

<인공지능 수학> 교과서의 ‘관련 학습 요소’ 반영 내용 분석

권 오 남 (서울대학교, 교수)[†]

이 경 원 (단국대학교사범대학부속중학교, 교사)

오 세 준 (이화여자대학교사범대학부속이화·금란고등학교, 교사)

박 정 숙 (양재고등학교, 교사)

이 연구는 2015 개정 교육과정에서 신설 과목으로 설계된 <인공지능 수학> 교과서를 분석하여 차기 교육과정 설계의 시사점을 도출하는 데 목적이 있다. <인공지능 수학> 시안을 담은 수학과 교육과정 문서에서는 ‘학습 요소’ 대신에 ‘관련 학습 요소’를 제시하고 있다. ‘관련 학습 요소’는 인공지능의 맥락에서 활용될 수 있는 수학적 개념이나 원리로 정의하고 있는데 ‘관련 학습 요소’를 다루는 범위와 방법에 대해서는 구체적인 제한은 없다. 이에 ‘관련 학습 요소’가 <인공지능 수학> 교과서에서 반영된 양상을 형식, 범위와 방법, 공학적 도구 활용 방식을 중심으로 분석하였다. 교과서별로 ‘관련 학습 요소’를 교과서에 기술하는 형식상의 차이와 수학 개념을 취급하는 양과 범위에 차이가 있었다. 또한, ‘관련 학습 요소’를 하나의 수학 개념과 동일하게 정의하여 사용한 경우와 정의보다는 인공지능의 맥락에서 설명 위주로 서술하였다. ‘관련 학습 요소’를 인공지능의 맥락에서 활용할 수 있도록 교과서별로 유사한 공학적 도구를 다루었지만, 계산과 결과를 해석하는 활동 중심이었다. 고등학교 수학 과목으로서 <인공지능 수학>의 지향을 교과서에 충분히 반영하기 위해서 ‘관련 학습 요소’에 관한 체계적인 논의가 필요하다. 또한, 학생들이 인공지능 맥락의 활용 사례를 경험하기 위해서는 공학적 도구를 활용하여 문제를 설정하고 해결할 수 있는 내실화된 활동이 교과서에 구현되어야 할 것이다.

I. 서론

2016년 이세돌과 알파고의 세기의 대결을 시작으로 인공지능이라는 용어가 우리 사회 전반에 등장하였다. 2020년 9월 교육부는 4차 산업혁명 시대의 학습자들이 정보지능기술을 활용하는 가운데 비판적 사고력, 정보판별력, 공감 소통 능력 등 소위 21세기 역량을 길러 문제를 해결할 수 있도록 <인공지능 수학> 과목 교육과정 개정안을 확정 고시하였다(교육부, 2020a). 그에 따라 <인공지능 수학> 교과서가 개발되었고, 고등학교에서 <인공지능 수학> 교과목은 2021학년도 2학기부터 학교 현장에 개설되어 학생들이 선택할 수 있게 되었다. 2015 개정 고등학교 수학과 교육과정은 2020년에 신설된 <기본 수학>에 이어 <인공지능 수학>이 더해져서 총 15개 과목으로 이루어져 있다. 진로 선택 과목의 증가로 인해 검정 교과서가 아닌 인정 교과서도 증가하였고, 그에 따라 다양한 교과서 개발이 활발하게 이루어지게 되었다. 인정 교과서는 검정 교과서보다 교과서 심의 기준이 까다롭게 적용되지 않는 편이라, 새로 개발된 교과과목의 교과서들이 교육과정의 취지에 부합되게 개발되었는지에 대한 검토가 필요하다.

교과서는 수학 내용을 설명할 뿐만 아니라, 학생들이 어떤 행동을 하는 것이 바람직한지 암묵적으로 보여주

* 접수일(2021년 11월 10일), 심사(수정)일(2021년 11월 30일), 게재확정일(2021년 12월 22일)

* MSC2000분류 : 97U20

* 주제어 : 인공지능 수학, 관련 학습 요소, 교과서

† 교신저자 : onkwon@snu.ac.kr

기 때문에 수학교육 개선에 있어 중요한 역할을 한다(Schmidt, 2012). 교과서 분석이 국제 비교 연구에서 나타나는 학생들의 성적 차이를 설명할 수 있다는 주장(Li, 2000)이 있지만, 교과서가 수업과 학생들이 배우는 것에 거의 영향을 미치지 않는다고 주장하는 연구(Freeman & Porter, 1989)도 있다. 그러나 교과서가 실제 수업 현장에서 실행되는 수학교육과 의도된 교육과정 사이를 연결하는 중요한 매개체 중 하나이다(Stein, Remillard & Smith, 2007). 다른 나라에 비해 우리나라에서 교사의 수업 구성에 교과서가 차지하는 비중이 높다는 점을 고려할 때, 교과서 분석은 그 과목의 교수·학습의 방향을 예견하는 데 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

기존의 수학 교과서 분석에 관한 연구를 살펴보면 특정 개념을 다루는 방식이 교과서에 따라 어떻게 다른지 분석하는 연구(박진희, 박미선, 권오남, 2018), 각 나라의 교육과정과 교과서에 따라 특정 개념을 다루는 방식을 분석하는 연구(최은, 권오남, 2020; Li, 2000), 교과서에 제시된 문제 또는 맥락을 분석하는 연구(Wijaya, Heuvel-Panhuizen, & Doorman, 2015) 등으로 나눌 수 있다.

고등학교 수학과 교육과정에서는 성취기준과 더불어 학습 요소가 제시된다. 교육과정에 제시된 학습 요소는 수학 교과서에서 굵은 글씨로 표시될 뿐만 아니라, 해당 학습 요소에 대한 개념을 정확하게 제시하는 것이 특징이다. 그러나 <인공지능 수학> 교과목은 다른 과목과 달리 '학습 요소'라는 용어 대신에 '관련 학습 요소'라는 용어를 처음 도입하고 있으며 다음과 같이 정의하고 있다.

인공지능에서 수학이 활용될 때 관련되는 주요 수학적 개념이나 원리를 제시한 것으로, 이러한 수학적 개념이나 원리를 자세히 다루기보다는 인공지능에서 어떻게 활용되는지를 중심으로 다루도록 유의한다(이상구 외, 2020, p. 62).

이 문구는 <인공지능 수학> 교육과정 시안 개발 연구보고서에 각주로 삽입되어 있으며, 수학 개념과 원리 학습에 지나치게 집중하지 않도록 의도하였다고 서술되어 있다. 따라서 '관련 학습 요소'에 대한 이 정의는 기존의 학습 요소가 교육과정과 교과서에서 나타나는 위상과는 다르며, <인공지능 수학> 교육과정의 이러한 취지가 교과서에 어떻게 담겨있는지 주목할 필요가 있다. 이에 본 연구는 2015 개정 수학과 교육과정에서 5종으로 출판된 <인공지능 수학> 교과서를 연구 대상으로 하여 '관련 학습 요소'의 서술의 양상과 특징을 분석한다. 구체적인 연구 질문은 다음과 같다.

- 첫째, <인공지능 수학> 교과서에서 '관련 학습 요소'를 다루는 형식은 어떠한가?
- 둘째, <인공지능 수학> 교과서에서 '관련 학습 요소'를 다루는 범위와 방법은 어떠한가?
- 셋째, <인공지능 수학> 교과서에서 '관련 학습 요소'를 공학적 도구로 어떻게 다루고 있는가?

II. 연구의 배경

1. <인공지능 수학> 교육과정 분석

최근 인공지능은 개인의 삶인 일상의 일부인 동시에 사회 전반에 걸쳐 나타나고 있다. 이에 교육에서도 인공지능을 이해하기 위한 교육, 인공지능을 활용하기 위한 교육 등의 연구가 이어지고 있다. 시대적인 흐름에 맞추어 교육부는 제3차 수학교육 종합계획에서 인공지능을 개발하고 활용할 수 있는 수학 중심의 소프트웨어 프로그램 활용 과목을 신설하겠다는 계획을 발표하며(교육부, 2020b), 진로 선택 과목으로 <인공지능 수학>을 신설하였다.

<인공지능 수학>은 인공지능이 필수가 된 현 사회적 요구를 반영하여 2015 개정 수학과 교육과정 체계 내에서 인공지능의 원리 이해와 이에 적용되는 수학적 원리를 경험할 수 있는 구체적인 교육 내용 및 방법을 제안

하기 위해 개발된 교과이다(교육부, 2020a). 즉, <인공지능 수학>은 '실생활의 다양한 문제 해결에 쓰이는 인공지능에서 수학이 어떻게 활용되는지 이해하는 데 초점을 두고 있어, 기존의 수학 과목들처럼 수학적 개념 원리를 이해하고 이를 적용한 문제 풀이보다 인공지능 사례에서 어떠한 수학 개념과 원리가 어떻게 쓰이는지 이해하고 이를 활용한 경험이 중요시되는 과목(교육부, 2020a, p. 59)'이라고 할 수 있다.

과목 시안 개발 연구보고서에 따르면, <인공지능 수학> 과목은 '인공지능을 소개하는 내용의 범위와 수준, 그와 관련된 수학 내용의 범위와 수준을 모두 고려한 융합 성격의 과목'이라고 소개하고 있고, 그에 따라 내용적 측면 외에도 교수학적으로 접근하는 방식과 평가 방식에도 기존 과목과의 차별성을 두어야 했다고 밝히고 있다(이상구 외, 2020). 이런 맥락에서 <인공지능 수학>은 기존의 수학 과목과 교육과정 편제 및 내용 면에서 몇 가지 차이점을 발견할 수 있다.

첫째, '학습 요소'라는 단어 대신 '관련 학습 요소'라는 단어를 사용하고 있다. '관련 학습 요소'는 인공지능에서 수학이 활용될 때, 관련되는 주요 수학적 개념이나 원리를 제시한 것으로 수학적 개념이나 원리를 자세히 다루기보다 인공지능에서 어떻게 활용되는지를 중심으로 다루도록 하였다(이상구 외, 2020). 2015 개정 교육과정에서 사용하고 있는 '학습 요소'는 이전 교육과정의 '용어와 기호'에 해당하는 것으로 수학 교과서에서 '학습 요소'는 교과서 내용을 전개하는데 빠질 수 없으며, 그 중요성과 활자가 주는 가독성, 변별성을 고려하여 수학 교과서에서는 학습 요소를 정의할 때 관습적으로 색깔 있는 굵은 글씨로 표시하여 제시하고 있다. 이번엔 '관련 학습 요소'라는 용어가 새롭게 수학과 교육과정에 도입되면서 기존 수학 과목의 교과서에서 '학습 요소'를 다른 방식과 차이점이 있다.¹⁾

둘째, '교수·학습 방법 및 유의 사항'을 상세하게 기술하고 있다. <인공지능 수학>의 '교수·학습 방법 및 유의 사항'은 모두 27개로, 신설 과목으로서 처음 도입되는 만큼, 참고가 될 만한 기존 교수 학습 자료가 존재하지 않는 점을 고려하여 최대한 상세히 제시하였다. 교수·학습 방법 및 유의 사항은 다뤄야 할 내용의 종류, 교수·학습의 범위, 교수·학습 활동 제안, 공학적 도구 활용을 담고 있다.²⁾ 진로 선택 과목의 '교수·학습 방법 및 유의 사항'의 수는 <표 II-1>과 같다.³⁾

<표 II-1> 2015 개정 수학과 교육과정 신설된 진로 선택 과목의 교수·학습 방법 및 유의 사항의 개수

과목	경제 수학	실용 수학	수학과제 탐구	인공지능 수학
교수·학습 방법 및 유의 사항의 개수	25	18	12	27

셋째, 과목 시안 개발 연구보고서에서 성취기준의 해설 및 구현 방안을 제시하고 있다. 2015 개정 수학과 교육과정에서 <실용 수학>, <경제 수학>, <수학과제 탐구>는 새롭게 개발된 과목이며, <경제 수학>을 제외하고는 학습 요소를 제안하지 않는다. 신설 과목은 교과서 집필이나 교수·학습 실행에 어려움을 유발할 수 있다.

1) 기존 2015 개정 교육과정의 교과서 편찬상의 유의점 및 인정기준에서는 '학습 요소'에 제시된 용어 및 기호는 정의하여 사용하고, 교수·학습 방법 및 유의 사항에 제시된 용어는 사용할 수 있도록 하였다(교육부, 한국교육과정평가원, 2015). <인공지능 수학> 교육과정에서 처음으로 등장한 '관련 학습 요소'는 인공지능에서 수학이 어떻게 활용되는지 이해할 수 있는 수준에서 다루도록 제안하였다(교육부, 한국교육과정평가원, 2020).

2) <인공지능 수학> 교육과정에서 제시된 '교수·학습 방법 및 유의 사항'을 분류한 결과는 <부록 1>에서 확인할 수 있다.

3) 2015 개정 교육과정의 진로 선택 과목을 6개 과목으로 제안하고 있으며(교육부, 2020b), <기하>를 제외하고는 신설된 과목이다. <기본 수학>은 중학교 <수학>과 고등학교 <수학> 사이의 연계성을 강조하여, 고등학교 <수학>을 기초로 하여 개발된 과목이나, 기존 진로 선택 과목의 성격과 차이가 있어 표에서는 삭제하였다. (고등학교 <수학> 교수·학습 방법 및 유의 사항: 32개, <기본 수학> 교수·학습 방법 및 유의 사항: 46개). <기하>와 <기본 수학>의 사례를 제외하였을 때, <인공지능 수학> 과목의 교수·학습 방법 및 유의 사항은 다른 과목에 비해 양적으로도 많고, 다루어야 할 실제 사례를 포함하여 구체적으로 서술하고 있음을 알 수 있다.

<인공지능 수학>은 기존 과목과는 다르게 ‘관련 학습 요소’를 새롭게 제시하였으며, 기존 과목보다 융합적 요소가 더 강했기에 교과서를 구현하기가 쉽지 않을 수 있다. 이에 따라 다른 과목의 시안 개발 연구보고서와는 다르게 각각의 성취기준에 대해 성취기준의 해설 및 구현 방안을 제시하여 교과서를 개발하는 데 도움을 주려고 한 것으로 보인다. 하나의 성취기준에 대해 그 분야에 관한 인공지능의 사례를 제시함으로써 어떤 사례를 활용할 수 있는지, 수학 개념을 어느 정도의 깊이까지 다룰 수 있는지 설명하고 있다.

넷째, 교수·학습 방향 및 평가 방향을 수정하거나 추가하여 서술하였다. 수학과 교육과정 문서에서 교수·학습 방향은 교수·학습의 원칙, 방향을 제시하는 것으로 교과 역량을 교실에서 어떻게 구현할 수 있는지 강조 사항을 정리하여 제시한 것이다. 교과 역량을 길러내기 위한 교수·학습 방법에서도 인공지능의 활용 사례를 다룰 수 있도록 교육과정 문서를 수정하여 제안하였으며, 인공지능에 관한 자료의 수집, 인공지능 수학에 대한 정의적 영역에 대한 서술을 제안하였다. 특히, 인공지능의 맥락이 수학 과목에 적용되었을 때 강조되어야 하는 공학적 도구의 활용에 관한 사항을 추가하여 서술하였다. 인공지능 기술 소개를 위한 환경을 마련할 수 있도록 하였으며, 소프트웨어를 사용한 텍스트코딩, 프로그램 코드의 설계를 다룰 수 있도록 하였다. 평가 방향은 평가 원칙, 평가 방법을 교육과정 문서에서 제안하는 것이며, 평가 방법에서는 수학 학습에 관한 양적, 질적 평가 방법을 제안하고 있다. 다른 수학 과목에서는 지필 평가를 평가 방법의 제일 서두에 두고 서술하고 있으나, <인공지능 수학> 교육과정은 포트폴리오 평가, 프로젝트 평가를 지필 평가보다 서두에 서술함으로써 기존 과목과는 다른 평가 방법을 강조하고 있다.⁴⁾ <인공지능 수학> 과목에서 새롭게 제시된 공학적 도구 활용에 관한 내용을 정리하여 제시하면 <표 II-2>와 같다.

<표 II-2> <인공지능 수학>에서 새롭게 제시된 공학적 도구 활용에 관한 교수·학습 방향 및 평가 방향

교수·학습 방향	평가 방향
(차) 공학적 도구를 활용한 수업을 운영할 때에는 다음 사항에 유의한다. ① 공학적 도구를 활용하여 인공지능 기술을 직접 시연해 볼 수 있는 환경을 제공함으로써 인공지능에 활용되는 수학을 경험할 수 있는 기회를 제공한다. ② 공학적 도구로 PC나 모바일 기기를 활용할 수 있으며, 설치형 또는 웹 기반의 소프트웨어를 사용하여 텍스트 코딩을 다룰 수 있다. ③ 텍스트코딩을 다룰 때는 학생들이 직관적으로 이해할 수 있는 수준으로 작성된 프로그램의 코드를 제공하여 프로그래밍에 대한 부담을 느끼지 않게 하고, 제공된 프로그램 코드의 숫자를 학생이 부분적으로 수정하면서 자연스럽게 활용할 수 있도록 한다.	(라) 평가 내용이나 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있게 한다. ① 공학적 도구로 PC나 모바일 기기를 활용할 수 있으며, 설치형 또는 웹 기반의 소프트웨어를 사용할 수 있다. ② 프로그래밍 능력에 대한 평가보다는 프로그램의 코드에서 수학을 활용하는 능력에 중점을 두어 평가하며, 이를 위해 수학적 요소가 포함되는 프로그래밍 코드를 제공할 수 있다.

<인공지능 수학> 교과서는 모두 5종의 교과서가 발행되었으며, <인공지능 수학> 교과서의 분석을 통해 앞으로 융합적 성격을 띤 교과와 교과서를 구성하는 방법 및 교수·학습 방법을 제안할 수 있을 것이다.

⁴⁾ 2015 개정 수학과 교육과정에서 <수학과제 탐구>, <인공지능 수학>을 제외한 과목의 평가 방법은 지필 평가, 프로젝트 평가, 포트폴리오 평가, 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가, 자기 평가, 동료 평가 등을 순서대로 제안하고 있다. <수학과제 탐구> 과목은 지필 평가를 제외한 나머지 평가 방법을 교육과정 문서에서 제안하고 있다.

2. 컴퓨팅·알고리즘적 사고

인공지능의 발달로 컴퓨팅 사고(Computational Thinking, CT)⁵⁾는 21세기를 위한 기본 소양으로 거론되고 있다. 미국 국가 연구 위원회(National Research Council)는 학생들을 준비시키기 위한 국가적 노력의 하나로 차세대 과학 규준에 계산적 사고를 과학 교과와 핵심 실천 중 하나에 포함했고, 우리나라에서는 2015 개정 교육과정에서 CT를 '컴퓨팅 사고'로 번역하여 정보 교과의 교과 역량으로 컴퓨팅 사고를 제안하였다(교육부, 2020c).

CT는 읽기, 쓰기, 산술과 같은 기본적인 개인적 능력과 같이 새로운 디지털 사용 능력을 지칭하는 용어로 Papert(1980)가 제안하고, Wing(2006)이 "CT는 컴퓨터 과학의 기본 개념을 바탕으로 문제를 해결하고, 시스템을 설계하고, 인간 행동을 이해하는 것을 포함한다"(p. 33)라고 발표한 이래로 CT라는 용어가 대중화되었으나 CT 개발에 대한 연구가 본격적으로 시작된 것은 지난 10년이라고 볼 수 있다. Wing(2017)은 CT를 "컴퓨터가 효과적으로 수행할 수 있는 방식으로 문제를 형식화하고 답을 표현하는 것과 관련된 사고 과정"으로 재정의하여 컴퓨터를 활용한 문제 해결을 통칭하는 광범위한 사고 과정을 나타내었다.

미래사회의 직업은 CT와 관련될 수 있는 디지털 기술에 관한 역량을 요구할 것으로 전망하고 있다(OECD, 2018). 또한, CT는 창의적 사고, 비판적 사고, 문제 해결력 같은 4차 산업혁명 시대가 요구하는 다양한 역량과 맞물려 있으며(Binkley et al., 2012), 체계적으로 사고하는 능력을 신장시키고(Kafai & Burke, 2013), 수학·과학 관련 역량 향상(Sengupta, Kinnebrew, Basu, Biswas, & Clark, 2013)에 잠재성을 지닌 것으로 평가받고 있다. 인공지능이 일상화된 현대 또는 미래 사회에서 CT는 컴퓨터의 진보와 함께 과거에는 불가능했던 새로운 문제 해결 전략을 사용하여 실제 세계와 가상 세계의 문제를 새롭게 바라볼 수 있는 시각이며, 동시에 새로운 해법을 제시할 수 있을 것이라는 기대하게 된다. 이렇게 CT는 프로그래밍 및 STEM 교육뿐만 아니라 의학, 경제, 법학, 사회과학, 언론학 등 다양한 분야에 영향을 미치고 있으며, 수학교육에서도 CT의 중요성이 지속적으로 제기되고 있다. 장경운(2017)은 수학교육에서 CT의 정의와 구성 요소를 조사하고, 수학 교과에서 CT를 수학적 문제 해결 관련 요소로 보았고, 신동주, 고상숙(2019)은 CT와 수학적 사고 간의 관계를 분석하고, CT를 수학 교과에 통합한 국내의 연구를 검토하여 수학적 사고를 기반으로 하는 CT 연구의 필요성을 제기하였다. 국내 수학교육 연구 분야에서 CT 개념에 관해서는 연구는 초기 단계에 머물러 있고, 앞으로 계속 연구가 필요한 분야라고 볼 수 있다.

Wing(2006)은 CT의 핵심은 프로그래밍이 아닌 개념화에 있고, 단순 반복적 기술이 아닌 모든 사람이 갖추어야 하는 핵심역량이며, 컴퓨터가 아닌 인간의 사고 방법으로 수학적 사고와 공학적 사고를 보완하고 결합한다고 주장했다. 이에 따라 국제 교육 기술 학회, 컴퓨터 과학 교사 협의회(The International Society for Technology in Education [ISTE] and the Computer Science Teachers Association [CSTA], 2011)에서는 K-12 교육에 CT를 포함하기 위해 CT를 '컴퓨터 및 기타 도구를 사용하여 문제를 해결할 수 있는 방식으로 문제를 공식화하여 데이터의 논리적 구성 및 분석, 추상화를 통한 데이터 분석을 통해 데이터를 표현하고, 알고리즘적 사고를 통한 해답을 자동화하는 과정을 포함하는 문제 해결 과정'으로 정의했다. 이와 같이 문헌 분석을 통해 CT에 대한 다양한 정의와 요소를 찾을 수 있지만, 공통적인 요소로 분해(decomposition), 추상화(abstraction), 알고리즘(algorithms)을 구성 요소로 갖는다(Shute, Sun, & Asbell-Clarke, 2017). 반면, 그동안 수학교육에서는 CT라는 용어보다 알고리즘적 사고(Algorithmic Thinking, AT)를 더 많이 사용했다. AT는 대수, 기하, 그리고 통계와 같이 다양한 영역에서 취할 수 있는 수학적 추론의 한 형태로 "결론에 적용되고 체계적으로 따를 수 있는 정밀하

⁵⁾ Computational thinking은 컴퓨팅 사고 또는 계산적 사고로 번역되어 사용되고 있는데 컴퓨팅 사고라고 번역할 경우 컴퓨터 프로그래밍에만 요구되는 사고방식으로 오인할 수 있다. 반면에 한글 사전에서 "계산(computation)"을 검색하면 "수를 헤아림, 어떤 일을 예상하거나 고려함, 값을 치름"으로 되어 있는데, 계산적 사고로 번역할 경우 Computational thinking의 의미를 충분히 담지 못할 가능성이 있어 이 글에서는 Computational thinking을 'CT'로 나타내기로 한다.

게 기술된 일상적인 절차”로 정의되기도 하며 추상화 및 일반화의 한 예로 보기도 한다(Scantamburlo, 2013). Kadijevich(2018)는 AT의 구성 요소는 분해, 추상화, 알고리즘, CT의 구성 요소는 분해, 추상화, 알고리즘, 자동화라고 하여 AT를 CT에 포함했다.

AT와 CT에 대한 수학교육 연구를 살펴보면, 컴퓨터 도구를 활용하는 것이 개념적 이해에 도움이 되지 않을 것이라는 주장도 있었다(Abramovich, 2015). 그러나 학생들이 공학적 도구를 사용하지 않고 실제 데이터 분석, 확률 시뮬레이션, 불규칙한 도형의 넓이의 정밀 측정, 고차방정식 풀이, 알고리즘 암호화의 검사와 적용하기 등을 하는 것은 오히려 유용하지 않거나 실현 불가능할 수 있다. 실제로 Drijvers, Kodde-Buitenhuis, Dooman(2019), Lockwood, DeJarnette, Asay, Thomas(2016)의 연구는 컴퓨터 도구를 활용해 개념적 이해가 신장되는 가능성을 제시했다. 혁신적인 디지털 기술의 도입으로 CT가 하나의 읽고 쓰는 능력에 비견되는 상황이라면 수학의 교수·학습에도 CT를 폭넓게 받아들여 적용하려는 시도도 필요하다.

CT를 수학적 사고 유형의 하나로 받아들인 Wolfram(2020)은 CT의 네 단계로 ‘문제 정의 - 계산 가능한 형태로 추상화 - 계산 - 결과 해석’을 제시하였다. Wolfram(2020)은 CT의 구성 요소를 정의한 것이 아니라 문제 해결 과정의 단계를 제안하였으며 그중 세 번째 단계인 답을 계산하는 과정은 컴퓨터와 같은 기계를 통해서 결과를 얻어내는 과정인데, 컴퓨터를 활용하여 문제를 해결할 수 있는 역량을 주목하였다. Wolfram(2020)은 컴퓨터로 계산하고 남은 시간 동안 다른 과정에 대한 활동에 좀 더 시간을 기울이는 것이 앞으로 다가오는 미래 사회를 대비할 수 있는 수학 학습의 핵심이라고 주장한다. Kallia, van Borkolo, Drijvers, Barendsen, Tolboom(2021)은 체계적 문헌 고찰과 델파이 조사를 통해서 수학 수업에서 CT의 특징을 문제 해결과 추상화, 패턴 인식, 알고리즘적 사고, 모델링, 논리적 및 분석적 사고, 일반화를 포함하는 인지적 과정과 수학 문제를 컴퓨터가 해결할 수 있도록 변환(transposition)하는 것으로 보았다.

이 연구에서 CT는 분해, 추상화, 알고리즘을 포함하는 사고로서 Wolfram(2020)이 제안한 네 단계를 거치는 것으로 보았다. Wolfram(2020)의 CT 단계를 Shute 외(2017)의 CT 구성 요소(분해, 추상화, 알고리즘)와 비교하면 분해(문제를 처리할 수 있는 단위로 나누기), 추상화(필요한 자료를 수집, 분석, 패턴 인식, 모델링)는 ‘계산 가능한 형태로 추상화’에 대응되며, 알고리즘(알고리즘 설계, 병렬성, 효율성, 자동화)은 ‘계산’ 단계에 속한다. CT는 인공지능의 도입으로 발전한 역량 중 하나이고, 수학교육, 과학교육, STEM 교육 등 다양한 교과에서 활용할 수 있는 능력이므로 <인공지능 수학>에서 이 역량을 얼마나 담고 있는지 분석하는 것은 필요해 보인다.

3. 연구 방법

이 연구에서는 <인공지능 수학> 교과서를 분석하기 위해 문헌 분석 방법을 따랐다. 문헌 분석 방법은 문헌을 검토하고 평가하는 연구 방법의 하나로 검색, 선택, 평가, 종합의 절차를 따른다(Bowen, 2009). 이에 따라 이 연구에서는 첫째, 검색 단계에서 <인공지능 수학> 교육과정의 개발 의도와 교과서 전반의 목차와 내용을 검토하였다. 둘째, 우리나라 수학과 교육과정 문서에 처음으로 등장하게 된 ‘관련 학습 요소’를 분석의 기준으로 선택하였다. 셋째, ‘관련 학습 요소’를 기준으로 교과서에서 용어와 기호로 정의된 내용과 공학적 도구로서의 활용 양상을 평가하였다. 마지막으로 종합 단계에서 <인공지능 수학> 교과서를 분석한 결과로부터 시사점을 도출하여 향후 교육과정 개정의 방향에 대해 고려할 사항을 제안하였다.

<인공지능 수학> 교과서에 반영된 ‘관련 학습 요소’를 중심으로, 교과서에서 다루지는 수학적 개념과 그 전개 양상을 분석하기 위해서 현재까지 발간된 <인공지능 수학> 교과서 5종을 분석의 대상으로 삼았다(<표 II-3> 참조⁶⁾).

6) 이 연구는 <인공지능 수학> 교과서별 ‘관련 학습 요소’의 반영 양상을 분석하는 것에 목적이 있다. 연구 결과에서는 출판사

<표 II-3> <인공지능 수학> 교과서 목록

분류	출판사	저자
㉠	금성출판사	오화평, 허석, 조성현, 정영민, 권상순(2021)
㉡	미래엔	황선욱, 권성훈, 정두섭, 박상의, 홍창섭(2021)
㉢	씨마스	이한진, 이지향, 이경진, 김태중, 박지훈(2021)
㉣	중앙교육	성덕현 외(2021)
㉤	천재교과서	홍진곤 외(2021)

교과서 분석에서 교과서의 외적 체제와 내적 체제를 주요 기준으로 선정했다. 교과서의 외적 체제는 교과서의 판형, 색도, 용지, 쪽수, 활자 그래픽, 편집 배열, 디자인, 사진이나 그림 등을 가리키며, 내적 체제는 내용 선정, 내용 조직, 내용 제시 방식 등을 의미한다(노명완 외, 2004; 허강 외, 2005). 이 연구에서는 '관련 학습 요소'를 중심으로 교과서를 분석하는 것에 초점이 있으므로, 외적 체제는 '관련 학습 요소'가 제시된 위치, 글씨체의 굵기, 따옴표와 같은 강조의 여부, 용어 정의 문장의 형식, 내적 체제는 수학 개념의 범위와 제시 방식에 초점을 두어 분석한다.

교과서 분석의 절차는 다음과 같다. 첫째, 교과서의 외적 체제를 중심으로 '관련 학습 요소'가 제시되는 형식상의 방법에 대해 교과서별로 비교하여 제시한다. <인공지능 수학> 교육과정에서 제시된 '관련 학습 요소'는 총 11개(진리표, 순서도, 벡터, 행렬, 유사도, 추세선, 조건부확률, 함수의 극한, (이차함수의) 미분계수, 손실함수, 경사하강법)이다. '관련 학습 요소'를 그 자체로 정의하는 사례도 있었지만, '관련 학습 요소'와 연관되는 수학적 개념, 인공지능 개념을 형식을 다르게 하여 제시하기도 한다. '관련 학습 요소'가 교과서에서 다루지는 형식상의 차이를 분류하고 범주화하여 제시한 뒤 대표되는 교과서별 사례를 분석한다.

둘째, 교과서의 내적 체제에서 '관련 학습 요소'가 담는 개념의 양적·질적 분석을 제시한다. 양적 분석은 도표를 통해 교과서별 차이에 대해 비교·분석한다. 도표는 영역/핵심개념별로 '관련 학습 요소'에 따라서 수학 개념과 수학 개념에 따른 인공지능 맥락의 사례를 제시한다. 도표는 기존 수학과 교육과정에서 다루었던 7개(진리표, 순서도, 행렬, 벡터, 조건부확률, 함수의 극한, (이차함수의) 미분계수)의 수학 학습 요소를 중심으로 작성되었으며, 교과서에 제시된 순서대로 배치하였다. 교과서별로 본문, 보조단, 문제 등의 위치와 관계없이 용어가 사용된 경우에만 도표에 담았다. 고등학교 <수학> 이후에 다루는 학습 요소나 수학 학문에서 사용하는 용어의 경우 수학 개념에 포함하였으며, 인공지능 맥락에서 다루지는 '관련 학습 요소'나 개념의 사례를 담았다. '관련 학습 요소' 개념 서술의 질적 분석은 표를 통해 교과서별로 수학 개념을 다루고 있는 차이에 대해 살펴보고 그 사례를 분석한다.

셋째, <인공지능 수학>의 '관련 학습 요소'를 다루는 활동에서 과제에 사용한 공학적 도구의 종류, 과제의 질적 수준을 분석한다. <인공지능 수학>이 개발되었던 시기엔 CT를 고려하지 않은 상태에서 교육과정의 성취기준을 개발하였다. 하지만 수학교육에서 CT의 중요성이 커지고 있고, CT는 <인공지능 수학> 과목에서 기를 수 있는 중요한 역량이 될 수 있으므로 현재 개발된 교과서가 어느 정도 CT를 구현하고 있는지 분석하여 다음 교육과정에 추가해야 할 필수 요소를 찾아내는 것이 필요하다. 이에 따라 공학적 도구를 활용한 과제에서 CT가 반영된 방식을 분석하기 위해 Wolfram(2020)이 제안한 CT의 네 단계를 활용하였다. '문제 정의' 단계에서는 해결하고자 하는 문제가 무엇인지 정의하는 단계로 정의하는 문제가 CT와의 관련될 수 있는지 판단한다. '계산 가능한 형태로 추상화' 단계는 문제의 답을 계산하는 데 사용할 수 있도록 문제를 추상화된 언어로 변환한다. '계산' 단계는 컴퓨터와 같은 공학적 도구를 활용하여 추상화된 답을 도출하는 것이다. '해석' 단계는 '문제 정의' 단

명이나 저자명을 사용하지 않고, 분류의 명칭(㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤)을 사용하였다.

계에서 제기한 문제에 대해 추상화된 답이 무엇을 의미하는지 해석한다. Wolfram(2020)이 제안한 네 단계는 수학 문제 해결 과정에서의 인간과 컴퓨터의 역할을 구분하여 제안하였다는 점에서 향후 CT 과정을 촉진할 수 있는 방향을 점검하는 데 적절할 것으로 판단하였다. Wolfram(2020)이 제시한 CT 단계(문제 정의 - 계산 가능한 형태로 추상화 - 계산 - 결과 해석)가 포함되었는지 분석하였다. ‘관련 학습 요소’에 주목하여 사용되는 소프트웨어나 공학적 도구의 종류를 분류하고, 각각의 과제에서 요구하는 CT의 단계를 분류하여 분석에 활용한다.

III. 연구 결과 및 논의

1. 형식상 차이가 있는 교과서별 ‘관련 학습 요소’ 반영 양상

기존 2015 개정 수학과 교육과정의 ‘학습 요소’는 교과서에서 용어와 기호로 정의될 때, 색깔 있는 굵은 글씨로 표시되어 다른 용어와 차이를 두면서 가독성과 변별성을 높이도록 한다. 또한, ‘학습 요소’를 정의하는 문장의 형식은 ‘A를 B라고 한다.’가 대표적인 문장의 형식이다. ‘학습 요소’를 교과서에 배치하는 것은 본문에 굵은 글씨로 표시하고, 상자 표시를 하여 개념에 대한 요약 제공하기도 하며 추가적인 설명을 위해 보조단을 활용하기도 한다. <인공지능 수학> 교과서는 ‘관련 학습 요소’를 교과서에서 나타내는 형식이 <표 III-1>과 같이 다양하다.

먼저, <인공지능 수학> 교과서에서 ‘관련 학습 요소’를 활자로 나타내는 방식에 관한 것이다. ‘조건부확률’을 제외한 ‘관련 학습 요소’를 용어로 사용하는 방식은 크게 두 가지 유형으로 나누어진다. 첫째, ‘관련 학습 요소’를 ‘A를 B라고 하자’의 형식으로 먼저 정의하고 용어로 사용하는 것이다. 이 경우 교과서에서는 ‘관련 학습 요소’를 기존의 ‘학습 요소’와 동일한 것으로 취급하여 굵은 글씨로 표시하기도 하며, 따옴표로 표시하거나 별도의 표시 없이 기본 글씨로 정의한 사례가 있다. 둘째, ‘관련 학습 요소’가 사용되는 맥락을 설명한 것이다. ㉠ 교과서의 ‘진리표’의 사례, ㉡ 교과서의 ‘순서도’의 사례에서 찾아볼 수 있는데, ‘A를 B라고 하자’의 형식을 따르지는 않고, ‘관련 학습 요소’를 굵은 글씨로 표시하며 용어가 지닌 의미를 설명한다.

다음으로, <인공지능 수학> 교과서에서 ‘관련 학습 요소’가 나타난 배열에 관한 것이다. ‘관련 학습 요소’의 교과서상의 배열은 크게 세 가지 형태로 나타난다. 첫째, ‘관련 학습 요소’를 설명하는 차원에서의 본문에서 서술하는 경우이다. 둘째, ‘관련 학습 요소’를 본문에서 강조하거나 요약하여 제시하기 위해 상자로 나타낸 경우이다. 셋째, ‘관련 학습 요소’에 대한 설명을 제공하거나 본문에서 서술한 내용을 부가적으로 설명하기 위해 보조단에 나타낸 경우이다. 이러한 배열은 ‘관련 학습 요소’마다 특징을 발견하기는 어렵지만, 교과서의 종류에 따라서 다양한 형태로 나타난다.

한편, ‘조건부확률’ 용어는 <인공지능 수학> 교과서에서 사용되지 않는다. ‘조건부확률’은 <인공지능 수학> 교육과정에서 ‘관련 학습 요소’로 제시되지만, ‘교수·학습 방법 및 유의 사항’에 ‘조건부확률’과 관련된 용어와 기호를 도입하지 않도록 한다. 이에 따라 모든 교과서에서 ‘조건부확률’에 관한 용어와 기호를 사용하지 않았지만, ‘조건’ 표현에 초점을 두어 형식을 다르게 하여 서술한다. ‘조건’을 표현하여 서술한 경우는 ‘조건부확률’을 생각해볼 수 있는 활동에서 활동 제목으로 사용하거나, ‘조건’이라는 용어를 담은 발문을 제시하거나 조건이 포함된 확률에 대한 설명을 제시함으로써 ‘조건부확률’과 관련된 사례를 설명한다.

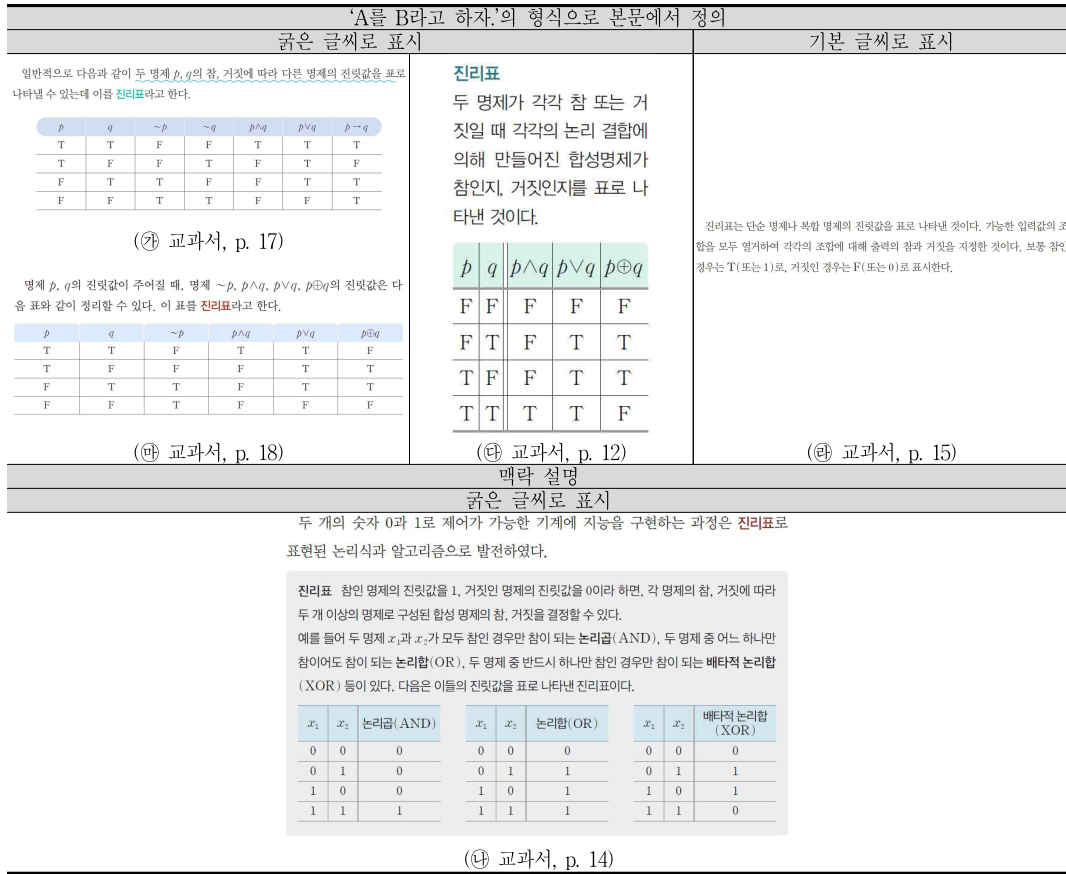
<표 III-1> 영역/핵심개념별 교과서에 나타난 '관련 학습 요소'의 활자, 배열

영역/ 핵심 개념	관련 학습 요소	활자										배열				
		용어 사용					용어 미사용					사용 여부	본문	보 조 단	위 치	
		'A를 B라고 하자.'의 형식으로 본문에서 정의			맥락 설명		'조건' 표현			사용 형식	서술					상자
		굵은 글씨	따옴표 표시	기본 글씨	굵은 글씨	기본 글씨	굵은 글씨 활동 제목	발문	기본 글씨			표시 방식	서술	상자	위 치	
인공 지능과 수학	진리표	㉠, ㉡, ㉢		㉠	㉡							교 과 서 명	㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤	㉡	㉠, ㉡	교 과 서 명
	순서도	㉠, ㉡, ㉢, ㉣				㉠							㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤	㉠, ㉡, ㉢	㉠, ㉡	
자료의 표현	벡터	㉠, ㉡, ㉢, ㉣										㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤	㉡	㉠, ㉡		
	행렬	㉠, ㉡, ㉢, ㉣	㉠									㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤	㉠	㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤		
분류와 예측	유사도	㉠										교 과 서 명	㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤	㉠, ㉡, ㉢	㉠, ㉡	
	추세선	㉠, ㉡, ㉢, ㉣	㉠										㉠	㉠	㉠, ㉡	
	조건부 확률						㉠	㉡	㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤				㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤	㉠, ㉡	㉠	
최적화	함수의 극한											교 과 서 명		㉡, ㉢, ㉣	㉠, ㉡, ㉢	
	(이차 함수의) 미분계수	㉠, ㉡, ㉢, ㉣	㉠										㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤	㉡, ㉢, ㉣	㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤	
	손실함수			㉠									㉠	㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤	㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤	
	경사 하강법												㉠, ㉡	㉠, ㉡		

기존 수학 과목에서 '학습 요소'로 제시된 것은 용어와 기호를 정의하고 사용하도록 교과서 편찬상의 유의점 및 검정기준에 제안되어 있어서, 수학 교과서에서는 본문에 색깔 있는 굵은 글씨로 작성되는 것이 관습처럼 자리 잡았다. '관련 학습 요소'라는 새로운 용어가 교육과정에 제안됨으로써 이를 나타내는 형식적인 차이가 발생하였다. '관련 학습 요소'가 나타나는 활자의 형식은 '진리표', '순서도', '조건부확률'이 다른 '관련 학습 요소'와는 형식상의 차이가 두드러지게 나타났다. '관련 학습 요소'별로 서술, 상자, 보조단에 위치하는 배열이 다르게 나타났다. 교과서별로 '관련 학습 요소' 활자를 나타내는 방법의 차이가 두드러지게 나타난 '진리표', '순서도', '조건부확률'의 사례를 중심으로 비교하여 정리하면 다음과 같다.

'진리표'는 용어를 정의하여 사용하거나 맥락을 설명하는 경우로 나뉘볼 수 있다. 4종(㉠, ㉡, ㉢, ㉣)의 교과서에서 'A를 B라고 하자.'의 형식으로 정의한다. '관련 학습 요소'를 표시하는 방식은 굵은 글씨로 표시한 경우(㉠, ㉡, ㉢), 별도 표시 없이 본문에 용어로 제시한 기본 글씨로 표시한 경우(㉣)로 나타난다. 1종(㉤)의 교과서는 '진

리표'를 사용하는 맥락을 설명함으로써 '진리표'를 구하는 과정을 제시한다. 이를 정리하면 [그림 III-1]과 같다.



[그림 III-1] '진리표'를 교과서에서 용어로 사용하는 방식

'순서도'는 '진리표'와 마찬가지로 용어를 정의하여 사용하거나 맥락을 설명한 사례로 나뉘볼 수 있다. '순서도'를 설명하는 다이어그램과 함께 4종(㉔, ㉕, ㉖, ㉗)의 교과서에서 'A를 B라고 하자.'는 형식으로 정의하고, 굵은 글씨로 표시하여 나타낸다. 1종(㉘)의 교과서에서는 '순서도'가 사용되는 맥락을 설명하여 제한한다. 이를 정리하면 [그림 III-2]와 같다.

‘A를 B라고 하자.’의 형식으로 본문에서 정의						
짧은 글씨로 표시		기본 글씨로 표시				
<p>이러한 필요성으로 문제를 분석하고 미리 약속된 기호를 사용하여 순서대로 알고리즘을 표현한 것을 순서도라고 한다. 순서도는 다음과 같은 기본 구조를 가지고 있다.</p> <p>(㉞ 교과서, p. 18)</p>	<p>※ 알고리즘과 순서도 어떤 문제를 논리적으로 해결하는 데 필요한 절차, 방법, 명령어들을 ‘알고리즘’이라 하고, 이를 알기 쉽게 기호와 그림으로 나타낸 것을 ‘순서도’라고 한다. 다음은 두 수의 합을 출력하는 알고리즘을 순서도로 표현한 것이다.</p> <p>(㉜ 교과서, p. 14)</p>	<p>어떤 문제가 발생하였을 때 여러 가지 해결 방안을 모색한 후에 그 중 가장 좋은 방법을 선택해야 한다. 이와 같이 문제를 해결해 나가는 단계적인 절차를 ‘알고리즘’이라고 하며, 알고리즘은 자연어, 순서도, 프로그래밍 언어 등과 같이 다양한 방법으로 표현할 수 있다. 우리가 일상생활에서 사용하는 언어로 표현하는 방법을 자연어로 표현한다고 한다. 자연어로 표현하는 것은 편리하고 쉽게 알아볼 수 있으나, 해석에 따라 결과가 달라질 수 있다는 단점이 있다. 현재 실내의 기온이 20℃를 넘으면 “따뜻함”을 출력하고 20℃를 넘지 못하면 “따뜻함”을 출력한다는 내용을 순서도와 프로그래밍 언어로 표현하면 아래 표와 같다.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>순서도로 표현</th> <th>프로그래밍 언어로 표현</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> </td> <td> <pre>문제 해결 과정을 컴퓨터를 이용하여 바로 해결할 수 있는 반면에, 프로그래밍 언어에 대한 문법을 알고 있어야 한다는 단점이 있다. temp = 19 if temp > 20 : print("따뜻함") else: print("따뜻함")</pre> </td> </tr> </tbody> </table> <p>문제 해결 방법의 표현</p> <p>(㉠ 교과서, p. 20)</p>	순서도로 표현	프로그래밍 언어로 표현		<pre>문제 해결 과정을 컴퓨터를 이용하여 바로 해결할 수 있는 반면에, 프로그래밍 언어에 대한 문법을 알고 있어야 한다는 단점이 있다. temp = 19 if temp > 20 : print("따뜻함") else: print("따뜻함")</pre>
순서도로 표현	프로그래밍 언어로 표현					
	<pre>문제 해결 과정을 컴퓨터를 이용하여 바로 해결할 수 있는 반면에, 프로그래밍 언어에 대한 문법을 알고 있어야 한다는 단점이 있다. temp = 19 if temp > 20 : print("따뜻함") else: print("따뜻함")</pre>					

[그림 III-2] ‘순서도’를 교과서에서 용어로 사용하는 방식

‘조건부확률’은 교과서에서 용어로 사용되지 않고, ‘조건’ 표현을 제시함으로써 설명하는 형식으로 나타난다. 이러한 설명은 활동 제목 표시(㉞, ㉟), 발문 제시(㉜, ㉝), 기본 글씨 표시(㉞, ㉟, ㉠, ㉡, ㉢)로 경우를 나누어 생각할 수 있다. ㉠ 교과서는 ‘조건’을 다루는 예제에 대한 보조적인 설명을 보조단에서 제시한다. 이를 정리하면 [그림 III-3]과 같다.

용어 미사용 ‘조건’ 표현 제시																								
활동 제목 표시	발문 제시	기본 글씨로 표시																						
<p>(㉞ 교과서 p. 95)</p>	<p>조건이 주어졌을 때 사건이 일어날 확률은 무엇인가요?</p> <p>영희 소프트웨어 업체에서는 ‘기온’ 사용자의 신청한 영희 저를 바탕으로 새로운 사용자가 좋아하는 영희 앱을 추천한다. 다음은 한 영희 소프트웨어 업체에서 사용자 100명에게 대상으로 영희 A, 영희 B에 대한 선호도를 조사한 표이다.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>영희 A를 좋아하는 영희</th> <th>영희 B를 좋아하는 영희</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>영희 A를 좋아하는 영희</td> <td>8명</td> </tr> <tr> <td>영희 A를 좋아하는 영희</td> <td>27명</td> </tr> </tbody> </table> <p>(1) 조한 사용자 중에서 영희 A를 좋아하는 영희 B를 좋아하는 영희를 구하여 보자. (2) 조한 사용자 중에서 영희 A를 좋아하는 영희 A를 좋아하는 영희 B를 좋아하는 영희를 구하여 보자.</p> <p>(㉜ 교과서 p. 89)</p>	영희 A를 좋아하는 영희	영희 B를 좋아하는 영희	영희 A를 좋아하는 영희	8명	영희 A를 좋아하는 영희	27명	<table border="1"> <thead> <tr> <th>영희</th> <th>영희 A를 좋아하는 영희</th> <th>영희 B를 좋아하는 영희</th> <th>계</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>영희 A를 좋아하는 영희</td> <td>8</td> <td>17</td> <td>25</td> </tr> <tr> <td>영희 B를 좋아하는 영희</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>13</td> </tr> <tr> <td>계</td> <td>15</td> <td>23</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>(1) 영희 A를 좋아하는 영희를 선택할 때, 그 영희가 ‘영희 A’를 포함할 확률을 구하시오. (2) ‘영희 B’를 포함한 영희를 하나 선택할 때, 그 영희가 영희 A를 포함할 확률을 구하시오.</p> <p>▶ 영희 A를 추천하는 영희는 영희 A를 좋아하는 영희가 영희 B를 좋아하는 영희보다 많은 영희를 추천하는 영희이다. 영희 A를 추천하는 영희는 영희 A를 좋아하는 영희가 영희 B를 좋아하는 영희보다 많은 영희를 추천하는 영희이다.</p> <p>(1) 영희 A를 포함한 영희를 하나 선택할 때, 그 영희가 영희 A를 포함할 확률은 $\frac{15}{25}$이다. (2) ‘영희 B’를 포함한 영희를 하나 선택할 때, 영희 A를 포함할 확률은 $\frac{7}{23}$이다. (3) $\frac{15}{25}$ $\frac{7}{23}$</p> <p>(㉠ 교과서 p. 95)</p>	영희	영희 A를 좋아하는 영희	영희 B를 좋아하는 영희	계	영희 A를 좋아하는 영희	8	17	25	영희 B를 좋아하는 영희	7	6	13	계	15	23	
영희 A를 좋아하는 영희	영희 B를 좋아하는 영희																							
영희 A를 좋아하는 영희	8명																							
영희 A를 좋아하는 영희	27명																							
영희	영희 A를 좋아하는 영희	영희 B를 좋아하는 영희	계																					
영희 A를 좋아하는 영희	8	17	25																					
영희 B를 좋아하는 영희	7	6	13																					
계	15	23																						

[그림 III-3] ‘조건부확률’을 교과서에서 용어로 사용하는 방식

이상의 분석 결과처럼 ‘관련 학습 요소’를 교과서에서 수용하는 것은 용어 사용 여부와 용어에 대한 정의 제시 여부, 배열 방식의 차이로부터 나타났다. 이러한 차이가 두드러지게 나타났던 영역/핵심개념은 ‘인공지능과 수학’이다. ‘인공지능과 수학’은 수학과 인공지능이 어떻게 연결되고 활용될 수 있는지를 주로 담고 있으며, ‘진리표’와 ‘순서도’를 ‘관련 학습 요소’로 제안하고 있다. ‘진리표’와 ‘순서도’는 기존 수학과 교육과정에 소개되었던

‘학습 요소’이지만 이 영역/핵심개념에서는 인공지능의 맥락과 연결에 초점을 두었다. 따라서 ‘학습 요소’로 취급해 하나의 용어로 정의해서 사용하기도 했지만, 보조적인 용어에 대한 소개, 용어가 사용되는 맥락을 중심으로 서술된 것이다. ‘조건부확률’은 교육과정에서 명시적으로 교수·학습 상황에서 다루지 않도록 제안되어 있으므로 교과서에서는 해당 용어는 사용되지 않는다. 하지만 ‘조건부확률’이 ‘관련 학습 요소’로 제안되어 있어 교과서에 반영하기 위해서 ‘조건’ 표현으로 설명한 것이다. 이는 ‘조건부확률’이라는 용어 사용을 피함으로써 나타나는 양상이다.

2. 양적, 질적 차이가 있는 교과서별 ‘관련 학습 요소’ 반영 양상

가. 수학 개념, 수학 개념과 관련되는 인공지능 맥락의 사례 개수

<인공지능 수학> 교육과정에서 ‘관련 학습 요소’로 제시된 용어가 아닌 일반적인 수학 개념, 인공지능 맥락에서 다루지는 개념이 다른 수학 과목의 ‘학습 요소’처럼 용어와 기호를 정의하여 교과서에서 다루질 수 있는지는 교육과정 문서, 시안 개발 연구보고서에는 구체적으로 제시되어 있지 않다. 또한, ‘관련 학습 요소’ 이외의 개념이 교과서에서 다룰 수 있는 양적 제한도 구체적이지 않다. 수학 개념, 수학 개념과 관련되는 인공지능 맥락의 사례를 영역/핵심개념별로 제시하면 다음 그림과 같다([그림 III-4], [그림 III-5], [그림 III-6], [그림 III-7] 참조).

수학 개념										관련 학습 요소		수학 개념과 관련되는 인공지능 맥락의 사례							
										진리표	순서도								
논리	순서도	알고리즘	논리합	논리곱	진릿값	진리표	유추법	연역법	귀납법	Ⓢ	데이터베이스	전문가 시스템	XOR 연산	퍼셉트론	논리 게이트				
		순서도	알고리즘	배타적 논리합(XOR)	논리합(OR)	논리곱(AND)	진릿값	진리표	합성명제	Ⓣ	퍼셉트론	전문가 시스템	논리회로						
		순서도	알고리즘	진리표	합성명제	배타적 논리합(XOR)	논리합(OR)	논리곱(AND)	Ⓤ	퍼셉트론	전문가 시스템	다중 퍼셉트론	역전파 알고리즘						
		순서도	알고리즘	배타적 논리합	논리곱	진릿값	진리표	ⓖ	논리회로	논리 게이트	논리식	프로그램	프로그래밍	구조적 프로그래밍					
		순서도	진리표	XOR	OR	AND	진릿값	ⓗ											

[그림 III-4] ‘인공지능과 수학’ 영역/핵심개념에서 다루는 교과서별 수학 개념, 인공지능 맥락의 사례

‘인공지능과 수학’ 영역/핵심개념은 ‘진리표’, ‘순서도’를 중심으로 수학과 인공지능의 연관성을 학생들이 인식할 수 있도록 구성된다. ‘인공지능과 수학’ 영역/핵심개념은 인공지능의 역사, 인공지능 개념에 대한 개관을 중심으로 다루며, ‘진리표’와 ‘순서도’의 개념으로부터 인공지능에서의 사고의 흐름을 이해할 수 있도록 한다. ‘인공지능과 수학’ 영역/핵심개념에서 ‘진리표’, ‘순서도’에 관한 수학 개념은 교과서에서 최대 10개(㉔), 최소 6개(㉑)의 개념을 다룬다(평균 약 8개). 교과서에서는 공통으로 4개(진리표, 순서도, 논리곱, 논리합)의 개념을 다루며, 네 개의 교과서에서 진릿값, 알고리즘, 배타적 논리합의 개념을 다룬다. ㉔ 교과서에서는 증명의 방법으로 귀납법, 연역법, 유추법과 함께 논리를 설명함으로써 수학 개념을 다룬다. ‘진리표’, ‘순서도’와 연관된 개념으로 소개되는 인공지능 맥락의 사례의 경우 모든 교과서에서 공통으로 다루는 사례는 없으며, 전문가 시스템, 퍼셉트론 사례는 각각 세 교과서에서 제시된다. 교과서에서는 최대 6개(㉑)의 사례를 다루고, 관련 사례를 다루지 않는 교과서도 있다(평균 약 4개). ㉑ 교과서에서는 ‘진리표’, ‘순서도’와 관련된 수학 개념을 중심으로 소개한다. ‘인공지능과 수학’ 영역/핵심개념은 교과서별로 다루지는 수학 개념에 기초하여 인공지능 맥락의 사례를 소개하기보다는 인공지능과 관련되는 아이디어를 소개하는 것으로 교과서를 구성한 것으로 볼 수 있다.

수학 개념															관련 학습 요소		수학 개념과 관련된 인공지능 맥락의 사례									
															벡터											
															교과서											
															벡터의 차원	벡터의 성분	벡터	②	원-핫 벡터	Bag of Words (BoW)	EM의 상태도수	해밍 거리				
															벡터의 성분	벡터	②	유클리드 유사도	코사인 유사도							
벡터의 내적	벡터의 크기	벡터의 실수배	벡터의 뺄셈	벡터의 덧셈	벡터의 성분	벡터의 덧셈	벡터의 차원	벡터의 성분	벡터	②	원-핫 벡터	단어 임베딩	단어 임베딩 벡터	유클리드 유사도	코사인 유사도											
벡터의 뺄셈	벡터의 수의	벡터의 내적	일벡터	행벡터	벡터의 크기	벡터의 실수배	벡터의 뺄셈	벡터의 덧셈	벡터의 성분	서로 같은 벡터	벡터	②	(유클리드 유사도)													
															행렬의 실수배	행렬의 뺄셈	행렬의 덧셈	행렬의 전치	행렬	②	픽셀	해상도	RGB	가중치		
대칭 (변환)	이동 (변환)	회전 (변환)	이동 (변환)	(달음) 변환	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬	②	픽셀	해상도	RGB	가중치	해밍 거리									
계수 행렬	선형 연립 방정식	회전 변환	이동 변환	(달음) 변환	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬	②	픽셀	해상도	RGB	가중치	평균 행렬범									
															행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	행렬의 곱셈	서로 같은 행렬	행렬	②	픽셀	RGB	가중치		
수학 개념															관련 학습 요소		수학 개념과 관련된 인공지능 맥락의 사례									
															행렬											
															교과서											

[그림 III-5] '자료와 표현' 영역/핵심개념에서 다루는 교과서별 수학 개념, 인공지능 맥락의 사례

'자료와 표현' 영역/핵심개념은 텍스트 자료를 벡터로 표현하는 방법, 이미지를 픽셀 단위로 수치화하여 행렬로 나타내는 방법을 다룬다. '자료와 표현' 영역/핵심개념에서 '벡터'에 관한 수학 개념은 최대 12개(㉒), 최소 2개(㉑)의 개념을 다룬다(평균 약 6개). 교과서에서는 공통으로 2개(벡터, 벡터의 성분)의 개념을 다룬다. 벡터의 차원은 2종(㉑, ㉒)의 교과서에서, 벡터의 내적은 2종(㉑, ㉒)의 교과서에서 다룬다. '벡터'와 연관된 인공지능 맥락의 사례의 경우 모든 교과서에서 공통으로 소개하는 사례는 없다. 교과서에서는 최대 5개(㉑), 최소 1개(㉒)의 사례를 다룬다(평균 3개). 원-핫 벡터, 유클리드 유사도, 코사인 유사도⁷⁾는 각각 3종의 교과서에서 '벡터'와 관련된 사례로 설명한다.

'행렬'에 관한 수학 개념은 최대 16개(㉑), 최소 8개(㉒)의 개념을 다룬다(평균 약 11개). 교과서에서 공통으로 7개(행렬, 성분, 행, 열, 행렬의 덧셈, 행렬의 뺄셈, 행렬의 실수배)의 개념을 다룬다. 행렬의 곱셈은 1종(㉑)의 교과서를 제외한 모든 교과서에서 포함되어 있으며, ㉑ 교과서에서는 유일하게 전치행렬을 다룬다. 3종(㉑, ㉒, ㉓)의 교과서에서는 행렬로 표현하는 변환의 다루었고 교과서별로 대칭변환, 이동변환, 회전변환 중의 일부 혹은 전부를 다룬다. '행렬'과 관련된 인공지능 맥락의 사례는 최대 5개(㉑), 최소 3개(㉒)의 사례를 다루며(평균 4개), 공통적으로 픽셀, RGB의 개념을 소개한다. 해밍 거리는 2종(㉑, ㉒)의 교과서에서 '행렬'과 연관 지어 설명하며, 1종(㉑)의 교과서에서는 '벡터'와 연관 지어 설명한다.

수학 개념				관련 학습 요소	
				조건부화물	
				교과서	
베이지 정리	수학적확률	통계적확률	시행	②	
				②	
				②	
사후확률	사전확률	통계적확률	수학적확률	②	
				시행	②

[그림 III-6] '분류와 예측' 영역/핵심개념에서 다루는 교과서별 수학 개념

7) ㉑, ㉒ 교과서는 벡터의 내적을 도입하고 나서 코사인 유사도를 도입하는 반면, ㉑ 교과서는 벡터의 내적 도입 없이 코사인 유사도를 다룬다. ㉑ 교과서에서 코사인 유사도를 도입할 때, 벡터의 내적 기호만을 사용하지 않고 계산식으로 정의한다.

‘분류와 예측’ 영역/핵심개념은 자료의 정리, 분류, 분석의 차원에서 인공지능이 확률적으로 예측하는 것과 관련하여 내용이 구성된다. ‘분류와 예측’ 영역/핵심개념에서 ‘조건부확률’과 관련된 수학 개념은 최대 4개(㉒, ㉓)를 다루며, ㉒, ㉓ 교과서에서는 확률과 관련된 개념을 새롭게 도입하지 않는다(평균 약 2개). ㉑ 교과서에서는 베이즈 정리의 용어를 다루고, ㉒ 교과서에서는 사전확률과 사후확률의 개념을 다룬다. ‘분류와 예측’ 영역/핵심개념에서 확률의 개념은 인공지능의 자료 분석 차원에서 활용될 수 있는 정도로 사례가 다루어지기 때문에, 인공지능 맥락의 사례보다는 실생활에 확률이 적용되는 사례를 중심으로 설명한다.

수학 개념													관련 학습 요소										
													함수의 극한	수학 개념과 관련된 인공지능 맥락의 사례									
													(이차함수의) 미분계수										
													교과서										
													㉑	최적화	예측값	실제값	오차	손실 함수	경사 하강법	최적화	학습률	경사 하강법	학습률
													㉒	예측값	실제값	오차	손실 함수	최적화	경사 하강법	초깃값	경사 하강법	학습률	
													㉓	예측값	실제값	오차	손실 함수	최적화	경사 하강법	초깃값	경사 하강법	학습률	
자의 미분법	합의 미분법	실수배 미분법	도함수	미분 계수	평균 변화율	중분	우극한	좌극한	극한(값)	수렴	$\sum_{k=1}^n a_k$	수열	㉔	예측값	실제값	오차	최적화	손실 함수	경사 하강법	학습률			
													㉕	예측값	실제값	오차	손실 함수	경사 하강법	최적화	학습률			

[그림 III-7] ‘최적화’ 영역/핵심개념에서 다루는 교과서별 수학 개념, 인공지능 맥락의 사례

‘최적화’ 영역/핵심개념은 합리적인 의사 결정 모델을 찾기 위해 ‘손실함수’를 구하며, 최적화해나가는 과정으로 ‘경사하강법’을 다룬다. ‘최적화’ 영역/핵심개념에서 ‘함수의 극한’, ‘(이차함수의) 미분계수’에 관한 수학 개념은 교과서에서 최대 13개(㉒), 최소 3개(㉑)의 개념을 다룬다(평균 6개). 먼저, ‘함수의 극한’에 관한 개념은 1개(극한(값))의 개념을 교과서에서 공통으로 다룬다. ‘수렴’ 용어는 1종(㉑)의 교과서를 제외하고 모든 교과서에서 도입한다. ㉒ 교과서는 우극한과 좌극한의 용어를 포함한다. 다음으로, ‘(이차함수의) 미분계수’에 관한 개념은 2개(평균변화율, 미분계수)의 개념을 공통으로 다룬다. 2종(㉑, ㉒)의 교과서는 도함수의 개념도 다룬다. ㉓ 교과서는 도함수의 개념에서 더 나아가 실수배, 합, 차의 미분법을 다룬다. ‘함수의 극한’과 ‘(이차함수의) 미분계수’와 관련된 인공지능 맥락의 사례는 최대 9개(㉑, ㉒), 최소 5개(㉓)를 포함하며(평균 약 7개), 공통으로 오차, 손실함수, 경사하강법, 최적화, 학습률을 다룬다. 예측값, 실제값은 4종(㉑, ㉒, ㉓, ㉔)의 교과서에서 명시적으로 언급하며, 초깃값은 2종(㉑, ㉒)의 교과서에서 직접 용어로 사용한다.

‘관련 학습 요소’에 관해서 교과서에서 다루는 수학 개념의 개수에 차이가 있다. 수학 개념 개수의 편차는 교과서별로 차이가 크다. 마찬가지로 수학 개념과 관련 지어 인공지능 맥락의 사례를 소개하는 개수도 교과서별로 차이가 있다. 교과서에서 다수의 수학 개념을 다룬다고 해서 인공지능 맥락의 사례를 더 많이 다루지 않는다. 반대로 교과서마다 수학 개념을 더 적게 다룬다고 해서 인공지능 맥락의 사례를 덜 소개하지 않는다. 다시 말해서 수학 개념의 수와 인공지능 맥락의 사례의 개수 사이에는 상관관계가 드러나지 않는다. 교과서 저자가 ‘관련 학습 요소’를 해석하는 방식과 이에 기초한 교과서별 내용 구성 및 선정 방법에 따라서 수학 개념, 인공지능 맥락의 사례의 개수가 다르게 나타난 것이다. ‘관련 학습 요소’ 개념을 기존 2015 개정 수학과 교육과정에서 다루는 수학 개념과 연결 지어 충분히 다룬 교과서가 있는 반면, 인공지능의 맥락의 사례를 이해할 수 있는 정도로 최소한의 수학 개념을 제시한 교과서로 나눌 수 있다.

나. 수학 개념의 서술 방법

인공지능 맥락이 수학 개념과 연결되면서 기존 수학 교과서에서 다루어 왔던 수학 개념의 접근 방식에 차이가 있다. 예를 들어, 벡터의 개념은 물리학과 연계하여 다루지는 것이 일반적이고, 이를 수학적으로 해석하기 위해 위치벡터, 평면벡터의 성분 등이 다루진다. ‘함수의 극한’과 ‘(이차함수의) 미분계수’ 개념은 도함수를 정의하

기 위한 선행 개념으로 제시되어 왔으나, <인공지능 수학> 과목에서는 도함수를 다루지 않기 때문에 '함수의 극한'과 '(이차함수의) 미분계수' 개념은 인공지능에 필요한 도구로 소개된다. '진리표', '순서도'⁸⁾, '행렬'의 개념은 수학 개념에서 활용되었던 정의를 그대로 인공지능 맥락에서 다루고 있고, '조건부확률'의 개념은 수학 과목과 동일하지만, 형식상의 차이 기존 수학 과목과의 차이, 교과서별 차이는 두드러지게 나타나지 않는다.

· 벡터

'벡터' 개념은 2015 개정 수학과 교육과정 <기하>와 <인공지능 수학>에서 다룬다. <기하> 과목에서는 크기와 방향을 가지는 양으로 정의하며, 이를 벡터의 성분으로 나타내 좌표평면에 다뤄질 수 있다는 점을 이해할 수 있도록 교과서를 서술한다. 다시 말해, <기하> 과목에서 벡터 개념은 물리학에서 다루지는 벡터 개념과의 연계하여 서술한다. <인공지능 수학>에서 '벡터' 개념은 교과서별로 벡터의 정의와 활용 방식 면에서 차이가 있으며 이를 정리하면 <표 III-2>와 같다.

<표 III-2> 교과서별 '관련 학습 요소' '벡터'의 정의와 설명

교과서 구분	㉑	㉒	㉓	㉔	㉕
벡터의 정의와 설명					
여러 개의 자료를 순서쌍의 형태로 표현한 것으로 벡터를 정의	○	○	○		○
크기와 방향을 가지는 양으로 벡터를 정의				○	
벡터가 크기와 방향을 가지는 양임을 추가 설명			○		
벡터를 성분을 이용하여 순서쌍으로 나타낼 수 있음을 추가 설명				○	
평면벡터를 좌표평면에 표현		○	○		○
3차원 벡터를 좌표공간에 표현				○	○
기하적 관점에서 벡터를 해석			○	○	
3차원 이상의 벡터를 순서쌍으로 나타내어 활용	○	○	○	○	○
3차원 이상의 벡터의 연산을 설명				○	

첫째, <인공지능 수학> 과목에서 '벡터'를 정의하는 방식은 <기하> 과목의 방식을 따르는 경우(㉑)와 인공지능의 맥락에서 순서쌍의 형태로 표현한 것으로 정의한 경우(㉒, ㉓, ㉔, ㉕)로 구분된다.([그림 III-8] 참조). ㉕ 교과서의 경우 키와 몸무게를 순서쌍으로 표현하고, 이를 벡터의 개념으로 연결하여 정의한다. ㉑ 교과서는 순서쌍으로 나타낸 성분을 벡터의 개념으로 정의하고 나서 추가 용어 설명을 통해 벡터가 크기와 방향을 가지는 양임을 설명한다. 교과서별 '벡터'의 정의의 차이는 인공지능과의 연관성의 언급 여부와 관련이 있다.

둘째, <인공지능 수학> 과목에서 3차원 이상의 벡터를 공통으로 다루고 있다. 벡터의 성분을 순서쌍으로 나타내어 3차원 이상의 벡터를 다루고 있다. 텍스트 자료를 단어 집합의 형태로 나타내어, 이를 벡터로 나타낸 것이다. 2종(㉑, ㉕)의 교과서에서는 3차원 벡터를 좌표공간에 나타내고, 공간좌표를 표현한다. <기하> 과목에서는 공간벡터를 다루지 않지만, 인공지능의 맥락에서는 3차원 이상의 벡터를 다루는 경우가 다수이다. 따라서 공간좌표를 구체적으로 정의하지 않고 공간에서 좌표를 나타낸 그림을 포함하여 제시한다.

모든 교과서에서 공통으로 나타난 '벡터'의 개념은 순서쌍으로 표현한다는 점이다. 이러한 정의를 통해서 벡터의 차원에 대한 제한을 두지 않고 3차원 이상의 벡터를 다루고 있다. 2015 개정 교육과정 <기하> 과목에서 공간벡터를 다루지 않고 평면벡터만을 다루지 않는다. 그러나 텍스트 자료를 분류하는 것에서 집합의 원소의 개수를 셈하는 것과 차원을 늘려나가는 것이 같으므로, 3차원 이상의 벡터를 다루는 것이 <인공지능 수학>에서

⁸⁾ 문제 해결의 절차를 나타낸 '순서도'의 경우, '인공지능과 수학' 영역/핵심개념뿐만 아니라 '최적화' 영역/핵심개념에서도 다뤄으로써 영역/핵심개념 간 연결성을 강조한 교과서(㉑, ㉓, ㉕)가 있다.

자연스러운 것이다.

여러 개의 자료를 순서쌍의 형태로 표현한 것으로 벡터를 정의	<p>n개의 수 x_1, x_2, \dots, x_n을 괄호 속에 순서대로 나열하여 나타낸 $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$을 벡터라고 한다. 이때 x_1, x_2, \dots, x_n을 벡터 \vec{X}의 성분이라 하고, x_1을 첫째 성분, x_2을 둘째 성분, \dots, x_n을 n째 성분이라고 한다.</p> <p>(㉔ 교과서, p. 32)</p>
크기와 방향을 가지는 양으로 벡터를 정의	<p>길이, 넓이, 부피, 속력 등은 그 양을 하나의 실수로 나타낼 수 있다. 그러나 속도나 가속도, 물체에 작용하는 힘 등은 그 양을 크기뿐만 아니라 방향도 함께 나타내어야 한다. 이와 같이 크기와 방향을 함께 갖는 양을 '벡터(vector)'라고 한다.</p> <p>(㉕ 교과서, p. 30)</p>

[그림 III-8] '자료의 표현' 영역/핵심개념에서 '벡터'를 정의하는 방식

· 함수의 극한, (이차함수의) 미분계수

'함수의 극한', '(이차함수의) 미분계수' 개념은 <수학II> 과목에서 다루진다. <수학> 이수 이후에 선택할 수 있도록 설계된 <인공지능 수학>에서는 도함수를 정의하지 않고, 인공지능의 맥락에 필요한 도구로서 '함수의 극한'과 '(이차함수의) 미분계수'를 다룰 수 있도록 한다.⁹⁾ '손실함수'와 '경사하강법'을 도입하기 위해 '함수의 극한'과 '(이차함수의) 미분계수'를 다루는 것은 동일하지만, 방식은 교과서마다 차이가 있다(<표 III-3> 참조).


<표 III-3> 교과서별 '관련 학습 요소' '함수의 극한', '(이차함수의) 미분계수'의 정의와 설명

교과서 구분	가	나	다	라	마
함수의 극한, (이차함수의) 미분계수의 정의와 설명					
공학적 도구로 그래프에서 한없이 가까워지는 값으로 극한을 정의	○				
직관적인 수준으로 극한을 정의		○	○	○	○
접선의 기울기로 미분계수를 정의	○	○	○	○	○
평균변화율의 극한값은 접선의 기울기라는 점을 설명	○	○	○	○	○
이차함수의 미분계수를 일반화된 식으로 제시			○		○
이차함수의 도함수를 정의		○		○	
미분계수의 존재가 미분가능성을 의미함을 설명	○				
미분계수가 순간변화율임을 설명			○	○	○

첫째, 함수의 극한의 정의는 그래프에서 한없이 가까워지는 값 또는 직관적인 수준으로 다루지는 값으로 다루는 방법이 나뉜다. 모든 교과서가 함수의 극한을 직관적인 수준으로 도입할 때, 그래프를 예시로 제시하여 시각적으로 '한없이 가까워진다'는 것의 의미를 파악할 수 있도록 제시한다. 4종(㉔, ㉕, ㉖, ㉗)의 교과서에서 그래프는 함수의 극한을 이해하기 위한 보조적인 도구이지만, ㉘ 교과서는 함수의 극한을 정의할 때 그래프를 적극적으로 활용한다. 나머지 교과서에서 ' $x \rightarrow a$ 일 때, $f(x) \rightarrow L$ 또는 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ '과 같이 수렴의 개념을 이용

9) <경제 수학>은 <인공지능 수학>과 마찬가지로 고등학교 <수학> 이후에 <수학II> 이수 이전에도 '함수의 극한'과 '(이차함수의) 미분계수'를 다룰 수 있도록 설계된 과목이다. <경제 수학>은 미분의 활용에서 삼차 이하의 다항함수와 무리함수를 다룰 수 있도록 설계되어 있다.

하여 극한값을 정의한 것과 다르게 그래프에서 한없이 가까워지는 함숫값으로 극한값을 정의한다.([그림 III-9] 참조).

<p>공학적 도구로 그래프에서 한없이 가까워지는 값으로 극한을 정의</p>	<p>평가 절기에서 함수 $f(x) = x^2 + 1$의 그래프 위를 따라 점 A의 x좌표가 0에 가까워지도록 이동시켜 보면 점 A의 y좌표는 1에 점점 가까워짐을 확인할 수 있다.</p>  <table border="1" data-bbox="933 526 1284 622"> <tr> <td>x</td> <td>2</td> <td>1.5</td> <td>1</td> <td>0.1</td> <td>\rightarrow</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$x^2 + 1$</td> <td>5</td> <td>3.25</td> <td>2</td> <td>1.01</td> <td>\rightarrow</td> <td>1</td> </tr> </table> <table border="1" data-bbox="933 577 1284 627"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1.5</td> <td>-1</td> <td>-0.1</td> <td>\rightarrow</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$x^2 + 1$</td> <td>5</td> <td>3.25</td> <td>2</td> <td>1.01</td> <td>\rightarrow</td> <td>1</td> </tr> </table> <p>즉, x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다. 이때 1을 $x=0$에서의 함수 $f(x)$의 극한값이라 하고, 기호로 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$과 같이 나타낸다.</p>	x	2	1.5	1	0.1	\rightarrow	0	$x^2 + 1$	5	3.25	2	1.01	\rightarrow	1	x	-2	-1.5	-1	-0.1	\rightarrow	0	$x^2 + 1$	5	3.25	2	1.01	\rightarrow	1
x	2	1.5	1	0.1	\rightarrow	0																							
$x^2 + 1$	5	3.25	2	1.01	\rightarrow	1																							
x	-2	-1.5	-1	-0.1	\rightarrow	0																							
$x^2 + 1$	5	3.25	2	1.01	\rightarrow	1																							
<p>(㉞) 교과서, pp. 116-117</p>																													
<p>직관적인 수준의 극한의 정의</p>	<p>① 함수의 극한</p> <p>함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.</p> <p style="text-align: center;">$x \rightarrow a$일 때, $f(x) \rightarrow L$ 또는 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$</p>																												
<p>(㉞) 교과서, p. 121</p>																													

[그림 III-9] '최적화' 영역/핵심개념에서 '함수의 극한'을 정의하는 방식

둘째, '(이차함수의) 미분계수'의 일반화된 식을 다루는 방식이 도함수의 도입과 관련하여 차이가 있다. 2종(㉞, ㉞)의 교과서에서는 이차함수의 도함수를 도입하여 이차함수의 미분계수를 용이하게 구할 수 있도록 한다. ㉞, ㉞ 교과서의 경우에는 도함수를 도입하지 않지만, ' $f(x) = ax^2 + bx + c$ 일 때, $f'(t) = 2at + b$ '라는 이차함수의 미분계수의 일반화된 식을 도입한다. ㉞ 교과서는 미분계수를 평균변화율의 극한, 접선의 기울기를 통해 정의하지만, 일반화된 식을 도입하거나 도함수를 정의하는 것이 아니라 공학적 도구를 활용하여 이차함수의 미분계수를 구할 수 있도록 한다. 공학적 도구를 이용하여 직선의 방정식을 통해 도함수의 식을 구하고, 미분계수를 구할 수 있도록 한 것이다.

3. CT가 분명히 드러나지 않는 '관련 학습 요소'별 공학적 도구 활용 양상

가. '관련 학습 요소'에 따른 공학적 도구의 종류

<인공지능 수학> 교과서를 개발할 때 구체적인 공학적 도구의 활용 방법이나 공학적 도구를 이용한 수업 및 평가 방법이 반드시 포함되어야 한다고 제안하고 있다. 교과서 편찬상의 유의점 및 인정기준에서는 공학적 도구, 코딩 또는 교구 등을 활용한 학습 활동을 제시하며, 학생들이 직접 조작하고 탐구할 기회를 제공하여 교과서를 집필할 수 있도록 하였다. '관련 학습 요소'에 따른 공학적 도구의 종류는 교과서별로 차이가 있었으며 이를 정리하면 <표 III-4>와 같다.

<인공지능 수학> 교과서에서 활용한 공학적 도구는 크게 4가지(교육용 소프트웨어, 프로그래밍 언어, 문서 편집기, 웹 기반 응용 프로그램)로 나눌 수 있다. 교육용 소프트웨어는 알지오메스, 지오지브라와 같은 동적 기하 소프트웨어와 Desmos와 같은 수식을 입력하면 좌표평면에 그래프를 그려주는 그래픽 계산기도 있었으며, 통그라미와 같이 통계 소프트웨어도 있다. 교육용 소프트웨어는 '추세선', '함수의 극한', '손실함수', '경사하강법' 등 '분류와 예측', '최적화' 영역/핵심개념에서 주로 활용되며 주어진 자료의 산점도를 그리며 두 자료의 상관관계를 파악하기 위하여 활용된다. 문서 편집기는 워드프로세서와 스프레드시트가 활용되며, 이미지 데이터를 행렬로 표현하는 과정에서 활용된다. 또한 스프레드시트는 '행렬', '추세선', '손실함수', '경사하강법' 등에 폭넓게 사용된다.

파이썬이 최근 가장 널리 사용되는 프로그래밍 언어로 ‘순서도’, ‘벡터’, ‘행렬’ 개념을 다룰 때 도구로 활용된다. 웹 기반 응용 프로그램은 주로 ‘벡터’와 ‘행렬’과 연관된 텍스트 자료와 이미지 자료를 다룰 때 이용된다. 웹 기반 응용 프로그램은 티처를 머신, 머신러닝 포 키즈와 같이 인공지능이 자료를 처리하는 과정(사람이 자료를 입력하면, 인공지능이 자료를 학습하여 모델을 만들고, 이 모델에 새로운 자료를 입력하여 결과를 예측하는 과정)을 모두 체험할 수 있는 프로그램도 있지만, MNIST, 워드 클라우드 등과 같이 사람이 주어진 자료를 웹사이트에 입력하면 단순히 결과를 출력하는 웹 기반 응용 프로그램도 있다.

<표 III-4> 교과서에서 활용된 공학적 도구

공학적 도구 분류		영역/핵심개념 관련 학습요소	인공지능 과 수학		자료의 표현		분류와 예측			최적화			
			진리 표	순서 도	벡터	행렬	유사 도	추세 선	조건 부 확률	함수 의 극한	(이차 함수의) 미분계수	손실 함수	경사 하강 법
교육 용 소프트 웨어	그래픽 계산기	알지오메스								㉔(1)		㉔(1), ㉔(1)	
		지오지브라							㉔(1)				
	Desmos										㉔(1)		
	통계 소프트웨 어	통그라미						㉔(1)					
프로그래밍 언어		파이썬		㉔(1)	㉔(1)	㉔(2), ㉔(1)	㉔(1)					㉔(1)	
문서 편집기		스프레드 시트						㉔(1), ㉔(1), ㉔(1)			㉔(1), ㉔(1), ㉔(1)	㉔(1)	
		워드프로세서							㉔(2)				
웹 기반 응용 프로 그램	텍스트 관련 도구	워드 클라우드			㉔(1), ㉔(1), ㉔(1), ㉔(1), ㉔(2)								
		썸트렌드					㉔(1), ㉔(1)						
		네트워크 그래프			㉔(1)								
		머신러닝 포 키즈			㉔(1)								
		Word2vec			㉔(1)								
		형태소 분석기					㉔(1)						
	이미지 관련 도구	티처블머신					㉔(1), ㉔(1), ㉔(1)		㉔(1)				
		MNIST				㉔(1)							
앱 개발 도구	앱 인 벤터					㉔(1)							
공학적 도구 개수			·	1	5	4	5	3	1	1	·	2	3
교과서 개수			·	1	5	3	5	5	1	1	·	4	4
공학적 도구를 활용한 과제의 개수			·	1	10	8	8	5	1	1	·	4	4

※ 괄호 안의 숫자는 과제¹⁰⁾의 개수

10) <인공지능 수학> 교과서에서 공학적 도구를 활용한 과제 개수를 센 것이다. 하나의 과제는 단일 문제와 여러 개의 소문제로 구성된 경우가 있다. 여러 개의 소문제가 하나의 과제를 구성한 경우 낱개 문제를 셈하지 않고 과제 하나로 취급하였다.

'관련 학습 요소'를 교과서별로 공학적 도구로 다루는 방법을 분석한 결과는 다음과 같다. 먼저, 텍스트 자료를 '벡터'로 표현하고 시각화하는 과정에서 모든 교과서에서 공학적 도구를 활용하며, 이미지 자료를 행렬로 표현하고 시각화하는 과정에서 공학적 도구를 활용한 교과서는 3종(㉒, ㉓, ㉔)이 있다. '벡터'로 표현된 두 텍스트 자료 혹은 행렬로 표현된 두 이미지 자료의 유사도는 모든 교과서에서 공학적 도구를 활용하였다. 공학적 도구로 '벡터', '행렬', '유사도'를 탐구하는 과제가 많은 것은 교육과정의 교수·학습 방법 및 유의 사항을 충실히 반영한 것으로 해석할 수 있다. 텍스트 자료나 이미지 자료를 수와 수학 기호로 표현할 때, 텍스트 자료를 변형하는 과제, 텍스트 자료를 표, 그림, 그래프, 단어 구름 만들기 등을 이용하여 시각화한 후 이를 해석하는 과제, 이미지의 구도, 색상, 휘도, 밝기, 선명도 등을 간단한 연산을 통해 변경하는 과정에서 공학적 도구를 이용하고 있다. 다음으로, '추세선'을 찾는 과제에서는 5종의 교과서가 모두 공학적 도구를 활용하며, '손실함수'와 관련된 공학적 도구를 활용한 교과서는 4종(㉒, ㉓, ㉔, ㉕), '경사하강법'과 관련된 공학적 도구를 활용한 교과서도 4종(㉒, ㉓, ㉔, ㉕)이 있다. '진리표'와 '(이차함수의) 미분계수'를 공학적 도구로 탐구하는 활동을 다루는 교과서가 없으며, '순서도'는 1종(㉑), '조건부확률'은 1종(㉒), '함수의 극한'은 1종(㉒)의 교과서에서 공학적 도구를 이용하여 다루고 있다.

이상의 분석 결과처럼 '관련 학습 요소'에 따른 공학적 도구의 이용 여부와 이용한 공학적 도구의 종류에 있어서 교과서별로 차이가 있다. 이러한 차이는 '관련 학습 요소' 자체의 특징과 함께 교과서 서술의 맥락에서 내용을 가장 잘 구현할 수 있는 공학적 도구 선택의 과정에서 나타난 것이다. 각 교과서에서 인공지능 맥락의 사례를 설명할 수 있도록 5종 ~ 7종의 공학적 도구를 다룬다. 텍스트 자료를 다루는 '벡터', 이미지 자료를 다루는 '행렬', '유사도', '추세선', '손실함수', '경사하강법'의 경우 공학적 도구 활용에 관한 교수·학습 방법 및 유의 사항이 제시되었기 때문에 공학적 도구 활용 빈도가 많은 것으로 해석할 수 있다.

나. '관련 학습 요소'에 따른 공학적 도구 활용 과제의 CT 분석

'관련 학습 요소'에 따른 공학적 도구 활용 과제의 경우, 활용한 공학적 도구에 따라서 CT 과정의 차이가 두드러지게 나타난다. 5종의 교과서 모두 공학적 도구를 활용하며 공학적 도구와 관련된 과제의 개수가 가장 많은 '벡터'의 사례를 중심으로 결과를 정리하여 제시한다. 공학적 도구가 활용된 '벡터' 과제의 CT의 단계를 분석하여 정리하면 <표 III-5>와 같다.

<표 III-5> 공학적 도구가 활용된 '벡터' 과제의 CT

공학적 도구		교과서					CT			
		㉒	㉓	㉔	㉕	㉖	문제 정의	계산 가능한 형태로 추상화	계산	결과 해석
텍스트를 벡터로 표현	파이썬			○			○	○	○	○
	머신러닝 포 키즈				○		○	○	○	○
	Word2vec				○		○		○	○
	형태소 분석기					○			○	○
텍스트 자료의 시각화	워드 클라우드	○	○	○	○	○			○	○
	네트워크 그래프				○				○	○


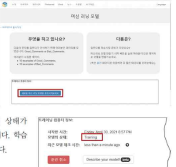

파이썬, 머신러닝 포 키즈처럼 학생들이 '문제 정의 - 계산 가능한 형태로 추상화 - 계산 - 결과 해석'의 단계를 모두 경험할 수 있는 공학적 도구도 있지만, 대부분의 공학적 도구가 사용된 과제는 문제 정의와 계산 가능한 형태로 추상화 단계를 관찰할 수 없이 '계산 - 결과 해석' 단계만을 포함한다. 예를 들어, 단어 구름 만들기 과제는 문제 정의, 계산 가능한 형태로 추상화 과정 없이 문장을 입력하면 웹 기반 프로그램인 워드 클라우드에서 계산하며, 그 결과를 단어 구름으로 보여주고 이를 해석하는 활동으로 이루어져 있다([그림 III-10] 참

조). 형태소 분석기, 워드 클라우드, 네트워크 그래프를 다루는 과제도 ‘문제 정의 - 계산 가능한 형태로 추상화’ 과정 없이 ‘계산 - 결과 해석’ 단계를 거치도록 공학적 도구가 활용되어, 텍스트 자료를 공학적 도구에 입력하면 시각화된 결과만 확인할 수 있다.



[그림 III-10] 워드 클라우드를 이용한 텍스트 데이터의 감성 분석 활동

파이썬, 머신러닝 포 키즈를 이용하여 텍스트를 벡터로 표현하기 과제에서는 CT의 ‘문제 정의 - 계산 가능한 형태로 추상화 - 계산 - 결과 해석’의 모든 과정을 학생들이 경험할 기회를 주고 있다. 특히, 머신러닝 포 키즈를 활용한 과제는 착한 댓글과 악성 댓글을 구분하기 위하여 “Good Comments”와 “Bad Comments”로 각각의 레이블을 생성하며 자료를 입력하는 추상화 과정을 거쳤다. 인공지능이 입력된 자료를 분석하고 모델을 생성하는 계산 과정으로 이어졌으며 만들어진 모델에 새로운 문장을 입력하면 자동화된 알고리즘이 계산하여 그 결과를 긍정, 부정으로 분류하고 이를 해석할 수 있도록 구성되어 있었다. 이를 정리하면 [그림 III-11]과 같다.

CT의 단계	교과서 사례	CT의 근거
문제 정의	<p>자연어 처리 기술(Natural Language Processing)은 인공지능의 정보, 자동 번역, 음성인식 분야 등에서 적용되고 있다. 이러한 기술을 활용하여 사어의 하나로 우리나라 포털 사이트 N사의 채팅 커서란에서는 "챗봇"이라는 인공지능을 통해 악성 댓글로 판단되는 댓글을 자동으로 삭제하고 있다.</p> <p>N사 채팅 화면의 화면</p> <p>인공지능의 자연어 처리 기술은 유식도 기반 분석을 통해 유사한 문장을 추천하는 방식이 있으나, 최근에는 딥러닝 알고리즘을 많이 사용한다. 딥러닝 알고리즘은 착한 댓글과 악성 댓글을 학습한 후 이를 판단할 수 있는 모델을 생성하여 새로운 입력 데이터가 되면 자동으로 악성 댓글인지 판단한다.</p> <p>입력문을 학습할 수 있는 프로그램을 이용하여 착한 댓글과 악성 댓글을 어떻게 판단하는지 인공지능으로 구현해 보자.</p>	<p>착한 댓글과 악성 댓글을 구분하는 인공지능을 구현하겠다는 문제를 정의함.</p>
계산 가능한 형태로 추상화	<p>이제 [1-데이터 추가] 버튼을 눌러가면서 각 데이터에 착한 댓글과 악한 댓글과 악성 댓글에 대한 문장을 각각 10개의 각 데이터에 작성합니다. 문장을 모두 채운 후에는 [프로그램 실행] 버튼을 눌러가기를 클릭합니다.</p> 	<p>텍스트를 착한 댓글과 악성 댓글로 추상화함.</p>
계산	<p>[학습을 시작하면 모델은 훈련시켜 보도록] 버튼을 클릭하여 학습을 시작합니다.</p>  <p>학습을 시작하면 모델의 상태가 "Training"으로 표시됩니다. 학습이 완료될 때까지 기다립니다.</p>	<p>'머신러닝 포 키즈' 프로그램을 통해서 계산함.</p>
결과 해석	<p>학습이 완료되면 다음과 같이 모델을 평가할 수 있는 화면이 있습니다. 텍스트 내용에 문장을 입력하고 [테스트] 버튼을 클릭하여 평가합니다.</p>  <p>(☞ 교과서 pp. 41-44)</p>	<p>새로운 문장을 입력하며 그 결과를 분석하고 해석함.</p>

[그림 III-11] 머신러닝 포 키즈를 이용한 텍스트 데이터의 감성 분석 활동

이상의 분석 결과처럼 공학적 도구가 활용된 과제에서 CT 단계에서 차이가 있다. CT 단계를 모두 경험할 수 있는 소수의 과제가 제시되어 있으며, 다수의 과제는 CT 단계 중 일부만 경험할 수 있도록 설계되어 있다. 문제를 설정하고 해결하는 과정 없이 공학적 도구를 경험하는 수준에서 교과서가 서술되는 양상을 보인 것이다. 인공지능과 수학과의 연관성을 이해하기 위해서 CT 단계를 모두 경험할 수 있는 과제가 <인공지능 수학> 과목 성격에 부합하는 과제가 될 것이다. CT 단계를 모두 밟을 수 있는 추가적인 과제가 교과서에 마련되어야 할 것이다.

IV. 결론 및 제언

이 연구는 <인공지능 수학> 교육과정에 처음 도입된 '관련 학습 요소'가 <인공지능 수학> 교과서에 반영된 양상을 '관련 학습 요소'를 다루는 형식, 범위와 방법, 공학적 도구의 활용 방식을 중심으로 분석하였다. 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 교과서별로 '관련 학습 요소'를 교과서에 기술하는 형식상의 차이가 있었다. '관련 학습 요소'는 기존의 '학습 요소'와는 다르게 용어 사용 및 정의 여부, 글꼴의 형식이나 교과서에서의 배열에서 다방면으로 차이가 두드러졌다. <인공지능 수학> 교과서에서는 '관련 학습 요소'를 활자로 나타내는 방식은 'A를 B라고 한다' 형식으로 교과서 본문에 정의하는 사례가 있었다. 또한, '진리표', '순서도'처럼 정의 없이 본문에서 맥락을 통해 간접적으로 설명하기도 하였다. '벡터', '행렬', '함수의 극한', '(이차함수의) 미분계수'는 기존의 수학 교과서와 같은 형식으로 '관련 학습 요소'를 교과서에서 기술하였다. '조건부확률'은 교육과정에서 명시적으로 교수·학습 상황에서 다루지 않도록 제안되어 있었기 때문에 <인공지능 수학> 교과서에서 '조건부확률'에 관한 용어와 기호를 사용하지 않았다. 하지만, '조건부확률'이 '관련 학습 요소'로 제안되어 있어 '조건'이라는 표현을 활동 제목, 발문으로 제시하거나 조건에 관하여 설명하였다. '관련 학습 요소'를 나타내는 배열 방식은 본문에 서술하는 경우, 본문에 상자로 표시하는 경우, 보조단에 표시하는 경우로 나뉘었다. '학습 요소'가 아닌 '관련 학습 요소'가 교육과정에 새롭게 도입되고, 수학 개념뿐만 아니라 인공지능 맥락에서 다루는 사례를 '관련 학습 요소'로 포함하면서 이를 다루는 방식이 다양하게 나타났다.

둘째, <인공지능 수학>의 교과서별로 다루는 수학 개념 및 수학 개념과 관련된 인공지능 맥락의 사례에 있어서 양적·질적 차이가 있었다. 먼저, '관련 학습 요소'는 교과서에 따라 공통으로 다루는 수학 개념, 인공지능 맥락의 사례가 있지만, 교과서별로 그 양은 차이가 있었다. 수학 개념의 수와 인공지능 맥락의 사례의 수 사이에는 비례적인 관계는 없었다. 수학 개념을 더 많이 다루는 교과서라고 해서 인공지능 맥락의 사례를 더 다양하게 소개하거나, 수학 개념을 덜 다루는 교과서라고 해서 인공지능 맥락의 덜 다루지는 않았다. 다음으로, '관련 학습 요소' 중에서 기존 수학 과목에서 다루었던 '진리표', '순서도', '행렬', '조건부확률'의 개념은 수학에서 다루었던 정의와 크게 다르지 않았다. '벡터', '함수의 극한', '(이차함수의) 미분계수' 개념을 다루는 질적인 차이가 있었다. 이러한 차이는 타 과목과의 연계를 고려한 것으로 해석해 볼 수 있다. 이 논문에서는 <인공지능 수학> 교과서에 나타난 수학 개념의 범위에 대한 양적, 질적 차이를 제시한 것이며, 이는 양질의 교과서임을 진단하는 지표가 되는 것은 아니다. 교과서 저자가 다른 수학 과목에서 지속해서 수학 개념을 학습해야 한다는 점을 고려한다면 <인공지능 수학> 교과서에서 다른 과목에서 다루는 수학 개념을 충분히 다룰 수 있도록 해야 할 것이다. 반면, 교과서 저자가 인공지능의 중요성이나 유용성을 고려한다면, 수학 개념의 양보다는 수학 개념과 인공지능과의 관련성에 초점을 두었을 것이다. <인공지능 수학> 교과서에 나타난 수학 개념의 양적, 질적 차이는 기존 수학 과목에서 다루는 개념에 대한 교과서 서술의 아이디어를 제공하기도 한다.

셋째, '관련 학습 요소'에 따라 공학적 도구의 이용 여부와 이용한 공학적 도구의 종류와 CT 과정에 차이가 있었다. '벡터', '행렬', '유사도', '추세선', '손실함수', '경사하강법'은 공학적 도구를 이용할 수 있다는 교수·학습 방법 및 유의 사항을 반영하기 위하여 교과서에서 공학적 도구를 이용하였다. 공학적 도구가 활용된 과제의 CT에도 차이가 있었다. 파이썬, 머신러닝 포 키즈처럼 CT의 4단계(문제 정의 - 계산 가능한 형태로 추상화 - 계산 - 결과 해석)를 모두 포함할 수 있도록 사용되는 공학적 도구도 있었지만, Word2vec처럼 계산 가능한 형태로 추상화 과정이 없이 교과서에서 서술하여 보완하기도 하였다. 또한, 형태소 분석기, 워드 클라우드, 네트워크 그래프처럼 문제 정의, 계산 가능한 형태로 추상화, 결과 해석으로만 공학적 도구를 사용하기도 하였다. 이러한 차이는 수학과 교육과정에서 프로그래밍에 대한 부담을 느끼지 않도록 해야 한다는 제안사항을 준수하기 위한 결과로 나타난 현상이라 할 수 있다. 이 분석에서 <인공지능 수학> 교과서는 공학적 도구 활용에 관한 교수·학습 방법을 충실히 반영하였다는 점을 확인할 수 있었으나, 이 과목이 지향하는 인공지능에서의 수학의 활용을 본질적으로 이해하기 위해서는 전반적인 CT 과정이 반영된 과제가 필요하다.

이상의 연구 결과를 바탕으로 수학과 교육과정 및 교수·학습 방법의 방향성을 제안하면 다음과 같다. 첫째, 차기 수학과 교육과정 문서에서 '관련 학습 요소'와 '학습 요소'에 대한 서술 방향에 대한 논의가 필요하다. 2015 개정 수학과 교육과정에서 진로 선택 과목의 경우 <기하>, <경제 수학>, <기본 수학>은 교육과정 문서에 학습

요소가 제시되어 있지만, <수학과제 탐구>, <실용 수학>은 교육과정 문서에 학습 요소가 제시되어 있지 않고, <인공지능 수학>은 '관련 학습 요소'가 제시되어 있다. 진로 선택 과목 중 타 교과목과의 연결을 통해서 설계된 과목의 경우에는 기존 수학 과목에서 다루는 개념과 타 교과목과 연결될 수 있는 개념이지만 수학적으로 정의하여 사용할 수 있는 개념이 <경제 수학>에서는 '학습 요소', <인공지능 수학>에서는 '관련 학습 요소'로 제안되었다. 고교학점제 도입에 따른 융합 과목이 지속적으로 신설됨에 따라 '학습 요소', '관련 학습 요소'의 제안뿐만 아니라 이들의 교과서 서술 방향에 대한 제안 방식에 관한 논의도 필요하다. 이를 통해 교과서별로 형식상으로는 일관성을 갖추되 내용을 서술하는 방법이나 과제 면에서 다양성이 보장될 수 있을 것이다.

둘째, 교육과정 시안 개발 연구 단계에서 '관련 학습 요소'가 다룰 수 있는 개념의 범위와 방법에 대한 연구가 충분히 이루어져야 할 것이다. <인공지능 수학> 시안 개발 연구 단계에서는 '관련 학습 요소'가 '학습 요소'와 동일하게 다루어질 수 있는 것인지와 같은 구체적인 취급 방법에 대해서는 명확한 지침이 마련되지 않았다. 다시 말해, '관련 학습 요소' 정의는 수학적 개념을 어느 정도 다룰 수 있는 것인지에 관한 양적·질적 제한을 두지 않았고, 이로 인해 교과서별로 '관련 학습 요소'를 다루는 수학 개념의 양적·질적 차이가 나타났다. 진로 선택 과목을 이수하는 과정에서 선수 이수 과목이 제한된 상황에서는 선수 학습의 부재나 교육과정 설계 차원에서 기존 수학 개념을 다루는 방법을 그대로 유지하여 교과서를 집필하거나 교수·학습을 진행하기에는 어려운 부분이 있다. 차기 수학과 교육과정에서는 '관련 학습 요소'가 포함할 수 있는 개념의 범위와 방법에 대한 논의가 필요하다. 또한, 타 교과목과의 연결을 도모한 과목에서 다루지는 수학 개념과 기존 수학 과목에서 다루는 개념의 차이점을 토대로 교수·학습 방법 및 유의 사항이 보완되어야 할 것이다.

셋째, <인공지능 수학> 과목에서 수학 원리를 이해하며 수학을 가치 있게 인식하는 것과 더불어 학생들의 CT를 촉진하는 방안을 검토할 필요가 있다. 인공지능 맥락의 활용 사례를 학생들이 경험하기 위해서는 공학적 도구를 경험해보는 수준에서 도입하는 것이 아니라 문제를 설정하고 해결할 수 있는 내실화된 활동이 교과서에서 마련되어야 할 것이다. 현재 에스토니아는 학생들에게 수학 학습을 더 흥미롭게 만들고, 수학적 사고 능력과 실제 상황에서 수학을 구현할 수 있는 능력을 향상시키기 위해 'Computer Based Math(CBM)'을 도입하였다. 이를 위해, 다양한 현실 문제를 스토리 기반 모듈로 구성하며 수학 개념과 도구는 문제를 해결하는 과정에서 학습하며 '문제 정의 - 계산 가능한 형태로 추상화 - 계산 - 결과 해석'의 CT 단계를 학습하고 있다(Hõim, Hommik, & Kikas, 2016). 또한 프랑스에서는 2016년 초등학교, 중학교 수학과 교육과정에 '알고리즘과 프로그래밍 영역'을 도입했으며, 프로그래밍은 파이썬을 이용한다(G. Gueudet, personal communication, November 12, 2021). 노르웨이의 대학 입학 시험에서는 프로그래밍을 활용한 과제가 다루지고 있다(Seland, 2021). 중국은 국가 차원에서 고등학교 수학 선택 과목을 다양하게 개발하였으며, 중국 인민교육출판사¹¹⁾는 '예비 실험 설계와 최적화', '위험과 의사결정' 등을 고등학교 수학 선택 과목 교과서로 발행하였으며 회귀분석, 암호학, 마르코프 체인 등의 내용을 다루고 있다. 우리나라에서도 학생들의 CT 역량 향상을 위하여 <인공지능 수학> 과목 내에 프로그래밍 학습을 검토할 필요성이 있으며, 내실 있는 <인공지능 수학> 수업을 위해 수학·정보 교과와 코딩의 방안에 검토와 노력이 필요할 것이다.

11) 1950년 12월 1일 설립된 교육부 산하 대형 전문 출판사

참고문헌

- 교육부 (2020a). 제3차 수학교육 종합계획. 교육부. 2020. 05. 24. 보도자료.
- Ministry of Education. (2020a). *The 3rd Comprehensive Plans for Mathematics Education*. A press release (May 24, 2020).
- 교육부 (2020b). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2020-236호 [별책 8]. 세종: 교육부.
- Ministry of Education. (2020b). *Mathematics curriculum*. Proclamation of the Ministry of Education #2020-236[Annex 8]. Sejong: Author.
- 교육부 (2020c). 실과(기술·가정)/정보과 교육과정. 교육부 고시 제2020-236호 [별책 10]. 세종: 교육부.
- Ministry of Education. (2020c). *Practical subjects(Technology & Home Economics)/Informatics curriculum curriculum*. Proclamation of the Ministry of Education #2020-236[Annex 10]. Sejong: Author.
- 교육부·한국교육과정평가원 (2015). 2015 개정 교육과정에 따른 교과용도서 개발을 위한 편찬상의 유의점 및 검정기준. 세종: 교육부.
- Ministry of Education, & Korea Institute of Curriculum and Evaluation. (2015). *Compilational notes and authorization criteria for the development of textbooks based on the 2015 revised curriculum*. Sejong: Ministry of Education.
- 교육부·한국교육과정평가원 (2020). 2015 개정 교육과정에 따른 <인공지능 수학> 도서 개발을 위한 편찬상의 유의점 및 인정기준. 세종: 교육부.
- Ministry of Education, & Korea Institute of Curriculum and Evaluation. (2020). *Compilational notes and accreditation criteria for the development of <Artificial Intelligence Mathematics> textbooks based on the 2015 revised curriculum*. Sejong: Ministry of Education.
- 노명완·정혜승·윤준채·박정진·김종윤·오택환 (2004). 교과용 도서 내적 체제 개선에 대한 연구. 한국교과서 연구재단 연구보고서 2004-01. 서울: 한국교과서연구재단.
- Noh, M., Jung, H., Yoon, J., Park, J., Kim, J., & Oh, T. (2004). *A study on the concept of textbook and its internal system for effective teaching-learning in schools*. Korea Textbook Research Foundation Research Report 2004-01. Seoul: Korea Textbook Research Foundation.
- 박진희·박미선·권오남 (2018). 2015 개정 교육과정에 따른 <수학Ⅱ> 교과서의 정적분의 도입 및 분석 활용 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 57(2), 157-177.
- Park, J. H., Park, M. S., & Kwon, O. N. (2018). An analysis of the introduction and application of definite integral in <MathematicsⅡ> textbook developed under the 2015-Revised Curriculum. *Journal of the Korean Society of Mathematics Education Series A: The Mathematical Education*, 57(2), 157-177.
- 성덕현·김성희·민경진·유상미·김정배·김준식·우혜영 (2021). <인공지능 수학>, 서울: 중앙교육.
- Seong, D. H., Kim, S. H., Min, K. J., Yoo, S. M., Kim, J. B., Kim, J. S., & Woo, H. Y. (2021). <Artificial Intelligence Mathematics>. Seoul: Joongang.
- 신동조·고상숙 (2019). 수학교육에서 계산적 사고(Computational Thinking)의 의미 및 연구 동향 탐색. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 58(4), 483-505.
- Shin, D. J., & Koh, S. S. (2019). A study on investigation about the meaning and the research trend of computational thinking(CT) in mathematics education. *Journal of the Korean Society of Mathematics Education Series A: The Mathematical Education*, 58(4), 483-505.
- 오화평·허석·조성현·정영민·권상순 (2021). <인공지능 수학>. 서울: 금성출판사.
- Oh, H. P., Heo, S. Cho, S. H., Jeong, Y. M., & Kwon, S. S. (2021). <Artificial Intelligence Mathematics>. Seoul: Kumsung Publishing.
- 이상구·고효경·김영록·박정숙·...·홍옥수 (2020). 2015 개정 교육과정 인공지능 수학 과목 시안 개발 연구. 한국과학창의재단 연구보고서 BD20100001.

- Lee, S. G., Ko, H. K., Kim, Y. R., Park, J. S., ..., & Hong, O. S.,(2020). *A development of a draft for the 2015 revised mathematics curriculum Artificial Intelligence Mathematics*. KOFAC Research Report BD20100001.
- 이한진 · 이지향 · 이경진 · 김태중 · 박지훈 (2021). <인공지능 수학>, 서울: 씨마스.
- Lee, H. J., Lee, J. H., Lee, K. J., Kim, T. J., & Park, J. H. (2021). <Artificial Intelligence Mathematics>. Seoul: Cmass.
- 장경윤 (2017). 수학 교과에서 계산적 사고(Computational Thinking)교육. 대한수학교육학회지 <학교수학>, **19(3)**, 553-570.
- Chang, K. (2017). A feasibility study on integrating computational thinking into school mathematics. *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics <School Mathematics>*, **19(3)**, 553-570.
- 최은 · 권오남 (2020). 한국, 호주, 핀란드의 수학 교과서에서 삼각법 영역 비교. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **34(3)**, 393-419.
- Choi, E., & Kwon, O. N. (2020). Comparison of Trigonometry in Mathematics Textbooks in Korea, Australia, and Finland. *Journal of the Korean Society of Mathematics Education Series E: Communications of Mathematical Education*, **34(3)**, 393-419.
- 허강 · 이종국 · 현영호 · 정민택 · 강환동 · 조성준 (2005). 교육과정 수시 개정에 따른 교과서 외적 체제 개선에 관한 연구. 한국교과서연구재단 연구보고서 2005-03. 서울: 한국교과서연구재단.
- Huh, K., Lee, J., Hyun, Y., Jung, M., Kang, W., & Jo, S. (2005). *A study for the on-demand improvement on a textbook's external format according to changes in curriculum*. Korea Textbook Research Foundation Research Report 2005-03. Seoul: Korea Textbook Research Foundation.
- 홍진곤 · 박정숙 · 설정수 · 오세준 · 박민규 · 박성훈 (2021). <인공지능 수학>, 서울: 천재교과서.
- Hong, J. G., Park, J. S., Seol, J. S., Oh, S. J., Park, M. G., & Park, S. H. (2021). <Artificial Intelligence Mathematics>. Seoul: Chunjae Textbook.
- 황선욱 · 권성훈 · 정두섭 · 박상의 · 홍창섭 (2021). <인공지능 수학>, 서울: 미래엔.
- Hwang, S. U., Kwon, S. H., Jeong, D. S., Park, S. U., & Hong, C. S. (2021). <Artificial Intelligence Mathematics>. Seoul: Mirea-N.
- Abramovich, S. (2015). Mathematical problem posing as a link between algorithmic thinking and conceptual knowledge. *Teach Math*, **18(2)**, 45-60.
- Binkley, M., Erstad, O., Herman, J., Raizen, S., Ripley, M., Miller-Ricci, M., & Rumble, M. (2012). Defining twenty-first century skills. In P. Griffin, B. McGaw, & E. Care (Eds.), *Assessment and teaching of 21st century skills* (pp. 17-66). Netherlands: Springer.
- Bowen, G. A. (2009). Document Analysis as a Qualitative Research Method. *Qualitative Research Journal*, **9(2)**, 27-40.
- Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H., & Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educational studies in mathematics*, **102(3)**, 435-456.
- Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal*, **26(3)**, 403-421.
- Hõim, T., Hommik, C., & Kikas, Ü. (2016). *Changing mathematics education in Estonia. Computer-based statistics project*. [Working paper submitted for CIDREE-STEM 2016, December 22nd].
- ISTE, & CSTA. (2011). *Computational thinking in K-12 education leadership toolkit*.
- Kadijevich, D. M. (2018) A cycle of computational thinking. In Trebinjac B, Jovanović S (Eds), *Proceedings of the 9th international conference on e-learning*. Met-ropolitan University, Belgrade (pp. 75-77). <https://econference.metropolitan.ac.rs/wp-content/uploads/2019/05/e-learning-2018-final.pdf>

- Kafai, Y., & Burke, Q. (2013). Computer programming goes back to school. *Phi Delta Kappan*, **95(1)**, 61-65.
- Kallia, M., van Borkolo, S., Drijvers, P., Barendsen, E., & Tolboom, J. (2021). Characterising computational thinking in mathematics education: a literature-informed Delphi study, *Research in Mathematics Education*, **23**, 159-187.
- Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, **31(2)**, 234-241.
- Lockwood, E., DeJarnette, A., Asay, A., & Thomas, M. (2016). Algorithmic thinking: an initial characterization of computational thinking in mathematics. In Wood MB, Turner EE, Civil M, Eli JA (Eds.), *Proceedings of the 38th Annual Meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. The University of Arizona, Tucson, (pp 1588-1595).
- OECD. (2018). *The Future of Education and Skills*. Retrieved from [https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20\(05.04.2018\).pdf](https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf)
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas*. Basic Books: New York
- Scantamburlo, T. (2013). Philosophical aspects in pattern recognition research. A PhD dissertation, Department of informatics, Ca, Foscari University of Venice, Venice.
- Schmidt, H. (2012). Measuring content through textbooks: The cumulative effect of middle-school tracking. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.). *From text to 'lived' resources. Mathematics Teacher Education*. Dordrecht: Springer.
- Seland, A. (2021). Assessment in upper secondary mathematics education in Norway. In *Proceedings of SNU Mathematics Education Webinar Series: Mathematics Education in the Era of COVID-19* (pp. 70-73).
- Sengupta, P., Kinnebrew, J. S., Basu, S., Biswas, G., & Clark, D. (2013). Integrating computational thinking with K-12 science education using agent-based computation: A theoretical framework. *Education and Information Technologies*, **18(2)**, 351-380.
- Shute, V. J., Sun, C., & Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review*, **22**, 142-158.
- Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-370). Greenwich, Conn: Information Age Publishing.
- Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational studies in Mathematics*, **89(1)**, 41-65.
- Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, **49(3)**, 33-35.
- Wing, J. M. (2017). Computational thinking's influence on research and education for all. *Italian Journal of Educational Technology*, **25(2)**, 7-14.
- Wolfram, C. (2020). *The Math(s) Fix: An Education Blueprint for the AI Age-Wolfram Media*. Wolfram Media, Inc.

An Analysis of 'Related Learning Elements' Reflected in <Artificial Intelligence Mathematics> Textbooks

Kwon, Oh Nam[†]

Seoul National University, 1 Gwanak-ro, Gwanak-gu, Seoul 08826

E-mail: onkwon@snu.ac.kr

Lee, Kyungwon

Dankook University Middle School, 21, Dogok-ro 64-gil, Gangnam-gu, Seoul 06278

E-mail: kyungwon.lee.snu@gmail.com

Oh, Se Jun

Ewha Womans University High School, 560, Seongsan-ro, Seodaemun-gu, Seoul 03759

E-mail: skyjune@sen.go.kr

Park, Jung Sook

Yangjae High School, 9, Nambusunhwan-ro 346-gil, Seocho-gu, Seoul 06750

E-mail: pjsook9@nate.com

The purpose of this study is to derive implications for the design of the next curriculum by analyzing the <Artificial Intelligence Mathematics> textbooks designed as a new subject in the 2015 revised curriculum. In the mathematics curriculum documents of <Artificial Intelligence Mathematics>, 'related learning elements' are presented instead of 'learning elements'. 'Related learning elements' are defined as mathematical concepts or principles that can be used in the context of artificial intelligence, but there are no specific restrictions on the amount and scope of dealing with 'related learning elements'. Accordingly, the aspects of 'related learning elements' reflected in the <Artificial Intelligence Mathematics> textbooks were analyzed focusing on the textbook format, the amount and scope of contents, and the ways of using technological tools. There were differences in the format of describing 'related learning elements' in the textbook by textbook and the amount and scope of handling mathematics concepts. Although similar technological tools were dealt with in each textbook so that 'related learning elements' could be used in the context of artificial intelligence, the focus was on computations and interpretation of results. In order to fully reflect the intention of the curriculum in textbooks, a systematic discussion on 'related learning elements' will be necessary. Additionally, in order for students to experience the use of mathematics in artificial intelligence, substantialized activities that can set and solve problems using technological tools should be included in textbooks.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

* Key words : Artificial Intelligence, Related Learning Elements, Textbooks

[†] corresponding author

[부록 1] <인공지능 수학> 교육과정 교수·학습 방법 및 유의 사항의 분류

영역/ 핵심개념	교수·학습 방법 및 유의 사항	내용의 종류	교수· 학습의 범위	교수· 학습 활동 제한	공학적 도구 활용
인공지능과 수학	수학이 인공지능의 발전에 기여한 역사적 사례로 논리, 진리표, 알고리즘, 순서도, XOR문제, 전문가 시스템, 딥러닝 등을 소개할 수 있다.	○			
	실생활에서 활용되는 인공지능에서 수학이 활용되는 다양한 사례를 찾아보는 활동을 하게 한다.			○	
자료의 표현	실생활의 텍스트 자료로 댓글이나 감상평 등을 다룰 수 있다.		○		
	자료는 정형, 비정형, 범주형, 연속형 등 여러 가지 유형을 다룰 수 있다.	○			
	텍스트 자료나 이미지 자료를 수와 수학 기호로 표현할 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.				○
	실생활의 텍스트 자료를 수와 수학 기호를 이용하여 다양한 방식으로 표현해 보고 토론하는 활동을 통해 각 표현 방식의 장단점을 이해하게 한다.		○		
	텍스트 자료는 벡터, 이미지 자료는 행렬로 표현할 수 있음을 간략하게 소개할 수 있다.		○		
	텍스트 자료를 변형하는 활동을 통해 자료 처리의 원리를 이해하게 하고, 이때 공학적 도구를 이용할 수 있다.				○
	텍스트 자료를 표, 그림, 그래프, 단어 구름 만들기 등을 이용하여 시각화한 후 이를 해석해 보는 활동을 할 수 있으며, 이때 공학적 도구를 이용할 수 있다.			○	○
	이미지 자료는 각 픽셀의 위치를 나타내는 가로, 세로 좌표와 색깔을 나타내는 정보로 구성됨을 이해하게 한다.		○		
분류와 예측	이미지의 구조, 색상, 휘도, 밝기, 선명도 등을 간단한 연산을 통해 변경하는 활동을 할 때, 공학적 도구를 이용할 수 있다.			○	○
	텍스트 판별에서는 영화 리뷰 분류, 기사 분류 등을 다룰 수 있고, 글 자료 사이의 유사도를 계산하고 텍스트를 판별하여 분류하는 수학적 과정을 이해하게 한다.		○		
	이미지 판별에서는 개와 고양이의 사진을 구별하는 문제 등을 다룰 수 있고, 구체적인 이미지 분류 문제의 해결을 위해 인공지능경량과 같은 방법이 개발되었음을 인식하게 한다.		○		
	분류에서는 문자, 음성, 이미지, 안면 등의 인식 시스템이나 문서 유사도를 이용한 표절 검사, 스팸 메일 분류 등의 사례를 다룰 수 있다.	○			
	확률은 가능성을 예측하고 싶은 사건을 설정하고 자료를 수집하여 그 사건이 일어날 확률을 구하며, 조건부확률의 용어와 기호를 도입하지 않고 특정 조건으로 세분화된 확률을 상대적으로 추정하고 예측하는 과정에 어떤 수학적 원리가 사용되는지 경험하는 정도로 간단히 다룬다.		○		
	자료의 경향성은 관련된 두 자료를 산점도로 나타내고 예측값과 함숫값 사이의 오차를 최소화하는 추세선을 나타내는 두 변량 사이의 관계식 $y = ax + b$ 를 찾아 새로운 x 의 값이 주어졌을 때, y 의 값을 예측하는 과정을 이해하게 한다.		○		
	추세선은 y 의 예측값과 예측값 사이의 오차를 구하여 이를 최소화한다는 의미 정도로 간단히 다루고, 추세선을 구할 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.		○		○
	예측에서는 자동 동작 인식 시스템, 자연어 인식 및 생성 시스템, 자동번역 시스템, 자율주행 자동차, 인공지능 비서, 구매 추천 시스템 등을 다룰 수 있다.	○			
최적화	함수의 극한 개념은 직관적 수준으로 다루고, 미분계수는 접선의 기울기로 도입한다.		○		
	오차를 표현할 수 있는 함수의 예로 손실함수를 간단히 다루며, 실제값과 예측값 사이의 오차로부터 손실함수를 유도한다.		○		
	인공지능의 학습에는 지도학습, 비지도학습, 강화학습 등이 있음을 알고, 인공지능에서 학습 목표 중 하나가 손실함수를 최소화하는 것임을 이해하게 한다.	○			
	최적화에서는 자료의 경향성을 나타내는 추세선을 예시로, 가장 적합한 모델을 찾기 위해 함수를 정의하는 과정과 이 함수의 최솟값 또는 최댓값을 찾는 과정을 이해하게 한다.		○		
	경사하강법은 이차함수 형태의 손실함수의 최솟값을 구하는 수준에서 간단히 다루고, 이때 공학적 도구를 이용할 수 있다.				○
	경사하강법의 이동 단위인 학습률이 너무 크거나 작으면 학습이 제대로 이루어지지 않을 수 있음을 이해하게 한다.		○		
	합리적 의사 결정에서는 자율주행 자동차, 인공지능 가전, 재난 로봇, 스마트 팩토리 등 사물과 접목된 인공지능 기술 사례와 자동번역시스템, AI 비서, 바둑 프로그램, 추천시스템, 매칭 시스템, AI 보안 시스템, 챗봇 등 인공지능 기술의 사례 등을 다룰 수 있다.	○			
	인공지능 수학 탐구에서는 인공지능을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는 다양한 아이디어를 탐색하는 탐구학습과 프로젝트 학습을 수행하게 한다. 이때, 창의적 아이디어와 관련된 수학이 무엇인지에 대해 발표하게 할 수 있다.				○
학생들의 수준에 맞추어 인공지능 기술을 직접 시연해 보거나 아이디어를 구현해 보게 하고, 이때 공학적 도구를 이용할 수 있다.				○	

[부록 2] <인공지능 수학> 교과서별로 활용된 공학적 도구

교과서명		가	나	다	라	마
공학적 도구 분류						
교육용 소프트웨어	그래픽 계산기	알지오매스	○	○		○
		지오지브라			○	
	통계 소프트웨어	Desmos		○		
		통그라미		○		
프로그래밍 언어		파이썬			○	○
문서 편집기		스프레드시트	○			○
		워드프로세서	○			○
웹 기반 응용 프로그램	텍스트 관련 도구	워드 클라우드	○	○	○	○
		썸트렌드			○	○
		네트워크 그래프				○
		머신러닝 포 키즈				○
		Word2vec				○
		형태소 분석기				
	이미지 관련 도구	티처블머신	○	○	○	○
		MNIST	○			
	앱 개발 도구	앱 인 벤터	○			
	공학적 도구 개수		7	5	5	7

[부록 3] <인공지능 수학> 교과서에서 다뤄진 공학적 도구의 출처

분류		웹사이트 주소	
교육용 소프트웨어	그래픽 계산기	알지오매스	https://www.algeomath.kr/main.do
		지오지브라	https://www.geogebra.org/?lang=ko
		Desmos	https://www.desmos.com/calculator?lang=ko
	통계 소프트웨어	통그라미	https://tong.kostat.go.kr/front/main/main.do
웹 기반 응용 프로그램	텍스트 관련 도구	워드 클라우드	http://wordcloud.kr/ https://voyant-tools.org/ https://bd.kma.go.kr
		썸트렌드	https://some.co.kr/
		네트워크 그래프	http://dicora.shinyapps.io/gh-vis
		머신러닝 포 키즈	https://machinelearningforkids.co.uk/
		Word2vec	http://word2vec.kr
		형태소 분석기	http://kkma.snu.ac.kr/documents/
	이미지 관련 도구	티처블머신	https://teachablemachine.withgoogle.com/
		MNIST	https://tensorflow-mnist.herokuapp.com
	앱 개발 도구	앱 인 벤터	https://appinventor.mit.edu/