한국기계가공학회지, 제20권, 제2호, pp. 72～79(2021.02) ISSN 1598-6721(Print)
Journal of the Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 20, No. 2, pp. 72~79(2021.02) ISSN 2288-0771(Online)

https://doi.org/10.14775/ksmpe.2021.20.02.072

등방성 판의 동적 변분-점근적 해석

이수빈*, 이창용**,#

*부경대학교 의생명기계전기융합공학협동과정, **부경대학교 기계공학과

A Dynamic Variational-Asymptotic Procedure for Isotropic Plates Analysis

Su-Bin Lee*, Chang-Yong Lee**,#

*Interdisciplinary Program of Biomedical Engineering, Pukyong National University,

**School of Mechanical Engineering, Pukyong National University

(Received 09 July 2020; received in revised form 01 October 2020; accepted 15 October 2020)

ABSTRACT

The present paper aims to set forth a two-dimensional theory for the dynamics of plates that is valid over a large range of excitation. To construct a dynamic plate theory within the long-wavelength approximation, two dimensional-reduction procedures must be used for analyzing the low- and high-frequency behaviors under the dynamic variational-asymptotic method. Moreover, a separate and logically independent step for the short-wavelength regime is introduced into the present approach to avoid violation of the positive definiteness of the derived energy functional and to facilitate qualitative description of the three-dimensional dispersion curve in the short-wavelength regime. Two examples are presented to demonstrate the capabilities and accuracy of all of the formulas derived herein by using various dispersion curves through comparison with the three-dimensional finite element method.

Key Words : Dimensional Reduction(차원감소), Dynamic Variational-Asymptotic Method(동적 변분-점근법), Short-Wave Extrapolation Method(단파 외삽법), Dispersion Curve(분산곡선)

1. 서 론

기하학적으로 3차원 구조체의 한 치수가 그 외 나머지 두 치수보다 훨씬 작은 형상을 가진다면, 수학적인 관점에서 이를 다소 긴 2차원 기준면을 유한두께로서 둘러싸인 판구조로서 간단하게 묘사할 수 있다. 이러한 판구조는 항공우주, 자동차 또는 토목건축 분야 등 다양한 산업체에 활용되므로, 임의의 하중아래 판의 기계적 거동을 정확하고 효율적으로 분석하기 위한 연구가 학계 및 산업체 내에서 활발하게 이루어지고 있다. 특히 구조체의 동적 거동을 정확하게 분석하기 위해 3차원 유한요소해석이 통상적으로 사용되고 있지만, 이로 인해 발생하는 예측불가능한 수치해석상의 부담 때문에, 효율성과 정확성이 서로 절충된 새로운 해석 방식이 요구된다.

만약 관련된 3차원 구조체의 종횡비가 매우 미소

Corresponding Author : bravenlee@pknu.ac.kr
Tel: +82-51-629-6133, Fax: +82-51-629-6126

하다면, 이 구조는 공학적으로 차원감소를 통하여 2차원 판구조로서 가정되어진다. 기존에 차원-감소법에 근거하여 높은 구조해석적 효율성과 정확성을 보여주는 Berdichevsky의 변분-점근법[1] 이 소개되었고, 이러한 방식과 함께 Hodges의 고유화 과정을 통한 3차원 탄성학 문제의 재해석으로 이론적 일반성과 체계성까지 갖춘 판 이론이 개발되었다[2]. 이러한 이론은 비선형 3차원 구조해석문제를 비선형 2차원 판 해석과 두께에 대한 선형 1차원 해석문제로 분리한다. 또한 정확성의 손실을 최소화하기 위해 선형 1차원 두께에 대한 해석결과와 비선형 2차원 판 해석결과를 서로 공유함으로써 3차원 변위, 변형 및 응력장이 복원되는 관계식이 체계적으로 제공된다. 하지만 기존의 문헌들 대다수가 저주파 진동영역(또는 정적영역)에 대한 제한적인 판 이론만을 구현해왔고, 이외의 영역에 대한 이론은 정확한 물리적 이유 없이 기존의 고전함수의 차수만을 증가시키는 복잡한 방식이 선택되었으며 그 결과 다소 부정확한 해석결과들이 여러 문헌들[6]에서 보고되었다. 한편, 최근 동적 변분-점근법을 이용한 최적화된 10개 자유도의 빔 모델이 개발되었다[9].

기존의 복잡한 방식을 선택하는 대신, 본 논문은 판구조에서 발생하는 고주파 진동들을 고려하여 이를 나타내는 자유도를 선별적으로 판 이론에 포함시키는 방식을 적용하고자 한다. 먼저 동적 변분-점근법[5,7,8]아래, 기존의 시간차수를 기반으로 한 저주파 진동영역의 근사과정과 고주파 진동영역에 관련된 시간차수를 사용하여 개별적인 근사과정을 수행

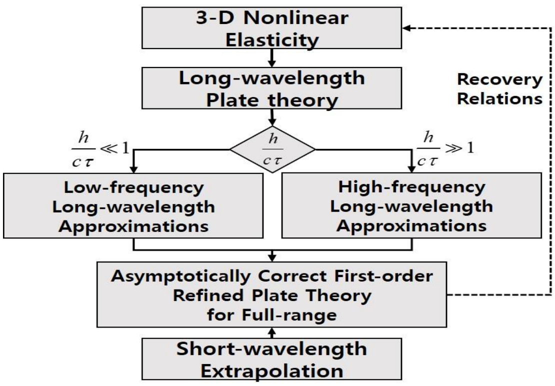

Fig. 1 Overview of dynamic plate analysis

후, 동시에 쌍곡선 단파장 외삽법을 사용하여 광범위한 진동영역까지 해석가능한 판 모델을 만들어낸다. 본 이론의 전 과정에 대한 순서도은 Fig. 1에 나타내었다. 마지막 검증과정으로, 3차원 수치해석 및 판 모델로 구현된 각각의 분산 곡선들을 비교함으로서 다양한 자유도의 개수에 따른 판 모델의 정확성을 예증하도록 한다.

2. 동적 변분-점근법

2.1 판 기구학 및 확정형 해밀턴 원리

역학적인 면에서 3차원 구조체내 발생하는 면외방향의 변위적 변화가 면내 방향의 변위적 변화보다 매우 작다는 것은 장파장의 근삿값을 0으로 가정하여 구조해석과정으로 활용될 수 있다. 이러한 사실을 활용하면 3차원 탄성학 문제는 2차원 판 구조해석문제로 대체되어진다.

이를 위해 본 부문은 우선 판 모델의 기하학적인 면을 고려하고자 한다. 먼저, 판 위의 임의의 한 점을 수학적으로 표현하기 위해, 기준면에 대한 직교인 좌표계 x_i가 소개된다. 이때 기준면에 대해 수직인 $x_3 = h\zeta$가 사용되며, 반면에 h가 0인 기준면은 수평인 좌표들 x_α로서 묘사되어진다. 여기서 h는 판의 두께를 나타내고 ζ는 $-1/2 \le \zeta \le 1/2$인 범위를 가지는 무차원 좌표이다. 그리고 본 논문에서 α와 β는 1 또는 2를 의미하며 i와 j는 1과 2 또는 3을 나타낸다. 그리고 소개된 좌표계에 평행한 단위 방향벡터들 $\mathbf{b}_i$가 활용됨으로서 관성계 원점인 O로부터 변형 전 판 위의 특정한 질점까지의 3차원 위치벡터 $\hat{\mathbf{r}}$은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\mathbf{r}}(x_1,x_2,\zeta,t) = \mathbf{r}(x_1,x_2,t) + h\zeta\mathbf{b}_3(x_1,x_2,t) \qquad (1)$$

이때 식 (1)에서 t는 시간변수를 나타내며, 2차원 위치벡터 $\mathbf{r}$은 3차원 위치벡터의 정적분으로 정의되어진다.

$$\langle \hat{\mathbf{r}}(x_1,x_2,\zeta,t) \rangle = \mathbf{r}(x_1,x_2,t) \qquad (2)$$

그리고 이후로 각진 괄호 $\langle \bullet \rangle$는 ζ에 대해 $-1/2$부터 $1/2$까지 정적분한 것을 말한다.

게다가 변형 후 단위 방향벡터 B_i는 변형 전 단위 방향벡터 b_i와 방향 코사인행렬 $C(x_1,x_2)$의 선형적 비례 관계식으로 정의되어지며, 이로 인한 변형 후 3차원 위치벡터 $\hat{\mathrm{R}}$은 아래와 같다.

$$\hat{\mathrm{R}}(x_1,x_2,\zeta,t) = w_i(x_1,x_2,\zeta,t)\mathrm{B}_i(x_1,x_2,t) \qquad (3)$$

여기서 w는 각 주파수 영역 내에서 계산되어지는 임의의 3차원 변동함수이다. 그러면 Hodges의 고유화 과정[3]으로 알려진 2차원 곡률과 각속도의 동적 관계식을 사용하여

$$\begin{gathered}\mathrm{B}_{i,\alpha} = (-\kappa_{\alpha 2}\mathrm{B}_1 + \kappa_{\alpha 1}\mathrm{B}_2 + \kappa_{\alpha 3}\mathrm{B}_3)\times \mathrm{B}_i \\ \dot{\mathrm{B}}_i = \Omega_j \mathrm{B}_j \times \mathrm{B}_i\end{gathered} \qquad (4)$$

3차원 변형률 및 속도 장들이 계산되어진다.

$$\begin{cases}\Gamma = h^{-1}\Gamma_h w + \Gamma_{L\alpha} w_{,\alpha} + \Gamma_\kappa w + \Gamma_o \\ V^{3d} = \dot{w} + \Gamma_\Omega w\end{cases} \qquad (5)$$

위 식 (4)와 (5)에서 κ_{ij}와 Ω_i는 각각 2차원 곡률과 각속도이고, $(\bullet)_{,\alpha} = \partial(\bullet)/\partial x_\alpha$, $(\bullet)_{|\zeta} = \partial(\bullet)/\partial\zeta$, $(\dot{\bullet}) = \partial(\bullet)/\partial t$, $\Gamma = \lfloor \Gamma_{11}\ 2\Gamma_{12}\ \Gamma_{22}\ 2\Gamma_{13}\ 2\Gamma_{23}\ \Gamma_{33} \rfloor^T$와 $V^{3d} = \lfloor V_1^{3d}\ V_2^{3d}\ V_3^{3d} \rfloor^T$이며 다음과 같은 연산자가 사용되어진다.

$$\Gamma_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial/\partial\zeta & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial\zeta & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial\zeta \end{bmatrix}, \Gamma_\kappa = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_{13} & \kappa_{11} \\ \kappa_{13} & -\kappa_{23} & \kappa_{21}+\kappa_{12} \\ \kappa_{23} & 0 & \kappa_{22} \\ -\kappa_{11} & -\kappa_{12} & 0 \\ -\kappa_{21} & -\kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial\zeta \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{L1} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}, \Gamma_{L2} = \begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}, \Gamma_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

또한 이후 전개되는 개발과정에서 본 이론의 효율성과 범용성을 높이기 위해 1차원 유한요소법의 전산화 기법이 변수분리과정을 통해 3차원 변동함수에 대해 정의된다.

$$w(x_1,x_2,\zeta,t) = S(\zeta)\,W(x_1,x_2,t) \qquad (6)$$

이때 S는 $3\times 3N$의 두께방향의 형상함수이며 W는 형상함수에 연관된 $3N\times 1$의 절점 값으로 이루어진 열 행렬이다.

지금까지와 같이 제시된 판 기하학의 정보들과 변수분리법에 근거한 임의의 정적 및 동적하중아래 3차원 구조체의 광범위한 주파수 영역별 기계적 거동에 대한 해석에는 통상적으로 변분화된 확장형 해밀턴 원리가 활용되어진다. 특히 판 이론에 관련된 원리는 아래와 같이 정의된다.

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_A [\delta\overline{L} + \overline{\delta W}]\,dA\,dt = 0 \qquad (7)$$

식 (7)에서 t_α는 임의의 고정된 시간, A는 변형 전의 기준면을 의미하며 라그랑지안 $\overline{L}$은 식 (5)를 이용하여 구한 단위면적당 운동에너지 밀도 ($2\overline{K} = \langle V^{3dT} M V^{3d} \rangle$)와 단위면적당 탄성에너지 밀도($2\overline{U} = \langle \Gamma^T D \Gamma \rangle$)의 차로서 정의되어진다.

$$\overline{L} = \overline{K} - \overline{U} \qquad (8)$$

이때 $M(\zeta)$과 $D(\zeta)$는 각각 3차원 구조체에 대한 3×3 질량밀도 행렬과 6×6 재료행렬을 의미한다. 마지막으로 $\overline{\delta W}$은 단위면적당 외부하중에 대한 가상일을 나타낸다.

다음으로 식(7)에서 주어진 2차원 판 문제를 해결하기 위한 선행적인 과정으로서, 장파장내 각 주파수 영역별로 동적 변분-점근법이 구현된 1차 원판 두께에 대한 해석을 소개하고자 한다.

2.2 장파장내 저주파 진동 근사과정

지금까지 소개된 판 기구학 및 확정형 해밀턴 원리는 이론적 범용성을 위하여 오로지 미소변형률의 가정만을 사용하였다. 그러나 동적 변분-점근법을 기준으로 한 1차원 판 두께에 대한 해석을 수행하기 위해서는 기존의 발행된 문헌들에서 수용하고 있는 두 개의 판 고유 미소변수들과 동적 해석을 위한 미소변수가 추가적으로 소개되어진다. 이들의 차수는 최대 변형률 변수인 $\hat{\varepsilon}$, 두께와 기준면 파장의 비인 h/ℓ, 그리고 시간당 변형률에 대한 특성 시간변수인 τ로 정의된다. 특히 본 유도과정에서 판 내 발생하는 저주파와 고주파 진동을 구별하기 위해, τ는 다음과 같은 관계를 가지는 차수들로 재정의된다.

$$\begin{cases} \text{저주파}: \; h/c\tau \ll 1 \Rightarrow \tau \sim O(\ell/c) \\ \text{고주파}: \; h/c\tau \gg 1 \Rightarrow \tau \sim O(h/c) \end{cases} \tag{9}$$

여기서 c는 파장의 속도를 의미한다.

먼저, 장파장내 저주파 영역의 진동에 대한 0차 근사과정을 위해, 식 (9)의 첫 번째 차수를 이용하여 식 (7)의 최고차항과 그에 따른 변동함수의 해를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} 2\overline{L} &= -W^T \langle h^{-2} S^T \Gamma_h^T D \Gamma_h S \rangle W \\ &\Rightarrow w = \mathrm{R}(x_1, x_2, t) \end{aligned} \tag{10}$$

0차 근사과정의 다음단계로서 w에 점근적 의미의 미지의 변동함수 $\overline{w}$를 식(3)에 소개한다.

$$\hat{\mathrm{R}}(x_1,x_2,\zeta,t) = \mathrm{R}(x_1,x_2,t) + \overline{w}(x_1,x_2,\zeta,t)\mathrm{B}_i(x_1,x_2,t) \tag{11}$$

이때 $\overline{w}(x_1,x_2,\zeta,t) = S(\zeta)\overline{W}(x_1,x_2,t)$이다. 특히, 식 (11)은 여섯 개의 미지수가 존재하며 이를 제거하기 위해 다음과 같은 구속조건들이 요구되어진다.

$$\overline{W}^T \langle S^T S \Psi_d \rangle = 0, \; \mathrm{B}_3 \cdot \mathrm{R}_{,\alpha} = 0, \; \mathrm{B}_1 \cdot \mathrm{R}_{,2} = \mathrm{B}_2 \cdot \mathrm{R}_{,1} \tag{12}$$

이때 식 (12)의 첫 번째 식은 $\langle \overline{w}_i \rangle = 0$의 전산화를 나타내며, 여기서 Ψ_d은 $\langle S^T \Gamma_h^T D \Gamma_h S \Psi_d \rangle = 0$의 관계가 성립하는 $3N \times 3$ 행렬이다. 또한, 식 (11)으로부터 2차원 고전 변형률($\varepsilon_{\alpha\beta}$)과 관성 속도($V_i$)에 대한 고유화 관계식이 만들어진다.

$$\mathrm{R}_{,\alpha} = \mathrm{B}_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}\mathrm{B}_\beta, \; \dot{\mathrm{R}} = V_i \mathrm{B}_i \tag{13}$$

앞선 과정과 동일하게 식(13)을 사용하여 동적 변분-점근법을 수행하면 미지의 변동함수 $\overline{w}$에 대한 최고차항 식과 그에 따른 해가 다음과 같이 계산되어진다.

$$\begin{aligned} 2\overline{L} &= -\langle \Gamma_{ho}^T D \Gamma_{ho} + 2\varepsilon^T D \Gamma_{ho} \rangle \\ &\Rightarrow \overline{w} = h\zeta \mathrm{B}_3 \end{aligned} \tag{14}$$

여기서 $\Gamma_{ho} = h^{-1}\Gamma_h S \overline{W} + \Gamma_o$이다.

마지막 단계인 1차 근사과정을 구현하기 위해 점근적으로 세분할 된 $\hat{w}$를 식 (11)에 포함한 3차원 변형 후 위치벡터가 재 정의되어진다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{R}}(x_1,x_2,\zeta,t) &= \mathrm{R}(x_1,x_2,t) + h\zeta \mathrm{B}_3(x_1,x_2,t) \\ &\quad + \hat{w}(x_1,x_2,\zeta,t) \end{aligned} \tag{15}$$

이때 식 (15)의 변동함수 $\hat{w}$는 변형된 판 두께의 면내 및 면외 방향 변형 모두를 내포하고 있다. 먼저, 식 (15)에 관련된 3차원 변형률 및 속도 장들이 계산되어진다.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_e \varepsilon + \Gamma_c h\kappa + h^{-1}\Gamma_h \hat{w} + \Gamma_{L\alpha} \hat{w}_{,\alpha} \\ V^{3d} &= V + \tilde{\xi} h \Omega + \dot{\hat{w}} \end{aligned} \tag{16}$$

이때, $V = \lfloor V_1 \; V_2 \; V_3 \rfloor^T$, $\Omega = \lfloor \Omega_1 \; \Omega_2 \; \Omega_3 \rfloor^T$, $\varepsilon = \lfloor \varepsilon_{11} \; 2\varepsilon_{12} \; \varepsilon_{22} \rfloor^T$, $\kappa = \lfloor \kappa_{11} \; \kappa_{12} + \kappa_{21} \; \kappa_{22} \rfloor^T$로 정의되었으며 사용된 연산자는 아래와 같다.

$$\Gamma_e = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}, \Gamma_c = \begin{bmatrix} \zeta&0&0 \\ 0&\zeta&0 \\ 0&0&\zeta \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}, \tilde{\xi} = \begin{bmatrix} 0&-\zeta&0 \\ \zeta&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$$

따라서 식(9)의 첫 번째 차수와 식(16)에 연관된 차수($V \sim O(c\hat{\varepsilon})$, $\Omega \sim O(c\hat{\varepsilon}/\ell)$, $\varepsilon \sim h\kappa \sim O(\hat{\varepsilon})$)를 사용하여 $\hat{w}$에 대한 최고차항 식과 해를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\left\langle h^{-2}\widehat{W}^T S^T D_{hh} S\widehat{W} - 2h^{-1}\widehat{W}^T S^T D_{h\epsilon}\epsilon \right\rangle \\ &\Rightarrow \hat{w} = S\widehat{W} = -S(H_1)^+ h^{-1} D_{h\epsilon}\epsilon = h\overline{V}_\epsilon^0 \epsilon \end{aligned} \tag{17}$$

이때 $\Gamma_\epsilon = [\Gamma_\varepsilon \; \Gamma_c]$, $\epsilon = [\varepsilon \; h\zeta\kappa]^T$, $D_{hh} = \Gamma_h^T D \Gamma_h$, $D_{h\epsilon} = \Gamma_h^T D \Gamma_\epsilon$이다. 마침내, 식(17)의 결과를 식(16)에 대입하여 정해진 차수 아래 다음과 같은 고전 동적 판 이론을 위한 점근적으로 정확한 장파장내 저주파 진동에 대한 1차 근사 에너지 범함수를 구할 수 있다.

$$2\overline{L} = V^T \langle M \rangle V - \epsilon^T \langle D_c \rangle \epsilon \tag{18}$$

이때 $D_c = D_\epsilon + \overline{V}_\epsilon^{0T} D_{h\epsilon}$이다.

2.3 장파장내 고주파 진동 근사과정

장파장내 저주파 판 진동에 대한 1차 근사적 전 에너지 범함수인 식 (18)은 오직 판 기준면의 평균 변위함수에 종속된 변동함수로만 사용되어진다. 하지만, 점점 진동주파수가 높아지고 판 내 고주파 진동의 영향이 커지면, 이러한 영향들을 묘사하는 새로운 변수들을 식 (3)의 변동함수에 체계적으로 포함시키고, 이를 바탕으로 판의 전 에너지 범함수를 구할 수 있는 범용적인 방법이 요구되어진다. 본 연구는 Le의 명명법[4]에 따라, 평균 변위함수를 외부 자유도 그리고 고주파 진동에 대한 변수를 내부 자유도라 지칭한다. 먼저 장파장내 저주파 진동의 근사과정에서 사용된 시간척도의 차수와는 다른 식 (9)의 두 번째 차수를 사용하여 동적 변분-점근법 과정이 구현되어진다. 따라서 0차 근사 변동함수를 $W = W_0$라 하면, 관련된 최고차항으로 구성된 식은 판의 두께에 대한 고유치문제로 전환된다. 그러면 통상적인 수치해석과정을 통해 W_0는 $3N \times 3N$ 고윳값인 고유진동수들로 이루어진 대각행렬 Λ_k^d과 $3N \times 3N$ 연관된 모드형상들을 나타내는 고유벡터들로 구성된 행렬 Φ_k^d로서 다음과 같이 계산되어진다.

$$W_0 = \Phi_k^d V_k^d \tag{19}$$

또한 식 (19)는 정규화조건 $\Phi_k^{dT} \langle S^T M S \rangle \Phi_k^d = c_k^d$와 구속조건 $\langle S^T D_{hh} S \rangle \Phi_k^d V_k^d = \langle S^T M S \rangle \Phi_k^d \Lambda_k^d V_k^d$를 가진다. 여기서

$$(c_k^d)^+ c_k^d = I^d, \quad I^s = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 & \\ 0\,1\,0 & \\ 0\,0\,0 & \\ & \ddots \end{bmatrix}, I^e = \begin{bmatrix} 0\,0\,0 & \\ 0\,0\,0 & \\ 0\,0\,1 & \\ & \ddots \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{cases} p & \text{if } d = s \text{ (thickness}-\text{shear)} \\ q & \text{if } d = e \text{ (thickness}-\text{extension)} \end{cases}$$ 이다.

이때 p와 q는 1 이상의 임의의 자연수로서 진동분기 내 순서대로 발생하는 면외 및 면내 방향의 진동들을 의미한다.

앞서 수행한 근사과정과 유사하게, 1차 근사과정을 위한 hW_1가 식 (19)인 변동함수에 점근적 관점으로 소개되어지면, 동적 변분-점근법 과정에 따른 최고차항 이루어진 식과 그에 따른 해가 다음과 같이 계산되어진다.

$$\begin{aligned} &\left\langle H_k^d W_1 + D_{L\alpha}^{kd} V_{k,\alpha}^d \right\rangle = \left\langle S^T M S \Phi_k^d \triangle \right\rangle \\ &\Rightarrow W_1 = -(H_k^d)^+ D_{L\alpha}^{kd} V_{0,\alpha} = \Phi_{L\alpha}^{kd} V_{k,\alpha}^d \end{aligned} \tag{20}$$

이때 $H_k^d = S^T(D_{hh} - \Lambda_k^d M)S$, $(\cdot)^+$는 유사역행렬, $D_{L\alpha}^{kd} = (S^T \Gamma_h^T D \Gamma_{L\alpha} S - S^T \Gamma_{L\alpha}^T D \Gamma_h S)\Phi_k^d$이며 $\triangle$는 라그랑지 승수이다.

2.4 쌍곡 단파 외삽법 과정

비록 동적 변분-점근적 과정을 통해 점근적인 관점에서 정확한 전 에너지 범함수가 계산되어지지만, 매우 특별한 경우에 에너지 관련된 함수의 고유한 특성인 양한정성이 수학적으로 성립되지 않을 수 있다. 이는 심각한 역학적 해석의 오류이기 때문에 본 연구에서는, 계산되어진 에너지 범함

수가 항상 양한정성이 성립되도록 하는 쌍곡 단파 외삽법 과정을 적용하고자 한다. 먼저, 광범위한 주파수영역 내 판의 동적거동을 해석하기 위해 3 차원 변동함수는 다음과 같이 외부(또는 저주파진동) 및 내부(또는 고주파진동) 자유도를 동시에 고려하여 정의한다.

$$
\begin{aligned}
w = {} & h(\overline{V}_\epsilon^0\overline{\epsilon}) + \overline{\Phi}^\gamma\overline{\gamma} + \Phi^h\overline{\varphi}_h \\
& + h(\overline{\Phi}^\gamma_{L\alpha}\overline{\gamma}_{,\alpha} + \Phi^h_{L\alpha}\overline{\varphi}_{h,\alpha})
\end{aligned} \tag{21}
$$

여기서, $\overline{\Phi}^\gamma = S\overline{\Phi}_1^s$, $\overline{\Phi}^h = S\left[\overline{\Phi}_2^s\,\overline{\Phi}_3^s\,\overline{\Phi}_4^s\,\overline{\Phi}_1^e\,\overline{\Phi}_2^e\,\overline{\Phi}_3^e\right]$, $\overline{\gamma} = \overline{V}_1^s$, $\overline{\varphi}_h = \left[\overline{V}_2^s\,\overline{V}_3^s\,\overline{V}_4^s\,\overline{V}_1^e\,\overline{V}_2^e\,\overline{V}_3^e\right]^T$이며, $\overline{\Phi}^\gamma_{L\alpha} = S\overline{\Phi}^{1s}_{L\alpha}$, $\overline{\Phi}^h_{L\alpha} = S\left[\overline{\Phi}^{2s}_{L\alpha}\,\overline{\Phi}^{3s}_{L\alpha}\,\overline{\Phi}^{4s}_{L\alpha}\,\overline{\Phi}^{1e}_{L\alpha}\,\overline{\Phi}^{2e}_{L\alpha}\,\overline{\Phi}^{3e}_{L\alpha}\right]$이다. 그리고 $(\overline{\cdot})$는 나중에 소개될 변수 치환과정이 이루어진 후의 변수와 구별하기 위해 이 표시가 사용되어진다. 특히, 기존논문[5,8]과는 다르게, 식 (21)에서 가로방향 전단 변형률 $\overline{\gamma}$는 변수치환을 통해 기존의 차수인 $O(\ell\hat{\varepsilon})$보다 한 차수가 큰 차수 $O(h\hat{\varepsilon})$으로 전환되기 때문에 기존의 관련된 자유도들 와는 분리해서 나타내었다. 그러므로 식 (21)에 대한 운동 에너지와 변형 에너지를 구하면 다음과 같이 계산되어진다.

$$
\begin{aligned}
2\overline{K} = {} & \langle \overline{V}^T M\overline{V} + 2h\overline{V}^T M(\overline{\Phi}^\gamma_{L\alpha}\dot{\overline{\gamma}}_{,\alpha} + \overline{\Phi}^h_{L\alpha}\dot{\overline{\varphi}}_{h,\alpha}) \\
& + 2h\overline{\Omega}^T\tilde{\xi}M(\overline{\Phi}^\gamma\dot{\overline{\gamma}} + \overline{\Phi}^h\dot{\overline{\varphi}}_h) + \dot{\overline{\epsilon}}^T\overline{V}_\epsilon^{0T}M\overline{\Phi}^h\overline{\varphi}_h \\
& + \dot{\overline{\gamma}}^T M\check{c}_k^d\dot{\overline{\gamma}} + \dot{\overline{\varphi}}_h^T M\hat{c}_k^d\dot{\overline{\varphi}}_h + 2h(\dot{\overline{\gamma}}^T\overline{\Phi}^{\gamma T}M\overline{\Phi}^h_{L\alpha}\dot{\overline{\varphi}}_{h,\alpha})
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
2\overline{U} = {} & \langle \overline{\epsilon}^T D_c\overline{\epsilon} + 2\overline{\epsilon}^T\overline{V}_\epsilon^{0T}D_{hL\alpha}(\overline{\Phi}^\gamma\overline{\gamma}_{,\alpha} + \overline{\Phi}^h\overline{\varphi}_{h,\alpha}) \\
& + h^{-2}(\overline{\gamma}^T\overline{\Phi}^{\gamma T}D_{hh}\overline{\Phi}^\gamma\overline{\gamma} + \overline{\varphi}_h^T\overline{\Phi}^{hT}D_{hh}\overline{\Phi}^h\overline{\varphi}_h) \\
& + 2h^{-1}(\overline{\gamma}^T\overline{\Phi}^{\gamma T}D_{hh}\overline{\Phi}^h_{L\alpha}\overline{\varphi}_{h,\alpha} + \overline{\varphi}_h^T\overline{\Phi}^{hT}D_{hh}\overline{\Phi}^\gamma_{L\alpha}\overline{\gamma}_{,\alpha} \\
& + \overline{\varphi}_h^T\overline{\Phi}^{hT}D_{hh}\overline{\Phi}^h_{L\alpha}\overline{\varphi}_{h,\alpha}) + 2(\overline{\gamma}^T\overline{\Phi}^{\gamma T}D_{hL\alpha}\overline{V}_\epsilon^0\overline{\epsilon}_{,\alpha} \\
& + \overline{\varphi}_h^T\overline{\Phi}^{hT}D_{hL\alpha}\overline{V}_\epsilon^0\overline{\epsilon}_{,\alpha} + \overline{\gamma}^T\overline{\Phi}^{\gamma T}D_{hL\alpha}\overline{\Phi}^h\overline{\varphi}_{h,\alpha} \\
& + \overline{\varphi}_h^T\overline{\Phi}^{hT}D_{hL\alpha}\overline{\Phi}^\gamma\overline{\gamma}_{,\alpha} + \overline{\varphi}_h^T\overline{\Phi}^{hT}D_{hL\alpha}\overline{\Phi}^h\overline{\varphi}_{h,\alpha}) \\
& + \overline{\gamma}^T\overline{\Phi}^{\gamma T}D_{hL\alpha}\overline{\Phi}^\gamma_{L\beta}\overline{\gamma}_{,\alpha\beta} + \overline{\varphi}^h\overline{\Phi}^{hT}D_{hL\alpha}\overline{\Phi}^h_{L\beta}\overline{\varphi}^T_{,\alpha\beta} \\
& + \overline{\gamma}^T_{,\alpha}(\overline{\Phi}^{\gamma T}_{L\alpha}D_{hL\beta}\overline{\Phi}^\gamma + \overline{\Phi}^{\gamma T}D_{L\alpha L\beta}\overline{\Phi}^\gamma)\overline{\gamma}_{,\beta} \\
& + \overline{\varphi}^T_{h,\alpha}(\overline{\Phi}^{hT}_{L\alpha}D_{hL\beta}\overline{\Phi}^h + \overline{\Phi}^{hT}D_{L\alpha L\beta}\overline{\Phi}^h)\overline{\varphi}_{h,\beta}\rangle
\end{aligned} \tag{23}
$$

이때, $D_{hL\alpha} = \Gamma_h^T D\Gamma_{L\alpha}$이며 $D_{L\alpha L\beta} = \Gamma_{L\alpha}^T D\Gamma_{L\beta}$이다. 식 (22)와 (23)에서 Lee의 방식[5,8]과 유사한 변수치환을 통하여 기존의 변수들은 전 에너지 범함수의 양한정성을 유효하기 위해 재 정의되어진다.

$$
\begin{aligned}
V &= \overline{V} + h(\langle\overline{\Phi}^\gamma_{L\alpha}\rangle\overline{\gamma}_{,\alpha} + \langle\overline{\Phi}^h_{L\alpha}\overline{\varphi}_{h,\alpha}\rangle) \\
\epsilon &= \overline{\epsilon} + \left\langle \overline{V}_\epsilon^{0T}D^T_{hL\alpha}D_c^{-1}(\overline{\Phi}^\gamma\overline{\gamma}_{,\alpha} + \overline{\Phi}^h\overline{\varphi}_{h,\alpha})\right\rangle \\
\gamma &= \overline{\gamma} + h^{-1}\left\langle\overline{\Phi}^{\gamma T}\check{M}_k^{-d}(D_{hL\alpha}\overline{V}_\epsilon^0\overline{\epsilon}_{,\alpha} + D_{hh}\overline{\Phi}^h_{L\alpha}\overline{\varphi}_{h,\alpha})\right\rangle \\
\varphi_h &= \overline{\varphi}_h + h\left\langle\overline{\Phi}^{hT}\hat{M}_k^{-d}(\overline{V}_\epsilon^0\overline{\epsilon} + \overline{\Phi}^\gamma_{L\alpha}\overline{\gamma}_{,\alpha} + \overline{\Phi}^h_{L\alpha}\overline{\varphi}_{h,\alpha})\right\rangle
\end{aligned} \tag{24}
$$

이때, $\check{M}_k^{-d} = M(\check{c}_k^d)^{-1}$이며 $\hat{M}_k^{-d} = M(\hat{c}_d^d)^{-1}$이다. 여기서 $(\check{\cdot})$와 $(\hat{\cdot})$는 각각 V_1^s에 대한 $3N\times 3N$의 특정 행렬과 $V_2^s, V_3^s, V_4^s, V_1^e, V_2^e, V_3^e$의 연관된 $18N\times 18N$의 특정 행렬을 간략하게 나타내기 위해 사용되었다. 마지막으로, 식 (24)을 다시 식 (22)와 (23)에 대입하여 1차 근사과정으로 유효하게 정돈하면, 다음과 같이 보정된 에너지 범함수를 계산할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
2L = {} & \left[V^T MV + \gamma^T M\check{c}_k^d\gamma + \varphi_h^T M\hat{c}_k^d\varphi_h\right] \\
& - \left[\begin{aligned}
& \epsilon^T D_c\epsilon + \gamma^T I_\gamma\gamma + \varphi_h^T I_h\varphi_h + \{2h^{-1}(h\epsilon^T S^\epsilon \\
& + \gamma^T_{,\alpha}S^{3\gamma}_\alpha + \varphi^T_{h,\alpha}S^{3h}_\alpha)\varphi_h + (\gamma^T S^{\gamma 3}_\alpha + \varphi^T S^{h3}_\alpha) \\
& \varphi_{h,\alpha}\} + \varphi^T_{h,\alpha}K^h_{\alpha\beta}\varphi_{h,\beta}
\end{aligned}\right]
\end{aligned} \tag{25}
$$

식 (25)에서 $I_\gamma = \check{c}_k^d\check{\lambda}_k^d$, $I_h = \hat{c}_k^d\hat{\lambda}_k^d$, $S^\epsilon = \overline{V}_\epsilon^{0T}M\hat{\lambda}_k^d\overline{\Phi}^h$, $S^{3\gamma}_\alpha = \overline{\Phi}^{\gamma T}D^T_{hL\alpha}\overline{\Phi}^h$, $S^{3h}_\alpha = \overline{\Phi}^{hT}D^T_{hL\alpha}\overline{\Phi}^h$, $S^{\gamma 3}_\alpha = \overline{\Phi}^{\gamma T}D_{hL\alpha}\overline{\Phi}^h$, $S^{h3}_\alpha = \overline{\Phi}^{hT}D_{hL\alpha}\overline{\Phi}^h$이며, $K^h_{\alpha\beta} = -\overline{\Phi}^{hT}D_{hL\alpha}\overline{\Phi}^h_{L\beta} + \overline{\Phi}^{hT}_{L\alpha}D_{hL\beta}\overline{\Phi}^h + \overline{\Phi}^{hT}D_{L\alpha L\beta}\overline{\Phi}^h - \overline{\Phi}^{hT}_{L\alpha}\overline{\Phi}^h M\hat{c}_k^d\hat{\lambda}_k^d\overline{\Phi}^{hT}\overline{\Phi}^h_{L\beta} - \overline{\Phi}^{hT}_{L\alpha}\overline{\Phi}^\gamma M\check{c}_k^d\check{\lambda}_k^d\overline{\Phi}^{\gamma T}\overline{\Phi}^h_{L\beta} - \overline{\Phi}^{hT}_{L\alpha}D^T_{hh}\overline{\Phi}^{\gamma T}\check{M}_k^{-d}\overline{\Phi}^\gamma D_{hh}\overline{\Phi}^h_{L\beta} + 2\overline{\Phi}^{hT}D_{hh}\overline{\Phi}^\gamma_{L\alpha}\overline{\Phi}^{\gamma T}\check{M}_k^{-d}D_{hh}\overline{\Phi}^h_{L\beta} - 2\overline{\Phi}^{hT}D_{hh}\overline{\Phi}^h_{L\alpha}\overline{\Phi}^{hT}\hat{M}_k^{-d}\overline{\Phi}^h_{L\beta} + 2\overline{\Phi}^{hT}D_{hL\alpha}\overline{V}_\epsilon^0\overline{V}_\epsilon^{0T}D^T_{hL\beta}D_c^{-1}\overline{\Phi}^h + 2\overline{\Phi}^{hT}_{L\alpha}D^T_{hh}\check{M}_k^{-d}\overline{\Phi}^\gamma S^{\gamma 3}_\beta + 2\overline{\Phi}^{hT}_{L\alpha}\hat{M}_k^{-d}\overline{\Phi}^h S^{h3}_\beta$이다.

추가적으로 식 (7)과 (25)에 일반변분법을 적용하여 광범위한 주파수영역 내 판의 동적거동의 해석이 가능한 2차원 판 운동방정식이 계산된다.

3. 수치해석 결과

본 연구의 범용성과 효율성을 높이기 위해, 지금까지 소개된 모든 과정을 유한요소법 기반인 DVAPAS(Dynamic Variational Asymptotic Plate And Shell analysis)로 전산화하였다. 이 코드를 실행함으로서 판의 두께에 대한 고유치문제의 해인 면내 및 면외 방향의 모드형상들과 2차원 판 문제해석을 위한 필수 정보들인 식 (25)의 관성밀도 및 강성밀도 행렬들을 쉽게 계산할 수 있다. 그 예로서 판의 두께에 대한 면내 및 면외 방향의 대표하는 모드형상들을 각각 Fig. 2와 Fig. 3에 도식화하였다. 여기서 LF는 저주파 진동의 모드형상을 나타내며 HF는 고주파 진동의 모드형상을 의미한다. 또한 DVAPAS의 실행결과로 제공되는 관성밀도 및 강성밀도행렬들을 사용하여 2차원 판 운동방정식이 계산되어진다.

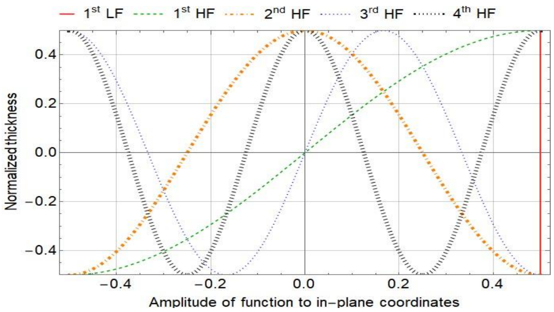

Fig. 2 In-plane vibration mode shapes

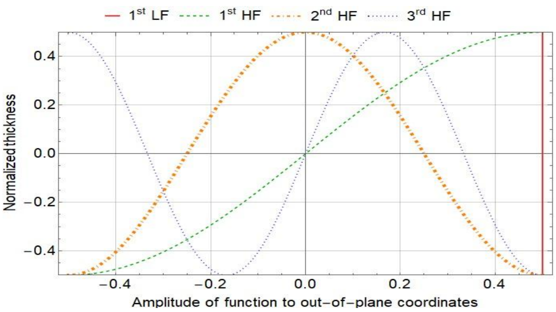

Fig. 3 Out-of-plane vibration mode shapes

이때 무차원 주파수 ϑ와 파수 κ가 변수인 변위 해를 가정하여 구한 운동방정식에 대입하면, 동적 판 거동의 경향을 관찰할 수 있는 분산곡선이 도식화된다. 이를 바탕으로 본 이론의 효율성과 정확성을 검증하기 위해, DVAPAS를 통해 계산된 3개 자유도 고전 판이론(주황색 점선)과 Le[4]가 제안한 8개 자유도 판 이론(초록색 파선), 그리고 최적화된 14개 자유도 판 이론7)(파란색 1점 쇄선)의 분산곡선들과 상용수치해석프로그램 COMSOL Multiphysics®를 통해 구현된 3차원 정확해(빨간 실선)로서의 분산곡선이 각각의 종파(L-waves)와 굽힘파(F-waves)에 구분하여 Fig. 4와 Fig. 5에 함께 나타내었다.

먼저 고전 판 이론을 기반으로 한 분산곡선과 3차원 분산곡선과 비교하다면, 고전 판 이론의 결과의 정확성은 차단주파수 주변의 매우 제한된 영역인 것을 Fig. 4와 5 모두에서 관찰할 수 있다. 반면, 참고문헌[4]에서 소개된 8개 자유도 판 이론과 최적화된 14개 자유도 판 이론의 결과를 살펴보게 되면 고전 판 이론에 비해 정확도가 크게 향상되는 것을 볼 수 있다. 특히, Lee[7]의 연구결과에 따르면, 최적화된 14개 자유도 판 이론은 기존의 모든 판 이론의 결과보다 해석의 정확성이 크게 개선되었고 동시에 더 광범위한 주파수 영역까지 해석의 정확성을 유지할 수 있음을 관찰할 수 있다.

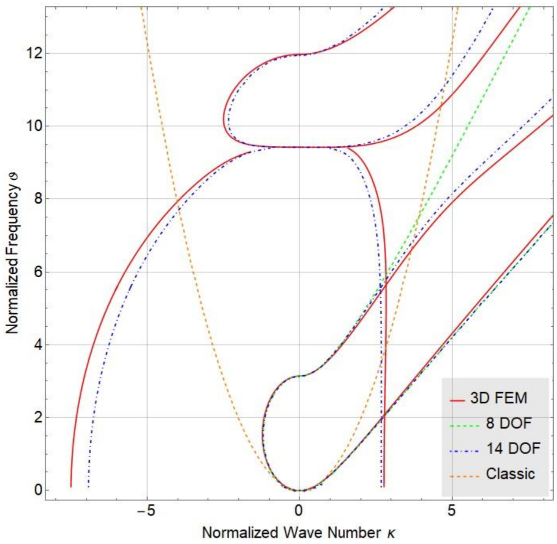

Fig. 4 Dispersion curves of F-waves

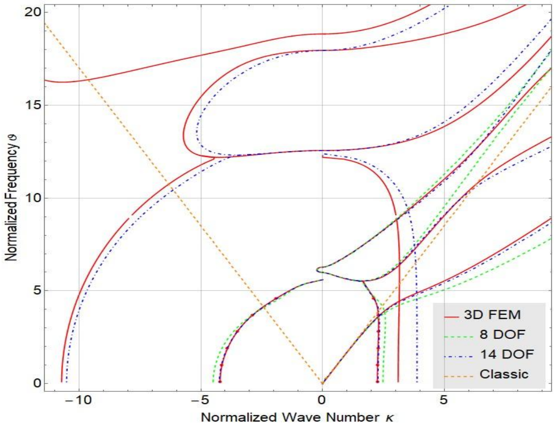

Fig. 5 Dispersion curves of L-waves

4. 결 론

본 연구는 광범위한 주파수영역 내 발생하는 판의 동적 거동을 분석할 수 있는 새로운 이론을 전산화과정과 함께 소개하였다. 3차원 판 구조해석문제는 차원-감소과정을 통해 1차원 두께에 대한 문제와 2차원 기준면에 대한 문제로 나누어지며, 서로 다른 시간척도의 차수에 따른 저주파 및 고주파영역에 대한 동적 변분-점근법 과정이 체계적으로 각각에 구현되었다. 또한 이 과정에서 야기될 수 있는 양한정성의 위반을 방지하기 위해, 쌍곡단파 외삽법으로 보정되었으며, 마침내, 광범위한 주파수영역에 유효한 판 이론이 개발되었다. 마지막으로 개발된 판 이론의 분산곡선과 3차원 분산곡선을 서로 비교함으로써 본 이론의 높은 효율성과 정확도가 검증되었다.

REFERENCES

1. Berdichevsky, V. L., “Variational-Asymptotic Method of Shell Theory Construction,” PMM, Vol. 43, pp. 664-687, 1979.
2. Yu, W., "Variational Asymptotic Modeling of Composite Dimensionally Reducible Structures," A Thesis for a Doctorate, Georgia Institute of Technology, USA, 2002.
3. Hodges, D. H., Yu, W. and Patil, M. J., “Geometrically-Exact, Intrinsic Theory for Dynamics of Moving Composite Plates,” International Journal of Solids and Structures, Vol. 46, pp. 2036-2042, 2009.
4. Lee, K. C., Vibrations of Shells and Rods, Springer, Germany, 1sted, pp. 267-275, 1999.
5. Lee, C-. Y., “Dynamic Variational Asymptotic Procedure for Laminated Composite Shells,” A Thesis for a Doctorate, Georgia Institute of Technology, USA, 2007.
6. Cesnik, C. E. S., “Cross-sectional analysis of initially twisted and curved composite beams,” A Thesis for a Doctorate, Georgia Institute of Technology, USA, 1996.
7. Lee, S. B., “Dynamic Variational-Asymptotic Procedure for Laminated Composite Plates Analysis,” A Thesis for a Master’s degree, Pukyong National University, Republic of Korea, 2020.
8. Lee, C-. Y., “Dynamic Variational-Asymptotic Procedure for Laminated Composite Shells −Part II: High-Frequency Vibration Analysis,” Journal of Applied Mechanics, Vol. 76, pp. 1003-1010, 2009.
9. Yoon, R-. K., and Lee, C-. Y., “Optimal Beam Theory through Dynamic Variational-Asymptotic Procedure,” Journal of Power System Engineering, Vol. 24, No. 4, pp. 36-44, 2020.