韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2021.35.4.413
제 35집 제 4호, 2021. 12. 413-423

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 35, No. 4, Dec. 2021. 413-423

수학적 대상으로서의 공집합

유 미 영 (반포고등학교, 교사)
최 영 기 (서울대학교, 교수)†

수학적 대상 중 하나인 공집합에 대하여 고찰해본다. 공집합과 관련된 학생들의 다양한 오개념과 그 원인을 살펴보고 역사적 공집합의 도입배경과 이와 관련된 집합론의 공리계를 살펴본다. 순수한 개념적 대상인 공집합을 통하여 수학적 대상의 속성을 알아보고, 공리적 집합론에 기반하였다고 알려진 현대 철학자 알랭 바디우(Alian Badiou)의 존재론을 살펴본다. 이상의 논의를 바탕으로 연립방정식의 해와 해집합을 집합을 통해 설명하고 이와 관련하여 공집합의 존재성이 갖는 의미를 고찰하여본다. 이러한 관점으로 집합적 사고를 재해석해보고, 수학의 공리적 철학적 측면이 갖는 의의를 제시한다.

Ⅰ. 서론

학교 수학의 명제 중에는 자주 사용되지만, 그 내용을 풀어서 설명하려고 하면 쉽지 않은 것들이 있다. '공집합이 모든 집합의 부분집합이다.'라는 내용은 '음수와 음수의 곱이 양수이다.'와 같이 수학에서 흔히 사용되고 수많은 다른 내용의 근거가 되는 주요 명제이지만 처음 학생들에게 도입될 때에는 학생들이 이해하기가 쉽지 않고 설명하기도 어려운 내용이다. 두 집합 A,B에서 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소일 때 A를 B의 부분집합이라고 정의한다. 공집합에는 속하는 원소가 없으므로 위의 가정을 만족하는 것 자체가 없고 공집합은 모든 집합의 부분집합이 된다(Lin & Lin, 1974, p.77). 이러한 증명은 'p이면 q이다.'라는 명제가 참임을 증명할 때, p가 거짓인 경우 명제 자체를 참이라고 결론짓는 방식의 증명이다. 이는 논리적으로는 옳지만, 심리적으로는 그 명제가 참임을 받아들이기가 쉽지 않다. 사실 학생들은 위와 같은 논리적 증명을 이해하기 어려워할 뿐만 아니라 직관적인 설명조차도 쉽게 받아들이지 못하고 있으며, 따라서 이 내용을 배울 때 충분히 납득하지 못하고 그냥 암기하는 모습을 보인다(Zazkis & Gunn, 1997).

공집합은 처음에는 없었다가 어떠한 수학적 필요에 따라 인위적으로 도입된 것이다. 공집합이 도입된 맥락과 그 필요성에 대해 알지 못하는 학생들은 공집합에 대하여 많은 오개념을 가질 수밖에 없고(이경화 외, 2002; 유윤재, 2012), 학교 수학의 수준에서 이를 해결하려는 노력이 보고되고 있다(Fischbein & Balsan, 1998 ; 백대현, 이진희, 2011). 그러나 이러한 연구에서 공집합의 의미와 도입 맥락에 관한 내용은 찾아보기 어렵다. 수학적 대상인 공집합이 어떻게 하나의 개념으로서 존재하게 되었는지를 알아보면 수학적 대상의 존재성에 대한 실마리를 찾게 될 것이다. 이 글에서는 공집합의 의미와 도입 맥락을 수학적, 철학적으로 살펴보고 학교 수학에서의 적용점에 대해 논의해보고자 한다.

---

* 접수일(2021년 11월 25일), 심사(수정)일(2021년 12월 20일), 게재확정일(2021년 12월 22일)
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 공집합, 존재성, 바디우(Badiou)
† 교신저자 : yochoi@snu.ac.kr

Ⅱ. 연구의 배경

1. 선행연구

Zazkis & Gunn(1997)은 미국 대학의 기초집합론 수강생(예비초등교사) 46명을 대상으로 조사하여 대부분 공집합이 모든 집합의 부분집합이라는 사실은 알고 있었으나 아무도 그 이유를 제시하지 못하였음을 보고하였다. 한국에서는 백대현, 이진희(2011)가 35명의 대학교 1학년 학생(예비초등교사)을 대상으로 조사한 결과 91%의 학생이 공집합이 모든 집합의 부분집합인 이유를 제시하지 못하였고 심지어 그 이유에 대해서 생각해 본 경험이 없음을 보고하고 있다. 이 원인으로는 정의와 성질을 명확히 구분하여 제시하지 않았거나(백대현, 이진희, 2011), 공집합이 모든 집합의 부분집합이라는 명제가 'A이면 B이다.'의 형식으로 제시되지 않은 점(Zazkis & Gunn, 1997)으로 분석된다.

학교 현장에서 '공집합이 모든 집합의 부분집합이다.'의 의미를 학생의 관점에서 설명하려고 하면 '공집합'과 '부분집합'의 개념에서부터 어려움이 있음을 발견하게 된다. 선행연구를 살펴보면 공집합에 대한 오개념으로 '집합은 하나 이상의 원소를 가져야 한다.'는 오개념(Linchevski & Vinner, 1988, Fischbein & Baltsan, 1998에서 재인용)이나 '$\varnothing \in A$, $\{\varnothing\} \subset A$가 항상 참이다.'라는 오개념(Zazkis & Gunn, 1997)이 있었고, 초등교사조차 $\{0\}$가 공집합이라고 하는 학생의 오류를 보고도 바로잡지 못하는 사례도 있었다(Kolitsoe Moru & Qhobela, 2013). 공집합을 기술적으로는 잘 사용하다가도 공집합의 의미가 무엇인지 물어보거나 공집합을 이용한 논리적 논증을 요구받았을 때는 이를 이해하지 못하는 경우도 발견되었다(Fischbein & Baltsan, 1998, p.12). 또한 부분집합의 개념과 관련해서는 '원소이다'와 '부분집합이다'의 의미가 혼동되는 사례가 있었다(Bagni, 2006). 이러한 현상은 집합에 대해 '모임'이라는 개념 이미지를 갖게 되어 형식적인 수학적 정의를 학습한 이후에도 이에서 쉽게 벗어나지 못하기 때문으로 보고 있다(Fischbein & Baltsan, 1998; Bagni, 2006). Fischbein & Baltsan(1998)은 '집합은 하나 이상의 원소를 가져야 한다.'라는 오개념은 집합을 '모임(collection)'으로 생각하는 학생들이 '비어있는 모임'은 그 자체로 난센스로 생각하기 때문에 발생한다고 보았다. 이는 이경화, 박경미, 임재훈(2002)이 공집합에 대해 제기한 '아무것도 없는 것을 굳이 집합으로 둘 필요가 있는가?'라는 학생의 의문과도 같다.

2. 일상어와 수학적 용어

'집합', '부분' 등의 수학적 용어는 우리가 일상적으로도 사용하기 때문에 일상어와 수학적 용어를 명확히 구분하지 못하는 것이 이러한 현상의 일차적 원인일 수 있다. 집합과 관련된 용어들은 원시적인 경험적 용어(primitive experiential notions)(Bagni, 2006)에서 가져온 정의되지 않는 개념(primitive undefined concept)(Fischbein & Baltsan, 1998)이었다가 수학적으로 형식적인 정의를 갖게 된다. 이는 과학용어가 일상언어(everyday language)에서 빌려온 후 명백하고 엄밀하게 과학적인 문맥에서 정의되는 것과 같다. 비고츠키(1962, Bagni, 2006 에서 재인용)는 이러한 현상이 과학적 개념이 형성되는 과정에서의 특성 중 하나라고 한다. 이렇게 수학적 개념은 직관적인 의미에서 시작하여 형식화된 의미로 발전하여 적절한 개념으로 자리잡히며 이러한 개념발달의 과정은 학생 개개인에게도 이루어져야 하고 이러한 순간에 교육적 지도가 필요하다(Bagni, 2006). 따라서 일상어가 아닌 수학적으로 정의된 '집합', '공집합', '부분집합' 등의 의미뿐만 아니라 이러한 수학적 대상이 필요한 이유에 대하여 깊이 숙고할 필요가 있다. 서로 맞지 않는 개념인 '공'과 '집합'이 결합한 '공집합'은 그 자체로 자연스럽지 못하고 실제적인 표상도 찾기 쉽지 않은 수학적 대상이기 때문이다. 이를 처음 접하여 수학적 대상으로 받아들이는 학생들은 공집합이 왜 수학적 대상이 되는 것이고 이의 필요성이 무엇인가에 대해 의문을 가질 수 있다. 따라서 이러한 수학적 대상과 그 의미에 대해 여러 방면으로 고찰해 볼 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 결과 및 논의

1. 현대 집합론과 공집합

집합 자체를 수학적 대상으로 삼아 집합론의 체계를 세운 사람은 칸토어(Cantor, 1845-1918)이다. 칸토어는 명확히 구별이 가능한 사물의 모임을 하나의 대상으로 본 것을 집합 set이라 했다(정주희, 2012, p. 151). 칸토어는 무한을 다루고 무한을 분류하기 위해서 집합에 관해 연구했다. 칸토어 이전의 수학자들은 기호 ∞ 로 표현되는 한 가지 종류의 무한만을 받아들였으며 이를 자연수 집합이나 실수 집합의 원소의 개수를 나타내는데 구별없이 사용하였다(박세희, 2006; Eves, 1994). 그러나 칸토어는 두 집합의 기수를 비교하기 위해 1-1 대응을 이용하는 아이디어를 제시했다. 이러한 아이디어를 이용하여 칸토어는 기수가 다른 두 무한집합인 자연수의 집합과 자연수의 부분집합의 집합을 소개했다. 여기에서 그는 '부분집합의 모임'인 집합이라는 개념을 도입했는데, 이는 집합 자체를 대상으로 간주하여 집합을 집합의 원소로 생각한 칸토어의 주된 아이디어이다(Casari, 1964, Bagni, 2006에서 재인용).

집합론의 공리는 보통 '집합'과 '포함한다'를 무정의 용어로 채택하여 구성되었고(임정대, 1992, p.149) 대표적인 집합론의 공리계로는 체르멜로-프렝켈 집합론 ZF에 선택공리를 추가한 ZFC(Zermelo - Fraenkel set theory with the axiom of choice)을 주로 사용한다. ZFC의 9개의 공리[1] 중 존재를 규정하는 공리는 '원소가 하나도 없는 집합이 존재한다.'라는 공집합 공리가 유일하다. 집합론의 대상이 되는 모든 집합은 어떤 방식으로든 공집합으로부터 구성된다(Tiles, 2004, p.124). 아무런 조작 없이 그 존재가 규정되는 집합은 공집합이 유일하다. 한편 무한 공리는 공집합의 존재함으로부터 시작되는 것도 알 수 있다. 공집합 공리와 무한 공리는 다음과 같다.

[공집합 공리]
원소가 없는 집합이 존재한다.(이를 $\varnothing$ 으로 둔다.)
[무한 공리]
다음과 같은 성질을 갖는 집합 Z가 존재한다. 즉, 공집합 $\varnothing$ 는 Z의 원소이고, 또 $a \in Z$이면 $\{a\} \in Z$이다. (Devlin, 1992, p.42).

공집합은 이를 나타내는 구체적인 표상이 없음에도 불구하고 '개념'만으로 하나의 수학적 대상이 되었다. 수학적 대상은 주어진 공리계 내에서 논증 가능함으로 존재한다(유미영, 최영기, 2015). 수학적 대상의 존재성은 공준으로 그 존재함이 받아들여지거나, 공준에 기반하여 증명된 명제로써 보장된다. 수학적 대상의 표상이 있을 수는 있지만, 그 표상의 여부는 수학적 대상의 존재성에 전혀 영향을 미치지 않는다. 집합론의 가장 기본이 되는 공집합 역시 그 구체적 표상을 제시하기 어렵지만, 개념만으로 존재하는 대상이다.

공집합은 수학의 시작이라 볼 수 있다. 공집합을 수학적 대상으로 받아들임으로써 집합론이 구성되었고 이를 바탕으로 수와 기하의 구성이 시작되었다. 수학은 아무것도 없음을 개념화하여 다루면서 시작된 것이다. 이것이 수학과 다른 학문을 구분하는 하나의 기준이 될 수 있다. 그리고 공집합은 이러한 수학적 사고의 본질을 학생들이 경험하는 주요 소재가 될 수 있다.

---

[1] ZFC체계에서의 공리
1. 외연성 공리, 2. 멱집합공리(부분집합 공리), 3. 합집합 공리, 4. 분리공리 틀, 5. 치환 공리 틀, 6. 공집합 공리, 7. 토대 공리, 8. 무한 공리, 9. 선택공리

2. 알랭 바디우의 존재론

원소가 없는 집합인 공집합의 존재성을 공리로 보장하고 이를 토대로 체계를 세운 집합론의 아이디어를 이용하여 철학에서의 존재론을 재구축한 현대 철학자가 있다(서용순, 2011, p.79). 알랭 바디우(Alain Badiou, 1937~)는 프랑스의 철학자로 '일자로 셈하기(compte-pour-un)', '공백(vide)' 등의 독창적인 개념[2]을 이용하여 존재론을 전개하였다. 이 절에서는 다방면으로 방대한 그의 철학 중 존재론에 수학의 집합론을 적용한 부분만 간략히 살펴보아 수학에서의 공집합의 존재성에 대한 철학적 관점을 얻고자 한다.

그는 진리와 주체가 존재 속에서 사유할 수 있게 하려면 수학을 인용할 필요가 있다(Badiou, 1988, p.49)면서 수학은 존재로서의 존재의 과학(Badiou, 1988, p.28)이라고 하였다. 수학이 존재론임을 주장한 그는 공리적 집합론이 전통적 존재론을 대체할 수 있다고 하였다. (장태순, 2017b, p.154)

바디우 존재론의 출발점은 공백이다. 공백은 헤아려지는 최초의 존재로 상정된다. 절대적으로 최초의 존재는 어떠한 것의 구성의 결과일 수 없다(Badiou, 1988, p.108, p.112, p.122). 따라서 순수한 명명 행위를 이용하여 아무것도 아닌 것을 존재하게 만들어야 한다. 명명을 이용하여 그가 설정한 최초의 존재에 대한 진술은 다음과 같다. "자신에게 속한다고 할 수 있는 어떤 존재도 소유하지 않은 어떤 것이 존재한다." 즉 아무 원소도 없는 집합이 존재한다는 것이다. 이는 수학의 집합론에서의 공집합 공리와 같다(Badiou, 1988, p.112, p.124).

공백은 모든 존재의 근원이라고 할 수 있다(서용순, 2006, p.99). 집합론에서 공집합이 존재한다는 공리적 단언은 철학에서 존재의 출발점을 단언하는 것과 같은 맥락에 있다(서용순, 2011, p.90). 집합론적 존재론에서는 공백이 모든 존재를 구성하는 기초가 된다(장태순, 2017a). 공백은 개념적인 파악이 거의 불가능한 알 수 없는 것을 (최초의 존재로) 개념적 사유 안에 마련하여 사유가능성을 제시한다는 점에서 중요하다. (장태순, 2017b; 홍기숙, 2006). 직관이나 지각 경험을 통해 파악할 수 없는 공백은 인식할 수 없는 것의 인식이며 구조화 작용 이전의 존재라고 말할 수 있다(서용순, 2011). 이렇듯 바디우의 존재론은 필연적으로 공집합으로부터 시작한다.

이어서 바디우는 공집합이 모든 집합의 부분집합임에 대하여도 존재론적 관점에서 이야기하고 있다. 공백은 구조화 작용을 통해 고정되지 않고 철저한 방황 속에 있고 따라서 모든 상황 속에 있다(서용순, 2011). Badiou(1988, p.153)는 "아무것도 속하지 않는 공백은 바로 이 사실 때문에 모든 것에 속한다."라고 하였고, 이 속성이 "공백의 무소 부재함에 대한 증거"라고 하였다. 모든 구조화된 상황, 다시 말해 모든 집합은 공집합을 갖는다(서용순, 2011).

이처럼 바디우의 존재론은 공백을 이용하여 전개되었다. 이는 집합론의 공리계에서 공집합의 존재성을 공리로 받아들이고 이를 토대로 구성하는 것과 그 맥이 맞닿아 있다고 볼 수 있다.

3. 학교 수학에서의 공집합

2015 개정 교육과정에서부터는 집합 지도가 고등학교 1학년에서 처음 도입되게 되었다. 2015 개정 교육과정이 적용된 고등학교 교과서 9종(교학사, 금성, 동아(박), 미래엔, 좋은책신사고, 지학사, 천재(류), 천재(이), 비상)을 조사한 결과 9종 모두 공집합을 '원소가 하나도 없는 집합'으로 동일하게 정의했으며, '공집합이 모든 집합의 부분집합이다.'라는 내용에 관해서는 설명 없이 제시만 하고 있다.[3] 2015 개정 교육과정에서는 이전 교육과정보

[2] 일자 : 근원적 존재, 단일성을 지닌 형상들 일반이다(남경희, 2013, p.283).
일자로 셈하기(compte-pour-un) : 일자로 셈하기라는 조작의 결과로 모든 일자가 존재하며 모든 상황은 이러한 셈하기에 의해 구조화된다(Badiou, 1988, p.804).
공백(vide) : 아무것도 아닌 존재. 공집합에 대한 바디우의 존재론적(철학적) 해석으로, 규정 불가능한 것을 어떤 정의도 없이 일자로 셈하는 방법(장태순, 2017b, p.164)이다.

다 집합 내용이 전반적으로 약화하였음을 알 수 있다(고성은, 2018; 권오남, 2018; 김원경, 2018; 류희찬, 2018; 박교식, 2018b; 배종숙, 2018; 이준열, 2018; 홍성복, 2018; 황선욱, 2018).

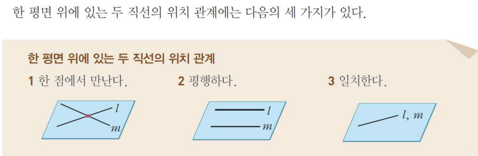
칸토어 이후에 대부분의 수학은 집합의 언어를 이용하여 전개되어 왔다(Pinter, 1986). 집합 개념은 수학 여기저기에 숨겨져 있다. 학교 수학에서도 집합 개념은 자연수, 정수 등을 다룰 때, 연립방정식의 해를 집합으로 다룰 때, 무한을 다룰 때 주요한 도구로 사용되어 왔다(Wegner, 2014). 그런데 이의 도입이 고등학교 1학년으로 미루어져서 그 이전에는 집합을 내용 전개와 설명의 수단으로 사용하기가 어렵게 되었다. 예를 들면 중학교 2학년 교육과정에 있는 이원일차연립방정식 역시 현행 교육과정에서는 해집합을 설명에서 사용할 수 없다.

수학적 대상인 공집합의 필요성은 학교 수학의 수준에서도 설명할 수 있다. 두 집합의 교집합이 가능하게 하려면 서로소인 두 집합의 교집합에 해당하는 공집합이 있어야 하기 때문이다. 집합의 연산이 가능하기 위해서 공집합의 존재성이 필요하다. 물론 공집합의 존재는 공리계에 기초한 것이지만 학교 수학의 수준에서는 공리계의 언급 없이 연산의 가능성으로 공집합의 필요성을 인식시킬 수 있다. 또한 이원일차연립방정식의 해는 두 일차방정식의 해집합의 교집합과 같으므로 해가 없는 경우인 교집합이 공집합인 경우를 나타내는 데에도 공집합이 사용될 수 있다.

4. 현대 수학의 관점으로 본 학교 수학에서의 공집합

수학적 대상인 공집합은 학교 수학에서도 집합의 연산이 가능하기 위해서 그 존재성이 필요하다. 그러나 앞에서 논했듯이 공집합은 단순한 연산의 가능성을 넘어서 현대 수학의 전개에서는 필연적으로 요구되는 수학적 대상이다. 칸토어의 논의 전개나 집합론의 무한 공리 등에서 볼 수 있듯이 무한을 다루기 위해서는 공집합이 필요했고, 수학적 공리체계의 구성도 공집합의 존재로부터 시작되었다. 공집합은 현대 수학의 집합론적 관점으로 보았을 때야 해석이 가능한 것이다. 따라서 학교 수학에서의 공집합도 이러한 사실을 염두에 두고 바라보아야 한다.

학교 수학에서는 한 평면 위에 있는 두 직선의 위치 관계를 중학교 1학년 교과서에서 다음과 같이 정리하고 있다.

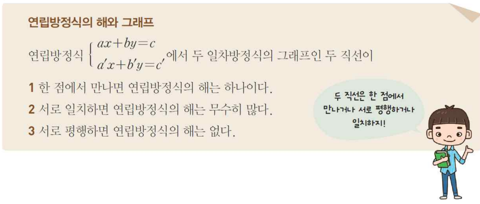


[그림 Ⅲ-1] 한 평면 위에 있는 두 직선의 위치 관계 (박교식 외, 2018a, p.151)

또한, 이원일차연립방정식의 해와 일차함수의 그래프 사이의 관계를 한 평면 위의 두 직선의 위치 관계와 관련지어 다음과 같이 제시하고 있다.

---

3) 한 종의 교과서(비상)에서 기호 표현($\varnothing \subset A$)만으로, 다른 한 종의 교과서(교학사)에서는 공집합은 모든 집합의 부분집합으로 '생각한다.'로, 나머지 7종의 교과서에서는 공집합은 모든 집합의 부분집합으로 '정한다.'로 제시하며 이에 대한 자세한 설명을 하고 있지 않다.


연립방정식의 해와 그래프

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ 에서 두 일차방정식의 그래프인 두 직선이

1 한 점에서 만나면 연립방정식의 해는 하나이다.

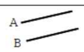
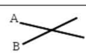
2 서로 일치하면 연립방정식의 해는 무수히 많다.

3 서로 평행하면 연립방정식의 해는 없다.

[그림 III-2] 연립방정식의 해와 그래프 (박교식 외, 2019, p.151)

이를 해의 집합과 관련지어 표로 나타내면 다음과 같다.

<표 III-1> 두 직선의 위치관계와 연립방정식의 해집합

	가	나	다
			
두 직선의 위치관계	평행하다 (교점 0개)	한 점에서 만난다. (교점1개)	일치한다. (교점이 무수히 많다.)
연립방정식의 해	없다.	1개	무수히 많다.
연립방정식의 해집합($A \cap B$)	$\varnothing$	$\{(p,q)\}$	$\{(x,y) \mid ax+by=c\}$

공집합이 임의의 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset \{(p,q)\}$인데, <표 III-1>에서 <가>, <나> 의 경우, 직선의 위치 관계에서 이것을 어떻게 해석해야 할지, 그리고 학교 수학의 수준에서 해석할 수 있는지에 대한 고찰이 필요하다. 여기에서 두 가지 문제를 생각할 수 있다. 첫째는 공집합의 존재성과 관련된 것이고, 둘째는 공집합이 임의의 집합의 부분집합인가의 문제이다.

첫 번째 문제는 두 직선의 교점을 두 집합의 교집합으로 본다면 두 직선이 만나지 않는 경우도 있으므로 이러한 연산(조작)이 가능하기 위해서는 두 직선이 만나지 않는 경우, 즉 두 직선의 교점이 없는 경우(원소가 없는 경우)도 집합이 되어야 하므로 이에 대응하는 공집합을 정할 필요가 있다.

두 번째로 살펴볼 것은 공집합은 임의의 집합의 부분집합인가의 문제이다. 위 표의 <가>의 경우와 <나>의 경우를 비교해서 볼 때 연립방정식의 해집합의 관점에서는 공집합($\varnothing$)이 한 점으로 이루어진 집합($\{(p,q)\}$)의 부분집합($\varnothing \subset \{(p,q)\}$)이다. 그런데 두 직선의 위치 관계에서 보면 두 직선이 평행인 경우와 두 직선이 한 점에서 만나는 경우는 특별한 관련이 없는 별개의 경우로 보일 수 있다.

이 문제를 설명할 하나의 예시로서 사영기하를 생각할 수 있다. 사영기하는 유클리드 평면기하를 넘어서는 더 넓은 기하로서 두 평행선이 무한에서 만나는 것으로 보고 이를 무한원점이라 한다(이종우, 1998). 사영기하에서의 무한원점을 Ω라고 하면, 두 직선이 만나지 않는다는 것은 만난 점의 집합이 $\{\Omega\}$이고, 두 직선이 한 점에서 만난다는 것은 만난 점의 집합이 $\{\Omega,(p,q)\}$인 것으로 해석할 수 있다. 이러한 의미에서 보면 만나지 않는다는 <가>의 경우는 만나는 <나>의 일부로 볼 수 있다. 이렇게 유클리드 기하보다 넓은 기하의 관점에서 보면 공집합이 임의의 집합의 부분집합이라는 내용을 연립방정식과 두 직선의 위치 관계와 관련지어 이해할 수 있다. 이렇듯 공집합이 임의의 집합의 부분집합이라는 명제는 그 안에 무한의 내용을 포함하고 있다. 무한의 개념을 포함하여 보았을 때 위의 연립방정식의 문제가 온전히 해석되고 집합의 언어로 수학을 기술하게 된다. 이러한

설명이 학교 수학에서는 자연스럽게 받아들이기 어려울 수 있으나 그 대상을 다루는 체계가 확장되거나 다른 관점에서 볼 때 비로소 해석될 수 있음을 알 수 있다.

현대 수학은 집합의 언어로 모든 것을 구성할 수 있다. 여기에서 말하는 집합의 개념은 공집합을 필연적으로 포함하는 것이고, 공집합의 개념 속에는 무한과 공리체계 등의 현대수학적인 내용이 포함되어 있다. 따라서 학교 수학에서 이러한 내용을 모두 다루기에는 무리가 있다. 공집합이 모든 집합의 부분집합이라는 명제를 학생들이 이해하지 못하는 것은 그 증명의 방법뿐 아니라 공집합 자체가 현대 수학을 담고 있는 것이기 때문이므로 학교 수학에서 이를 어려워하는 것은 어떻게 보면 당연한 일이라 볼 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

지금까지 공집합이 도입되는 과정을 통해서 수학적 대상이 어떻게 등장하게 되었는지를 알아보았다. 공집합의 필연성은 칸토어 집합론에서부터 찾을 수 있고 집합론의 공리계에서 공집합의 존재성과 무한과의 관계를 알 수 있었다. 한편 바디우(Badiou)는 공백을 이용하여 철학의 존재론을 전개하였다. 이는 공집합의 존재성을 공리로 받아들인 후 집합론을 전개하는 것과 유사한 맥락으로 볼 수 있다.

칸토어의 집합론의 등장으로 현대 수학에서는 집합론이 중요한 위치를 차지하게 되었다. 이는 함수나 기하학 등 많은 수학 개념이 집합 개념과 집합 표기에 의해 일반화되어 명확하게 서술될 수 있었기 때문이고, 따라서 집합론은 수학의 기초적인 역할을 하게 되었다. 이러한 사실 때문에 과거 많은 교육자는 집합론이 초기 수학교육에서 기초적인 위치를 차지해야 한다고 생각하여 이른바 '새 수학' 교육과정에 집합내용을 포함하게 되었다. 이에 우리나라에서도 3차 교육과정에서는 초등학교 1학년에서부터 집합을 도입하기도 했다(서보억, 2017, p.363). 그러나 이러한 집합의 단순한 도입은 수많은 부작용을 낳았고 2015 개정 교육과정에서는 고등학교 1학년에 집합이 처음 소개되게 되었다. 이는 여러 시행착오를 거친 결과 "집합과 집합 표기를 단순히 그것들을 조작하기 위한 목적으로 학교 수학에 억지로 삽입할 필요는 없으며, 학교 수학에서는 집합적 사고 교육이 그 도입목표가 되어야 한다."라는 결론에 이르렀기 때문이다(이경화 외, 2002). 여기에서 집합적 사고란 무엇을 의미하는 것일까? 집합 사이의 포함관계와 연산을 알고, 이를 계산하는 것만을 의미하지는 않을 것이다. 2015 개정 교육과정에서는 집합을 '수학적 대상을 논리적으로 표현하고 이해하는 도구'(교육부, 2015, p.51)로 규정한다. 집합은 수학 내용의 형식화를 위해서 필수 불가결한 것이므로 집합적 사고란 형식적이고 추상적인 논증의 능력을 기르는 데 필요한, 수학 및 과학의 모든 분야의 학습에 필요한 집합의 언어로 수학을 기술하는 기본적인 사고 방법이다(Wegner, 2014). 이와 더불어 칸토어의 집합론의 핵심이라고 할 수 있는 무한의 개념, 공집합의 정의로부터 알 수 있는 수학적 대상의 개념적 속성 또한 집합적 사고의 중요한 내용이라 볼 수 있다.

이를 교육과정에서 구현하기 위해서 집합과 그 표기를 교육 내용으로써 가르치는 것에서 나아가 집합 학습 이후에 집합을 도구로 하여 수학 내용을 기술할 수 있다. 학교 수학의 많은 내용–함수의 정의역과 공역, 해집합, 무한과 유한, 명제의 참 거짓, 수학적 확률 등–은 집합을 도구로 기술되고 설명된다. 이것은 어떠한 요소가 집합의 원소인지 아닌지가 명확하게 판정할 수 있는 집합의 기본 속성이 수학적 내용을 설명하는 데 유용하기 때문이다. 수학의 곳곳에서 집합을 도구로 설명하는 것이 학생들에게 수학의 본질을 경험하게 하는 하나의 방법일 수 있다. 그리고 본 논문에서 제시하였듯 공집합의 정의로부터 알 수 있는 수학적 대상의 개념적 속성인 '없음'을 어떠한 대상으로 정의하여 다루는 것도 여타 학문과 구분되는 수학의 속성이라 할 수 있다. 이것은 교사가 알고 있어야 하는 교수학적 내용지식(PCK)으로써 학생들에게 공리체계를 가르칠 수는 없지만 수학에서는 '없음'을 정의하여 대상으로 다룬다는 사실을 학생 수준에 맞게 설명할 수 있을 것이다.

공집합의 존재성을 이해하기 위해 공리체계의 학습을 학교 수학에서 요구할 수는 없다. 따라서 수학의 구조

인 집합적 사고를 학교 수학에 그대로 도입하는 것이 아니라 학교 수학의 수준에 맞추어서 적절히 다룰 필요가 있다. 이를 위하여 학교 수학의 내용과 대학교 학부 수준의 내용의 공통점과 차이를 명확히 파악할 필요가 있다. 공집합의 존재성과 공집합이 임의의 집합의 부분집합이라는 내용은 학교 수학에서 학생들에게 자연스럽게 이해시키기에는 어려움이 있는 내용이다. 이것은 공리체계나 무한의 이해에 관한 내용을 기반으로 하고 있기 때문이다. 이러한 내용은 교사가 알고 있어야 할 교과 지식의 한 부분이다. 나아가 공집합이 임의의 집합의 부분집합이라는 명제를 학생들이 쉽게 받아들이지 못하는 원인이 교사의 설명 방법이나 학생의 노력이 아닌 지식 자체의 본질에 있는 것이 아닌지 관점을 달리해 살펴볼 필요가 있다.

한편 4차 산업 혁명과 인공지능 등의 대두로 어느 때 보다 수학의 유용성이 강조되고 있는 현실에서 공리적이고 철학적인 측면의 수학교육의 의미를 생각해볼 수 있다. 수학은 역사적으로 과학기술의 발전에 기여하면서 매우 중요한 실용적인 효용을 가져왔다. 그러나 실제적인 필요에 의해 얻게 된 수학적 내용도 수학 안에서는 공리적인 토대 위에 견고하고 엄밀하게 그 체계를 구축해왔다. 이집트 수학의 발전 후의 유클리드의 원론이 그랬고, 미적분학의 활용 이후 코시와 바이어스트라스의 해석학의 엄밀화의 과정이 있었다. 이러한 논리적인 엄밀성 때문에 수학이 모든 과학 기술의 기초가 될 수 있었다. 학교 수학에서도 수학의 실용적 측면이 있으나 그 이면의 논리적 엄밀성이 수학의 본질이고 그 기초에 공리적이고 철학적인 측면이 있음을 간과하지 말아야 할 것이고 상황이 허락하는 데로 학생들에게 지도할 수 있어야 할 것이다.

참 고 문 헌

고성은 외 6명 (2018) (고등학교) 수학. 서울: 좋은책신사고.
Go, S. E. et al. (2018). *(High school) Mathematics.* Seoul: Sinsago.
교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2015-74호[별책8]. 서울: 저자.
Ministry of Education. (2015). *Mathematics curriculum.* Seoul: Author.
권오남 외 14명 (2018) (고등학교) 수학. 서울: 교학사.
Kwon, O. N. et al. (2018). *(High school) Mathematics.* Seoul: Kyohaksa.
김원경 외 14명 (2018) (고등학교) 수학. 서울: 비상교육.
Kim, W. K. et al. (2018). *(High school) Mathematics.* Seoul: Visang.
남경희 (2013). 플라톤 : 서양철학의 기원과 토대. 서울: 아카넷.
Nam, K. H. (2013). *Platon.* Seoul: Acanet.
류희찬 외 10명 (2018) (고등학교) 수학. 서울: 천재교과서.
Lew, H. C. et al. (2018). *(High school) Mathematics.* Seoul: Chunjae.
박교식 외 18명 (2018a) (중학교) 수학1. 서울: 동아출판.
Park, K. S. et al. (2018a). (Middle school) Mathematics 1. Seoul: Dong-a.
박교식 외 19명 (2018b) (고등학교) 수학. 서울: 동아출판.
Park, K. S. et al. (2018b). *(High school) Mathematics.* Seoul: Dong-a.
박교식 외 18명 (2019) (중학교) 수학2. 서울: 동아출판.
Park, K. S. et al. (2019). *(Middle school) Mathematics 2.* Seoul: Dong-a.
박세희 (2006). 수학의 세계. 서울대학교출판부.
Park, S. (2006) *Invitation to the world of mathematics.* Seoul: SNUPress.

배종숙 외 6명 (2018) (고등학교) 수학. 서울: 금성출판사.

Bae, J. S. et al. (2018). *(High school) Mathematics*. Seoul: Kumsung.

백대현, 이진희 (2011). 중학교 수학 교과서에 제시된 기호의 서술. 수학교육학연구, **21**(2), 165-180.

Paek, D. H., & Yi, J. (2011). Symbol statements in middle school mathematics textbooks : how to read and understand them? *Journal of Educational Research in Mathematics*, **21**(2), 165-180.

서보억 (2017). 수학과 교육과정 변천에 대한 분석연구. BD18070008. 한국과학창의재단.

Seo, B. (2017). *The Analytical study of the historical process of mathematics curriculum in Korea*. BD18070008. Korea foundation for the advancement of science & creativity.

서용순 (2006). 바디우 철학에서의 공백 (vide) 의 문제. 현대정신분석, **8**(2), 95-114.

Seo, Y. S. (2006). The problem of the void in philosophy of Badiou. *The Journal of Contemporary Psychoanalysis*, **8**(2), 95-114.

서용순 (2011). 바디우 철학에서의 존재, 진리, 주체: 존재와 사건 을 중심으로. 철학논집, **27**, 79-115.

Seo, Y. S. (2011). Etre, vérité et sujet dans la philosophie d'Alain Badiou: autour de L'être et l'événement, *Sogang Journal of Philosophy,* **27**, 79-115.

유미영・최영기 (2015). [유클리드 원론] I 권 정리 22 의 Diorism 을 통해서 본 존재성. 수학교육학연구, **25**(3), 367-379.

Ryou, M., & Choi, Y. (2015). The diorism in proposition I-22 of 『Euclid Elements』 and the existence of mathematical objects, Journal of Educational Research in Mathematics, **25**(3), 367-379.

유윤재 (2012). 중등수학 교재연구(중등수학교육 ; 33). 서울: 경문사.

Yoo, Y. J. (2012). *Secondary Mathematics Textbook Research*. Seoul: Kyungmoonsa.

이경화・박경미・임재훈 (2002). 교육 내용으로서의 집합 개념에 대한 비판적 고찰. 수학교육학연구, **12**(1), 125-143.

Lee, K., Park, K. & Yim, J.(2002). A Critical review on the concept of set as a school mathematics topic. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **12**(1), 125-143.

이종우 (1998). 기하학의 역사적 배경과 발달. 서울: 경문사.

Lee, J. W. (1998). *Historical background and development of geometry*. Seoul: Kyungmoonsa.

이준열 외 9명 (2018) (고등학교) 수학. 서울: 천재교육.

Lee, J. Y. et al. (2018). *(High school) Mathematics*. Seoul: Chunjae.

임정대 (1992). 集合論의 基礎. 서울: 淸文閣.

Im, J. D. (1992). *The basis of set theory*. Seoul:

장태순. (2017a). 들뢰즈와 바디우의 다자성 개념- 두 철학자의 논쟁을 중심으로. 철학연구, **117**, 169-189.

Chang, T. S. (2017a). Deleuze and Badiou's Concept of Multiplicity : From the Dispute of the Two Philosophers, *Journal of The Society of philosophical studies*. **117**, 169-189.

장태순. (2017b). 영, 하나, 여럿-알랭 바디우의 다자 개념. 철학, **131**, 151-170.

Chang, T. S. (2017b). Zero, one, many – Alain Badiou's conception of multiple, *Korean Journal of Philosophy*. **131**, 151-170.

정주희 (2012). 수리논리와 집합론 입문(수리논리 연구 시리즈 ; 1). 서울: 경문사.

Jeong, J. H. (2012) *Proofmood, a computer logic system*. Seoul: Kyungmoonsa.

홍기숙 (2006). "순수다자" 로서의 존재와 "일자" 로서의 진리. 사회와 철학, (**12**), 241-262.

Hong, K. S. (2006). Lêtre comme multiple pur et la vérité comme un. *Korean Society for Social Philosophy*, (**12**), 241-262.

홍성복 외 10명 (2018) (고등학교) 수학. 서울: 지학사.

Hong, S. et al. (2018). *(High school) Mathematics*. Seoul: Jihaksa.

황선욱 외 8명 (2018) (고등학교) 수학. 서울: 미래엔.

Hwang, S. et al. (2018). *(High school) Mathematics*. Seoul: Mirae N.

Badiou, Alain. (1988). *L'être et l'événement*. Paris: Seuil, 조형준 역(2013), 존재와 사건 : 사랑과 예술과 과학과 정치 속에서, 서울 : 새물결.

Bagni, T. (2006). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory. *Educational Studies in Mathematics*, **62(3)**, 259-280.

Devlin, K. (2012). *The joy of sets: fundamentals of contemporary set theory*. Springer Science & Business Media.

Eves, H. (1994). 수학의 위대한 순간들. (허민, 오혜영 역), 서울: 경문사. (영어 원작은 1980년 출판).

Fischbein, & Baltsan (1998). The mathematical concept of set and the collection model, *Educational Studies in Mathematics*, **37(1)**, 1-22.

Kolitsoe Moru, E., & Qhobela, M. (2013). Secondary school teachers' pedagogical content knowledge of some common student errors and misconceptions in sets. *African Journal of Research in Mathematics*, Science and Technology Education, **17(3)**, 220-230.

Lin, Y., & Lin, S. (1974). *Set Theory - An intuitive approach*. Boston : Houbhton Mifflin Company.

Pinter, C. (1986). *Set theory*. (Addison - Wesley series in mathematics). 서울: 연합출판.

Tiles, M. (2004). *The philosophy of set theory: an historical introduction to Cantor's paradise*. Courier Corporation.

Wegner, S. A. (2014). A Workshop for High School Students on Naive Set Theory. *European Journal of Science and Mathematics Education*, **2(4)**, 193-201.

Zazkis, R., & Gunn, C. (1997). Sets, subsets, and the empty set: students' constructions and mathematical conventions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, **16**, 133-169.

The Empty Set as a Mathematical Object

Ryou, Miyeong
Banpo high school, South Korea
E-mail : glory@snu.ac.kr

Choi, Younggi†
Department of Mathematics Education, Seoul National University, South Korea
E-mail : yochoi@snu.ac.kr

This study investigated the empty set which is one of the mathematical objects. We inquired some misconceptions about empty set and the background of imposing empty set. Also we studied historical background of the introduction of empty set and the axiomatic system of Set theory. We investigated the nature of mathematical object through studying empty set, pure conceptual entity. In this study we study about the existence of empty set by investigating Alian Badiou's ontology known as based on the axiomatic set theory. we attempted to explain the relation between simultaneous equations and sets. Thus we pondered the meaning of the existence of empty set. Finally we commented about the thoughts of sets from a different standpoint and presented the meaning of axiomatic and philosophical aspect of mathematics.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : empty set, existence, Badiou
† corresponding author