모든 학생이 수업의 주체가 되어 중요한 수학을 다룸		모든 학생이 귀 기울여 듣고 다른 학생의 추론에 참여하도록 도움	학생들의 수학적 아이디어를 인정함	전체 토론의 흐름을 지시하고 자신의 사고를 분명히 설명하도록 격려함	
증거에 기반하여 형성적 피드백을 제공하고, 서로 다른 수학적 사고를 비교, 평가, 보완할 것을 격려함	다양한 접근법을 예상함, 교육적 의도에 따라 발표할 학생을 선정함	학생들의 성찰적인 사고를 중시	질문을 통한 압박(press)을 통해 깊은 수학적 사고를 지원함	적절한 도전을 제공함, 긍정적인 피드백을 제공함, 단계적 안내를 제시함	질문자가 되어 새로운 아이디어를 소개하고, 중요한 개념에 초점을 유지하고, 사고를 자극하는 질문을 던짐 학생 질문에 교사 대신 다른 학생이 답변할 기회를 줌	요점과 난점에 주의를 기울이고 응답 방법(임계점)과 연결함
다양한 수학적 아이디어와 수업 목표를 연결함	다양한 수학적 아이디어를 연결하고, 수학적 아이디어와 핵심 수학 개념을 연결함	학생들의 현재 사고 위치와 교사가 지향하는 목적을 이어줌	토론의 중요 논점을 어떻게 정리할지 생각함, 토론을 마무리할 때 핵심내용(아는 것과 더 생각할 것)을 정리함	수업을 구조화함		수학적 사고와 그것들이 나타내는 폭넓은 교수학습원리를 연결함

1) 한채린, 김희정, 권오남(2018), Choy(2013, 2018), Jacobs et al.(2010), van ES et al.(2017), Yang & Rick(2013)

교사들의 수업에 대한 잘못된 신념을 변화시키고 어려움을 지원하기 위해서는 학생 사고기반 수학 수업을 실천하기 위한 교사의 수업 관행(practices)을 명확히 할 필요가 있다. 이에 본 연구는 과제의 인지적 요구 수준이 교사의 관행에 의해 어떻게 변화하는가를 관찰한 Stein et al.(2009)의 연구, 학생들의 사고를 기반으로 한 교수법에 관한 Smith & Stein(2011)의 연구, 수학적 이해를 촉진하는 수업 프로젝트 결과를 보고한 Hiebert et al.(1997)의 연구, 학생의 수학적 사고에 중심을 둔 수학적 담론에 관한 Chapin et al.(2013)의 연구, 교수 질(teaching quality)에 관한 Leon et al.(2017)의 연구 문헌을 검토하여 성공적인 학생 사고기반 수학 수업을 위해 교사가 어떤 역할을 해야 하는지를 조사했다. 그리고 Math NIC의 연구 보고서 중 교사의 관행에 관하여 기술되어 있는 보고서 'students working collaboratively'와 'formative assessment'를 검토했다. 또한, 교사의 관행에 관해 최근 주목받고 있는 교사의 노티싱(noticing)에 관한 일부 연구 결과들에서 학생의 사고에 기반한 수업을 위한 교사 역할을 확인했다.

교사의 역할에 관한 선행 연구들을 검토한 결과는 <표 Ⅳ-4>와 같다. 학생 사고기반 수학 수업에서 교사는 학생들의 인지적·사회적 참여를 촉진하고, 깊은 수학적 사고 구축을 위한 생산적인 피드백을 제공해야 한다. 본 연구는 이러한 교사의 역할을 형성적 조력자(formative facilitator)로 정의하였다. 형성적(formative)이라는 것은 중요한 수업 목표에 도달하기 위해 점검하기 위한 정보를 수집하고 그 정보를 수업 활동을 수정하기 위한 피드백으로 사용하는 것을 말하며(Black & Willam, 1998), 조력자(facilitator)는 교사의 관점을 강요하거나 지시하는 것이 아니라 학생들이 본인의 생각을 명확히 하도록 돕고 학생의 수학적 사고를 자극하는 질문을 주고받는 것을 말한다(MathNIC, 2012). 형성적 조력자(formative facilitator)로서 교사는 명료한 수업 목표를 공유하고, 학생들의 사고를 가시화하고 분석할 수 있도록 논의를 촉진하며, 학생들이 더 높은 수학적 사고에 도달할 수 있는 피드백을 제공해야 한다(Chapin et al., 2013; Hiebert et al., 1997; Leon et al., 2017; Smith & Stein, 2011; William & Thompson, 2007).

형성적 조력자(formative facilitator)로서 교사 역할은 여섯 가지로 특징지을 수 있다(표 Ⅳ-5). 첫째, 교사는 구체적인 수업 목표를 세워 안내해야 한다. 명확한 수업 목표는 학생들의 다양한 반응을 예상하도록 돕고(Smith & Stein, 2011), 교수 상황에서 중요하고 가치 있는 사고에 주목하게 한다. 둘째, 교사는 실수와 다양한 아이디어가 인정되는 수업문화를 조성해야 한다. 학생들이 실수를 두려워하지 않고 다양한 아이디어를 논의하게끔 하려면 서로 다른 의견을 존중하는 허용적인 분위기가 중요하다(Boaler, 2016; Chapin et al., 2013; Leon et al., 2017; Hiebert et al.. 1997; Smith & Stein, 2011; Stein et al, 2009). 셋째, 교사는 학생들이 본인의 아이디어를 명확하게 표현하고 이를 정당화하도록 요구해야 한다. Chapin et al.(2013)은 대부분의 수업에서 교사가 지식과 절차를 전달한 후에 중요하다고 여기는 것을 복창하게 하거나 간단한 퀴즈형 질문을 함으로써 학생들의 깊은 수학적 사고를 지원하지 못한다고 비판했다. 이들은 학생들이 수업에서 개념이나 절차 등에 대해 스스로 말하고 듣는 과정에서 더 높은 사고를 형성된다고 강조하면서 생산적인 말하기(productive talks)를 제안했다. Hiebert et al.(1997)은 교사가 수학 기호나 용어 등의 사회적 협약에 의한 정보를 전달하되 그 외의 것은 학생이 발견하고 표현할 기회를 주어야 한다고 하였다. 또한, Leon et al.(2007)은 수업을 통해 학생의 자율성을 갖도록 해야 하며 자율성은 학생 자신이 결정하고 본인의 수학적 아이디어를 인정받음으로써 형성된다고 하였다. 넷째, 교사는 학생이 중요한 수학적 사고과정에 참여할 기회를 만들어야 한다. Smith & Stein(2011)은 종종 어떤 해결 방법이 공유되더라도 다른 학생들의 수학적 사고를 더 깊이 있게 만들지 못한다고 지적하면서 교사가 어떤 사고를 드러낼지, 누가 그것을 발표하게 할지를 세심히 결정함으로써 모든 학생이 수업의 주체가 되도록 해야 한다고 주장했다. 교사는 모든 학생이 다른 학생의 수학적 사고과정에 참여시키며(Chapin et al, 2013; Hiebert et al., 1997), 이를 위해 학생의 전략에 귀 기울이고 그들의 이해를 해석해야 한다(Choy, 2014; Jacobs et al., 2010). 다섯째, 교사는 증거에 기반하여 형성적 피드백(feedback)을 제공하고 학생들이 서로 다른 아이디어를 비교, 평가 및 보완하도록 격려해야 한다. 이를 위해 교사는 다양한 접근법을 예상하고 의도에 따라 발표할 학생을 선정해

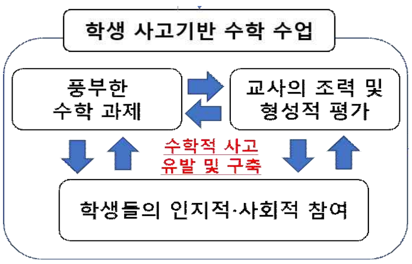
야 하며(Smith & Stein, 2011), 학생의 전반적인 특성에 대한 칭찬이나 정·오답을 위한 피드백보다는 학생의 자기 점검을 위한 피드백을 제공해야 한다(Hatti & Timperley, 2007).

그리고 마지막으로 학생 사고기반 수학 수업에서 교사는 다양한 수학적 아이디어를 연결 짓고 학생들의 수학적 아이디어와 수업 목표를 연결해주어야 한다. Chapin et al.(2013)은 아이디어나 개념, 절차, 표현을 연결하고 새로운 수학적 아이디어가 학생들의 기존 지식과 어떻게 연결할 때 견고한 이해가 구축된다고 하면서 연결성을 강조했다. 전체 논의에서는 분명하지 않은 다양한 아이디어들이 포함되기 때문에 교사는 수업이 마무리될 때 교사가 명확하게 핵심내용을 연결해줌으로써 수업 중에 논의된 것들을 정리할 필요가 있다(Chapin et al., 2013; Smith & Stein, 2011). 이것은 교사가 특정 지식을 전달하는 것과는 다르며, 현재 학생들의 수학적 사고와 교사가 지향하는 수업목표를 연결해주는 것이다(Hiebert et al., 1997).

<표 Ⅳ-5> 학생 사고기반 수학 수업에서의 교사 역할

준거	세부 설명
형성적 조력자 (formative facilitator)	• 의미 있는 실수와 오개념, 서로 다른 생각을 존중하고 배려하는 수업 규칙을 세우고 모든 학생에게 안내한다 • 증거 수집이 가능하도록 구체적인 수업 목표를 계획한다 • 학생 스스로 아이디어를 명확하게 표현 및 정당화하게 한다 • 모든 학생이 중요한 수학적 사고과정에 참여할 기회를 만든다 • 증거에 기반하여 형성적 피드백을 제공하고, 서로 다른 수학적 사고를 비교, 평가, 보완할 것을 격려한다 • 다양한 수학적 아이디어를 연결하고, 수학적 아이디어를 수업 목표와 연결한다

요약하면 [그림 Ⅳ-1]과 같이 학생 사고기반 수학 수업은 풍부한 수학 과제, 학생의 인지적·사회적 참여, 그리고 교사의 형성적 조력자로의 역할이 상호작용하면서 만들어진다. Shoenfeld(2010)의 수업 사례에서 알 수 있듯이 복잡하고 다양한 정보가 가득한 수학 수업 상황에서 교사가 학생들의 의미 있는 사고를 포착하는 것은 상당히 어려운 일이므로 학생 사고기반 수학 수업을 위해서는 학생들의 사고에 초점을 둔 수업 설계와 수업에 대한 지속적인 성찰이 필요하다.



[그림 Ⅳ-1] 학생 사고기반 수학 수업

2. 학생 사고기반 수학 수업 사례

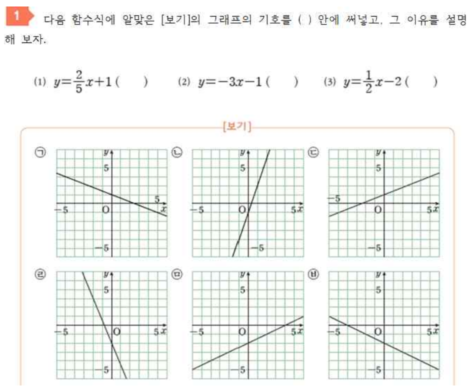
여기에서는 앞서 제안한 학생 사고기반 수학 수업의 중요한 특징을 분석을 위한 한 가지 유형으로 하여 수업 사례를 분석한 결과를 보고한다. 수업 사례를 분석한 결과는 학생 사고기반 수학 수업과 함께 학생 사고기반 수학 수업의 특징을 만족하지 못한 IRE(Initiation-Response-Evaluation) 패턴에 따르는 활동 중심의 수업, 우수한

학생이 가르치는 수업, IRE 패턴에 따르는 설명 중심 수업으로 범주화하여 제시하였다.

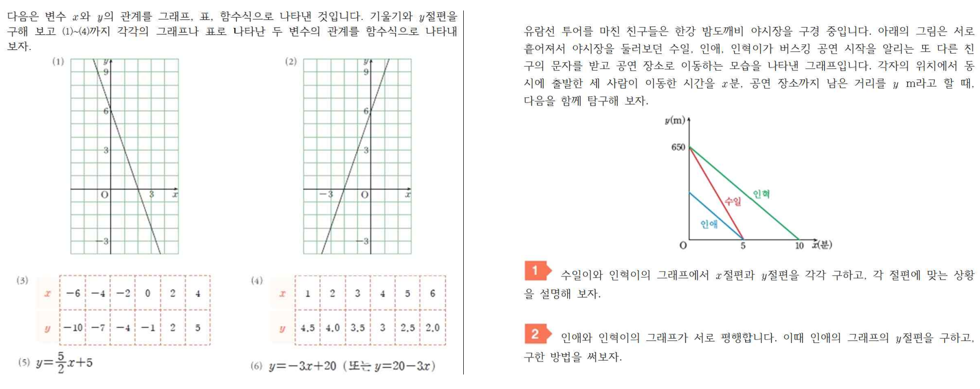
가. 사례 1: 예측 불가능한 학생의 수학적 사고를 주제로 하는 학생 사고기반 수학 수업

(1) 수학 과제의 특징

교사 A의 수업 에피소드에서 사용된 과제는 [그림 Ⅳ-2], [그림 Ⅳ-3]과 같다. 이 수업에 참여한 학생들은 기울기의 뜻, x에 대한 y의 일차함수의 식 '$y = ax + b$'에서 기울기가 a라는 사실과 절편의 뜻을 배웠으며, 일차함수를 표, 식, 그래프로 관찰해보았다. 그러므로 표, 식, 그래프로 표현된 일차함수를 상호변환하고 주어진 일차함수의 그래프를 상황에 맞추어 해석하는 과제는 진입점이 높지는 않지만, 현재 수준의 학생들은 다양한 표현들 사이의 상호변환이 익숙하지 않고 시간-거리 그래프의 해석을 어려워할 수 있다. 실제로 교사 A의 수업에서 학생들이 그래프를 보고 기울기를 구하거나, 그래프의 절편을 주어진 상황과 연관 지어 해석하는 것을 어려워했다. 그러므로 풍부한 수학 과제의 접근 가능성과 도전성에 대한 특징을 만족한다. 그래프와 표에서 절편과 기울기를 구하는 방법이 하나 이상이며, 상황을 설명하거나 구한 방법을 써보도록 하여 정당화를 요구하고 있다. 이것은 풍부한 수학 과제의 표현 및 정당화 특징을 만족하는 것이다. 이전 수업에서 일차함수의 절편과 기울기를 학습했고, 이를 다양한 상황에서 구해본다는 점에서 연결성과 일반화 가능성이 있다. 따라서 교사 A의 수업 과제는 풍부한 수학 과제의 네 가지 특징을 모두 만족한다.

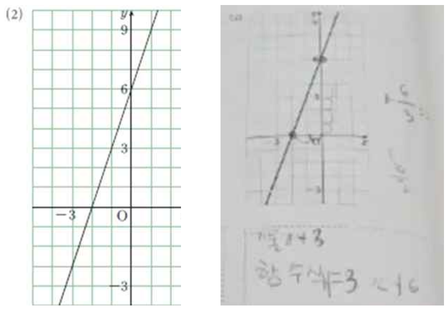


[그림 Ⅳ-2] 교사 A의 수업 과제(1)



[그림 Ⅳ-3] 교사 A의 수업 과제(2)

교사 A의 수업 에피소드는 [그림 Ⅳ-3]의 일차함수 과제를 다루는 수업 전사록 중 일부이다. 이 수업에서 학생 5는 [그림 Ⅳ-4]와 같이 주어진 그래프의 기울기와 식을 정확히 구했으나 왜 그렇게 구했는지 기억나지 않는다고 했다. 수업 에피소드는 교사 A가 다른 학생들의 답안에 대해 먼저 이야기를 나눈 후, 학생 5가 과제를 어떻게 해결했는지 재차 질문하면서 시작했다.



[그림 Ⅳ-4] 학생 5가 해결한 과제 및 답안

(2) **학생 참여와 교사 역할의 상호작용**

교사 A의 수업 에피소드는 약 30분 동안 학생들이 이전 시간에 해결했지만, 아직 논의되지 못한 과제에 대하여 학생들의 답안을 토대로 대화하는 장면 중 일부이다. 그래프, 식, 표의 다양한 표현으로 제시된 수업 과제([그림 Ⅳ-3])는 주어진 정보가 가진 규칙성과 구조에 주목하게 하며 학생들이 각자의 추론을 정당화하도록 구성되어 있다. 그러나 학생들이 작성한 답안만 봤을 때는 과제에서 어떤 구조에 주목했는지, 어떻게 추론했는지 학생들의 수학적 사고과정을 확인할 수 없었다. 과제로 인한 학생들의 수학적 사고과정은 교사가 학생의 수학적 사고를 중요한 수업 주제로 가져와 학생에게 본인의 수학적 아이디어를 명확히 표현하고 정당화할 것을 요구했을 때 구체적으로 확인되었다.

212 교사 A: 아, 맞아요. 잘했어요. 잘했어. 자, 그 다음, 학생5는 뒤집어 보니까 어때?
213 학생5: 어, 저도 학생10이랑 비슷한 생각을 가지고 있어요.
214 교사 A: 아하! 어떻게?
215 학생5: 비슷한 것 같아요.
216 교사 A: 어떻게? 설명해 주세요.
217 학생5: 네? 어. 일단은 [당황한 듯 웃으며] x절편을 분모로 두고
218 교사 A: 응. x절편이 얼마에요?
219 학생5: 2요.
220 교사 A: 그냥 2에요?

\- 중 략 -

230 교사 A: 기울기는요?
231 학생5: 기울기요? 어.. 네. 그러면 3이요.
232 교사 A: 3, 왜 3입니까?
233 학생5: y절편을 분모로 두고
234 교사 A: y절편을 분모로 뒀어?

235 학생5: 아!! x절편을 분모로 두고
236 교사 A: x절편을 분모로 뒀어? 응. 응.
237 학생5: 어? 맞지 않아요?
238 교사 A: 그럼 마이너스 2에요? x절편이면?
239 학생5: 아! 아니요. 플러스 2 아니에요?
240 교사 A: x절편, 네가 방금 마이너스 이(-2)라고 했잖아요?
241 학생5: 음.. 네.
242 교사 A: 응, x절편이 마이너스 2가 되는 거 아니에요?
243 학생5: [3초간 가만히 있다가] 저의 지식에 한계가 왔어요.

학생5는 기울기와 함수식을 정확히 표현했지만, 기울기를 x절편과 y절편의 비로 생각한다는 것을 발견할 수 있다. 또한, 219번에서 학생 5는 처음에 x절편을 2라고 답했는데 학생의 답안을 보면 직선의 그래프가 x축과 만나는 점과 원점이 떨어진 거리를 x절편으로 보고 있음을 알 수 있다. 교사가 먼저 학생의 수학적 사고를 표현하게 하고 216번과 같이 그렇게 표현한 이유를 정당화하게 함(형성적 조력자 역할)으로써 학생의 오개념이 포함된 수학적 사고과정이 명확하게 드러났다(인지적·사회적 참여).

교사 A의 수업에서 주목할 만한 특징은 학생 5의 정당화 과정에서 오개념이 포함된 수학적 사고가 발견되었지만, 교사가 학생의 수학적 아이디어의 참과 거짓을 빠르게 평가하거나 정정해주지 않았다는 것이다. 교사 A는 '일차함수의 기울기는 x절편과 y절편의 비로 구할 수 있다'라는 학생 5의 부정확한 수학적 아이디어를 수학 수업의 중요한 주제로 삼아 모든 학생에게 이 주제에 관한 수학적 사고과정에 참여할 기회를 주었다. 교사 A는 또 다른 학생(학생19)의 아이디어를 확인하여 많은 학생이 기울기에 관한 오개념을 가지고 있음을 확신했으며(형성적 조력자 역할), '기울기가 -3이에요? 3이에요? 다른 친구들도 말해주세요'라고 말하여 학생 5의 수학적 사고과정에 다른 학생을 초대했다(형성적 조력자 역할). 그로 인해 많은 학생이 '일차함수의 기울기는 x절편과 y절편의 비인가?'라는 학생 5의 수학적 사고를 본인의 수학적 사고와 비교하고 점검할 수 있었다(학생의 인지적·사회적 참여).

244 교사 A: [웃음] 자, 그러면 이것을 연결해서 학생19가 한 번 설명해봐. 학생19가 받아서 한번 설명해봐. [아무 말도 하지 않자] 학생19야?
245 학생19: 네?
246 교사 A: 여기에서 기울기 어떻게 구해요? 우리 학생5가 절편, 절편 잘 구했는데, 기울기만 구하면 돼요. 기울기를 어떻게 구해요? 2번?
247 학생19: x절편 분의 y절편을 하면 구해져요.
248 교사 A: x절편 분의 y절편. (y절편/x절편이라고 적음) 그런데 여기 x절편이 마이너스 2, 아니야?

\- 중 략 -

254 교사 A: 마이너스 3, 그럼 기울기가 마이너스 3이네?
255 학생19: 네
256 교사 A: 그런데 S5는 3이라고 하던데?
257 학생19: 어? 이거 마이너스 3 아니에요?
258 교사 A: 어, 이거 -3이에요? 3이에요? 다른 친구들도 말해주세요.

이 수업에서 학생들은 주어진 일차함수의 그래프를 보고 기울기를 찾기 위해 고군분투한다. 학생 5는 '기울기

가 x절편 분의 y절편으로 구하는 것이 맞지만 그래프의 방향을 보면 x값이 증가할 때 y값도 증가하므로 기울기는 양수이다'라는 아이디어를 제공했다. 이것은 정확한 수학적 사고는 아니지만, 다른 학생들에게 기울기는 변화량과 관련된다는 정보를 주었다(학생의 인지적·사회적 참여).

267 학생19: [3초 정도 가만히 있다가] 근데 x절편 분의 y절편은 맞는데…뭐지?
268 교사 A: 그러니까 x절편 분의 y절편은 맞는데, 그런데 왜 답은 마이너스 3이지?
269 학생5: (갑자기 무엇인가 생각난 듯이) 선생님! 그런데, 뭔가, 대충, 잠깐 제 말이... 아이, 뭐래니.. (맘이 급한데 설명이 잘 안 되는 듯) 저..뇌피셜인데

– 중 략 –

282 교사 A: 어, 이거 비스듬한 거?
283 학생5: 네. 그게 양수 쪽으로 방향을 향하고 있어가지고..
284 교사 A: 아, 양수 쪽으로!
285 학생5: 네. 그래서 (자신 없는 듯이) 제 생각으로는..
286 교사 A: (격려하듯이) 응, 응.
287 학생5: 어, 플러스 같아요.
288 교사 A: 아, 그러니까 이게 x절편 분의 y절편은 맞는데,
289 학생5: 네!
290 교사 A: 그러니까 양수 쪽, 오른쪽으로… 이게 x가 커지는데 y도 커지는 방향으로 가니까 얘(기울기)가 양수가 된다는 말이네.
291 학생5: 네.

이 수업에서 학생 17은 x절편, y절편, 그리고 원점을 확인하고 이 세 점에서 x변화량과 y변화량을 구해 기울기를 더 정확하게 설명했다. 이것은 학생이 서로 다른 아이디어의 장단점을 분석하여 본인의 수학적 아이디어를 정교화 및 일반화해가는 인지적·사회적 참여의 특징을 보여준다.

299 학생17: 3이 맞지 않아요?
300 교사 A: 3이 왜 맞아요?
301 학생17: 뭐지? 그러니까 x절편이, x절편이 마이너스 2잖아요.
302 교사 A: 응, x절편이 마이너스 2지.
303 학생17: [-2라고 씀] 그러니까 저 점은 (-2, 0)이잖아요. 절편은 (0, 6)이구요.
304 교사 A: 응.
305 학생17: 그래서 여기를 이렇게 해서 서로 빼면 [(-2, 0), (0, 6)를 적은 후 동그라미를 침] 0 빼기 마이너스 2를 분모로 두고, 그다음에 2, (잠깐 멈춤) 뭐지? 0을 뺐으니까 (0, 6)이었던 6을 앞에 두고 빼기 0을 하면 분모는 2가 되고 분자가 6이 되잖아요. 그러면 3이 돼요.

그리고 마지막으로 학생 7은 일차함수의 기울기는 x절편과 y절편이 아닌 직선의 임의의 점 두 개로 구할 수 있다는 매우 정교한 수학적 사고를 제시했다. 이것도 역시 본인의 수학적 아이디어를 정교화해가는 학생의 인지적·사회적 참여를 보여주는 증거이다.

310 학생7: 선생님, 이해를 못 했어요.
311 교사 A: 어, 이해를 못 했어?

312 학생7: 저건, 맞, 맞기는 한데. 이게 어차피 절편이랑 별로... 굳이 절편을 하지 않아도, 점 두 개로만 해도 구할 수 있지 않아요?
313 교사 A: 아, 이게 절편이 아니더라.
314 학생7: 네.
315 교사 A: 아니라도 이렇게 다른 점이 두 개가 있으면 구할 수 있는 것이 아니냐. 그 말이지?
316 학생7: 절편이랑 상관없이 증가량 분의 증가량이니까…

‘일차함수의 기울기는 x절편과 y절편의 비인가’에 대한 논의 과정에서 교사 A는 학생들이 계속 논의에 참여하도록 격려했으며, 자신의 수학적 사고를 명확히 표현하고 그렇게 표현한 이유를 정당화하도록 압박했지만 성급하게 평가하지는 않았다. 이 주제와 관련하여 가장 정교한 학생의 말이 등장했을 때 수업 에피소드의 321번에서 교사 A는 지금까지 논의된 수학적 사고들을 연결했고, 그다음 과제로 넘어갔다. 이것은 형성적 조력자 역할의 중요한 특징이 수업에서 어떻게 표출되는지를 잘 보여준다.

321 교사: 응, 그러니까 네 생각에 여기 절편이랑 말 말고 뭐? 증가량 분의 증가량. 지금, S17은 그것을 숫자로 한 거야. 증가량은 0에서 - 2까지의 증가량을 말한 거고, 이것은 0에서 6까지의 증가량을 이야기한 거야. 여기서는 식으로 쓴 거고, 여기는 그림으로 나타낸 거야. 이해됐죠? 응. 이게 우리 계속할 거니까 조금 기다려 줘

교사 A의 수업에서 주목할 수 있는 또 다른 특징은 의미 있는 실수와 오개념, 서로 다른 수학적 아이디어를 존중하는 수업 문화이다(형성적 조력자 역할). 교사 A는 학생들의 서로 다른 수학적 사고를 존중했고 실수를 중요한 사고과정 중 하나로 인정했다. 여기에서 교사 A가 학생들에게 ‘잘했어, 수고했어’와 같은 칭찬이 이루어진 시점에 주목할 필요가 있다. 교사 A가 칭찬을 하는 타이밍은 본 연구에서 관찰한 다른 교사들이 칭찬하는 타이밍과 차이가 있다. 예를 들어, 중학교 교사 B는 다음과 같이 학생이 정해진 답을 말한 직후나 수학 외의 활동 결과를 확인했을 때 칭찬했다.

182 교사 B: 그렇지. 거리를 무엇으로 두었을 때? 속력을 이렇게 두어야지. [학생이 나머지를 풀자] 오! 대단한데!

\- 중 략 -

289 교사 B: 여러분 오늘 이렇게 자기 역할을 충실히 하면서 비주얼 씽킹으로 정말 멋진 작품이 나왔어요. 학생 **과 같은 경우에는 아까 봤던 세븐 엘리먼츠와 같이 그대로 응용해서, 학생 20도! 막, 길을 화살표로 해서, 그려서 표현했어요. 굉장히 좋은 작품이 많이 나왔어요. 그래서 시간이 좀 많이 걸렸던 것 같아요.

그러나 교사 A는 먼저 학생들의 수학적 사고를 공유하고, 학생이 미처 생각지 못한 부분을 정당화하게 한 이후에 칭찬하고 있다. 즉, 학생이 정답을 말한 것 자체를 칭찬하기보다는 학생이 용기 있게 본인의 수학적 사고를 전체 학생에게 공유하고 정당화한 과정을 칭찬했다.

182 교사 A: 응. 고마워. 아주 좋은 생각인 것 같아. 아주 좋은 생각으로 잘해 주었고. 자, 이렇게 방법이 있고, 또 다른 방법으로 한 친구의 것도 소개해 보자. (학생12의 답을 보여주면서) 자, 학생12야. 너는 어떻게 했니?

\- 중 략 -

329 학생7: (웃으면서) 저, 잠깐만요. 저 잘못 봤어요.
330 교사 A: 어.
331 학생7: (부끄러운 듯 웃음)
332 교사 A: 어, 괜찮아. 괜찮아. 와이(y)절편이 애매하게 마이너스 일은 아니지?

333 학생7: 네. 제가 잘못 봤어요.
334 교사 A: 어, 괜찮아. 그래도 이렇게 발표해주니까 얼마나 좋냐.

학생의 실수와 오개념이 수학적 사고를 위한 중요한 자료이며 다양한 사고를 존중하고 배려하는 수업문화를 형성하기 위한 교사 A의 행동은 학생들이 실수를 두려워하지 않고 당당히 본인의 생각을 표현하고, 다른 학생의 수학적 사고과정에 능동적으로 참여하는 행동과 함께 관찰되었다.

219 교사 A: 이거 그렇게 많이, 쉽지는 않은데, 어, 너희들 한번 도전해봐. 도전해보고, 틀려도 괜찮다. 얘들아. 그리고 잘 몰라도 괜찮으니까 너네의 생각을 한번 써 보세요. 아시겠죠?

\- 중 략 -

348 학생2: 어, 아까 학생21이 말했던 것처럼 서로소가 아닌 수는 서로 곱한 수가 최소공배수가 아니라(약 2초간 침묵)
349 교사 A: 어, 다르게 구할 수 있으니까?
350 학생2: 네
351 교사 A: 그래. 그래도 이렇게 쓰고, 자신 있게 쓰고, 자기 것을 이렇게 바꾸잖아. 이게 정말 공부를 하는 거야. 이게. 그렇지? 이렇게 딱 이야기를 하고 또 잘못된 것 같으면 수정하고, 이렇게 해야 해. 자기가 틀릴 수도 있지만, 자꾸 말하는 게 선생님이 봤을 땐 중요한 것 같아.

나. 사례 2: IRE 패턴에 따르는 활동 중심 수업

(1) 수학 과제의 특징

교사 B의 수업 과제는 수업지도안과 녹화 영상에서 직접 확인되지 않았기 때문에 수업 대화를 통해 [그림 Ⅳ-5]와 같이 거리와 속력에 관한 문장 과제를 다루고 있음을 추정할 수 있었다.

지호가 자전거를 타고 집에서 도서관까지 가는 데 시속 15 km로 가면 시속 10 km로 가는 것보다 20분 빨리 도착한다고 한다. 이때 집에서 도서관까지의 거리는 몇 km인지 구하시오.

[그림 Ⅳ-5] 교사 B의 과제와 유사한 과제 사례(중학교 1학년 수학, 황선욱 외)

현재 중학교 1학년 학생들은 방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결하고 그 유용성과 편리함을 인식해야 하므로 거리, 속력, 시간과 관련된 일차방정식의 문장 과제를 다루는 것은 수학적으로 중요하다. 그러므로 풍부한 수학 과제의 특징 중 중요한 수학 개념을 포함해야 함을 만족한다. 이 과제는 현재 학생 수준에서 접근 가능하며 생산적인 어려움을 주어야 한다는 풍부한 수학 과제의 두 번째 특징도 만족한다. 학생들은 초등학교에서 시간에 대한 거리의 비율을 분수나 소수로 표현하는 것을 학습했으며, 이미 다양한 상황을 문자로 표현해봤고 일차방정식의 개념을 배웠다. 따라서 양 사이의 관계를 포함한 문장 과제를 해결하기 위해 주어진 상황을 분석하여 일차방정식으로 표현하는 과정은 이전에 배운 지식을 토대로 충분히 접근할 수 있지만, 중학교 1학년 학생들은 아직 문자 사용에 익숙하지 않으므로 인지적 어려움을 줄 수 있다.

교사 B의 수업 과제는 학생들이 본인의 생각을 표현하고 정당화할 기회를 준다는 점에서 풍부한 수학 과제의 네 번째 특징을 만족한다. 실제적 맥락은 학생들이 두 양 사이의 규칙성을 파악하기 위해 그림, 표 등의 다양한 모델을 선택할 기회를 주며, '속력을 구할 때, 거리를 시간으로 나누는 이유는 무엇인가?' 또는 '속력을 거리분의 시간으로 구하지 않는 이유는 무엇인가?'와 같은 질문을 통해 학생들의 수학적 사고에 대한 정당화를 요구

할 수 있다. 그리고 이전에 배운 거리와 속력, 속력과 시간의 관계는 현재 학생들이 배우는 일차방정식과 개념적 연결성을 갖으므로 풍부한 수학 과제의 마지막 네 번째 특징도 만족한다. 따라서 교사 B가 사용한 과제는 풍부한 수학 과제라 판단할 수 있다.

(2) 학생 참여와 교사 역할의 상호작용

교사 B의 수업 에피소드는 교사가 화면에 수업 절차를 보여주면서 학생들이 해야 할 활동(미션)을 알려주는 것에서 시작한다.

90 교사: 자, 오늘은, 파워포인트를 한번 봐주세요. 자, 오늘은, 오늘의 미션은 바로 이것입니다. 읽어보세요. 다 같이 읽어보세요.

91 학생들: [앞의 화면에 나온 글을 합창한다] 비쥬얼 스토리텔링 디딤영상을 만들어라.

- 중 략 -

98 교사: 자, 지금은 여러분들이 4번[각자 활동지에 비쥬얼스토리텔링으로 풀기]을 합니다. 자기 문제의 4번에 [4조의 학생들이 가위바위보를 한다] 자기 문제 정한 것을 연습으로 활동지를 해봅니다.

이 에피소드에서 주목할 만한 특징은 교사 B가 학생의 역할과 활동에 초점을 두었기 때문에 전반적으로 수학에 대한 이해보다 학생들이 역할과 활동을 이해하기 위한 시간이 많이 필요했다는 것이다. 학생들은 교사가 요구하는 활동 절차를 이해해야 했고((No.90~No.98), 103번과 같이 일부 학생들은 활동을 이해하지 못해 어떻게 해야 하는지를 교사에게 계속 확인했다.

101 교사 B: 여기 책을 보면 문제 상황이 있거든. [책을 펼치면서] 여기 문제 상황이 있잖아.

102 학생1: 여기요?

103 교사 B: 여기 봐라. [책을 가리키면서] 이런 상황. 힌트는 자기 이름을 쓰는 거야. 친구 이름이랑. 이번에 자유학기 진로체험으로 [아까 손을 들었던 학생3이 교사를 쳐다보지만 확인하지 못함] 장애인 쉼터, 뭐, 어디를 갔다. 이런 식으로 쓴다던지.

또 다른 특징은 교사가 질문하고(initiation), 학생이 답하고(response), 교사가 평가하는(evaluation) IRE 패턴의 반복이다. 예를 들어, 교사 B가 '그럼 걸린 시간은 옆 반 걸린 시간에다가?'라고 질문하면 학생은 '플러스 6'이라 답했고, 학생의 응답에 대하여 교사는 '그렇지. 플러스 6이지'라고 평가했다(No.134~No.136). IRE 패턴은 학생들의 지속적인 참여를 위한 하나의 전략으로 이용될 수 있다(Schoenfeld, 2013). 그러나 교사 B의 질문이 '이미 답이 알려진 질문'이었으며, 학생의 답에 대하여 수학적 사고를 유발할 가능성이 낮은 '단순한 평가 진술'(예: 정답이란 의미로 학생의 말을 반복, 칭찬, 참·거짓 판단)임이 확인되었다. 이러한 IRE 패턴은 교사 B가 형성적 조력자(formative facilitator)가 아닌 평가자(evaluator)의 역할을 했다는 것을 의미한다.

105 학생: 여기 식 [소리가 들리지 않음]

106 교사 B: 식? 식은.. 사람을 별 땐, 이렇게 그려야겠지 [학생의 활동지에 그림을 그려 줌]. 그래서 얘는? 몇 살이 되겠어? 14 더하기?

107 학생: 4?

108 교사 B: 엑스가 되겠지?

109 학생: 엑스, 네.

110 교사 B: 아저씨는? 아저씨를 그려. 곱하기 엑스, 그다음 문제를 세어 봐.

- 중 략 -

134 교사 B: 그럼 걸린 시간은 옆 반이 걸린 시간에다가?

135 학생20: 플러스 6

136 교사 B: 플러스 6이지. 그렇지. 6분이지. 그런데 6분은 뭘로 고쳐야 해? [약 2초 후에]시속이니까?

137 학생20: 60분...

138 교사 B: [학생 활동지에 적어주면서] 이런 식이 나오잖아. [풀이를 적어주면서] 되겠지요? [학생의 답변을 듣지 않고 펜을 내려놓은 후 다른 곳으로 이동한다]

다음 수업 에피소드는 평가자로서 교사가 하는 칭찬과 지나친 개입이 학생의 깊은 수학적 사고를 가로막는 것을 보여주었다.

176 교사 B: [학생20에게 다가가] 오! 대박이다! 진짜 잘한다! 어우, 소름 돋는다. 진짜! [학생 20의 등을 토닥인 후 다른 학생들을 둘러본다] 이야, 진짜 잘 그리고 있어요, 우리 학생20이! 아까 화면에서 봤던 seven element를 막 그려서 학생20이 지금 엄청 잘하고 있어. 아까 영상에서 나왔던 길도 그리면서 엄청 잘하고 있네.

177 학생들: [침묵, 다른 학생들이 반응하지 않음]

178 학생들: [학생들은 종이를 자르고 색연필로 그림을 꾸미느라 많은 시간을 보냄]

179 학생25: [학생25가 질문하는데 들리지 않음. 학생20과 같은 문제를 질문하는 것으로 보임]

180 교사 B: [학생25의 펜을 들어 활동지에 적으면서] 그럼 시간은 뭐 분의 뭐로 구하는데?

181 학생25: [답변하는데 들리지 않음]

182 교사 B: 그렇지. 거리를 무엇으로 두었을 때? 속력을 이렇게 두어야지. [학생25가 나머지를 풀자] 오! 대단한데!

교사 B는 학생 20이 그린 비주얼씽킹 자료를 칭찬하는 것으로 시작된다. 176번에서 교사 B의 칭찬은 얼마나 그림을 잘 그렸는지에 대한 것이며, 학생의 다양한 수학적 사고를 대상으로 하지 않았다. 또한, 182번에서 교사 B가 해결 과정을 알려준 후 그대로 따라 한 학생에게 '오! 대단한데!'라고 칭찬했다. 교사 B의 칭찬은 수학에 대한 흥미나 자신감이 낮은 학생들을 격려할 수 있지만, 이런 종류의 칭찬은 형식적인 인사 정도에 그칠 수 있다(Rymes, 2009). 180번과 같이 교사 B는 종종 학생의 펜을 가져와 해결 과정을 직접 적어주었다. 교사 B의 수업 에피소드에서 볼 수 있듯이 수업에서 학생들은 교사의 말에 질문하거나, 본인의 아이디어를 정당화하지 않았으며, 교사 B가 본인의 아이디어를 수정하면 그것을 바로 인정했기 때문에 일차방정식과 관련된 학생들의 인지적·사회적 참여를 확인하기 어려웠다. 따라서 교사 B의 수업에서 학생들은 종이 오리기, 그림 그리기, 동영상 찍기 등의 다양한 활동에 행동적으로 참여했으며, 교사 B는 이러한 학생의 행동을 평가 및 보상하거나 난점이 발생한 학생들에게 구체적인 해결 과정을 알려주어 문제해결의 책임을 학생에게서 가져왔다. 교사 B의 수업은 학생의 인지적·사회적 참여와 교사의 형성적 조력자로의 역할에 관한 증거가 발견되지 않았으므로 학생 사고기반 수학 수업이라 볼 수 없었다.

다. 사례 3: 수학적 역량이 우수한 학생이 가르치는 수업

교사 C의 수업에서 성취 목표는 '원순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다'이고 이 수업에서 교사 C는 '서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 경우의 수를 구하는 공식을 이해하고, 조건을 만족하는 원순열의 수를 구할 수 있다.'라는 목표를 가지고 있었다. 그리고 이 수업 목표를 달성하기 위한 세 가지 하위목표는 다음과 같다. 첫째, 세 명이 같은 순서로 서서 있더라도 바라보는 관점에 따라 달리 보일 수 있음을 관찰하고 보는 관점을 원형으로 배열했을 때에는 회전과 관련된다는 것을 알 수 있다. 둘째, 서로 다른 네 개의 문자를 원형으로 배열하는 경우의 수를 관찰함으로써 네 가지 같은 경우가 나온다는 사실을 발견하고, 이를 이용하여 서로 다른 문자

를 원형으로 배열하는 경우의 수를 구할 수 있다. 셋째, 서로 다른 네 개의 문자를 원형으로 배열하는 경우의 수를 일반화하여 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 경우의 수를 구하는 공식을 이해하고, 특정한 조건을 가진 원순열의 수를 구할 수 있다.

(1) 수학 과제의 특징

교사 C가 선택한 과제는 [그림 Ⅳ-6]과 같으며, 원순열이라는 중요한 수학 개념을 포함한다(풍부한 수학 과제). 교사 C가 채택한 과제는 교과서 등에서 흔히 볼 수 있는 정형적인 과제이지만, 원순열을 처음 배우는 학생들에게 적절한 수준과 난이도를 가지고 있다. 특히, 형성평가의 2번과 3번은 원순열을 처음 배우는 학생들에게 생산적인 어려움을 제공할 가능성이 있으며, 실제 수업 사례에서도 이 과제를 해결하기 위해 학생들이 고군분투하는 것이 관찰되었다. 또한, 형성평가 3번을 해결하기 위해서는 교대로 앉는 것을 어떤 관점에서 해석하느냐에 따라 다른 접근 방법을 취할 수 있다는 점에서 추론과 정당화의 기회를 제공한다(풍부한 수학 과제). 원순열은 이전에 배운 순열과 밀접한 관련성을 가지고 있다. 예를 들어, 서로 다른 다섯 개를 원형으로 배열하는 것은 한 개를 고정해두고 서로 다른 네 개를 일렬로 배열하는 것과 같다. 교사 C의 수업에서 이러한 부분이 강조되어 있지는 않았지만, 과제 자체는 직전에 배운 순열과 연결성을 가지고 있다고 볼 수 있다(풍부한 수학 과제). 따라서 교사 C가 택한 수학 과제 중에는 풍부한 수학 과제가 포함되어 있다.

예제 1. 부모를 포함한 5명의 가족이 둥근 식탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하시오.
(1) 5명이 앉는 방법의 수
(2) 부모가 이웃하여 앉는 방법의 수

문제 1. 원판을 7등분 한 도형이 있다. 빨간색, 주황색, 노란색, 초록색, 파란색, 남색, 보라색을 모두 사용하여 이 도형의 각 영역을 칠할 때, 다음을 구하시오. (단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)
(1) 빨간색과 파란색을 이웃한 영역에 칠하는 경우의 수
(2) 빨간색과 파란색을 이웃하지 않은 영역에 칠하는 경우의 수

형성평가
1. 4명의 학생이 원탁이 둘러앉는 방법의 수를 구하시오.

2. 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E가 원탁에 둘러앉을 때, 학생 A, B, C가 이웃하게 앉는 방법의 수를 구하시오.

3. 남학생 4명과 여학생 4명이 원탁엘 둘러앉을 때, 남학생과 여학생이 교대로 앉는 경우의 수를 구하시오.

[그림 Ⅳ-6] 교사 C의 수업 과제

50분간 진행된 고등학교 2학년 확률과 통계 수업에서 교사 C는 IRE 패턴을 이용하여 지난 시간에 배운 순열을 상기시킨 후, 학생들이 학습일지에 화면에 적힌 목표를 적도록 하면서 수업을 시작했다. 두 명의 학생을 교실 앞으로 불러 교사의 양옆에 세운 후 위치를 바꾸면서 현상을 보는 관점에 대해 관찰했고, 보는 관점은 회전시키는 것과 같음을 설명했다. 다음으로 교사 C는 서로 다른 네 개의 문자를 원형으로 배열하는 방법을 시범적으로 보여주면서 네 개의 같은 경우가 나온다는 것을 알려 주었으며, 교과서의 예제를 시범적으로 풀어주었다. 이것은 교사가 내용을 전달하고 예제 과제를 시범적으로 풀면서 그 절차를 알려주고, 유사한 문제를 학생들이 모방하도록 한 전통적인 수학 수업 패턴이었다. 교사는 예제와 유사하지만, 조건이 다른(같은 색이 이웃하지 않음) 과제를 해결하는 방법을 발표시킨 후, 특정한 조건을 가진 유사 과제를 형성평가 과제로 제시했다. 교사 C의 수업 에피소드는 형성평가 과제 중 하나를 학생 4가 설명하도록 교사가 요청하는 것에서 출발한다.

119 교사 C: 자, 본인이 푼 것하고 맞는지 확인해보세요. 다르게 풀었으면 어떻게 다르게 풀었는지.

120 학생2: (풀이를 마친 학생2가 자리로 들어간다)
121 교사 C: 자, 학생4가 문제 1번의 1번을 설명해주도록 하겠습니다. 자, 앞을 보세요.

(2) 학생 참여와 교사 역할의 상호작용

이 수업 에피소드는 세 번째 하위목표와 관련된 장면 중 일부이며, 교사 C가 서로의 수학적 아이디어를 소중히 받아들이는 문화를 형성하고 있음을 보여준다(형성적 조력자). 이런 수업문화는 학생들이 실수를 두려워하지 않고 능동적으로 자신의 아이디어를 공유하게 할 뿐 아니라 다른 학생의 수학적 사고과정을 주의 깊게 듣게 할 수 있다. 교사 C의 수업에서 많은 학생이 발표하기 위해 손을 들거나 발표한 학생에게 손뼉을 쳐주는 등의 적극적인 태도를 보여주는 장면이 확인되었다.

122 학생4: 문제를 읽어보면 일곱 등분한 원판이 있는데 일곱 개를 모두 사용할 때에요. (중략) 이백사십이 나와요. (말을 끝낸 후 교사를 본다)
123 학생들: (손뼉을 치며) 와!
124 교사C: 질문 있는 사람 있어요?
125 학생들: (동시에) 아니요. / 없어요.
126 교사C: 네, 학생4. 수고했어요.

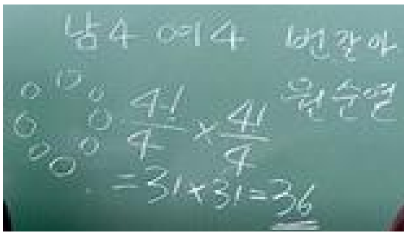
- 중 략 -

138 학생7: 화려한데요.
139 교사C: 아, (웃으면서) 풀이가 살짝 어렵긴 하지만 아주 좋은 방법이에요.
140 학생들: (손뼉을 침)
141 교사C: 자, 질문.
142 학생10: (손을 들면서) 선생님! (교사가 쳐다보지 않자 큰 소리로) 저요!
143 교사C: 응?
144 학생10: 저, 다르게 풀었는데
145 교사C: 아! (학생7을 보면서) 학생7, 수고했고. 학생10이, 선생님이 아까 보니까 다른 방법으로 풀었어요.

- 중 략 -

194 학생들: (손뼉을 친다) [학생11을 격려하는 분위기]
195 교사C: 아유, S11이 (들어가는 S11을 보며) 고생했어요. S11이 틀린 부분이 있는데 누가 수정해볼 사람 손들어 주세요.

교사 C의 수업 에피소드에서는 학생의 참여와 교사 역할의 상호작용에서 학생 사고기반 수학 수업의 증거가 제한적으로 확인되었다. 교사가 "그럼 문제 1번을 앞에 나와서 풀어볼 사람 손 들어보세요."라고 말하여 학생들이 주어진 과제에 대한 수학적 사고를 표현할 기회를 주었다. 교사 C의 수업에서 확인된 특징은 119번째 줄과 같이 학생이 수학적 사고를 공유하는 동안 교사가 일관성 있게 모든 학생이 공유된 수학적 사고과정과 본인의 아이디어를 비교할 것을 권장했으며, 126번, 139번, 그리고 195번과 같이 자신의 수학적 사고를 공유해 준 학생에게 '수고했어요', '고생했어요'라고 말하여 학생의 사고를 존중했다는 것이다. 이것은 교사 C가 형성적 조력자 역할 중에서 실수를 존중하는 문화 형성, 구체적인 목표의 설정, 그리고 학생 본인의 표현 기회를 제공했다는 증거를 제공한다. 학생 사고기반 수업문화 속에서 학생들은 다소 복잡한 해결 방법이나 오류가 있는 해결 방법이 공유된 경우에도 조롱이나 비난하지 않고 화려한 풀이라고 표현해주거나 손뼉을 쳐서 격려해주었다(No. 123, 136, 140, 194). 또한, 이미 공유된 수학적 사고와 다른 수학적 사고를 제시하기도 하여(No. 142부터 No. 145) 학생의 인지적·사회적 참여 특징이 관찰되었다.



[그림 Ⅳ-7] 학생 22의 오류가 포함된 수학적 사고

교사 C의 수업에서 발견된 또 다른 특징은 우수한 학생이 자신의 수학적 사고를 다른 학생들에게 보여주고 가르친다는 것이다. 이 특징은 교사 C의 수업 에피소드가 학생 사고기반 수학 수업이 아니라는 결정적인 증거가 되었다. 학생에 의해 제안된 중요한 수학적 아이디어에 모든 학생이 참여하여 더 깊은 수학적 사고를 형성하는 것과 특정한 학생이 대표로 나와서 정답과 올바른 절차를 가르쳐주는 것은 다르다. 학생 22는 원형으로 배열한 경우의 수를 구하려면 항상 배열해야 하는 대상의 수로 나누어야 한다고 생각했다([그림 Ⅳ-7]).

218 학생22: 남자랑 여자가 네 명이 있는데 번갈아서 원순열로 앉아야 하니까 (중략) 여자들 네 명을 남자 사이에(작은 원 네 개 사이에 더 작은 원을 그리면서) 이렇게 앉히면 또 사분의 사팩토리얼(4!/4)이 되요.

이 장면에서 교사 C는 학생 22가 본인의 수학적 사고를 표현할 기회를 주었지만, 왜 그렇게 생각했는지 정당화하도록 압박하지 않았다는 것에 주목해야 한다. 교사 C는 4명의 남자를 원형으로 배열하는 경우의 수를 4!/4로 구한 이유, 남자들 사이에 4명의 여자를 배열할 때 4!/4로 구한 이유를 더 구체적으로 설명하도록 요구하지 않았다. 학생 22의 잘못된 사고과정에 동의한 학생이 있었지만(No.222), 교사 C는 이에 주목하지 않고 바로 틀린 부분이 있다고 평가했다(No. 224). 그리고 옳은 풀이를 알고 있는 학생 10이 나와 학생 22의 오류를 수정하게 했다(NO. 226). 학생 10이 학생 22의 답안을 수정한 이후에도 누구의 수학적 아이디어가 타당한가, 왜 그렇게 생각하는가와 같이 다른 학생들을 수학적 사고에 초대하는 과정이 생략되었다. 교사는 학생 10의 설명이 끝나자 ‘자, 전부 다 이해가 됩니까?’라고 말하여 간접적으로 학생 10의 풀이가 정확한 것임을 평가해 주었다. 그 결과, 교사 C의 수업 에피소드에서는 학생들이 의미 있는 수학적 사고과정에 참여하여 서로의 생각을 비교 및 정교화 했다는 증거가 발견되지 않았다.

220 학생22: 그래서 삼 팩토리얼 곱하기 삼 팩토리얼은 삼십육이 됩니다.
221 교사C: 음, 학생22가 설명을 아주 잘했는데, 남학생 네 명을 원순열로 앉히고, 남학생 네 명도 똑같이 원탁에 앉히니까 원순열로 앉힌다고 해서 삼 팩토리얼 곱하기 삼 팩토리얼은 삼십육가지(36)가 있다고 했어요. 맞아요?
222 학생7: 네
223 일부 학생들: 아니요(네라고 한 학생을 보면서 웃는다)
224 교사C: 네, 약간 틀린 부분이 있어요. 수고했어요. 학생22, 들어오세요.
225 학생들: (학생들이 손뼉을 치고 학생22는 자리로 돌아간다)
226 교사C: (어떤 학생이 뭔가 이야기하지만 들리지 않음) 맞아, 격려의 박수! 자, 그러면 저 틀린 부분을 누가 수정해줘야 하는데, 누가 해줄까요?

결론적으로 교사 C의 수업에서 학생 사고기반 수학 수업의 특징이 일부 확인되었지만, 학생 사고기반 수학 수업이라고 판단할 수는 없었다. 교사 C의 수업에서 학생들의 인지적·사회적 참여를 위한 수업문화가 형성되어

있었고 일부 학생들이 자신의 수학적 사고를 표현함으로써 [그림 Ⅳ-7]과 같이 오류가 포함된 수학적 사고가 발견되기도 하였다. 그러나 의미 있는 학생의 수학적 사고과정에 모든 학생이 참여하여 이야기할 기회가 없었고, 유능한 학생이 정답과 올바른 절차를 전달하는 것으로 수업이 마무리되었다. 유능한 학생의 언어로 올바른 절차를 이야기하는 것도 교육적인 의미가 있지만, 학생 22가 보여준 수학적 사고과정을 이해하고 논의하는 과정에 더 많은 학생이 참여하여 본인의 수학적 사고를 스스로 점검해 볼 기회는 제한적이었다고 볼 수 있다. 만약 교사 C의 수업 에피소드에서 학생 22가 처음에 제시한 부정확한 수학적 사고를 교사가 평가하기 전에 처음에 의견을 제시한 학생 본인이나 수업에 참여한 모든 학생에게 학생 22의 수학적 사고에 동의하는지, 동의하지 않는지, 그렇게 생각한 이유는 무엇인가와 관련하여 참여 기회를 주었다면 수업은 전혀 다른 방향으로 진행되었을 것이다.

라. 사례 4: IRE 패턴에 따르는 설명 중심 수업

교사 D의 수업 에피소드는 [그림 Ⅳ-8]의 정규분포의 표준화에 관한 과제를 해결하는 수업을 전사한 것 중의 일부이다. 교사 D의 고등학교 2학년 확률과 통계 수업은 50분 동안 진행되었다. 성취 목표는 '표준정규분포와 표준화의 뜻을 알고, 표준정규분포를 활용하여 확률을 구할 수 있다'이고 교사 D는 '표준정규분포와 표준화를 이용하여 여러 가지 문제를 해결하고, 그 과정을 정확한 기호를 사용하여 설명할 수 있다'라는 목표를 가지고 있었다. 그리고 이 목표를 위해 표준화와 관련되어 있지만, 형태가 다른 수학 과제 23개와 대학교 논술 문항 2개가 제시되었다. 연구자가 관찰한 수업에서는 50분 동안 수학 과제 5개와 대학교 논술 문항 2개를 다루었다. 교사 D는 발표를 원하는 학생들이 손을 들게 한 후 가위바위보를 통해 발표자를 정했다. 일정 횟수를 발표해야 태도 점수를 받을 수 있었고, 과제는 미리 해결해볼 수 있도록 이전 수업에 학생들에게 제공되었다. 이것은 과제가 상당히 어려웠음에도 불구하고 발표를 희망하는 학생들이 존재한 이유를 설명해 준다. 일부 학생들은 발표 점수를 받기 위해 미리 받은 수업 과제의 풀이를 이미 적어왔다. 발표자로 선정된 학생들은 적어 온 풀이를 옮겨 적고, 다른 학생들은 다른 과제를 해결하거나 앞에 적힌 풀이를 확인했다.

(1) 수학 과제의 특징

교사 D와 교사 E의 수업 에피소드에서 다루는 수학 과제는 [그림 Ⅳ-8], [그림 Ⅳ-9]와 같다. 교사 D와 교사 E의 과제는 중요한 수학 개념을 포함하여 풍부한 수학 과제의 특징 중 하나를 만족하지만, 학생들의 풍부한 수학적 사고를 촉진하는 과제보다는 암기와 절차를 강조하는 과제에 더 가깝다. 교사 D와 E는 학생들의 발표로 수업을 진행하며, 다른 교사들과 비교하여 상당히 많은 수의 과제를 다루었다. 이는 두 교사가 근무하는 학교 특성 때문일 수 있다. 교사 D의 과제인 [그림 Ⅳ-8]은 국가 교육과정의 평가 기준에 의하면 상 수준에 해당한다. 따라서 처음 통계를 배우는 학생들, 특히, 중·하 수준의 성취도를 가진 학생들에게 진입점이 너무 높다. 정규분포와 표준화를 이용한 일련의 절차를 요구하지만, 왜 그러한 절차를 사용해야 하는지에 대한 정당화는 필요하지 않다. 또한, 과제를 해결하는 과정에 학생들이 이전에 배웠던 원의 방정식이나 Cauchy-Schwarz 부등식이 사용되지만, 이것이 현재 학생들이 학습해야 하는 정규분포 및 표준정규분포와 개념적 연결성이 있다고 보기 어렵다.

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10, 3^2)$, $\mathrm{N}(20, 4^2)$을 따른다. 두 실수 a, b에 대하여 $\mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{P}(y \ge b)$ 일 때, $a^2 + b^2$의 최솟값을 구하시오.

[그림 Ⅳ-8] 교사 D의 수업 과제

교사 E가 선택한 과제 [그림 Ⅳ-9]는 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 공식이 성립함을 증명하는 것이다. 삼각함수 단원에서는 주기적인 현상을 수학적으로 표현하고 설명 및 분석하는 데 유용함을 알려줄 수 있는 과제를 다루어야 하지만[2], [그림 Ⅳ-9]와 같은 과제는 삼각함수의 형식화된 공식을 증명하는 절차만 강조되므로 학생들이 삼각함수 단원을 외워야 할 공식이 많은 부담스러운 단원으로 인식할 우려가 있다. 더욱이, 이 과제에서 증명된 삼각함수 공식이 다른 중요한 수학 개념과 연결되지 않는다. 따라서 [그림 Ⅳ-9]의 수학 과제는 학생들의 풍부한 수학적 사고를 유발할 가능성이 적다고 볼 수 있다.

유형1. 임의의 각 A, B, C에 대해서 다음이 성립함을 증명하여라

(1) $\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C)$

$$= 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}$$

(2) A, B, C가 삼각형의 세 내각일 때 (1)을 이용하여 다음을 증명하여라.

$\cos A + \cos B + \cos C - 1$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

[그림 Ⅳ-9] 교사 E의 수업 과제

(2) 학생 참여와 교사 역할의 상호작용

교사 D의 수업 에피소드에서 학생 4는 [그림 Ⅳ-10]과 같이 a^2+b^2를 구하기 위해 Cauchy-Schwarz 부등식을 이용한 정확한 수학적 사고과정을 칠판에 기술한 후에 그것을 보면서 발표했다.

표준화 $\mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{P}\left(\frac{X-10}{3} \le \frac{a-10}{3}\right)$

$$\mathrm{P}(Y \ge b) = \mathrm{P}\left(\frac{Y-20}{4} \ge \frac{b-20}{4}\right)$$

$$-\frac{a-10}{3} = \frac{b-20}{4}$$

$$4a+3b=100$$

$$(a^2+b^2)(16+9) \ge (4a+3b)^2$$

$a^2+b^2 \ge 400$ (등호는 $a=16,\ b=12$)

[그림 Ⅳ-10] 학생 4의 수학적 사고

교사 D와 교사 E의 수업에서 주목할 것은 발표자의 선정과 발표 이후의 교사 행동이다. 이들을 학생들이 미리 과제를 해결해왔지만, 학생들이 어떻게 해결했는지 점검하지 않았다. 발표자는 희망하는 학생 중에서 선정되었다. 교사 C의 수업 에피소드처럼 우연히 발표한 학생의 수학적 사고에서 의미 있는 오개념이나 실수, 또는 모든 학생이 중요하게 논의할 수학적 사실이 발견될 수도 있지만, 발표를 희망하는 학생이나 무작위로 지정된 학

[2] 2015 개정 수학과 교육과정 p.64

생이 발표하는 경우 교사 D와 교사 E의 수업 에피소드와 같이 대체로 정답을 아는 학생만 수업에 참여하여 다른 학생들의 수학적 사고 수준에 대한 다양한 증거를 수집할 수 없으며, 유능한 학생의 방법만을 모방하게 만들 수 있다.

49 교사D: (앞의 학생들의 풀이가 끝나자) 자, 설명 들어볼까?
50 학생4: 어... 문제의 조건을 이용해서 표준화를 이용해주면 (중략) 코시 슈바르츠 부등식을 이용하면.. 이게 성립합니다.
51 학생들: (손뼉을 친다)
52 교사D: (앞으로 나와) 여기 같은 거리만큼 떨어져야 하잖아. 부호를 반대로 요렇게 써도 되지만...같은 거리만큼 떨어져 있어야 하니까 두 개를 더하면 어떻게 될까? 영에서 하나는 양의 방향으로, 하나는 음의 방향으로 가 있으니까 더하면 영이 되겠죠? 더하면 영이다를 이용해서 이렇게 쓰면 될 것 같아. 코시 슈바르츠 부등식을 썼는데 다 알고 있어요? 요거 잘 써서 부등식에서의 최대 최소를 잘 찾아내는 친구들도 있지만 잘 모르는 애들도 있거든. 일반적으로는 어떻게 할까?
53 일부 학생: [학생 한 명이 교사의 말에 답변하지만 잘 들리지 않고, 교사도 듣지 못한 것 같다]
54 교사D: 여기서 지금.. 뭘 찾으라고 했어요. a 제곱 더하기 b 제곱의 최솟값? 응? 자, 여기다가 루트를 딱 씌워볼까? 루트를? (학생들을 한번 둘러보고) 이게 뭐지?
55 일부 학생: 원점에서의 거리
56 교사D: 원점에서 (a,b)까지의 거리...그렇지? 그런데 (a,b)는 어디 위의 점이죠? 이거를 만족하라고 했으니까? 직선 위의 점, 그렇지? 맞아요? 원점으로부터 (a,b)까지의 거리니까, 그 (a,b)는 이 직선 위에 있다는 거야. 그러니까 어떻게 되겠어? 원점에서 직선까지의...
57 학생20: 거리

- 중 략 -

62 일부 학생: (작게 대답하는데 들리지 않음)
63 교사D: 접할 때까지는 가능한데 접할 때보다 더 작아지면 안 되는 거죠? 알겠어요? 비슷한 이야기가 되겠지만 접하는 상황이 어떤 거야? 제일 반지름이 작을 때가 되겠지? 그렇지? 반지름이 제일 작을 때가 그래서 반지름의 제곱을 답하면 답이 되는 거지. 알았습니까? 자, 그러니까 여러 가지 방법이 있다. 그렇지? 코시-슈바르츠 부등식, 점과 직선 사이 거리 공식, 그리고 원을 이용해서 풀 수 있고 다양한 방식으로 풀 수 있을 것 같아. 자, 그럼 다음.. **이 (S14).

교사 D는 학생 4가 발표한 직후에 그 내용을 다시 설명했다(No. 52). 교사는 설명 중에 “코시 슈바르츠 부등식을 잘 모르는 학생들은 일반적으로 어떻게 할까?”를 질문했지만, 이것은 학생들의 서로 다른 수학적 사고를 확인하기 위한 질문이 아니다. 이 질문은 교사가 그러한 방법을 설명하기 위한 것이었는데, 이것은 54번에서 질문 직후에 바로 과제를 해결하는 다른 아이디어를 설명하는 교사 행동으로부터 알 수 있었다. 문제를 해결하는 다양한 수학적 사고과정은 학생이 아닌 교사에 의해 이루어졌으며, 이 과정에서 학생들은 대부분 조용한 청자의 역할을 했다.

교사 E의 수업 에피소드는 교사 D와 수업 방식에서 몇 가지 다른 점이 발견되었지만, IRE 패턴을 주기로 하며 간단한 평가진술 이후에 학생의 수학적 사고 외의 다른 수학적 정보가 교사에 의해 전달되었다는 공통적인 특징을 가진다.

66 교사E: 뭐라고? 됐어? 애들아, 프린트 언제 다 꺼낼건데? (잠시 기다렸다가) 자, 그래서 지금 방정식 푸는 건데요. 얘는 x의 범위가 없거든요. 일단 그냥 풀게. 얘는 뭘로 풀면 돼?

67 일부 학생: [대답하지만 들리지 않음]
68 교사E: 어, 배각 공식 중에서, 3가지 중에서 뒤에 코사인이니까.. 코사인만 있는 것으로 고치시면 돼요. (판서하면서) 그다음에 인수분해하시고. 그래서 답이 요렇게 두 가지가 나오는데 코사인 그래프, 아직까지 하면 빨리 안 되는 사람들이 있잖아. 그치? 그래서 내가 답을 쓰면 당황하더라고.

- 중 략 -

140 교사E: 그래서 얘네들(cos4x, -cos2x)한테만 공식을 쓰고 얘네들(sin3x, sinx)은 공식을 안 쓰고 그대로 써 놓은 거야. 그래서 인수분해하면 답이 바로 나와. (학생 풀이 중 'sin3x+sinx-1/2'에 빨간색 밑줄을 긋는다)
141 학생6: 와!

교사 D와 교사 E는 모두 학생 발표를 학생 참여의 도구로 사용했지만, 발표자를 선정하는 방식은 달랐다. 교사 D는 수업 중에 손을 든 학생들이 가위바위보를 하여 발표자를 선정했지만, 교사 E는 학생들의 번호 순서대로 발표자를 선정했다. 또한, 교사 D와 E는 발표에 앞서 학생들의 수학적 사고과정을 칠판에 적게 했지만, 교사 D는 칠판에 풀이를 적은 학생 모두에게 발표하게 했고 교사 E는 칠판에 적힌 학생의 수학적 사고과정을 교사가 대신 해석하여 설명하거나 몇 개를 선정하여 학생이 직접 발표하게 했다. 교사 D와 교사 E의 수업에서 학생들이 인지적·사회적으로 참여했다는 증거가 확인되지 않았으며 단지 피상적으로 참여했음을 확인할 수 있었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

이 연구는 문헌 고찰을 통해 학생 사고기반 수학 수업의 의미와 학생 사고기반 수학 수업임을 확인할 수 있는 중요한 특징을 과제, 학생 참여, 그리고 교사 역할의 세 가지 측면에서 제안하였다. 이 세 가지 요소들이 만족해야 하는 중요한 특징들은 실제 수업 장면을 학생의 의미 있는 수학적 사고에 중점을 두고 바라보는 데 있어 구체적인 렌즈를 제공했다. 본 연구에서 수학 수업 사례 분석은 학생 사고기반 수학 수업이란 무엇인가에 대한 명확한 이해를 도왔다.

본 연구에서 문헌 검토를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 본 연구는 수학적 사고에 관한 문헌 검토를 통해 개념적 이해와 높은 수준의 수학적 사고 구축을 위해서는 학생들이 새로운 상황 속에서 이전에 배운 개념과 전략을 바탕으로 다양한 추론을 만들고, 의미 있는 학생의 수학적 추론을 주제로 의사소통하는 과정이 중요함을 확인했다. 그리고 이러한 수업을 학생의 수학적 사고를 기반으로 하는 학생 참여형 수업이라 정의했으며, 간단히 줄여 학생 사고기반 수학 수업이라 불렀다. 이처럼 수학 수업의 중요한 목표인 학생의 수학적 사고에 초점을 두고 학생 참여형 수업의 의미를 살펴본 것은 학생 참여를 피상적인 행동 자체가 아닌 학생의 사고에 초점을 둔 인지적·행동적 참여의 측면에서 보았다는 점에서 의미가 있다.

둘째, 문헌 검토를 통해 학생 사고기반 수학 수업임을 확인할 수 있는 중요한 특징을 풍부한 수학 과제, 학생의 인지적·사회적 참여, 그리고 형성적 조력자(formative facilitator)의 세 가지 측면에서 제시했다. 이것은 수학 수업의 주요한 측면으로 연구되어 온 과제, 학생, 그리고 교사와 관련된 세 가지 영역의 연구 결과들을 종합해서 학생의 사고를 중심으로 한 수업을 특징지은 것이다. 본 연구에서 말하는 풍부한 수학 과제는 학생들의 수학적 아이디어를 다양하게 유도하고 이를 활용할 기회를 제공한다는 점에서 Stein et al. (2009), Smith & Stein (2011)의 연구와 일치한다. 그러나 본 연구는 높은 인지적 요구 수준의 조건을 충분히 만족하지 못하더라도 전형적인 수학 과제의 변형(variation)으로 학생의 수학적 사고를 유도할 풍부한 수학 과제의 조건을 만족할 수 있다는 점에서 Stein과 그의 동료들의 연구와는 차이가 있다. 그리고 이것은 Choy & Dindyal(2018), Peterson et al. (2015)의 연구에서 주장하는 과제의 특징과 유사하다.

풍부한 수학 과제, 학생의 인지적·사회적 참여, 그리고 형성적 조력자로서의 교사 역할의 세 가지 측면에서 학생 사고기반 수학 수업의 중요한 세 가지 특징을 제시한 것은 교수학적 삼각형(instructional triangle)에 관한 Cohen et al.(2003)의 연구를 기반으로 한다. Cohen et al.(2003)은 수업 내에서 이루어지는 세 가지 요소(과제, 학생, 교사)와 상호작용에 영향을 미치는 수업 외의 사회적 요소들(예: 학교 시스템, 학부모의 신념 등)을 포괄적으로 살펴보았지만, 본 연구는 개별 교사들이 제어하기 어려운 사회적 요소들에 초점을 두기보다는 학생 사고기반 수학 수업을 실천하기 위한 중요한 세 가지 요소의 특징에 더 초점을 두었다. 사회적 영향력을 개별 교사가 통제한다는 것은 어렵지만, 과제, 학생, 교사의 세 가지 차원에서 학생 사고기반 수학 수업을 이해하는 것은 사회적 영향력 속에서 개별 교사가 목표한 바대로 원하는 결과를 만들어내기 위해 수업을 제어해 나가는 개인적 대응력을 높일 수 있다(Rymes, 2009).

문헌 분석 결과를 개념적 렌즈로 하여 5명의 교사가 행한 수학 수업 사례를 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 풍부한 수학 과제의 특징은 학생의 인지적·사회적 참여와 상호작용하면서 영향을 주고 있음을 확인할 수 있었다. 풍부한 수학 과제가 학생의 인지적·사회적 참여 기회를 제공하는 동시에 학생들이 본인의 아이디어를 표현 및 정당화하며, 서로의 아이디어를 이해하고 논의하는 등의 인지적·사회적 참여가 뒷받침되어야 풍부한 수학 과제의 의도가 빛을 발할 수 있다. 풍부한 수학 과제에 의해 유발된 학생들의 다양한 수학적 사고는 학생의 말로 표현 및 정당화되기 전에는 구체적으로 드러나지 않았다. 수업 사례에서 학생의 여러 가지 수학적 사고는 학생이 기울기를 어떻게 구했는지, 13과 17의 최대공약수가 얼마인지, 8명이 남녀가 이웃하지 않게 원형으로 배열하려면 어떻게 구해야 하는지 등과 같이 자신의 사고과정을 표현하고 정당화할 때 학생들의 특정한 수학적 사고가 명확하게 드러났다. 교사 B의 수업에서 사용된 과제는 풍부한 수학 과제의 특징을 만족했지만, 수업의 초점이 학생의 수학적 사고가 아닌 비주얼씽킹이라는 시각화 도구의 사용과 영상 촬영이라는 활동으로 이동되면서 학생들이 과제를 해결하면서 어떤 수학적 사고를 했는지 확인되지 않았다. 반면에 교사 A의 수업에서는 학생들이 과제에 대한 본인의 생각을 표현하고 이를 정당화하는 과정에 참여하면서 풍부한 수학 과제를 통해 실제로 오개념을 포함한 여러 가지 수학적 사고를 유발했음이 확인되었으며, 이러한 사고를 주제로 하여 학생들은 서로의 아이디어를 비교 및 정교화할 수 있었다.

둘째, 교사의 형성적 조력자 역할과 학생의 인지적·사회적 참여가 상호작용하면서 영향을 주었다. 수업에서 형성적 조력자로 행동이 확인되지 않은 교사의 수업에서는 학생들의 인지적·사회적 참여도 확인되지 않거나, 제한적으로만 확인되었다. 세 명의 교사(B, D, E)의 수업 사례에서는 학생들이 그림 그리기, 발표 등의 피상적 활동에 참여했지만, 학생들의 다양한 사고에 초점을 두기보다는 학생의 아이디어가 옳은지, 그른지에 대하여 평가하거나 정답을 구하는 명확한 절차를 일방적으로 전달하는 장면이 많이 발견되었다. 교사가 지식 전달자이자 평가자의 역할을 한 수업에서 학생들은 주로 예측 가능한 반응(교사가 기대하는 정답)을 했고, 교사의 말을 듣는 청자로의 역할을 성실히 수행했다. 이처럼 수업에서 학생들이 피상적으로만 참여하는 것을 Heath(1978)는 절차적 시연(procedural display)이라 불렀다. IRE 패턴과 절차적 시연으로 이루어진 수업에서 학생들은 본인의 생각을 표현하기보다 교사가 원하는 답이 무엇인지 찾으려 애쓸 수 있으며, 정답과 올바른 절차를 기억하고 말해야 한다는 불안감을 느낄 수 있다(Rymes, 2009).

교사 C는 수업에서 서로 다른 수학적 사고를 존중하고 배려하는 수업문화를 형성하고 학생들이 서로 다른 아이디어를 표현할 기회를 주었지만, 이 과정에서 학생이 본인의 사고를 정당화하도록 압박하거나 그것을 주제로 삼아 논의할 기회를 주지는 않았다. 교사 C는 학생의 수학적 사고를 보고 '틀린 부분이 있다'라거나 '잘했습니다'라는 말로 평가했으며, 이것은 모든 학생이 공유된 수학적 사고과정을 이해하고 참여할 기회를 주는 대신 틀린 부분을 수정할 수 있는 유능한 학생을 지식전달자로 만들었다. 만약, 교사 C가 '원탁에 남자 4명을 앉힌 후, 여자 4명을 앉히는 경우를 예를 들어 구체적으로 설명해보겠니?'와 같은 질문을 통해 학생 10이 본인의 수학적 사

고를 더 명확하게 만들도록 압박하고 '학생 10의 의견에 동의하나요? 동의하지 않나요?'라는 말로 다른 학생들을 초대한다면 많은 학생이 '서로 다른 n개를 원형으로 배열할 때, 적어도 1개의 특정한 위치가 결정되면 나머지는 일렬로 배열하는 경우와 같아질 것이며 이것을 통해 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 경우의 수가 $(n-1)!$임을 설명할 수 있다'와 같은 더 깊은 수학적 이해를 구축했을 것이다.

그러나 교사 A의 수업 사례와 같이 형성적 조력자로서 교사 역할의 증거가 가장 많이 포착된 수업 장면에서는 학생들의 활발한 인지적·사회적 참여가 같이 나타났다. 교사 A는 학생들의 실수와 서로 다른 아이디어를 존중하는 수업문화를 형성했으며, '숫자 13과 17의 최대공약수는 없다'와 같이 명확하지 않은 학생의 수학적 표현을 정당화하게 했다. 또한, 그 과정에 모든 학생을 참여시켜 서로 다른 아이디어를 비교하고 정교화할 기회를 주었다. 학생의 수학적 사고를 교사가 평가하는 대신 수업의 주제로 가져와 더 명확하게 본인의 사고를 정당화할 것을 요구하고 모든 학생을 중요한 수학적 사고과정에 참여시킬 때 학생의 인지적·사회적 참여가 더 역동적으로 일어났다. 만약, 교사가 '13과 17의 최대공약수는 없다'라는 학생의 수학적 사고를 교사가 바로 '틀렸다'고 평가했다면 학생들은 공약수, 최대공약수의 개념에 대해 깊이 사고할 기회를 얻지 못하고 우수한 학생이나 교사의 설명을 그대로 받아들였을 것이다.

수학 교사 5명의 수업 사례 분석을 통해 수업에서 정답이나 잘 알려진 풀이법 대신 학생이 제기한 아이디어를 질문의 소재로 삼으며, 교사가 정답으로 제공하거나 평가하는 대신 학생들이 스스로 생각해서 해결책을 얻을 수 있도록 압박하는 것이 더 풍부한 수학적 사고와 상호작용을 지원한다는 것을 확인할 수 있었다. 학생의 다양한 수학적 사고를 이해하고 이를 수업에서 이용하는 과정, 그리고 그 과정 이면에 있는 교사와 학생의 사고를 이해하는 것은 매우 복잡하다(Peterson et al., 2015). 본 연구에서 제안하는 학생 사고기반 수업의 의미와 그러한 수업임을 확인할 수 있는 세 가지 특징은 학생들의 견고한 이해 구축을 위해 학생들의 수학적 사고를 이용하기 위한 수업을 이해할 렌즈를 제공하기 위한 하나의 도구로 활용될 수 있을 것이다.

마지막으로 학생 사고기반 수학 수업에 대한 앞으로의 연구를 위해 몇 가지를 제언하고자 한다. 먼저 이 연구에서 학생 사고기반 수학 수업으로 확인된 것은 교사 A의 수업 사례였다. 수업 사례에서 5명의 교사는 모두 발표 등의 활동을 통해 학생들이 수업에 참여할 기회를 주었다. 그러나 교사 B와 같이 수학 외의 활동에 초점을 두거나, 교사 D와 교사 E의 수업과 같이 학생의 발표가 교사의 지식전달을 위한 수단으로 이용되었다. 그리고 교사 C의 수업과 같이 학생 사고기반 수학 수업의 특징을 일부 만족했지만, 유능한 학생의 수학적 사고를 가르치는 수업 장면에서는 학생의 사고에 기반한 참여형 수업의 증거가 제한된 경우도 존재했다. 이것은 수학 교사들이 학생의 참여를 피상적 참여의 측면에서 이해하고 실제 수업 중에 학생의 사고에 초점을 두지 못할 가능성이 크다는 것을 보여준다. 이러한 결과는 일부 교사가 학생의 참여를 인지적·사회적 참여가 아닌 피상적 참여로 이해한다는 이종아(2017)의 연구 결과와 유사하다.

교사 A를 제외한 나머지 교사들의 수업이 학생 사고기반 수학 수업의 특징을 충족하지 못하는 것으로 판단되었지만, 같은 상황에서도 교사의 대응에 따라 충분히 학생사고기반 수학 수업으로의 결과를 가져왔을 수 있다. 5명 중 4명의 교실 상호작용에서 IRE 패턴을 관찰되었지만, 교사나 우수한 학생이 학생의 아이디어를 평가하는 대신 교사가 형성적인 피드백을 통해 학생의 답변에 대응했다면 같은 상황에서 수업 흐름과 결과는 달라졌을 것이다. 예를 들어, 교사가 '맞다, 틀리다'와 같은 평가 대신 '이 답변에 대해 여러분은 어떻게 생각하나요?', '좀 더 구체적인 예를 들어 설명해 주세요.', '여학생이 원형으로 둘러앉은 후 남학생이 여학생들 사이에 앉는 경우와 서로 다른 원탁에 남녀가 각각 둘러앉는 경우는 어떤 차이가 있나요?' 등과 같은 질문을 통해 학생의 답변에 대응했다면 IRE가 아닌 IRF(Initiation-Response-Feedback) 패턴으로 수업의 흐름이 전환되었을 것이며, 학생의 수학적 사고가 활발히 촉진되었을 것이다.

교사가 교실에서 학생의 사고에 초점을 두고 적절하게 대응하기 위해서는 학생 사고기반 수학 수업에 대한 교사의 이해를 돕고 학생 사고기반 수학 수업의 실천을 지원할 수 있는 수업 전문성 지원 프로그램을 모색할

필요가 있다. 그리고 학생 사고기반 수학 수업의 중요한 세 가지 특징을 만족하는 다양한 수업 사례를 찾고 학생 사고기반 수학 수업의 특징을 만족할 때 학생들의 견고한 수학적 이해와 수학적 사고를 구축한다는 타당한 증거를 더 많은 수업 사례를 통해 확인할 필요도 있다. 학생 사고기반 수학 수업에서 발견되는 학생들의 예측 불가능한 반응이 무엇에 기인하고 있는지, 이를 효과적으로 다루기 위해 교사가 어떻게 행동해야 하는가를 더 정교화하는 연구가 활발하게 이루어진다면 학교 현장에서 교사의 개인적 대응력을 높일 수 있을 것이다.

이 연구에서는 5명의 수학교사가 구체적인 수업 목표를 가졌다는 충분한 증거를 발견하지 못했다. 단지 수업에 관한 이해를 돕기 위해 수업 영상과 전사록에 표현된 교사와 학생의 말과 행동을 통해 교사가 가진 수업 목표를 추정했을 뿐이다. 교사는 항상 수업을 위한 목표를 가지고 있지만, 일반적으로 교육과정 문서나 지도서에 있는 성취 기준이나 학습 목표를 수업 목표로 생각하는 경우가 많다(Chapin et al., 2013; Smith & Sherin, 2019). 그러나 학생 사고기반 수학 수업을 위해서는 수업 중에 교사의 의사결정과 학생의 배움을 위한 구체적인 방법이 기술되어야 한다(Smith & Sherin, 2019). 따라서 학생사고기반 수학 수업을 위해 교사가 수업을 어떻게 설계하는지, 수업 목표를 어떻게 설정하는지를 분석하는지에 대한 후속 연구도 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

김원 (2019). 담론적 관점에서 교과서 분석틀 개발 및 교사 인식 조사. 고려대학교 박사학위논문.

Kim, W. (2019). *A discursive approach to the development of the conceptual framework of textbook analysis, and research on teachers' recognition*(Doctoral dissertation). Korea University.

김대영・김구연 (2014). 중등 수학교사의 교과서 수학과제 이해 및 변형 능력. 학교수학, **16**(3), 445-469.

Kim, D. Y. & Kim, G. Y. (2014). Secondary mathematics teachers understanding and modification of mathematical tasks in textbooks. *School Mathematics,* **16**(3), 445-469.

김미희・김구연 (2013). 고등학교 교과서의 수학과제 분석. 학교수학, **15**(1), 37-59.

Kim, M. H., & Kim, G. Y. (2013). The analysis of matheamtical tasks in the high school mathematics. *School Mathematics*, **15**(1), 37-59.

김하림・이경화 (2016). 중등 수학 예비교사의 미분계수 과제 변형. 학교수학, **18**(3), 711-731.

Kim, H. L., & Lee, K. H. (2016). Pre-service secondary mathematics teachers modification of derivative tasks, *School Mathematics*, **18**(3), 711-731.

박영은・방정숙 (2016). 수학 수업 전문성 신장을 위한 교사의 자기연구와 실천 사례. 수학교육학연구, **26**(3), 467-488.

Park, Y. E., & Pang, J. S. (2016). Exploring self-study and its application to enhance instructional expertise in mathematics. *Journal of educational research in mathematics,* **26**(3), 467-488

박정미・박장희・이중권 (2017). 수학적 연결성 관점에서 CMP 교과서 분석: 방정식·부등식과 함수 단원을 중심으로. 한국학교수학회논문집, **20**(3), 277-302.

Park, J. M., Park, J, H., & Lee, J, K. (2017). A study on analysis of American CMP textbooks in terms of mathematical connectivity: Focused on equations, inequalities, and functions. *Journal of the Korean School Mathematics Society,* **20**(3), 277-302.

박진형 (2019). 초등 예비교사들이 수학 과제 변형에서 겪는 어려움에 대한 사례 연구: 분수 과제를 중심으로. 수학교육학연구, **29**(4), 551-575.

Park, J. H. (2019). Prospective elementary mathematics teachers' difficulties on textbook task modification: focusing on fraction tasks. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 29(4), 551-575.

유재은 · 박문환 (2019). 초등 수학에서 탐구를 위한 탱그램 과제 변형. 초등수학교육, 22(1), 95-111.

Yu, J. E. & Park, M. H. (2019). Tangram task modification for exploring in elementary mathematics. *Educational of Primary School Mathematics,* 22(1), 95-111.

이동근 (2018). 다양한 형태의 등비급수 과제들에 대한 학생들의 생각과 표현에 관한 연구. 수학교육, 57(4), 353-369.

Lee, D. G. (2018). A case study on student's thoughts and expressions on various types of geometric series tasks. *The Mathematical Education,* 57(4), 353-369.

이선정 · 김구연 (2019). 한국과 미국 중학교 교과서의 통계 영역 수학과제가 제시하는 통계적 추론에 대한 학습 기회 탐색. 수학교육, 58(1), 139-160.

Lee, S. J., & Kim, G. Y. (2019). How middle-school mathematics textbooks of Korea and the US support to develop students' statistical reasoning. *Mathematical Education*, 58(1), 139-160.

이지현 (2014). 예비교사들은 $0.99\cdots < 1$라는 주장을 어떻게 반박하는가?. 학교수학, 16(3), 491-502.

Lee, J. H. (2014). How do pre-service teachers disprove $0.99\cdots < 1$?. *School Mathematics,* 16(3), 491-502.

이종아 (2017). 중학교 교사들의 '학생 참여형 수업' 이해에 관한 질적 연구. 서울대학교, 석사학위논문.

Lee, J. A. (2017). *A qualitative research on middle school teachers' understanding of "student-participatory class"(Master's thesis).* Seoul National University.

임형빈 · 홍진곤 (2016). 구체물의 추상화와 추상적 개념의 구체화에 나타나는 초등학생의 수학적 사고 분석. 학교수학, 18(1), 159-173.

Yi., Y. B., & Hong, J. K. (2016). Primary students' mathematical thinking analysis of between abstraction of concrete materials and concretization of abstract concepts. *School Mathematics,* 18(1), 159-173.

조한혁 · 최영기 (1999). 정적 동적 관점에서의 순환소수. 학교수학, 1(2), 605-615.

Cho, H. H. & Choi, Y. G. (1999). The repreating decimal from the static and dynamic view point. *School Mathematics,* 1(2), 605-615.

최희선 (2020). 예비수학교사의 교수·학습 과정안 재구성을 통한 수업 설계 변화 탐색. 한국학교수학회논문집, 23(1), 159-177.

Choi, H. S. (2020). Exploration of Instructional Design Changes of Pre-service Mathematics Teachers by Restructuring the Lesson Plan. *Journal of KSMS*, 23(1), 159-177.

한채린 · 김희정 · 권오남 (2018). 학생의 통계적 변이성 이해에 대한 수학 교사의 노티싱 변화 양상 사례 연구. 한국학교수학회논문집, 21(2), 183-206.

Han, C. R., Kim, H. J. & Kwon, O. N. (2018). Teacher noticing on students' reasoning of statistical variability. *Journal of the Korean School Mathematics*, 21(2), 183-206.

한형주 · 김영규 · 김보은 외 (2018). 학생 참여형 수업 활성화를 위한 실태 분석. 세종특별자치시교육청 교육정책연구소, 교육정책연구회 2018-03.

Han, H. J., Kim, Y. G., Kim, B. E. et al. (2018). *Analysis of actual conditions to student-participatory class*. Sejong Educational Policy Institute, 2018-03.

홍창준 · 김구연 (2012). 중학교 함수 단원의 수학과제 분석. 학교수학, 14(2), 213-232.

Hong, C. J., & Kim. G. Y. (2012). Functions in the middle school matheamtics: the cognitive demand of the mathematical tasks. *School Mathematics*, 14(2), 213-232.

Ahmed, H. O. K. (2016). Flipped learning as a new educational paradigm: an analytical critical study. *European Scientific Journal*, 21(10), 417-444. doi: 10.19044/esj.2016.v12n10p417

Bahr, D. L. & Bahr, K. (2017). Engaging all students in mathematical discussions. *Teaching Children Mathematics*, 23(6), 350-359.

Black, P. & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Policy & Practice*, 5(1), 7-74.

Breen, S. & O.Shea, A. (2010). Mathematical thinking and task design. Irich Mathematical Society Bulletin, 66, 39-49.

Chapin, S. H., O'Connor, C., & Anderson, N. C. (2013). Classroom discussions in math: a teacher's guide for using talk moves to support the common core and more, grades K-6. 김진호, 이지은, Jung Colen, 이대현, 김상미 역(2016). 수학교실토론. 서울: 경문사.

Choy, B. H. (2014). *Teachers' productive mathematical noticing during lesson preparation*. In Nicol, C., Liljedahl, P., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.) Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,Vol. 2, pp. 297-304. Vancouver, Canada: PME.

Choy, B. H., Dindyal, J. (2018). An approach to teach with variations: using typical problems. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, nº 13, 21‐38.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W. & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational evaluation and policy analysis*, 25(2), 119-142.

Finn, D. F. (1989). Withdrawing from school. *Review of Educational Research*, 59(2), 117-142.

Finn, J. D. & Zimmer, K. S. (2012). *Student engagement: What is it? Why does it matter?* In S. L. Christenson, A. L. Reschly, & C. Wylie (Eds.), Handbook of research on student engagement (pp. 97‐131). New York, NY: Springer.

Foster, C. (2015). The Convergent‐Divergent Model: an opportunity for teacher‐learner development through principled task design. *Educational Designer,* 2(8), 1-25.

Fredricks, J. A., Wang, M. T., Linn, J. S., Hofkens, T. L., Sugn, H., Parr, A. & Allerton, J. (2016). Using qualitative methods to develop a survey measure of math and science engagement. *Learning and Instruction*, 43, 5-15.

Hatch, J. A. (2008). Doing qualitative research in education settings. 진영은 역(2016). 교육적 상황에서 질적 연구 수행하기. 서울: 학지사.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research*, 1, 81-112.

Helme, S. & Clarke, D. (2001). Identifying cognitive engagement in the mathematics classroom. *Mathematics Education Research Journal*, 13, 133-153.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American educational research journal,* 30(2), 393-425.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., & Fuson, K. C. (1997). Making sense teaching and learning mathematics with understanding. 김수환, 박영희, 이경화, 한대희 공역(2004). 어떻게 이해하지?. 서울: 경문사.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking, *Journal for research in mathematics education,* 41(2), 169-202.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Leon, J., Medina-Garrido, E. & Múñez, J. L. (2017). *Teaching quality in math class: the development of a scale and the analysis of its relationship with engagement and achievement*. Front. Psychol. 8:895.

doi: 10.3389/fpsyg.2017.00895.

Li, Y. & Huang, R. (2013). *How Chinese teach mathematics and improve teaching*. Rouledge, New York, NY 10017

McMahon, B. & Portelli, J. P. (2004). Engagement for what? beyond popular discoursed of student engagement. *Leadership and Policy in Schools,* 3(1), 59-76.

Martin, D. P. & Rimm-Kaufman, S. E. (2015). Do student self-efficacy and teacher-student interaction quality contribute to emotional and social engagement in fifth grade math?, *Journal of school psychology*, 53, 359-373.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St. Albans: Tarquin Publications.

Munter, C. (2014). Developing visions of high-quality mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(5), 584-635.

Peterson, K. R., Stockero, S. L. & Zoest, L. R. (2015). Conceptualizing mathematically significant pedagogical opportunities to build on student thinking. *Journal for research in mathematical education,* 46(1), 88-124.

Rimm-Kaufman, S. E., Baroody, A., Larsen, R., Curby, T. W. & Abry, T. (2015). To what extent do teacher-student interaction quality and student gender contribute to fifth graders' engagement in mathematics learning? *Journal of Educational Psychology*, 107(1), 170 - 185.

Rymes, B. (2009). Classroom discussion analysis: a tool for critical reflection by Betsy Rymes. 김종현 역(2011). 말이 열리는 교실: 교실수업 개선을 위한 담화분석. 서울: 학이시습.

Schoenfeld, A. H. (2010). How to think: a theory of goal-oriented decision making and its educational application. 이경화 역(2013). 수학수업, 설명을 만나다. 서울: 경문사.

Shepard, L. A.(2000). The role of assessment in a learning culture. E*ducational Researcher,* 29(7). 4-14

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). 5 practices for orchestrating productive mathematics discussions. 방정숙 역(2013). 서울: 경문사.

Smith, M. S. & Sherin, M. G. (2019). *The 5 practices in practice*. NY: Corwin mathematics publishing.

Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important?* Retrieved from http://e-archives.criced.tsukuba.ac.jp/data/doc/pdf/2009/02/Kaye_Stacey.pdf

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S. & Silver, S. A. (2009). Implementations standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development (2nd ed.). 김남균, 조완영, 권성룡 역(2017). 수학과제가 수학수업을 만났을 때. 서울: 경문사.

Stockero, S. L. & Van Zoest, L. R. (2012). Characterizing pivotal teaching moments in begging matheamtics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 125-147.

Sullivan, P., Clarke, D. & Clarke, B. (2013). Teaching with tasks for effective mathematics learning. 이경화, 김동원 역(2016). 수학 수업 이야기: 수학, 과제, 학습의 삼중주. 서울: 경문사.

Swan, M. (2008). Designing a multiple representation learning experience in secondary algebra. *Educational Designer*, 1(1), 1-17.

Swan, M. & Burkhardt, H. (2012). Designing assessment of performance in mathematics. *Educational*

Designer, 2(5).

van ES, E. A., Hand, V. & Mercado, J. (2017). *Making visible the relationship between teachers' noticing for equity and equitable teaching practic*e. In Schack et al. (Eds.), Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks, Research in Mathematics Education, DOI 10.1007/978-3-319-46753-5_15.

Watson, A. & Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. International Handbook of Mathematics Teacher Education, 2, 107-134.

Watson, A. & Thompson, D. R. (2015). *Design Issues Related to Text-Based Tasks*. In Task Design In Mathematics Education (pp. 143-190). Springer International Publishing.

William, D. & Thompson, M. (2007). *Integrating assessment with learning: What will it take to make it work?* In: Dwyer, CA, (ed). The Future of Assessment: Shaping Teaching and Learning. (pp. 53-82). New York: Routledge.

Yang, Y. & Rick, T. E. (2013). *Chinese lesson study: developing classroom instruction through collaborations in school-based teaching research group activities.* In Y. Li & R. Huang (Eds.), How Chinese teach mathematics and improve teaching (pp. 51-65). New York: Routledge.

The Conceptualizing and Practices of Mathematical Classes Based on Students' Thinking

Lee, Seon Young
Baekseok high school
E-mail : math1347@naver.com

Han, Sunyoung†
Sungkyunkwan University
E-mail : sy.han@skku.edu

In this study, the student participation-centered class, which takes students' mathematical thinking as an important issues of the class, is named as student thinking-based math class. The main characteristics of student thinking-based mathematics classes were examined in terms of tasks, students engagement, and the role of teachers.

According to the results of analysis of class cases practiced by five secondary mathematics teachers, student thinking-based mathematics classes were conducted in the intersection of the rich mathematics tasks, students' cognitive and social engagement, and the role of teachers' formative facilitator.

The results of this study showed that the student's thinking is more important than the activity itself. And it is meaningful in that it examines the influence of the dynamic interaction of the three components of the mathematics class on the direction and outcome of the class.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90
* Key words : mathematical thinking, students' engagement, formative facilitator
* This study was supported by research fund from Sungkyunkwan University, 2020.
† corresponding author