



J. Korean Soc. Aeronaut. Space Sci. 49(1), 21-30(2021)

DOI:https://doi.org/10.5139/JKSAS.2021.49.1.21

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

컨벡스 프로그래밍을 이용한 추진-활공 유도탄의 중기궤적 최적화

권혁훈¹, 홍성민², 김경훈³, 김윤환⁴

Mid-course Trajectory Optimization for Boost-Glide Missiles Based on Convex Programming

Hyuck-Hoon Kwon¹, Seong-Min Hong², Gyeong-Hun Kim³ and Yoon-Hwan Kim⁴

LIG Nex1

ABSTRACT

Mid-course trajectory of the missiles equipped with seeker should be designed to detect target within FOV of seeker and to maximize the maneuverability at the point of transition to terminal guidance phase. Because the trajectory optimization problems are generally hard to obtain the analytic solutions due to its own nonlinearity with several constraints, the various numerical methods have been presented so far. In this paper, mid-course trajectory optimization problem for boost-glide missiles is calculated by using SOCP (Second-Order Cone Programming) which is one of convex optimization methods. At first, control variable augmentation scheme with a control constraint is suggested to reduce state variables of missile dynamics. And it is reformulated using a normalized time approach to cope with a free final time problem and boost time problem. Then, partial linearization and lossless convexification are used to convexify dynamic equation and control constraint, respectively. Finally, the results of the proposed method are compared with those of state-of-the-art nonlinear optimization method for verification.

초 록

탐색기를 탑재한 유도탄의 중기궤적은 탐색기 시야(FOV : Field-Of-View) 내에서 표적을 탐지하며, 전환 시점에서의 기동성을 최대화하도록 설계하는 것이 요구된다. 유도탄의 비행궤적 최적화 문제는 여러 구속조건이 적용된 비선형 문제로 일반적인 해석해를 도출하기 어렵기 때문에 그 동안 다양한 계산적인 방법들이 제시되어 왔다. 본 논문에서는 추진-활공 유도탄의 중기궤적 최적화 문제를 컨벡스 최적화 기법인 2차 원뿔 프로그래밍을 이용하여 산출하였다. 먼저, 운동방정식의 상태변수를 최소화하기 위해서 제어변수 구속조건이 추가된 제어변수 추가 형태의 운동방정식을 구성하였다. 또한, 자유 종말시간 문제와 추진시간 문제를 대처하기 위하여 정규화된 시간 변수를 독립 변수로 설정하였다. 그리고, 운동방정식과 제어변수 구속조건을 컨벡스 형태로 변환하기 위하여 각각 부분 선형화와 무손실 컨벡스 변환을 적용하였다. 마지막으로, 본 논문에서 제시된 방안의 타당성을 확인하기 위하여 비선형 최적화 프로그래밍 결과와 비교하였다.

Key Words : Convex Optimization(컨벡스 최적화), Lossless Convexification(무손실 컨벡스 변환), Trajectory Optimization(궤적 최적화), Second-Order Cone Programming(2차 원뿔 프로그래밍)

† Received : September 4, 2020 Revised : November 24, 2020 Accepted : December 7, 2020

^{1,4} Chief Research Engineer, ^{2,3} Research Engineer

¹ Corresponding author, E-mail : hhwon22@lignex1.com, ORCID 0000-0003-2773-0145

© 2021 The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences

I. 서 론

탐색기를 탑재한 유도탄은 초기 발사 이후 일반적으로 중기 유도 단계를 거쳐 종말 유도 단계로 전환된다. 중기 유도 단계는 탐색기가 탐색기의 시야 내에서 표적을 탐지하며, 정지 혹은 기동 표적을 요격할 충분한 기동성(속도)을 보유할 수 있도록 설계된다. 지금까지 선형 운동방정식을 기반으로 에너지를 최적화하는 기법[1,2]이나 충돌각을 제어하는 기법[3-5]들은 최적제어 이론, 비례항법 유도기법 등을 기반으로 많이 제시되어왔다. 하지만, 기동성 확보를 위해 종말속도를 최대화하는 기법은 최근 들어 일부 연구들이 수행되었으나[6,7], 제한된 교전 상황에서 산출된 결과로 교전 상황에 따라 발생하는 다양한 구속 조건을 적용하기가 힘들다. 따라서, 비선형 운동방정식 및 다양한 구속조건을 고려한 현실적인 결과를 산출하기 위해서 계산적인 방법들이 적용되어 왔다[8]. 유도탄의 중기궤적 최적화 문제는 비선형 최적화 문제이기 때문에, 일반적으로 비선형 프로그래밍(Nonlinear Programming)을 이용하여 분석을 수행해야 한다[9-11]. 하지만, 초기 조건에 매우 민감하며 수렴성이 보장되지 않는 비선형 프로그래밍을 적용하는 대신 컨벡스 최적화를 이용한 방안들이 최근 항공우주 분야의 실시간 궤적 최적화 문제들에 대하여 제시되고 있다[12-17]. 컨벡스 최적화 문제는 초기 조건에 강건하며 수렴성을 보장하는 장점이 있으나, 비선형 최적화 문제를 컨벡스 최적화 문제로 변환하고 결과의 타당성을 검증해야 한다.

본 논문에서 컨벡스 최적화 기법 중 하나인 2차원 볼 프로그래밍(SOCP)을 이용하여 추진-활공 유도탄의 중기궤적 최적화를 수행하였다. 본 문제에서는 유도 단계 전환 시 발생하는 비선형 구속조건이 추가적으로 고려되어야 하며, 자유 최종 시간(free final time)과 추진 시간(boost time)에 대한 문제가 해결되

어야 한다. 기존 연구에서는 비행시간 대한 문제를 진행 방향 거리에 대한 문제로 재정의하고 무손실 컨벡스 변환을 수행하여 최적화 문제를 접근하였다[17]. 본 연구에서는 이와 다르게 최종 시간을 상태 변수로 추가하고 정규화된 시간을 독립 변수로 설정하여 시간에 대한 문제를 보다 직접적으로 접근하였다. 또한, 비선형 문제를 컨벡스 문제로 변환하기 위하여 운동방정식 및 종말 구속조건에 대한 연속적인 선형화를 사용하였으며, 운동 방정식에 대하여 이산화를 수행하였다. 마지막으로, 제어 입력에 대한 무손실 컨벡스 변환을 증명한 후, 지대공 유도탄에 대한 최적화를 수행하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 추진-활공 유도탄의 중기궤적 최적화에 대한 문제를 정의하였다. III장에서는 컨벡스 최적화 문제로 변환하기 위한 부분 선형화 및 이산화 기법을 기술하였다. IV장에서는 제어변수 구속조건에 대한 무손실 컨벡스 변환에 대하여 증명하였으며, V장에서는 지대공 교전 상황에 대하여 컨벡스 프로그래밍 및 비선형 프로그래밍 결과를 비교하였다.

II. 문제 정의

본 장에서는 추진-활공 유도탄의 교전 시나리오를 기반으로 중기궤적 최적화 문제에 대하여 기술한다. 2차원 중 방향 평면에서의 비선형 운동 방정식과 중기유도 단계에서 고려해야 할 구속조건을 포함한다.

2.1 중기궤적 최적화

본 장에서는 1단 고체 추진기관이 탑재된 추진-활공 유도탄의 중기궤적 최적화 문제를 정의한다. Fig. 1은 유도탄 발사 후부터 탐색기가 표적을 탐지 및 추적하기 전까지의 비행궤적을 나타낸다. 최적화 문제는 유도탄 및 표적의 초기 고도 및 표적 상태에

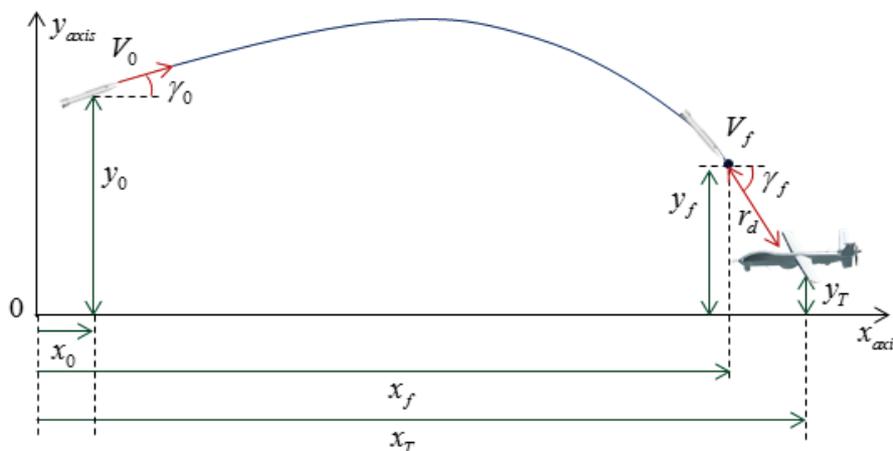


Fig. 1. Mid-course Trajectory Geometry

따라 지대공, 공대지, 공대공 등 일반적인 교전 상황을 나타낼 수 있다.

여기서, x_0, y_0, V_0, γ_0 는 각각 발사 시점에서의 거리, 고도, 속도 및 경로각을 나타내며, x_f, y_f, V_f, γ_f 는 종말유도 전환 시점에서의 거리, 고도, 속도 및 경로각을 나타낸다. 또한, x_T, y_T 는 종말유도 전환 시점에서의 예상 표적의 위치이며, r_d 는 탐색기 탐지 거리는 나타낸다. 본 연구에서는 문제를 간략하게 기술하기 위하여 표적이 고정되어 있다고 가정하고 초기 거리 x_0 는 0으로 설정하였다.

2.2 비선형 운동 방정식 및 전환 구속조건

유도탄의 종 방향 비선형 운동 방정식은 다음과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \gamma \\ \dot{y} &= V \sin \gamma \\ \dot{V} &= \frac{1}{m} (T \cos \alpha - D) - g \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= \frac{1}{m V} (T \sin \alpha + L) - \frac{1}{V} g \cos \gamma \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{where } T = \begin{cases} T_0 & t \leq t_{thr} \\ 0 & t > t_{thr} \end{cases} \quad m = \begin{cases} m_0 - m_{thr}(t/t_{thr}) & t \leq t_{thr} \\ m_0 - m_{thr} & t > t_{thr} \end{cases}$$

여기서, x, y, V, γ, α 는 각각 유도탄의 거리, 고도, 속도, 경로각, 받음각을 나타낸다. 또한, m, T, L, D 는 각각 유도탄의 무게, 추력, 양력, 항력을 나타내고, g 와 m_0 는 중력가속도와 유도탄의 연소 전 질량을 나타낸다. 그리고, t_{thr}, m_{thr}, T_0 는 추진제의 연소시간, 추진제의 질량, 추력을 나타낸다. 만일 유도탄의 받음각이 작다고 가정하면, 일반적으로 유도탄의 양력과 항력, 그리고 삼각함수들은 다음과 같이 간략하게 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} L &\approx k C_{L_\alpha} \alpha \\ D &\approx k (C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha^2) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{where } k = q S_{ref}, q = 0.5(\rho V^2)$$

$$\cos \alpha \approx 1, \sin \alpha \approx \alpha$$

여기서, S_{ref} 와 q 는 유도탄의 기준면적과 동압을 나타낸다. $C_{L_\alpha}, C_{D_0}, C_{D_\alpha}$ 는 유도탄의 양력 및 항력과 관련된 공력계수들을 나타낸다. 유도탄의 상태변수를 $p = [x, y, V, \gamma]^T$ 로 선정하고 제어변수를 $u = [\alpha, \alpha^2]^T$ 로 선정하면, 유도탄의 비선형 운동 방정식은 다음 식과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{dp}{dt} = f^p(p) + B^p(p)u \\ &= \begin{bmatrix} V \cos \gamma \\ V \sin \gamma \\ \frac{T}{m} - g \sin \gamma - \frac{1}{m} k C_{D_0} \\ -\frac{1}{V} g \cos \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} k C_{D_\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{where } T = \begin{cases} T_0 & t \leq t_{thr} \\ 0 & t > t_{thr} \end{cases} \quad m = \begin{cases} m_0 - m_{thr}(t/t_{thr}) & t \leq t_{thr} \\ m_0 - m_{thr} & t > t_{thr} \end{cases}$$

종말유도 전환 단계에서의 유도탄의 위치는 예상 표적위치에서 탐색기의 탐지거리만큼 떨어져 있기 때문에 다음과 같은 구속조건을 갖는다.

$$\begin{aligned} x(t_f) &= x_T - r_d \cos \gamma(t_f) \\ y(t_f) &= y_T - r_d \sin \gamma(t_f) \end{aligned} \quad (4)$$

2.3 최적화 문제

추진-활공 유도탄의 중기궤적 최적화 문제는 종말 유도 전환 단계에서 표적을 지향하며 유도탄의 속도를 최대화하는 문제이다. P0는 2.2절에서 기술한 식들로 구성된 비선형 최적화 문제를 나타낸다.

$$\begin{aligned} P0 : \min & -V(t_f) \text{ subject to} \\ & \bullet \text{ dynamics} \\ & p = f^p(p) + B^p(p)u \\ & \bullet \text{ control constraints} \\ & u_1^2 = u_2, 0 \leq u_2 \leq u_{\max} = \alpha_{\max}^2 \\ & \bullet \text{ initial conditions} \\ & p(t_0) = [x(t_0), y(t_0), V(t_0), \gamma(t_0)]^T \\ & \bullet \text{ final conditions} \\ & x(t_f) = x_T - r_d \cos \gamma(t_f) \\ & y(t_f) = y_T - r_d \sin \gamma(t_f) \end{aligned}$$

여기서 t_0 와 t_f 는 최적화의 시작 및 종료시점을 나타낸다. 위와 같은 최적화 문제를 수치적으로 해결하기 위해서는 단조(monotonic) 증가하거나 감소하고, 경계값(boundary value)이 정해진 변수를 독립변수로 설정해야 한다. 일반적으로 교전 상황에 따라 거리나 고도를 독립 변수로 설정할 수 있지만, P0 최적화 문제에서는 거리 경계값이 주어지지 않고 고도가 시간에 따른 단조함수가 아니기 때문에 거리나 고도

는 독립 변수로 설정하기 어렵다. 따라서, 본 연구에서는 발사부터 종기유도 종료까지 소요되는 비행시간($\beta = t_f - t_0$)을 상태변수로 추가하고, 다음 식과 같이 $[0,1]$ 에서 정의된 정규화된(normalized) 비행시간(τ)을 독립변수로 추가하였다.

$$\tau = \frac{(t-t_0)}{\beta}, \quad dt = \beta d\tau \quad (5)$$

새로운 상태변수를 $q = [x, y, V, \gamma, \beta]^T$ 로 정의하고 τ 를 독립변수로 사용하면, 유도탄의 비선형 운동 방정식은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= \frac{dq}{d\tau} = f^q(q) + B^q(q)u \\ &= \begin{bmatrix} \beta V \cos \gamma \\ \beta V \sin \gamma \\ \frac{\beta T}{m} - \beta g \sin \gamma - \frac{\beta}{m} k C_{D_0} \\ -\frac{\beta}{V} g \cos \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} k C_{D_0} \\ \frac{\beta}{m V} (T + k C_{L_0}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

P1 최적화 문제는 다음과 같이 P0 문제에서 비선형 운동 방정식만 변경된 형태로 기술된다.

P1 : $\min -V(\tau_f)$ subject to

• *dynamics*

$$q' = f^q(q) + B^q(q)u$$

• *control constraints*

$$u_1^2 = u_2, \quad 0 \leq u_2 \leq u_{\max} = \alpha_{\max}^2$$

• *initial conditions*

$$q(\tau_0) = [x(\tau_0), y(\tau_0), V(\tau_0), \gamma(\tau_0), \beta(\tau_0)]^T$$

• *final conditions*

$$x(\tau_f) = x_T - r_d \cos \gamma(\tau_f)$$

$$y(\tau_f) = y_T - r_d \sin \gamma(\tau_f)$$

III. 컨벡스 최적화

P1 최적화 문제는 운동 방정식, 종말 구속조건, 그리고 제어 구속조건에서 비선형 특성을 나타내기 때문에, 컨벡스 최적화를 사용하기 위해서는 이를 컨벡스화(Convexification)하는 것이 요구된다. 우선, 운동 방정식과 종말 구속조건, 경우에는 선형화를 통하여 선형 방정식을 연속적으로 도출하고 신뢰 구간

(Trust Region)을 설정하였다. 반면, 제어 구속조건, 경우에는 무손실 컨벡스 변환을 이용하여 등호를 부등호로 대체하고, 관련 변환이 동일한 최적화 결과를 도출함에 대한 증명을 수행하였다.

3.1 운동 방정식 선형화

P1 최적화 문제에서 k 번째 산출된 최적해를 q^k 라고 가정하자. 운동 방정식 (6)은 부분 선형화(Partial Linearization)를 기반으로 다음과 같이 선형화할 수 있다[14].

$$q' = A(q^k)q + B^q(q^k)u + c(q^k)$$

$$\begin{aligned} \text{where } A(q^k) &= \frac{\partial f^q(q^k)}{\partial q} \\ c(q^k) &= f^q(q^k) - A(q^k)q^k \end{aligned}$$

$$A(q) = \begin{bmatrix} \beta \cos \gamma & -\beta V \sin \gamma & V \cos \gamma \\ 0 & \beta \sin \gamma & V \sin \gamma \\ 0 & \frac{\beta}{m} \frac{\partial k}{\partial V} C_{D_0} - \beta g \cos \gamma & \frac{T}{m} - g \sin \gamma - \frac{k}{m} C_{D_0} \\ 0 & \frac{\beta}{V^2} g \cos \gamma & -\frac{1}{V} g \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

부분 선형화 기법은 선형화를 수행하면서 제어 입력에 대한 정보가 요구되지 않기 때문에, 최적화를 진행하면서 발생하는 진동 특성을 줄이고, 수렴 속도를 높이는 것으로 알려져 있다. 또한, 선형화에 따른 근사 시스템의 타당성을 보장하기 위하여 다음과 같이 신뢰 구간이 설정된다.

$$\|q - q^k\| \leq \rho \quad (8)$$

본 연구에서는 ρ 값을 충분히 크게 설정하여 신뢰 구간 내에서 최적화가 진행되도록 하였다.

3.2 운동 방정식 이산화

운동 방정식은 미분 방정식으로 기술되어 있기 때문에 적절한 적분 기법을 사용하여 구속조건 형태로 변환해야 한다. 본 연구에서는 관련 연구에서 많이 적용되고 있는 사다리꼴 기법(Trapezoidal rule)을 기반으로 다음과 같이 이산화를 수행하였다[15].

$$\begin{aligned} q_i^k &= q_{i-1}^k + \frac{\Delta\tau}{2} [f^q(q_{i-1}^k) + B^q(q_{i-1}^k)u_{i-1}^k] \\ &+ \frac{\Delta\tau}{2} [f^q(q_i^k) + B^q(q_i^k)u_i^k], \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, $\Delta\tau (= 1/N)$ 는 전체 궤적을 동일한 N 개의 구간으로 이산화한 간격을 의미한다. 단, 본 연구에서 고려하는 추진-활공 유도탄은 초기 연소 종료 시점인 t_{thr} 를 기준으로 운동 방정식이 변하는 형태이기 때문에, 다음과 같이 t_{thr} 시점을 포함하는 i_T 번째

구간에서는 이를 고려해주어야 한다.

$$\frac{i_T-1}{N} \leq \frac{t_{thr}}{\beta} \leq \frac{i_T}{N}$$

$$q_{i_T}^k = q_{i_T-1}^k + \delta_2 \Delta \tau [f^q(q_{i_T}^k) + B^q(q_{i_T}^k)u_{i_T}^k] + \delta_1 \Delta \tau [f^q(q_{i_T-1}^k) + B^q(q_{i_T-1}^k)u_{i_T-1}^k] \quad (10)$$

where $\delta_1 = i_T - \frac{t_{thr}}{\beta/N}$, $\delta_2 = 1 - \delta_1$

유도탄의 질량 m 은 연소 구간 동안 일정하게 감소한다고 가정하면, i_T 번째 구간을 기준으로 다음처럼 기술할 수 있다.

$$m_i^k = \begin{cases} m_0 - m_{thr} \left(i \times \frac{\beta/N}{t_{thr}} \right) & i \leq i_T \\ m_0 - m_{thr} & i > i_T \end{cases} \quad (11)$$

3.3 종말 구속조건 선형화

종말 구속조건은 비선형 등호 방정식이므로 컨벡스 문제로 변환하기 위해서는 이를 선형화해야 한다. 본 연구에서는 참고문헌 [13]에서와 같이 두 단계의 선형화를 통하여 최적화를 진행하고자 한다. 먼저 비선형 종말 구속조건을 다음과 같이 정의하자.

$$h(q) = 0 \quad (12)$$

첫 번째 단계 선형화는 2차 이상의 항을 무시하고 다음과 같이 1차 선형화에 대한 결과를 이용하여 최적화 결과를 산출한다.

$$h(q^k) + \nabla h(q^k)(q - q^k) = 0 \quad (13)$$

첫 번째 단계 선형화를 이용하여 산출된 결과를 q_1 라고 정의하자. 두 번째 단계 선형화는 1단계 결과를 기반으로 종말 구속조건 2차 항을 추정하여 최적화를 다시 진행한다.

$$h_c(q_1) = h(q_1) - h(q^k) - \nabla h(q^k)(q_1 - q^k)$$

$$h(q^k) + \nabla h(q^k)(q - q^k) + h_c(q_1) = 0 \quad (14)$$

두 단계 선형화를 이용하여 산출된 결과를 각 단계의 최적화 결과인 q^{k+1} 로 사용한다. 이와 같은 방법을 이용하면 헤시안(Hessian) 행렬을 계산하지 않고 테일러 급수의 2차 항까지 고려할 수 있고, 2차 원뿔 프로그래밍에서 사용 가능한 형태로 변환할 수 있다. 본 연구에서 적용하는 종말 구속조건에서 $\nabla h(q)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\nabla h(q) = \begin{bmatrix} 100 - r_d \sin \gamma(t_f) & 0 \\ 0 & 10 r_d \cos \gamma(t_f) & 0 \end{bmatrix} \equiv D(q) \quad (15)$$

IV. 무손실 컨벡스 변환

제어 구속조건 2의 경우에는 두 개의 입력 변수의 관계를 기술하는데, 등호를 부등호로 대체하면 컨벡스 형태로 변환된다. 만일 부등호로 대체된 최적화 결과가 등호에서 산출된 최적화 결과와 동일하면, 이는 무손실 컨벡스 변환에 해당하며 손쉽게 최적화 결과를 산출할 수 있다. 지금까지 다양한 형태 문제에서 무손실 컨벡스 변환이 사용되었으며, 최적 제어 이론의 최대 원리(maximum principle)를 이용하여 증명되어 왔다[18,19]. 본 절에서는 최대 원리를 기반으로 제어 구속조건과 관련된 무손실 컨벡스 변환을 증명하고자 한다.

4.1 최적 제어 이론

우선, 각 최적화 단계에서 신뢰 구간 제한치를 크게 설정하여 최적화 과정에서 신뢰 구간에 의하여 제한되는 변수가 없다고 가정하자. P1 최적화 문제에서 해밀토니안(Hamiltonian)과 라그랑지안(Lagrangina)은 다음과 같이 정의된다.

$$H = p_x(a_{13}V + a_{14}\gamma + a_{15}\beta + c_1) + p_y(a_{23}V + a_{24}\gamma + a_{25}\beta + c_2) + p_V(a_{33}V + a_{34}\gamma + a_{35}\beta + c_3 + b_{32}u_2) + p_\gamma(a_{43}V + a_{44}\gamma + a_{45}\beta + c_4 + b_{41}u_1) \quad (16)$$

$$L = H + \lambda_0(u_1^2 - u_2) + \lambda_1(-u_2) + \lambda_2(u_2 - u_{\max})$$

여기서 p_x, p_y, p_V, p_γ 는 거리, 고도, 속도 및 경로의 adjoint 변수를 나타내며, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ 는 제어변수 구속조건들에 대한 Lagrange multiplier를 나타낸다[17-19]. 최적 제어 이론의 direct adjoining 접근법에 따르면, 최적해(q^*, u^*)에 대하여 다음과 같은 조건들(C1~C6)을 만족하는 상수 $p_0 \leq 0$ 가 존재한다.

$$C1) \text{ non-triviality 조건} \quad (p_0, \vec{p}(t), \vec{\lambda}(t), \vec{\xi}) \neq 0, \forall t \quad (17)$$

$$C2) \text{ pointwise minimum 조건} \quad u^* = \arg \min H(t, x(t), u, p(t), p_0), a.e. t \quad (18)$$

$$C3) \text{ co-state 조건}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\partial L / \partial x = 0 \\ \dot{p}_y &= -\partial L / \partial y = 0 \\ \dot{p}_V &= -\partial L / \partial V \\ &= -(p_x a_{13} + p_y a_{23} + p_V a_{33} + p_\gamma a_{43}) \\ \dot{p}_\gamma &= -\partial L / \partial \gamma \\ &= -(p_x a_{14} + p_y a_{24} + p_V a_{34} + p_\gamma a_{44}) \\ \dot{p}_\beta &= -\partial L / \partial \beta \\ &= -(p_x a_{15} + p_y a_{25} + p_V a_{35} + p_\gamma a_{45}) \end{aligned} \quad (19)$$

C4) stationary 조건

$$\begin{aligned} \partial L / \partial u_1 &= p_\gamma b_{41} + 2\lambda_0 u_1 = 0 \\ \partial L / \partial u_2 &= p_V b_{32} - \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

C5) complementary slackness 조건

$$\begin{aligned} \lambda_0 &\leq 0, \lambda_0(u_1^2 - u_2) = 0 \\ \lambda_1 &\leq 0, \lambda_1(-u_2) = 0 \\ \lambda_2 &\leq 0, \lambda_2(u_2 - u_{\max}) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

C6) transversality 조건

$$\begin{aligned} p_x(t_f) &= \partial G / \partial x = \xi_x \\ p_y(t_f) &= \partial G / \partial y = \xi_y \\ p_V(t_f) &= \partial G / \partial V = -p_0 \\ p_\gamma(t_f) &= \partial G / \partial \gamma = \xi_x d_{14} + \xi_y d_{24} \\ p_\beta(t_f) &= \partial G / \partial \beta = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{where } G(t_f) &= p_0(-V(t_f)) \\ &\quad + \xi_x(x(t_f) + d_{14}\gamma(t_f) + e_1) \\ &\quad + \xi_y(y(t_f) + d_{24}\gamma(t_f) + e_2) \end{aligned}$$

4.2 무손실 컨벡스 변환 증명

증명은 귀류법(Proof by Contradiction)을 기반으로 진행한다. $u_1^2 < u_2$ 가 만족되는 일정 구간 $[\tau_1, \tau_2] \subset [\tau_0, \tau_f]$ 이 존재한다고 가정하자.

가) C5)에 의하여 $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ 에서 $\lambda_0 = 0$ 및 $\lambda_1 = 0$ ($u_2 > 0$)을 만족한다.

나) C4)에 의하여 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_1} &= p_\gamma b_{41} = p_\gamma \frac{\beta}{mV} (T + kC_{L_\alpha}) = 0 \\ \rightarrow p_\gamma &= 0 \because T \geq 0, k > 0, C_{L_\alpha} > 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u_2} &= p_V b_{32} + \lambda_2 = 0 \\ \rightarrow p_V b_{32} &= -\lambda_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

다) 해밀토니안에서 입력에 대한 항을 분리하여 다시 정리하면 다음과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} H &= p_x(a_{13}V + a_{14}\gamma + a_{15}\beta + c_1) \\ &\quad + p_y(a_{23}V + a_{24}\gamma + a_{25}\beta + c_2) \\ &\quad + p_V(a_{33}V + a_{34}\gamma + a_{35}\beta + c_3) \\ &\quad + p_\gamma(a_{43}V + a_{44}\gamma + a_{45}\beta + c_4) \\ &\quad + p_\gamma b_{41}u_1 + p_V b_{32}u_2 \end{aligned} \quad (24)$$

C2)에 의하여 $p_V b_{32}$ 값에 따라 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} p_V b_{32} &= 0 \rightarrow u_2 \in (0, u_{\max}] \\ p_V b_{32} &> 0 \rightarrow u_2 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

가정에 의하여 $u_2 > 0$ 이므로 $p_V b_{32} = 0$ 이어야 한다. 또한, $b_{32} > 0$ 이므로 $p_V = 0$ 이 된다. 따라서, p_V 는 u_2 조건에 상관없이 0이 된다.

라) C3)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= 0 \rightarrow p_x = l_x \\ \dot{p}_y &= \nu_y = 0 \rightarrow p_y = l_y \\ \dot{p}_V &= -(p_x a_{13} + p_y a_{23}) = 0 \\ \dot{p}_\gamma &= -(p_x a_{14} + p_y a_{24}) = 0 \\ \dot{p}_\beta &= -(p_x a_{15} + p_y a_{25}) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

만일 $\gamma = 0$ 이라고 가정하면,

$$\begin{aligned} a_{13} &= \beta, a_{23} = 0, a_{14} = 0, a_{24} = \beta V \\ \rightarrow p_x \beta &= 0 \rightarrow p_x = 0 \\ \rightarrow p_y \beta V &= 0 \rightarrow p_y = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

만일 $\gamma \neq 0$ 이면,

$$\begin{aligned} l_y &= -\frac{a_{13}}{a_{23}} l_x = -l_x / \tan \gamma \\ &= -\frac{a_{14}}{a_{24}} l_x = \tan \gamma \cdot l_x \\ \Rightarrow (\tan \gamma)^2 &= -1 \end{aligned} \quad (28)$$

$(\tan \gamma)^2 = -1$ 은 불가능하므로 $\gamma \neq 0$ 일 경우에도 $l_x = l_y = p_x = p_y = 0$ 이어야 한다. 또한, p_β 는 다음과 같이 상수가 된다.

$$\dot{p}_\beta = 0 \rightarrow p_\beta = l_\beta \quad (29)$$

p_β 가 상수이고 C6)으로부터 $p_\beta(t_f) = 0$ 이기 때문에 $p_\beta = 0$ 이다.

마) 위 결과에 따라 $p_x(t_f) = p_y(t_f) = 0$ 이므로 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \xi_x &= \xi_y = 0 \\ \rightarrow p_\gamma(t_f) &= \xi_x d_{14} + \xi_y d_{24} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

바) 지금까지 가)에서 마)까지 산출된 결과를 종합하면, $(p_0, \vec{p}(t), \vec{\lambda}(t), \vec{\xi}) = 0$ 이므로 C1) 조건을 만족하지 않는다. 따라서, 모든 구간에서 $u_1^2 = u_2$ 가 성립한다.

4.3 컨벡스 문제

부분 선형화와 무손실 컨벡스 변환을 적용한 최종 최적화 문제는 다음 P2와 같이 컨벡스 문제로 정의된다.

P2: $\min -V(\tau_f)$ subject to

• dynamics
 $M\dot{q} = F$

• control constraints
 $u_1^2 \leq u_2, 0 \leq u_2 \leq u_{\max} = \alpha_{\max}^2$

• initial conditions
 $q(\tau_0) = [x(\tau_0), y(\tau_0), V(\tau_0), \gamma(\tau_0), \beta(\tau_0)]^T$

• final conditions
 $x(\tau_f) = x_T - r_d \cos \gamma(\tau_f)$
 $y(\tau_f) = y_T - r_d \sin \gamma(\tau_f)$

여기서 M, \bar{q}, F 는 이산화를 수행하여 모든 이산화 지점에서의 구속조건을 포괄한 것으로 다음과 같이 기술된다[14].

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ Q_0 & R_1 & \dots & 0 & G_0 & H_1 & \dots & 0 \\ 0 & Q_1 & R_2 & 0 & 0 & G_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & Q_{N-1} & R_N & 0 & 0 & G_{N-1} & H_N \end{bmatrix}$$

$$\bar{q} = [q_0^T, \dots, q_N^T, u_{1,0}, u_{2,0}, \dots, u_{1,N}, u_{2,N}]^T$$

$$F = -\frac{\Delta\tau}{2} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\Delta\tau}(q_0) \\ c(q_0) + c(q_1) \\ \vdots \\ c(q_{N-1}) + c(q_N) \end{bmatrix} \quad (31)$$

where $Q_{i-1} = I + \frac{\Delta\tau}{2} A(q_{i-1})$
 $R_i = -I + \frac{\Delta\tau}{2} A(q_i)$
 $G_{i-1} = \frac{\Delta\tau}{2} B^q(q_{i-1}), H_i = \frac{\Delta\tau}{2} B^q(q_i)$

위의 컨벡스 문제는 임의의 초기 값을 설정하고 순차적으로 해를 산출하는 과정을 거친다.

V. 최적화 결과

본 장에서는 4.3절에서 기술된 P2 컨벡스 문제를 추진-활공 유도탄에 적용하여 교전 상황에 맞는 최적 중기 비행궤적을 산출하였다. Table 1은 본 최적화에서 사용한 추진-활공 유도탄의 사양을 나타낸다.

최적화를 위한 이산화 구간은 200으로 설정하였고, 수렴 조건은 다음과 같이 설정하였다.

$$\varepsilon = [1, 1, 0.5, 0.1^\circ, 0.1]^T \quad (32)$$

초기 예측 값은 상태변수의 초기값과 최종값을 기반으로 각 이산화 지점에서 선형적으로 산출된 결과를 이용하였다. 최종값은 다음처럼 가정하였다.

$$\begin{aligned} \gamma(\tau_f) &= -10^\circ \\ V(\tau_f) &= 700m/s \\ \beta(\tau_f) &= 20sec \end{aligned} \quad (33)$$

$x(\tau_f), y(\tau_f)$ 는 최적화 문제에 정의된 것과 같이 $x_T, y_T, r_w, \gamma(\tau_f)$ 를 이용하여 계산된다. 본 절에서는 지대공 교전 시나리오를 가정하고 최적화를 수행하였다.

Table 2는 지대공 교전 시나리오에 따른 초기 조건 및 탐색기 탐지거리를 나타낸다. 표적 위치는 사전에 예측된 종말 단계 전환시점의 위치를 나타낸다.

Table 1. Missile Specification

Weight	30kg (Boost) 22kg (Glide)
Thrust	6000 N
Burning Time	3 sec
Maximum AOA	10°

Table 2. Initial Conditions

	Initial Value
Missile Altitude	0m
Missile Velocity	20m/s
Missile Flight Path Angle	50°
Target Range	5km
Target Altitude	1km
Detection Range	1km

5.1 컨벡스 프로그래밍 결과

Figure 2는 지대공 교전에 대하여 P2 최적화 문제를 순차적으로 수행한 결과를 보여준다. 총 10번의 연속적인 최적화를 수행한 후, 종말속도를 최대화하는 수렴해를 도출하였다. 특히, 초기 비행궤적이 최종 비행궤적과 매우 상이하게 설정되었음에도 순차적으로 해를 찾으며 매우 빠르게 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

Figure 3, Fig. 4는 각각 속도와 비행경로각의 산출 결과를 나타낸다. 비행궤적과 마찬가지로 초기 값을 매우 부정확하게 설정하더라도 최종 결과로 빠르게 수렴함을 확인할 수 있다.

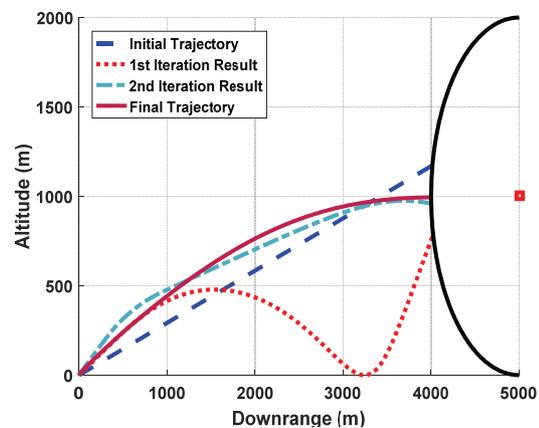


Fig. 2. Sequential Convex Optimization Results for Missile Trajectory

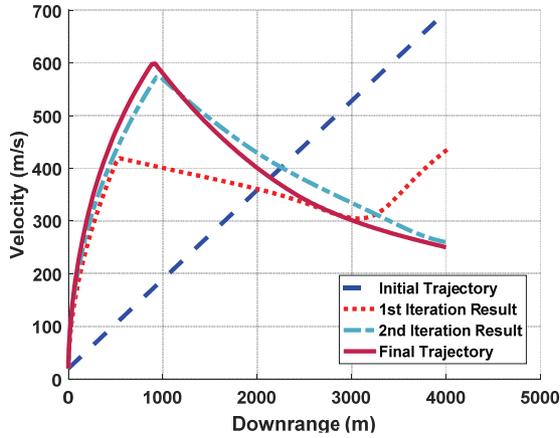


Fig. 3. Missile Velocity Results

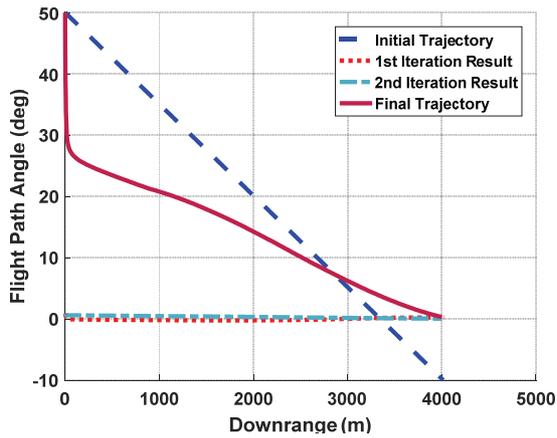


Fig. 4. Flight Path Angle Results

Figure 5는 제어변수 산출결과를 나타낸다. 무손실 컨벡스 변환이 정상적으로 수행됨을 확인하기 위하여 다음과 같이 l_1 norm을 사용하여 u_2 와 u_1^2 의 차이를 확인하였다.

$$E = \sum_{i=0}^N \| u_{2,i} - u_{1,i}^2 \|_1 \quad (34)$$

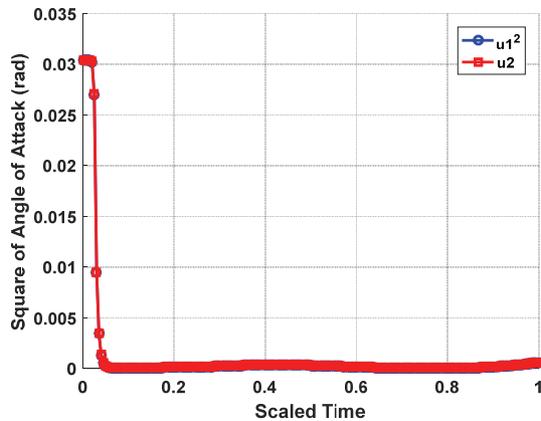


Fig. 5. Control Variable Profile for Ground-to-Air Engagement

식 (34)를 기반으로 두 입력의 차이를 계산하면 0.000327로 매우 작게 산출되었으며, 전 구간에서 무손실 컨벡스 변환이 정상적으로 수행되었음을 확인할 수 있다.

5.2 비선형 프로그래밍 결과 비교

본 절에서는 지대공 교전에 대하여 산출된 컨벡스 프로그래밍 결과를 최근 널리 사용되는 비선형 프로그래밍 기법(GPOPS-II)과 비교하였다[20]. 비선형 프로그래밍을 사용하는 경우, 초기값, 최적화 기법(solver), 허용오차(tolerance), 변수의 최소/최대값 등에 의하여 수렴 속도가 매우 크게 좌우되기 때문에 시나리오에 따라 수렴 해를 산출하기 위한 설정값을 찾아야 하는 단점이 있다. 본 시나리오의 경우에는 IPOPT 기법을 적용하였으며, 허용오차는 $1e-6$ 을 설정하였다[21]. (SNOPT의 경우, 100초 내로 수렴하지 않았다.)

Table 3 및 Figs. 6~8은 컨벡스 프로그래밍과 비선형 프로그래밍에서 산출된 비행궤적, 속도, 비행경로 각 결과를 나타낸다.

유도탄 속력에 대한 최적화 결과는 매우 유사하나, 비행궤적 및 비행경로각 결과가 다소 상이하게 산출되었음을 확인할 수 있다. Table 4는 종말 단계 전환 경로각을 일정하게 설정한 후 수행한 컨벡스 및 비선형 프로그래밍 결과를 나타낸다.

Table 3. Simulation Results for Convex & Nonlinear Programming

	Convex	Nonlinear
Run Time(Avg.)	1.76sec	6.42sec
Transition Velocity	250.19m/s	245.59m/s
Transition Path Angle	0.316°	-4.520°

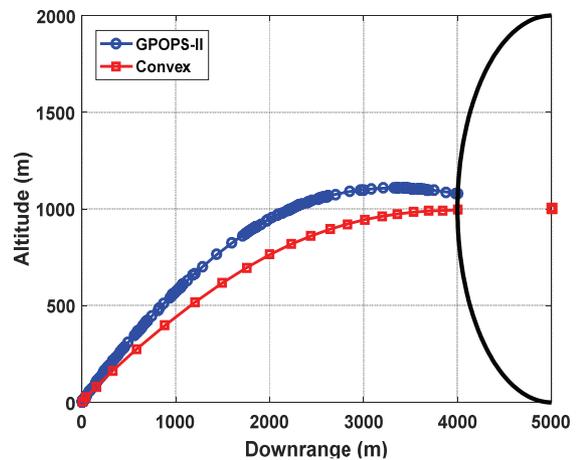


Fig. 6. Comparison Results for Missile Trajectory

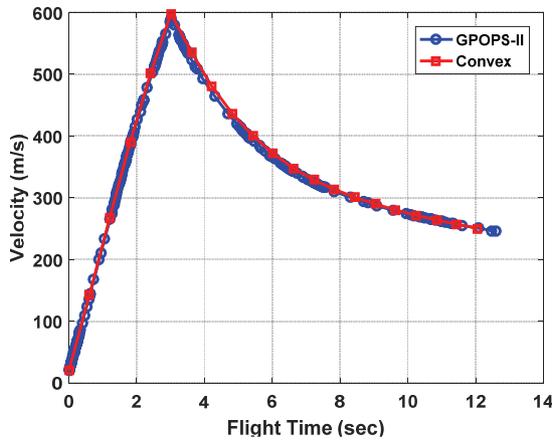


Fig. 7. Comparison Results for Missile Velocity

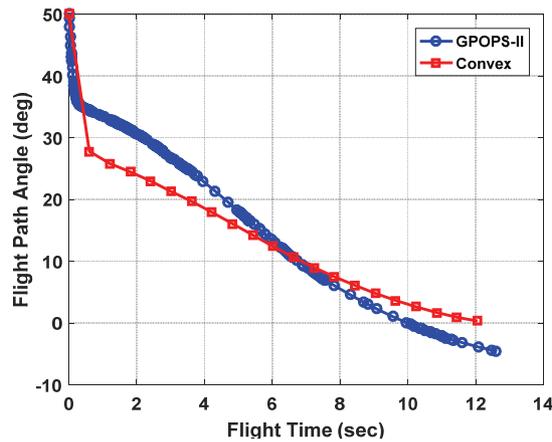


Fig. 8. Comparison Results for Flight Path Angle

Table 4. Simulation Results for Fixed Final Flight Path Angle (tolerance for non. : $1e-5$)

Transition Path Angle	Convex	Nonlinear
-5.0°	249.57 m/s	244.07 m/s
-2.5°	249.03 m/s	244.79 m/s
0.0°	250.30 m/s	245.07 m/s
2.5°	249.30 m/s	244.84 m/s

두 결과 모두 경로각 0°에서 최대 속도를 나타내었으나, Table 3에서 확인할 수 있듯이 컨벡스 프로그래밍은 0°에 가까운 결과를 산출한 반면, 비선형 프로그래밍은 -5°의 경로각을 최종적으로 산출하였다. 컨벡스 프로그래밍과 비선형 프로그래밍의 최적화 접근법에 차이가 존재하며[17], 비선형 프로그래밍의 허용오차 및 최적화 기법 설정에 대한 내용이 결과에 영향을 미친 것으로 판단된다. 비선형 프로그래밍의 경우, 관련 설정에 따라서 수렴성 및 수렴속도가 매우 크게 좌우되는 반면, 컨벡스 프로그래밍은 설정에 대하여 보다 일관된 속도로 결과를 산출함을 확인하였다.

VI. 결 론

본 논문에서는 컨벡스 프로그래밍을 이용한 추진-활공 유도탄의 중기궤적 최적화에 대한 연구를 수행하였다. 종말 전환 단계의 속도를 최대화하는 중기궤적을 빠르고 안정적으로 산출하기 위하여 컨벡스 프로그래밍 기법을 적용하였다. 비선형 최적화 문제를 컨벡스 최적화 문제로 변환하기 위하여 운동 방정식의 선형화를 수행하고, 제어변수 구속조건을 무손실 컨벡스 변환을 적용하였다. 초기 상태변수 설정값이 최종 결과와 매우 상이함에도 불구하고 빠른 시간 내에 수렴 해를 산출하는 것을 확인하였다. 지대공 교전 시나리오에 대한 최적화를 수행하였으며, 무손실 컨벡스 변환이 정상적으로 수행되었음을 확인하였다. 또한, 산출된 결과의 타당성을 확인하기 위하여 비선형 프로그래밍 결과와 비교하였다. 컨벡스 프로그래밍 결과와 비선형 프로그래밍 결과가 다소 상이하였으나, 종말 전환 경로각을 고정하고 최적화 결과를 수행한 결과 컨벡스 프로그래밍이 비선형 프로그래밍보다 정확한 결과를 산출함을 확인할 수 있었다. 향후 본 문제와 같은 궤적 최적화 문제를 접근함에 있어 컨벡스 프로그래밍 접근법이 기존의 비선형 프로그래밍 기법에 비하여 빠르고 강건하게 결과를 산출할 수 있을 것으로 판단된다.

References

- 1) Bryson, A. E., "Linear Feedback Solutions for Minimum Effort Interception, Rendezvous, and Soft Landing," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 8, 1965, pp. 1542~1544.
- 2) Cho, H., "Navigation Constants in PNG Law and the Associated Optimal Control Problems," *Proceedings of the Korean Automatic Control Conference*, Seoul, Korea, 1992, pp. 578~583.
- 3) Ryoo, C. K., Cho, H. and Tahk, M. J., "Optimal Guidance Laws with Terminal Impact Angle Constraint," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 4, 2005, pp. 724~732.
- 4) Ratnoo, A. and Ghose, D., "Impact Angle Constrained Guidance Against Nonstationary Nonmaneuvering Targets," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 1, 2010, 269~275.
- 5) Kim, T. H., Park, B. G. and Tahk, M. J., "Bias-Shaping Method for Biased Proportional Navigation with Terminal-Angle Constraint," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 36, No. 6, 2013, pp. 1810~1816.
- 6) Han, S. Y., Bai, J. H., Hong, S. M., Roh, H.

- K., Tahk, M. J., Yun, J. S. and Park, S. H., "Guidance Law for Agile Turn of Air-to-Air Missile During Boost Phase," *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 18, No. 4, 2017, pp. 709~718.
- 7) Jeon, I. S., Karpenko, M. and Lee, J. I., "Connections Between Proportional Navigation and Terminal Velocity Maximization Guidance," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 43, No. 4, 2019, pp. 1~6.
- 8) Hull, D. G., "Conversion of Optimal Control Problems Into Parameter Optimization Problems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 1, 1997, pp. 57~60.
- 9) Hargraves, C. R. and Paris, S. W., "Direct Trajectory Optimization Using Nonlinear Programming and Collocation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 4, 1987, pp. 338~342.
- 10) Betts, J. T., "Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 2, 1998.
- 11) Fahroo, F. and Ross I. M., "Direct Trajectory Optimization by a Chebyshev Pseudospectral Method," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 1, 2002, pp. 160~166.
- 12) Acikmese, B. and Ploen, S. R., "Convex Programming Approach to Powered Descent Guidance for Mars Landing," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 5, 2007, pp. 1353~1366.
- 13) Liu, X. and Lu, P., "Solving Nonconvex Optimal Control Problems by Convex Optimization," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 37, No. 3, 2014, pp. 750~765.
- 14) Liu, X., Shen, Z. and Lu, P., "Entry Trajectory Optimization by Second-Order Cone Programming," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 39, No. 2, 2016, pp. 227~241.
- 15) Liu, X., Shen, Z. and Lu, P., "Exact Convex Relaxation for Optimal Flight of Aerodynamically Controlled Missiles," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 52, No. 4, 2016, pp. 1881~892.
- 16) Roh, H. K., Oh, Y. J., Tahk, M. J., Kwon, K. J. and Kwon, H. H., "L1 Penalized Sequential Convex Programming for Fast Trajectory Optimization: with Application to Optimal Missile Guidance," *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 21, No. 2, 2020, pp. 493~03.
- 17) Kwon, H. H. and Choi, H. L., "A Convex Programming Approach to Mid-Course Trajectory Optimization for Air-to-Ground Missiles," *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 21, No. 2, 2020, pp. 479~92.
- 18) Harris, M. W. and Acikmese, B., "Lossless Convexification for a Class of Optimal Control Problems with Quadratic State Constraints," *American Control Conference*, June 2013.
- 19) Harris, M. W. and Acikmese, B., "Lossless Convexification of a Non-convex Optimal Control Problems for State Constrained Linear Systems," *Automatica*, Vol. 50, Issue 9, 2014, pp. 2304~2311.
- 20) Patterson, M. A. and Rao, A. V., "GPOPS-II : A MATLAB Software for Solving Multiple-Phase Optimal Control Problems Using hp-Adaptive Gaussian Quadrature Collocation Methods and Sparse Nonlinear Programming," *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 41, No. 1, 2014.
- 21) Wachter, A., "An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Optimization with Application in Process Engineering," Ph.D Dissertation, 2002.