韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2021.35.4.425
제 35집 제 4호, 2021. 12. 425-444

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 35, No. 4, Dec. 2021. 425-444

측정 오차를 활용한 삼각형의 내각의 합 지도 방안 사례 연구[1)]

오 영 열 (서울교육대학교, 교수)
박 주 경 (서울행현초등학교, 교사)†

본 연구는 수학적 과정을 고려한 측정 활동의 구성을 통해 측정 영역에서 추구하는 목표에 도달할 수 있다는 가정 아래 초등학교 4학년 학급에 측정 오차를 활용한 삼각형의 내각의 합 지도 방안을 적용하고 결과를 분석하였다. 연구 결과 첫째, 학생들은 측정 오차를 활용하여 삼각형의 내각의 합을 학습함으로써 측정 오차의 발생 가능성을 인식할 수 있었다. 둘째, 측정 오차에 기반한 토론 과정은 학생들이 수학적 정당화를 시도할 수 있는 바탕이 되었다. 셋째, 반원을 활용한 조작 활동은 학생들에게 자연스럽고 직관적인 수학적 정당화의 방법으로 인식되었고 일반화를 이끌었다. 넷째, 측정 오차를 활용한 삼각형의 내각의 합 지도 방안은 학생들의 수학적 의사소통 능력과 수학에 대한 긍정적인 태도의 함양에 기여하였다.

Ⅰ. 서론

학교 수학을 통해 학생들은 지식과 기능을 습득할 뿐만 아니라 수학의 규칙과 구조가 가지는 아름다움을 발견하여 음미할 수 있어야 한다(NCTM, 2014). 특히 수학적 추론과 의사소통을 포함하는 수학적 과정은 수학적 지식이 완성된 형태로 주어진 것이 아니라 학생 스스로 사고하며 지식을 구축해 나간다는 측면에서 수학을 하는 것(do mathematics)이며 그 과정에서 학생들은 수학의 아름다움을 발견하는 놀라운 경험을 할 수 있다.

초등 수학의 여러 영역 가운데에서도 측정은 학생들의 삶과 맞닿아 있으며 활동을 통해 수학적 과정을 실제로 경험할 수 있는 영역이다(교육부, 2015). 측정 영역을 지도할 때 교사는 실생활의 여러 경험을 바탕으로 측정 활동을 시작해야 할 필요성과 동기를 부여하여 학생들이 활동에 참여할 수 있도록 해야 할 뿐만 아니라 측정하는 대상이 갖는 속성을 깊이 이해할 수 있도록 안내할 필요가 있다(Reys et al., 2009). 그러나 실제 측정 영역에서는 수학적으로 빈약한 학습이 이루어지고 학업 성취도도 교사의 기대보다 낮게 나타나고 있으며, 비정형화된 문제해결과 관계적 이해의 어려움이 나타나고 있다(김동희, 김민경, 2020; 송미정, 박종서, 2005; Smith, Heuvel-Panhuizen & Teppo, 2011). 이러한 문제 인식을 바탕으로 연구자들은 학생들의 수준에 적합한 측정 활동 과제를 제안하거나 측정 활동의 범위를 다른 영역으로 확장함으로써 측정 활동을 통해 여러 개념을 통합하여 지도할 수 있는 방안을 제시하였다(구미영, 이광호, 2015; 김은정, 강흥규, 2014). 이와 같은 제안들은 측정 활동을 통해 구현하고자 하는 목표를 바탕에 두고 교사가 가르치고자 하는 수학 학습 목표를 의미 있게 지도하고자 하는 움직임으로 보인다.

삼각형의 내각의 합은 1차 교육과정부터 현재에 이르기까지 측정 영역의 주요 주제로 다루어져 왔다. 지금까지 교과서에서 다루어진 삼각형의 내각의 합 측정 활동을 살펴보면 크게 두 가지로 구분된다. 하나는 각도기를

* 접수일(2021년 11월 29일), 심사(수정)일(2021년 12월 20일), 게재확정일(2021년 12월 29일)
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 측정 오차, 삼각형의 내각의 합, 수학적 정당화, 초등 수학
† 교신저자 : bluelihd@gmail.com
1) 이 연구는 2021년도 서울교육대학교 교내연구비에 의하여 연구되었음.

이용하여 삼각형의 각을 각각 측정한 후 합을 구하는 활동이고, 다른 하나는 삼각형의 세 각을 각각 오려서 모아 붙이는 활동이다. 4차 교육과정 이래로 지속하여 제시되어 온 두 가지 활동은 교과서에 제시된 순서의 차이만 있을 뿐 활동의 위상 차이나 병렬적 제시 방법 등은 큰 문제로 다루어지지 않았다. 여러 연구자들은 현재 제시되고 있는 측정 활동의 구성에 변화가 필요하며 이를 통해 삼각형의 세 각의 합에 대한 학습 목표를 효과적으로 달성할 수 있을 것이라고 강조하였다(김정하, 2019; 임재훈, 2009).

특히 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서(이하 '2015 개정 수학 교과서'라고 지칭함)에는 각도기로 삼각형의 세 각을 측정한 후 이를 더하여 삼각형의 내각의 합을 확인하고 종이를 잘라 조작하는 활동이 제시되어 있는데, 이 과정에서 발생할 수 있는 학생들의 측정 오차를 명시적으로 다루지 않고 있다. 물론 수학 교과서 상의 한정된 지면 대신 교사용 지도서에서 측정 오차의 발생 가능성이 언급되고 있다. 그러나 이를 어떻게 지도해야 하는지에 대한 방법이 구체적으로 제시되지 않기 때문에 수업에서 측정 오차의 발생을 간과할 수 있다. 특히 삼각형의 세 각의 크기를 측정하였을 때 175°~185° 정도로 다른 측정값이 나타날 수 있다는 것만 알게 될 뿐 삼각형의 내각의 합은 180°라는 추론하는 과정과 연결되지 않기 때문에 실질적인 수업 효과에 의문이 든다(홍갑주, 오성훈, 2018). 측정 오차는 그 동안 큰 주목의 대상이 되지 못했지만 모든 측정값이 근사값이라는 측면에서 볼 때 학생들의 측정 활동 과정에서 결코 간과되어서는 안 되는 부분이다(박교식, 2010; NCTM, 2000). 아울러 측정 도구 사용의 미숙과 눈금 사용의 실수로 인해 학생들의 측정 활동에는 필연적으로 측정 오차가 발생한다. 따라서 교사들에게는 측정 오차를 활용한 구체적인 지도 방안을 제시하고 학생들에게는 삼각형의 내각의 합에 대한 개념을 효과적으로 이해할 수 있는 실제적인 맥락 제공이 필요하다. 이러한 접근은 여러 가지 측정 활동을 유기적으로 연결할 수 있을 뿐만 아니라 실생활과 밀접하게 연결되어 있는 측정 활동의 본질을 경험할 수 있는 기회를 학생들에게 제공할 수 있다.

동시에 삼각형의 내각의 합은 지도하는 방법에 따라서 학생들에게 지루함을 안겨줄 수도 있고 놀라운 발견의 경험을 제공할 수도 있는 주제이다. 본 학습을 선행학습으로 배운 학생들의 경우 오히려 개념 학습을 위해 측정 활동을 하는 것에 대하여 지루함을 느끼거나 심지어 귀찮음을 느끼는 경우도 나타났지만 일반적으로 학생들은 측정 활동을 통해 삼각형의 크기나 모양이 관계없이 내각의 합이 항상 180°로 일정하다는 것을 발견하면 놀라움을 느낀다(오영열, 2021; 홍갑주, 오성훈, 2018). 같은 학습 주제임에도 불구하고 구성된 활동이나 교사의 지도 방법에 따라 다르게 나타나는 학생들의 수학 학습에 대한 태도는 삼각형의 내각의 합을 어떻게 지도해야 하는가에 깊이 있는 성찰과 실천의 변화가 필요함을 보여준다.

본 연구에서는 측정 오차를 활용한 삼각형의 내각의 합에 대한 지도 방안을 초등학교 수학 수업에 적용하고 그 결과를 분석하였다(오영열, 2021). 이를 위하여 삼각형의 내각의 합을 학습하는 초등학교 4학년 학급을 대상으로 수업을 실시한 과정을 분석하여 측정 활동 과정에서 학생들이 나타내는 변화를 관찰하였다. 삼각형의 내각의 합을 지도하는 대안적 방법의 사례 연구를 통해 현장에의 실천 가능성을 모색하고 궁극적으로 측정 오차를 통한 지도 방법이 갖는 교수학적 의미를 탐색하고자 하였다.

Ⅱ. 연구의 배경

1. 측정 영역의 지도 방안

측정은 생활 속에 존재하는 여러 가지 속성의 양을 비교하고, 단위를 이용하여 양에 수치를 부여하는 것이다(NCTM, 2000). 양을 비교하고 측정하는 경험을 통해 학생들은 수학과 생활을 긴밀하게 연결할 수 있으며 다른 교과로의 활용 측면에서도 수학의 유용성과 실용성을 인식할 수 있는 기회를 갖는다.

2015 개정 수학과 교육과정에서는 측정 영역의 내용으로 양의 측정과 어림하기를 포함하고 있다(교육부, 2015). 양의 측정에서는 시간, 길이, 들이, 무게, 각도, 넓이, 부피 등의 속성을 수치화하는 것을 다루며, 어림하기에서는 어림을 통해 양을 단순화하여 표현하는 것을 다룬다. 이와 같은 내용을 바탕으로 초등학교 저학년에서는 길이, 부피, 무게, 넓이와 시간과 같이 생활 속에서 접할 수 있는 여러 속성을 인식하고 간단한 측정 도구를 사용하는 방법을 익히는 등 기초적인 전략을 익힌다. 고학년으로 갈수록 학생들은 측정을 위한 표준 단위의 필요를 바탕으로 속성을 측정하기 위한 보다 구체적인 기술과 전략을 개발해나간다. 측정 영역의 지도는 전 학년에 걸쳐 이루어지며 측정 대상이 가진 속성 자체에 대한 이해로부터 점차 속성 간의 관계를 이해하는 방향으로 확장하는 양상을 보인다.

측정 영역을 지도할 때 중요한 것은 경험을 통해 학생들이 측정의 의미를 이해하도록 하는 것이다. Hiebert(1984)는 교과서가 측정을 위한 기술을 중심으로 서술되고 있는 문제를 제기하며 측정에 대한 충분한 실제적인 경험이 측정 영역 지도의 핵심이라고 하였다. NCTM(2000)에서는 측정 가능한 속성을 이해하는 것, 속성을 측정할 때 사용하는 단위와 측정 과정에 익숙해지는 것을 강조하고 있다. 2015 개정 수학과 교육과정에서는 측정 교육을 통해 생활 주변에 존재하는 속성을 측정하는 과정에서 경험하는 양의 비교, 측정, 어림과 측정을 통해 양감을 기르는 것에 지도의 초점을 두고 있다(교육부, 2015). 이경화(1999)는 측정 공식을 암기하거나 반복연습을 통한 측정 학습 방법에 문제를 제기하며 측정의 의미와 다양한 측정 방법을 이해하는 것이 측정 영역을 지도할 때 고려되어야 한다고 하였다. 김신영, 강완(2005)은 초등 수학 교과서의 삼각형과 사각형의 넓이 지도 방법을 1차 교육과정에서 7차 교육과정까지 분석한 결과, 학생들에게 공식을 통한 계산이 아니라 넓이 개념을 의미 있게 다루는 비교와 측정 활동 중심으로 교과서가 변화해왔음을 밝힌 바 있다. 또한 김정하, 강문봉(2011)은 평면도형의 넓이 측정 지도에 있어서 문제 해결을 위해 필요한 보조선과 수치에 대한 정보가 이미 주어져 있는 지도 방법의 문제점을 지적하며, 이러한 지도 방법은 측정 영역의 학습 목표를 주어진 수치 계산에 두게 할 수 있어 측정 영역이 가진 실생활에서의 유용성이나 다른 영역에의 활용과 같은 이점을 살리지 못할 수 있다고 하였다. 이러한 선행 연구를 살펴볼 때, 측정 영역의 지도 초점은 측정의 공식을 계산하거나 암기하는 것이 아니라 측정 및 측정 방법의 의미를 이해하는 것이며 실생활에서 측정의 가치를 인식하여 학생 스스로의 삶과 연결할 수 있어야 함을 알 수 있다.

이를 바탕으로 연구자들은 실제 수업에서 활용할 수 있는 활동의 요소와 방법을 분석함으로써 측정의 의미를 이해할 수 있는 측정 수업의 방향을 제시하였다. 방정숙, 김정원, 김혜정(2012)은 측정 영역의 수업을 구성하는 다섯 가지 핵심 교수 학습 요소를 도출하고 이를 교사와 학생의 역할에 따라 서술하였는데, 다섯 가지 핵심 요소는 측정 활동의 필요성을 인식하는 것, 측정하는 대상의 속성을 인지하는 것, 측정 과정을 경험하는 것, 측정 전략을 공유하는 것, 측정 대상의 속성을 학생들의 일상 생활과 연결하는 것이다. 임미인, 장혜원(2018)은 초등학교 2학년 학생들을 대상으로 부러진 자를 활용하여 길이 측정 수업을 적용한 결과, 일반적인 자로 충분히 길이를 측정할 수 있는 학생들이 부러진 자를 활용하는 경우 오류와 오개념을 나타내게 되는 현상을 보여줌으로써, 부러진 자와 같은 도구를 통해 학생들이 측정에 대한 이해를 향상할 수 있는 활동을 섬세하게 구성할 필요가 있음을 제안하였다.

한편 측정 지도 시에 간과되어서는 안 되는 부분으로 모든 측정값은 근사값이라는 점을 들 수 있다(박교식, 2010; NCTM, 2000). 학생들은 측정 활동에서 도구 사용의 미숙, 눈금을 읽는 실수, 도구의 한계로 인하여 하나의 개체에 대하여 서로 다른 측정값을 생성할 수 있다. 특히 측정 도구 사용에 익숙하지 않은 초등학생들에게 이러한 양상은 필연적이고 일반적으로 나타난다. 그러므로 교실에서 교사가 학생들이 생성한 다양한 측정값을 충분히 고려하지 않은 채 하나의 답을 향해가는 수업을 전개하면 학생들의 사고에는 많은 의문이 남을 수 있다. 반면 교사가 측정 오차를 포함한 다양한 실제 측정값을 수업 자료로 활용할 경우 학생들은 자신의 측정값이 친구의 것과 왜 다른지를 이해할 수 있고, 이를 바탕으로 측정 개념을 이해하기 위하여 풍부한 수학적 토론의 장

에 참여할 수 있다. 이 때 학생들이 생성한 데이터는 실제성을 갖기 때문에 적극적인 논의를 이끌어내는 자료가 된다. 나아가 학생들은 자신이 직접 측정한 측정값을 바탕으로 하여 귀납적으로 추론할 수 있고 왜 그런 차이가 발생하였는지에 대한 맥락을 이해하기 위하여 의사소통할 수 있다(CCSSI, 2010).

2. 삼각형의 내각의 합 지도 방법

각도는 초등학교 3~4학년군의 내용 요소이며 학습 요소로 각도의 단위인 도(°)와 관련된다. 교과서에서는 부채의 벌어진 정도를 투명종이로 비교하는 활동을 통해 각의 크기로서 각도를 도입하고 있으며 직각을 똑같이 90으로 나눈 것 중 하나로 1°를 정의한다(교육부, 2015). 교과서에서 각도 지도 방법은 각도에 대한 양감을 기르는 목표 달성을 위하여 각도를 어림해보거나 각도기나 자를 사용하여 실제로 다양한 각도를 재고 그려보는 활동으로 구성되어 있다.

2015 개정 수학 교과서에서 삼각형의 내각의 합은 각도 단원의 후반부에 등장하는 주제이다. 이는 각도에 대한 기본 이해를 바탕으로 삼각형의 내각의 합이 가지는 불변성을 이해함으로써 후속 학습인 사각형의 내각의 합과 연결된다. 교육과정에 제시된 삼각형의 내각의 합과 관련한 성취기준은 '여러 가지 방법으로 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합을 추론하고 자신의 추론 과정을 설명할 수 있다'로, 학생들이 측정 활동을 경험함으로써 스스로 삼각형의 내각의 합이 일정하다는 성질을 발견하고 정당화하는 것을 강조한다.

그렇다면 실제 교실에서 삼각형의 내각의 합 주제가 지도되는 양상은 어떠한가? 홍갑주, 오성훈(2018)이 초등교사 30명을 대상으로 설문을 실시한 결과 삼각형의 세 각을 각도기로 측정하여 합을 알아보는 활동과 삼각형을 가위로 오려서 세 각을 모아보는 활동에 대하여 각각 86.7%, 83.3%의 교사들이 학생의 직접적인 조작 활동을 통해 지도한다고 하였다. 즉, 대다수의 교사는 본 주제를 지도함에 있어서 학생들의 수학적으로 조작하는 측정 활동의 경험을 강조하고 있으며 이는 교육과정에서 제시하는 성취기준과도 부합하는 것이다.

반면 해당 주제의 성취기준에 포함된 또 다른 요소인 추론의 경우 활동을 지도하는 과정에서 어려움이 발생되고 있음이 보고된다. 세부적으로는 각을 측정하는 활동이나 각을 오려서 모으는 활동에서 발생하는 정확도의 문제와 각을 오려서 모으는 활동에서 각을 맞추는 방법을 모르는 문제, 선행학습을 통해 사전에 삼각형의 내각의 합이 180°임을 알고 있는 학생들이 본 차시의 조작 활동에 대하여 느끼는 귀찮음과 지루함의 문제가 있었다(홍갑주, 오성훈, 2018). 이는 삼각형의 내각의 합 주제에 포함된 추론 활동이 세 각의 크기를 측정하여 성급하게 결론에 도달하거나 문제 상황의 해결을 위해 교과서에 제시된 정당화의 방법을 따라해 보는 것을 중심으로 하고 있어, 결국 조작 활동을 긴밀하게 연결하여 학생들 스스로 추론하여 결론을 도출해내는 수학적 정당화의 과정이 측정 수업의 주요 초점이 되지 않고 있음을 보여준다.

수학은 본래 증명과 깊은 관계를 맺고 있으므로 학교 수학에서도 추론은 주요한 논점이 된다. 이에 초등 수학에서는 학생들이 수학적으로 추론하고 의사소통하는 역량을 가질 수 있도록 수학적 추측 및 비형식적 정당화 활동을 강조하고 있다. 초등학생의 경우 판단 자체를 교사에게 의존하는 외적 증명에서부터 구체적인 예를 사용한 추론, 높은 수준의 정당화가 가능한 연역적 추론에 이르기까지 다양한 수학적 정당화 수준이 가능하므로 수업에서 여러 가지 사례를 통해 학생들이 수학적으로 추측하고 정당화하는 활동이 많이 제공될 필요가 있다(권성룡, 2003). 특히 삼각형의 내각의 합은 초등 수학에서 지속적으로 다루어지며 학생들이 직접적인 조작 활동을 통해 접근할 수 있는 수학적 정당화의 주제이므로 이를 섬세하게 지도하는 방안을 구안함으로써 학생들의 추론 능력을 향상시킬 수 있을 것이다.

학생들이 삼각형의 내각의 합에 대한 추론을 하는 데 도움을 주는 방법으로 원을 이용한 방법이 있다. 각도 지도에 있어 원을 이용하는 방법은 각을 알고 각도를 측정하는 데 유용한 전략이 된다. 수학 학습에서 원은 분수 개념을 도입할 때 적극적으로 활용되고 있지만, 원은 한 바퀴 회전을 표현한 것이므로 이를 일정하게 접을

경우 반(1/2) 바퀴, 반의 반(1/4) 바퀴를 나타낼 수 있다. Wilson & Adams(1992)는 원 종이를 접거나 잘라 각을 측정하는 활동을 제안하였는데 특히 반으로 접은 후 자른 반원 모양의 종이를 각도기로 활용하는 것의 용이함을 밝혔다. 또한 이 과정에서 원의 중심을 인식하게 됨으로써 각도기의 중심을 기준으로 해야 할 필요를 자연스럽게 체득할 수 있다. 동시에 각도기와 동일한 모양을 가진 반원으로의 학습 지도는 이후 측정 도구로서 각도기를 사용할 때 직관적 이해의 바탕을 마련할 수 있다. 강홍규(2019) 또한 각도 개념을 지도할 때 분석적인 접근으로부터 직관적이고 조작적인 접근으로의 변화가 필요함을 제안하며 직각이 아닌 원판을 활용한 지도 방법을 제안하고 있는데, 원판을 360°로 정의하면 직각은 자연스럽게 원판의 1/4인 90°로 정의되며 이를 통해 180°보다 큰 각도 쉽게 도입할 수 있을 뿐만 아니라 중등 수학에서 회전량으로 일반각을 정의하는 것과 연결되는 장점을 가지고 있다고 하였다. 이와 같은 선행 연구를 살펴볼 때, 삼각형의 내각의 합을 지도에 있어서도 원을 이용한 추론 방법을 생각해봄 직하다. 수학 교과서의 본 차시에 제시되고 있는 추론 활동은 일직선 상에 삼각형의 세 각을 모아 붙여보아 180°, 즉 평각이 됨을 보이는 것이다. 반원이 180°임을 고려해볼 때 이는 원을 이용한 지도 방법으로 변화가능하며, 원을 이용한 접근 방법이 가진 직관적 이해의 장점을 부각시킬 수 있다. 이에 본 연구에서는 삼각형의 내각의 합 주제에서 측정 오차의 활용을 바탕으로 원을 이용한 수학적 정당화 방법을 적용하고 실제 양상을 탐색하고자 하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 설계

본 연구는 측정 오차를 활용한 삼각형의 내각의 합에 대한 지도 방안을 초등학교 교실 수업에 적용하고 이를 질적으로 분석한 사례 연구로 설계하였다.

2. 연구 참여자

본 연구는 S시에 위치한 초등학교 4학년 1개 학급 학생 23명(남 13명, 여 10명)을 대상으로 실시하였다. 연구를 실행하기 전 해당 학급을 담당하고 있는 교사와의 사전인터뷰를 실시하여 학생들에 대한 기초 자료를 수집하였다. 해당 초등학교는 지역 사회의 교육에 대한 높은 관심을 바탕으로 평균 이상의 학업 수준에 속하였으며 연구 참여 학생들이 속한 학급 내 사교육 참여 비율은 약 80%였고, 수학 학습 부진 학생 없이 모든 학생이 평균 이상의 성취도를 보이고 있었다.

특히 대부분의 학생들이 선행학습을 한 이후에 학교의 수학 수업에 참여하는 경우가 많다는 점은 특징적이었다. 교육 경력 9년의 담임 교사는 평소 수업 주제에 대한 흥미를 새롭게 불러일으키거나 학생들에게 의미 있는 수학 수업을 전개하기 위해 많은 노력을 기울이고 있었다. 학생들이 비교적 정형화된 문제에 대한 답을 구하는 것에는 어려움을 보이지 않았지만 문제 속에 담긴 수학적 원리를 깊게 이해하는 것에는 어려움을 보이고 있었기에 이러한 부분들을 어떻게 지도해야 하는가에 대한 교사의 지속적인 고민이 있었다.

이러한 점에서 볼 때, 초등학교 4학년 1학기에 등장하는 삼각형의 내각의 합 주제에 측정 오차를 통해 지도하는 방법을 적용하는 것은 해당 학급의 교사와 학생들에게 긍정적인 결과를 가져올 것으로 기대되었다. 첫째, 해당 학습 주제가 교육과정 내에서 다루어지는 것이기 때문에 평소 수업 실천의 변화를 모색할 수 있다는 점이다. 둘째, 선행학습을 통해 학습 주제를 이미 다 이해하고 있다고 생각하는 학생들에게 수학 수업을 통해 새로운 수학적 의미를 발견할 수 있도록 도울 수 있고, 셋째, 학급 토론 과정을 통해 수학적으로 의사소통하는 방법을

경험할 수 있다는 점이 기대되었다.

3. 자료 수집

본 연구 자료는 수업 실행 과정 및 결과를 중심으로 수집하였다. 수업은 1교시 40분씩 총 2차시로 이루어졌으며 연구자의 관찰 없이 교사가 수업을 실행하는 비참여관찰을 바탕으로 이루어졌다. 이는 연구자의 참여로 인해 교사와 학생들이 학습 주제에 몰입하는 것에 방해를 받을 수 있을 것으로 예상되었기 때문이다.

연구자는 측정 오차를 활용한 삼각형의 내각의 합에 대한 지도 방안을 바탕으로 구체적인 수업 지도안과 수업에서 활용할 수 있는 학습지를 제작하여 사전에 교사와 공유하였다. 수업을 실행하는 교사는 수업의 목적과 방향을 잘 이해할 필요가 있었으므로 활동 단계에 따른 구체적인 발문(예를 들어, 활동 2에서 삼각형의 내각의 합은 얼마일까요? 그렇게 생각한 이유는 무엇일까요? 모든 삼각형의 세 각의 크기의 합은 얼마라고 예상하나요? 삼각형의 내각의 합이 얼마인지 어떻게 알 수 있을까요?), 수업에의 유의점(예를 들어, 활동 1에서 각도기로 각을 각각 측정하여 내각의 합을 구하기, 활동 2에서 포스트잇이 일정한 간격을 유지하여 시각적으로 명확한 차이가 드러나도록 하기, 활동 3에서 부채의 크기를 너무 작게 그리지 않기 등)등을 상세히 기술한 자료를 교사에게 제공하였고, 교사는 자료를 검토하고 의문이 생기는 점을 연구자와 공유함으로써 수업의 목적과 방향을 명확히 이해한 후 수업을 실행하였다. 교사와의 논의 과정을 통해 수업에서 유의사항은 색깔 있는 마커를 사용하여 수업 지도안에 표기하였다. 본 고에서 수업 지도안은 지면을 고려하여 <표 Ⅲ-1>과 같이 요약하여 제시하였다.

먼저 첫 번째 활동은 삼각형의 세 각의 크기 측정하기이다. 제시된 삼각형에서 각을 찾고 세 각의 크기를 각도기로 측정하여 기록하는 활동으로, 이 때 세 각의 크기는 각각 측정한 후 더하여 합을 기록할 수 있도록 안내하였다. 이미 삼각형의 내각의 합이 180°임을 알고 있는 경우 두 각을 측정하고 나머지 각을 연산으로 구하게 되면 각도 측정 활동에서 발생하는 측정 오차를 발견할 수 없기 때문이다.

<표 Ⅲ-1> 측정 오차를 활용한 삼각형의 내각의 합 수업의 흐름

활동순서	측정 오차를 활용한 삼각형의 내각의 합 활동 주제와 내용	
	활동 주제	내용
활동1	삼각형의 세 각의 크기 측정하기	▪ 제시된 삼각형에서 각 찾기 ▪ 삼각형의 세 각의 크기를 각도기로 측정하기 ▪ 내각의 합 구하기
활동2	삼각형의 내각의 합은 180°일까?	▪ 자신이 구한 삼각형의 내각의 합에 이름 포스트잇 붙이기 ▪ 삼각형의 내각의 합이 얼마일지 짝 토론하기 ▪ 삼각형의 내각의 합이 얼마일지 전체 토론하기
활동3	삼각형의 세 각을 이어 붙여 내각의 합 추론하기	▪ 삼각형의 꼭짓점을 중심으로 같은 길이만큼 호를 그려 부채모양으로 각각 오리기 ▪ 자른 세 각을 이어 붙이기 ▪ 만든 모양을 바탕으로 삼각형의 내각의 합 추론하기
활동4	삼각형의 내각의 합 일반화하기	▪ 직각 삼각형 형태에 적용하기 ▪ 둔각 삼각형 형태에 적용하기 ▪ 모든 삼각형의 내각의 합이 얼마일지 추론하기

두 번째 활동은 삼각형의 내각의 합을 과연 180°라고 말할 수 있는 지에 대한 토론으로 구성된다. 학생들 각각 자신이 구한 삼각형의 내각의 합을 칠판에 기록하고, 해당하는 각의 크기의 합에 자신의 이름을 적은 포스트잇을 붙인다. 포스트잇을 붙일 때는 같은 크기의 종이를 사용하고 일정한 간격이 유지되도록 붙임으로써 그래프

를 명확하게 표현할 수 있도록 유의한다. 학생들은 자신이 구한 삼각형의 내각의 합 이외에도 다양한 답이 존재한다는 것을 시각적으로 확인할 수 있고 이를 바탕으로 학급 전체 토론을 이끌어낼 수 있다. 이 때 교사는 학생들에게 삼각형의 내각의 합을 얼마라고 생각하며 그 이유는 무엇인지, 그렇다면 모든 삼각형의 내각의 합을 얼마라고 예상할 수 있으며 이를 정당화할 수 있는 방법은 무엇인지에 대한 발문을 던짐으로써 학급 전체 토론을 효과적으로 이끌어낼 수 있다. 이러한 과정은 다양한 활동 후 문제를 제기하는 일반적인 수업 절차와 같지 않으나 학생 스스로 데이터를 생성해내고 해당 데이터에 기반한 자발적 궁금증을 가지고 수학적 추론을 경험할 수 있다는 면에서 특징적이다.

세 번째 활동은 삼각형의 세 각을 이어 붙여 내각의 합을 추론하는 활동이다. 각도를 측정한 삼각형의 각에 일정한 길이만큼 호를 그려 각각 가위로 오리고 이를 이어 붙인 후 나타나는 모양이 무엇인지 확인하고 설명하도록 한다. 나타난 모양을 바탕으로 삼각형의 내각의 합이 얼마라고 생각하는 지, 모든 삼각형의 내각의 합은 얼마라고 생각하는 지에 대하여 논의한다.

네 번째 활동은 삼각형의 내각의 합을 일반화하는 활동이다. 첫 번째부터 세 번째 활동까지는 일반적인 예각삼각형을 바탕으로 수행되는 데 비하여, 네 번째 활동은 이를 직각과 둔각 삼각형으로 확장함으로써 삼각형의 내각의 합에 대한 일반화를 시도할 수 있다. 다만 현 교육과정에서 삼각형의 종류는 4학년 2학기 삼각형 단원에서 학습한다는 점을 감안할 때, 명시적으로 직각, 둔각 삼각형 등의 용어를 사용하기보다는 다양한 삼각형의 형태를 교사가 제시함으로써 삼각형 전체로의 일반화를 시도할 필요가 있다.

이상의 수업 과정을 통해 수집한 본 연구 자료는 2차시로 이루어진 수업 과정을 담은 수업 녹음본과 수업 사진 및 학생들의 학습지와 소감문, 교사가 수업 과정과 수업이 끝난 후 자신의 생각을 기록한 교사 관찰 노트로 구성되었다. 수업 녹음본은 수업 과정을 전반적으로 담아내고 누락되는 부분이 없도록 유의하기 위하여 교사의 위치에서 기록한 것과 학생들의 위치에서 기록을 따로 마련하여 수업 상황을 세밀하게 관찰하였다. 또한 학생들의 학습 과정은 학습지에 체계적으로 기록하도록 하였고 수업이 끝난 후 학생 소감문과 함께 스캔하여 자료 분석의 바탕을 마련하였다. 마지막으로 수업 과정에서 학생들을 관찰하고 기록한 교사 관찰 노트를 자료로 수집하였다.

4. 자료 분석

수집한 자료는 질적 사례 분석 방법을 통해 분석하였다(Yin, 2011). 본 연구에서 자료를 분석한 절차는 다음과 같다. 분석의 1단계로 수업 과정 전체를 녹음한 녹음 자료를 전사하였다. 분석의 2단계는 전사한 자료를 바탕으로 녹음 자료를 다시 들으며 학생들의 생각과 의미 있는 변화가 나타난 부분을 코딩하였다. 본 연구의 목적이 수업 과정에서 나타나는 학생들의 변화를 살펴보고자 함이었음을 고려하여 초기에는 <표 Ⅲ-1>에서 제시한 4가지 활동에 따라 코딩한 학생들의 반응을 분류하였다. 이후 3단계 분석을 통해 각 자료에서 나타난 학생들의 의미 있는 변화와 관계를 살피며 소주제를 생성하였다. 분석의 4단계는 코딩되어 분류된 학생들의 변화에 대한 맥락을 다시 검토하고 이와 소주제와의 관계를 살핌으로써 분석 결과의 타당성을 확보하는 것이었다. 5단계 분석에서는 정리한 소주제를 포괄할 수 있는 명칭을 사용하여 대주제명을 최종 변경하였다. 분석 과정에서 연구자 2인은 각각 수학교육전문가와 현장 교사의 입장을 반영하여 자료의 원래 의미에 충실한 분석 결과를 도출하고자 하였다. 이상의 자료 분석 과정의 예는 <표 Ⅲ-2>에 제시하였다.

<표 III-2> 자료 분석과 학생 반응의 예

순	대주제	소주제	학생 반응의 예
1	측정하기	측정값 부정하기	저는 37° 같은데 35°로 고쳤어요.
		의문 제기하기	삼각형의 합은 항상 180°인데, 선생님이 준 삼각형은 잘못 된 것 같아서요.
2	수학적 정당화 시도하기	측정 과정에 의문 갖기	쟤네들은 잘 못 잰 거 같은데.
		외부 권위에 의존하여 수학적 정당화 시도하기	문제집에서 봤는데, 학원 문제집에서요.
		데이터에 기반하여 수학적 정당화 시도하기	180°라고 잰 친구들이 제일 많아서요.
		측정 오차의 발생 가능성 인식하기	오차가 생기는데.
3	수학적 정당화하기	반원을 이용하여 정당화하기	반원이 원의 절반이니까요.
		일반화 및 다각형으로 확장하기	삼각형을 두 개 이어 붙이면 사각형이니까 사각형이면 360°라고 할 수 있겠네요.
4	수학적 의사소통과 수학에 대한 태도 변화	수학적 의사소통	삼각형을 이렇게 나누고 자르면 생기는 모습이 각도기의 180°와 똑같기 때문이다.
		수학에 대한 태도	컴퍼스 사용하는 게 재미있었다.

도출된 주제에 따라 연구 결과를 제시하는 방법은 에피소드와 학생들의 학습지 및 소감문에 나타난 반응이 중심이 되었다. 특히 코딩된 학생 반응을 이해하기 위해서는 반응이 도출되고 논의되었던 교실 수업 맥락의 역할이 크다고 판단되었기 때문에 맥락을 포함한 에피소드 단위로 연구 결과를 제시하였다. 따라서 각 주제는 에피소드로 구성되었으며 에피소드는 교사T(이하 T)와 학생S(이하 S)의 상호작용, S와 S의 짝토론, S의 (전체) 발언 등으로 구성되었다. 학생 이름은 에피소드에 대한 이해를 돕기 위하여 에피소드 순서에 따라 S1~S33으로 임의 명명되었다. 녹음 자료로 수집된 자료의 한계를 고려하여 S1~S33의 학생은 서로 중복될 수 있고 경우에 따라서 1인 또는 교실에서 동시에 발성되는 다수의 학생 발언을 대표하기도 하였다. 교사 관찰 노트는 에피소드와 학생들의 반응을 이해하고 결과를 해석하기 위한 참고 자료로 활용되었다.

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

1. 측정하기

가. 측정값 부정하기

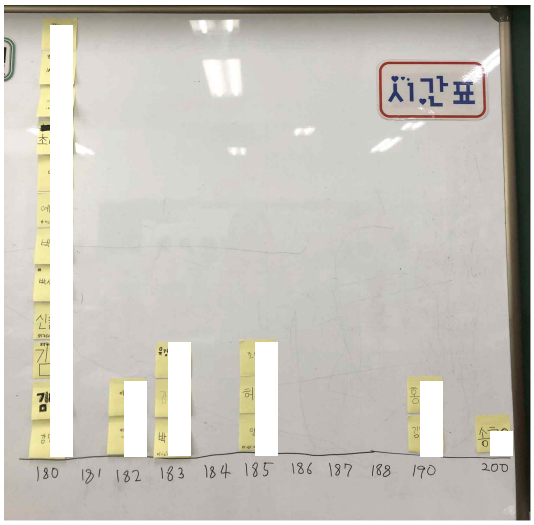
첫 번째 활동에서 학생들은 삼각형의 세 각의 크기를 각도기로 측정하였다. 대부분의 학생들은 각도기 사용에 어려움 없이 세 각을 각각 측정하였고 이를 더하여 내각의 합을 구하였다. 이미 학급의 대부분 학생이 내각의 합이 180°임을 예습을 통해 알고 있었기 때문에 측정값으로 세 각의 합이 180°가 나오지 않은 경우 이를 지우고 다시 맞추어 측정하는 S1의 모습이 관찰되었다. 이는 이후 토론하기 단계에서 관찰된 다음과 같은 모습과도 연결되었다.

<에피소드 1: 측정값의 수정>
T: 얘들아, 그럼 솔직하게 얘기해보자. 나는 머릿속으로 세 각의 합이 180°라고 알고 있어요. 그런데 쟀는데 어? 왜 180°가 안 됐지? 하고 각을 고친 사람 있어요? (손을 든 S1을 보며) ○○이 그렇게 했어요?
S1: 네, 저는 37° 같은데 35°로 고쳤어요.
T: 180°가 되야 해서요? 그럼 37°로 했으면 몇 도가 나와야 돼요?
S1: 182°요.

또한 S2는 자신이 알고 있던 지식과 다른 측정값이 나오자 37°를 35°로 고치는 행동을 보였다. 이는 기존에 알고 있는 삼각형의 내각의 합은 180°이라는 지식을 고수하기 위하여 자신의 측정값을 부정하는 행동이었다.

<에피소드 2: 측정값의 오류 발견>
S2: 저 이거 다시 재보니까 제가 잘못 잰 거에요.

이러한 부정하기의 모습은 특히 포스트잇을 칠판에 붙여 시각화하는 과정에서도 나타났다. 학생들이 구한 삼각형의 내각의 합을 포스트잇으로 칠판에 시각화하여 나타낸 모습은 다음 [그림 Ⅳ-1]과 같다. S1과 같이 칠판에 포스트잇을 붙이기 전에도 측정을 다시 할 수 있는 기회가 충분히 있었음에도 불구하고 자신의 측정값을 고수하던 한 학생은, 칠판에 붙여 있는 다른 친구들의 포스트잇 절반 이상이 180°임을 확인한 후 자신의 측정을 부정하였다. 또한 다른 학생은 포스트잇을 칠판에 붙이는 과정에서 작은 목소리로 교사에게 다가와 “저는 183°에요”라고 말하였다. 이 학생의 경우 결과적으로 자신의 측정값을 부정하지는 않았지만 자신과 다르게 기록되고 있는 친구들의 포스트잇을 보며 스스로 측정한 것이 잘못되었을지 모른다는 생각을 가졌고 이에 대한 사고 과정에 의문을 갖게 되었다.



[그림 Ⅳ-1] 칠판에 시각화한 삼각형의 내각의 합 측정값

포스트잇을 활용한 시각화 결과, 삼각형의 내각의 합이 180°가 나온 학생은 12명이었고, 그 외의 값을 구한

학생은 11명이었다. 180°가 아닌 값은 182° 2명, 183° 3명, 185° 3명, 190° 2명, 200° 1명으로 나타났다. 이는 선행 연구에서 도출된 결과와 같은 양상이었으며 초등학생들이 각도기를 사용하여 실제 측정하는 활동에서 많은 측정 오차가 발생하고 있는 모습과도 일치하였으나, 교사용 지도서에 제시된 175°~185°의 범위와는 다소 차이가 있었다(교육부, 2015). [그림 Ⅳ-1]의 포스트잇은 학생들의 개인정보 보호를 위하여 일부분을 가려 제시하였다.

나. 의문 제기하기

칠판에 다양한 측정값이 제시된 이후 학생들은 왜 다양한 측정값이 나왔는지, 그렇다면 삼각형의 내각의 합은 얼마인지에 대하여 토론을 실시하였다. 학생들은 시각화된 자료와 자신의 기존 지식을 비교하며 무언가 이상하다는 의문을 갖게 되었다. 교사는 학생들과 시각화된 데이터를 공유하며 칠판 위의 데이터가 나타난 양상에 대해서도 관심을 가질 수 있도록 발문하였다.

<에피소드 3: 측정 도구의 문제>
T: 그럼 애네들(측정값이 180°가 아닌)은 다 틀린 거에요?
S3: 음. 다 틀린 거 같기도 하고. 근데 저희가 틀린 걸 수도 있을 것 같아요.
T: 그럼 다르게 잰 친구들은 틀린 걸까?
S3: 딴 게 맞을 수도 있는데…
T: 친구들 그래프는 왜 저렇게 나왔을까요?
S4: 각도기가 이상해서요.
S5: 각도기가 이게 이런 식으로 된 각도기도 있고요 여기에 뭔가 구멍이 있어 가지고…
T: 각도기 종류의 차이다?
S5: 여기에 똑같은 각도기는 하나도 없어요.

학생들이 찾은 첫 번째 원인은 측정 도구의 문제였다. 학생들은 각도기의 종류가 다르기 때문에, 각도기가 이상해서와 같은 측정 도구의 이유를 들어 다른 측정값이 나오게 되었을지 모른다고 추측하였다. 이는 측정 도구에서 문제의 원인을 찾으려고 하는 접근으로, 다양한 측정값을 무조건 부정하기보다 그러한 양상이 나온 원인을 찾고자 하는 시도였고 자신이 알고 있는 지식을 통해 현상을 해석하기 위한 첫걸음이었다.

<에피소드 4: 교사가 제시한 삼각형의 문제>
S6: 삼각형의 합은 항상 180°인데, 선생님이 준 삼각형은 잘못 된 것 같아서요.
T: 아, 선생님이 그려 준 삼각형이 잘못 그려져서 세 각의 합이 180°가 안 되는 것 같아요?
S6: 네.

두 번째 원인으로는 교사가 제시한 삼각형의 문제가 제기되었다. 학습지를 통해 제시한 삼각형이 잘못 그려져서, 즉 삼각형이 아니기 때문에 측정값이 180°가 아닌 값이 도출되었다는 것이었다. 이는 선행학습을 통해 삼각형의 세 각의 합이 180°임을 확신하고 있는 학생에게 나타났는데, 측정 활동이나 과정의 오류보다는 제공된 도형의 오류 가능성에 초점을 둔 접근이었다.

<에피소드 5: 연산에서의 문제>
S7: 더하기 하다가 잘 못 했을 수도 있어요.

인지적 불균형을 해소하기 위해 학생들이 찾은 세 번째 원인은 연산에서의 문제였다. 세 각을 각각 측정한 측정값은 올바르게 되었으며 단지 이를 더하는 과정에서 생긴 실수로 인식하였다. 이는 측정 과정보다는 측정 후 연산 과정에 초점을 둔 추측으로 실제 학생들이 충분히 경험할 수 있는 연산 실수의 상황으로 바탕으로 하고 있다.

이와 같이 측정 활동을 통해 만들어 낸 서로 다른 측정값을 통해 학생들은 측정 오차가 발생한 문제 상황을 인식할 수 있었고, 이를 이해하기 위하여 다양한 원인에 대한 추측을 시도하였다.

2. 수학적 정당화 시도하기

가. 측정 과정에 의문 갖기

교사는 삼각형의 세 각의 합은 무엇인가를 주제로 짝 토론을 시작하였다. 두 명씩 짝을 지을 경우 다수가 참여하는 토론에 비해 무임승차하는 것이 어렵기 때문에 학생들이 자신의 의견을 충분히 의사소통할 수 있는 장점이 있었다. 반면 짝을 지은 두 명의 학생이 처음부터 삼각형의 내각의 합은 180°이라는 의견 일치를 보이는 경우 더 이상 논의가 발전되기 어려웠다. 이 때 교사는 교실 곳곳을 돌아다니며 학생들의 논의 사항을 점검하고 질문하였는데 이는 새로운 사고를 시도하는 단초를 제공하였다.

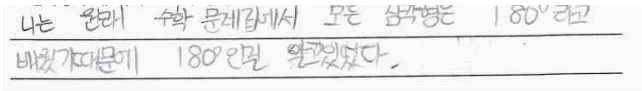
<에피소드 6: 다른 원인으로의 추측>
S8: 음. 원래 삼각형의 합은 180°인데.
T: 원래 삼각형의 합은 180°에요? 왜요?
S9: 재네들은 잘 못 잰 거 같은데.

교사는 S8에게 그래프가 다양한 데이터를 갖게 된 이유를 질문했고, S8는 삼각형의 세 각의 합은 '원래' 180°이라는 것으로 답했다. S8은 문제 상황에 대한 인식은 이루어지고 있었으나 이를 효과적으로 해결하거나 스스로 납득할 수 있는 원인을 발견하지는 못하였다. 또한 증명을 해야 할 필요가 없이 삼각형의 세 각의 합이 180°라는 것을 당위적인 것으로 여기고 있었다. 교사가 이에 대하여 의문을 제기하는 발문을 던지자 S9는 친구들의 측정 과정에 문제가 있었기 때문이라는 원인을 제시하였다. 이는 앞서 측정 도구의 문제, 제시된 삼각형의 문제, 연산 과정에서의 문제와 다르게 측정 활동 과정에 초점을 둔 것이었기 때문에 보다 발전된 것으로 분석되었다.

나. 외부 권위에 의존하여 수학적 정당화 시도하기

초기 토론 양상은 서로 다른 측정값의 원인을 외부에서 찾으려고 하는 시도로 나타나기도 하였다. 학생들의 '삼각형의 세 각의 합은 180°이다'를 알고 있는 경우가 있었기에 수업 초반부터 이를 언급하는 학생들이 있었고 일부 학생들은 그러한 지식을 근거로 자신의 생각을 뒷받침하는 모습을 보여주었다.

<에피소드 7: 외부의 권위에 의존한 수학적 정당화의 시도>
S10: 원래 삼각형 세 각의 합은 180° 아니에요? 문제집에서 봤는데, 학원 문제집에서요.



[그림 Ⅳ-2] 외부의 권위에 의존한 수학적 정당화 시도에 대한 S11의 소감문

S10은 데이터의 다양한 측정값이 나타난 원인을 찾기보다는 자신이 알고 있는 지식을 토대로 추론하였고 이때 활용된 근거는 문제집과 학원의 권위였다. S11 또한 수학 문제집에서 배운 내용을 바탕으로 삼각형의 내각의 합을 추론하였다. 이는 학생 스스로 주어진 문제에 대하여 수학적으로 정당화하기보다는 외부의 권위에 의존한 외적 증명으로의 추론 형태를 취하고 있음을 보여주었다(Tall, 1995). 이와 같은 외부 권위에 의존한 수학적 정당화의 양상은 긍정적인 측면에서 볼 때 해당 학생이 선행 학습을 통해 학습한 지식을 바탕으로 추론을 시도하고 있다고 볼 수 있지만, 한편으로는 학습한 지식이 내면화의 단계에 아직 도달하지 못했음을 보여주는 것이기도 하다. 이러한 학생들에게는 수학적으로 추론하고 원리를 발견하게 하는 기회를 제공할 수 있는 수학적 정당화 과제나 활동이 필요할 것이다.

다. 데이터에 기반하여 수학적 정당화 시도하기

외부의 권위를 빌려 자신의 생각을 정당화하고자 했던 학생들은 점차 자신이 만든 데이터를 근거로 수학적 정당화를 시도하였다. 그 중 다수 의견으로 제시된 것은 다음과 같은 발언이었다.

<에피소드 8: 데이터에 기반한 수학적 정당화의 시도>
S12: 딴 게 맞을 수도 있는데 180°가 제일 많아서요.
S13: 180°라고 잰 친구들이 제일 많아서요.

학생들은 삼각형의 내각의 합이 180°라는 주장을 위해 180°로 측정한 학생들이 제일 많기 때문이라는 근거를 들었다. 그러나 '딴(다른) 게 맞을 수도 있다는' 등의 불확실한 태도를 동시에 드러냄으로써 자신이 내세운 근거에 대해 불확실한 태도를 보이기도 하였다. 이와 같이 정당화의 시도와 불확실함이 공존하는 과정은 학생들로 하여금 자신의 주장이 불확실한 토대에 위치해 있음을 인식하게 하고, 어떤 방법으로 증명하는 것이 가장 명확한 것인가, 주장에 대하여 보다 명확한 근거는 무엇인가에 대한 질문을 갖게 하는 바탕이 되었을 것으로 보인다.

라. 측정 오차의 발생 가능성 인식하기

짝과의 의사소통이 끝난 후 학생들의 전체 토론 초점은 점차 180°가 아닌 값이 나온 이유가 무엇인지를 데이터에 기반하여 설명하는 것으로 맞추어졌다. '원래' 그렇다거나 기존에 알고 있던 지식의 권위를 빌려 설명하던 학생들은 180°가 아닌 데이터들의 차이와 서로 다른 원인에 주목하기 시작했다.

<에피소드 9: 측정 오차의 발생 가능성 인식>
T: 그럼 여기 182°, 183°, 185°, 190°, 200°라고 한 친구들도 있지. 왜 같은 삼각형인데 이렇게 답이 나왔을까요?
S14: 틀린 애도 있고 실수를 해서요.
T: 어떤 실수인데요?
S14: 각을 여기서부터 재어야 하는데 여기서부터 재거나 그럴 수가 있기 때문에요.
S15: 그럼 너무 (차이가) 큰 건데?
S16: 오차가 생기는데.
S15: 여기를 쟀을 때 선이 굵으면 선을 밑에서 잰다든가 위에서 잰다거나 가운데에서 잰다거나 기준이 다를 텐데 그 기준 때문에 그런 것 같아요.
S17: 사람마다 다 원하는 방법대로 각을 재기 때문에 서로 다를 수 있어요.
T: 원하는 방법이라는 게 무슨 뜻이에요?

S17: 사람마다 다 편한 방식으로요.

학생들이 도출한 180°가 아닌 데이터의 값은 182°, 183°, 185°와 같이 180°에 가까운 경우와 190°, 200°와 같이 10°~20°의 비교적 큰 차이를 보이는 경우가 있었다. S13은 이러한 차이에 주목하여 이것을 틀린 것과 실수한 것으로 용어를 구분하여 설명하였다. 이것은 이어지는 대화에서 보다 명확한 의미를 갖게 되는데, S15는 S14의 말을 부연 설명하며 삼각형의 변이 가진 굵기의 차이에 따라 발생하는 문제의 가능성을 지적하였다. 즉, 학생들은 각 변에 중심선을 맞추고 각도를 재는 방법에서 차이가 발생할 수 있음을 인식하였고 이는 '기준이 다르다', '오차가 생긴다', '사람마다 측정하는 방법이 다르다'는 표현이 등장하는 계기를 마련하였다. 이와 같은 논의는 측정 도구를 동일한 방법으로 사용했음에도 불구하고 측정 과정에서는 다양한 이유로 측정 오차가 발생할 수 있으며 이러한 흐름이 자연스러운 것이라는 인식으로 나아가고 있음을 보여주었다.

3. 수학적 정당화하기

가. 반원을 이용하여 정당화하기

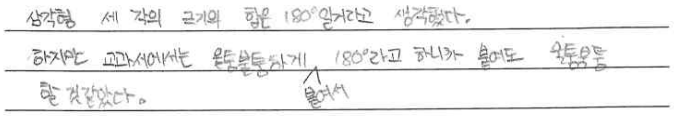
정밀한 정당화 과정의 필요성을 인지한 학생들은 처음 활동에서 측정했던 삼각형을 조작하여 정당화의 과정을 경험하였다. 이는 교사가 제시한 삼각형의 각 부분을 중심에 두고 컴퍼스로 부채 모양의 호를 그린 후 오리고 모여 붙이는 방법이었다.

<에피소드 10: 반원을 이용한 수학적 정당화>
T: 얘들아, 이어 붙이면 무슨 모양이 돼?
S18: 반원이요.
S19: 반원이 될 것 같아요.
S20: 네, 진짜 반원이 돼요.
S18: 반원이 180°니까.
T: 반원은 180°야? 왜 반원은 180°야?
S20: 반원이 원의 절반이니까요.

교사의 발문은 각각의 모양을 이어 붙이면 어떤 모양이 될 것인지 예상할 수 있는 기회를 제공했다. 학생들은 큰 어려움 없이 직관적으로 형태를 발견할 수 있었다. '반원'이라는 용어를 따로 교육과정 상에서 학습한 것은 아니었지만 학생들은 원의 중심각이 360°임을 알고 있었기 때문에 원의 절반이라는 일상적 의미를 바탕으로 반원 모양임을 찾아내었다. 교사는 반원이 왜 180°가 되는지를 질문하였고, 논의를 통해 학생들은 '반원은 원의 절반이니까' 360°의 절반인 180°이 된다는 추론을 자연스럽게 이끌어낼 수 있었다.

<에피소드 11: 각도기를 통한 직관적 이해>
T: 그러면 반원이 180°인 건 어떻게 알아?
S21: 원이 360°이니까요.
T: 원이 360°인 거? 그럼 원이 360° 인 걸 안 배운 친구들은 어떻게 할까?
S22: 어, 그러면 각도기로 해요.
S21: 각도기가 180°니까.

원의 중심각이 360°라는 사실을 알지 못할 경우에도 해결할 수 있는 방법에 대한 질문이 이어졌다. 이 때 S22는 반원이라는 용어 대신 '각도기' 또는 '각도기 모양'이라는 용어를 사용하였다. 학생들이 측정 활동에 사용한 각도기는 측정 도구임과 동시에 새로운 추론의 정당화를 위한 자료로도 활용되고 있었다.

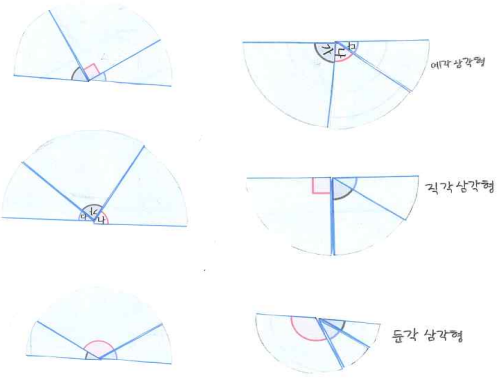


[그림 Ⅳ-3] 교과서 활동과의 비교를 말하는 S23의 소감문

S23은 교과서에 제시된 활동과 측정 오차를 활용한 활동을 비교하여 설명하였다. 이 때 S23은 시각적으로 두 가지의 활동을 비교하여 교과서 활동은 '울퉁불퉁'한 것으로 표현하였다. 이는 학생들이 세 각을 오려 붙였을 때 생기는 중심각의 모양뿐만 아니라 붙인 모양의 외형에도 관심을 가지고 있으며 이러한 모양이 인식이 활동 결과에도 영향을 미치고 있음을 보여주었다("교과서에서는 울퉁불퉁하게 붙여서 180°라고 하니까 붙여도 울퉁불퉁할 것 같았다"). 측정 오차를 활용하여 삼각형의 내각의 합을 구하는 과정은 학생들이 반원 모양임을 한 눈에 손쉽게 알아볼 수 있다는 점에서 기존의 방법과 차별점이 있었다.

나. 일반화 및 다각형으로 확장하기

조작 활동을 통해 삼각형의 세 각의 합이 180°임을 확인한 학생들은 이후 삼각형의 다른 형태에 대한 추론으로 이를 발전시켜 나갔다. 삼각형의 종류를 명시적으로 학습하지 않은 시기였기 때문에 교사는 학습지에 제시된 직각 삼각형 형태(이하 직각 삼각형)와 둔각 삼각형 형태(이하 직각 삼각형)를 중심으로 활동하였으나, 선행 학습 여부에 따라 활동지에 명시적인 용어를 사용하는 경우도 있었다([그림 Ⅳ-4]의 S25). 예각 삼각형을 조작하는 과정에서 생겼던 컴퍼스 사용, 오려 붙이기 과정의 시행착오는 직각과 둔각 삼각형에서 자연스럽게 줄어들었으며 조작에 소요되는 시간도 점차 감소하였다.



[그림 Ⅳ-4] 삼각형의 종류에 따른 S24, S25의 조작 활동 결과

[그림 Ⅳ-4]는 삼각형의 종류에 따라 학생들이 조작한 활동 결과의 일부를 보여준다. 컴퍼스로 호를 그리고 잘라 모아 붙이는 과정에서 특히 학생들은 자신이 만든 예각 삼각형의 모양을 다른 삼각형의 조작 활동에도 이

를 적용하는 모습을 보였는데, S24의 결과물을 보면 처음 시도한 삼각형이 위가 둥근 반원의 모습을 가지고 있으므로 직각 삼각형과 둔각 삼각형 또한 동일한 방향의 반원의 모습으로 조작하여 붙이고 있음을 알 수 있다. 그에 비해 S25의 삼각형은 아래가 둥근 반원의 모습을 가지고 있기 때문에 다른 두 삼각형도 같은 형태로 조작하였다. 결과적으로 두 학생은 세 가지 삼각형 형태에서 모두 일관된 반원 형태를 표현하게 되었고 이는 서로 다른 삼각형이 내각의 합에 대하여 갖는 공통된 특성을 시각적으로 표현한 것이기도 하였다. 이 과정에서 교사는 한 학생이 예각 삼각형에서 학습한 과정을 따라 자발적으로 각각의 각을 측정하고 합을 구한 후 조작 활동에 임하는 모습을 발견하고 이를 격려하였는데 이러한 교수 행동은 다른 학생들이 적극적으로 조작 활동에 참여하게 하는 계기가 되었다. 동시에 이전에 학습한 컴퍼스를 활용한 원 그리기 활동이 본 차시 수업 내에서 통합되었으며 이는 모든 삼각형의 세 각의 합을 일반화하는 데 기여하였다.

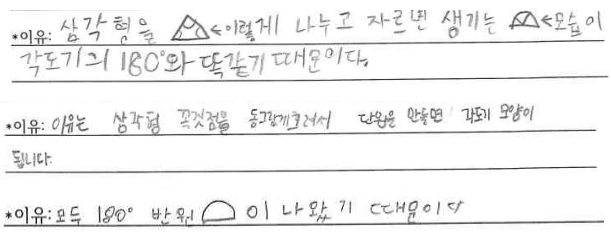
<에피소드 12: 다각형으로의 확장>
T: 그래서 아하! 삼각형은 180°라고 할 수 있겠구나.
S26: 삼각형을 공부하면, 삼각형을 두 개 이어 붙이면 사각형이니까 사각형이면 360°라고 할 수 있겠네요.
T: 그렇겠네요. 그럼 그건 내일 확인해봐야겠네요. 사각형도 진짜로 360°가 맞는지.
S27: 칠각형 일곱 개 각의 합은 언제 배워요?
T: 칠각형이요? 삼각형 알고 사각형 알면 알 수 있지 않을까?
S27: 오각형, 육각형, 십각형 같은 것도 알 수 있겠네요.

모든 삼각형의 세 각의 합에 대한 일반화에 도달한 학생들의 생각은 자연스럽게 사각형에 대한 추론으로 발전하였다. 조작활동 후 S26은 자발적으로 삼각형을 두 개 이어 붙이면 사각형이 된다는 지식을 바탕으로 사각형의 네 각의 합은 360°이라고 추론하였다. 그러자 S27은 오각형, 육각형, 칠각형, 십각형 등 여러 다각형의 내각의 합에 대한 궁금증을 표현하였다. 특히, 학생들에게 비교적 친숙하지 않은 칠각형이 삼각형과 사각형에 대한 논의 이후에 제기되었다는 점을 살펴보면 학생들이 삼각형과 사각형의 기본 도형을 중심으로 다각형을 이해하게 되었음을 알 수 있었다.

4. 수학적 의사소통과 수학에 대한 태도 변화

가. 수학적 의사소통

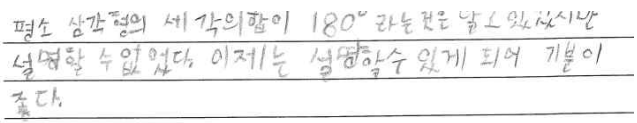
측정 활동 후 학생들은 '모든 삼각형의 세 각의 합을 180°라고 할 수 있는지, 있다면 그 이유는 무엇인지'에 대한 질문을 받았다. [그림 Ⅳ-5]는 질문에 '예'라고 대답한 학생들이 작성한 이유 중 일부를 제시한 것이다.



[그림 Ⅳ-5] 삼각형의 내각의 합에 대한 S28, S29, S30의 소감문

학생들은 조작 활동 과정을 통해 경험한 것을 직접 그림으로 그려서 설명하거나 글로 써서("삼각형 꼭짓점을

동그랗게 오려서") 표현하였는데 이 때 각도기의 180°와 모양이 같다는 것, 각도기 모양, 반원(모양)이 된다는 표현을 사용하였다. 교과서에 제시된 활동의 경우 중심각의 측면에서는 동일한 결과가 도출되지만 조작 활동의 결과로서 만들어지는 전체적인 모양이 쉽게 설명할 수 없는 울퉁불퉁한 모양으로 인식된다는 점을 생각해볼 때, 학생들이 직관적으로 이해하고 손쉽게 표현할 수 있는 각도기 모양, 반원 모양이 정당화의 과정과 결과에 있어서 학습에 긍정적으로 영향을 미친 것으로 보였다.

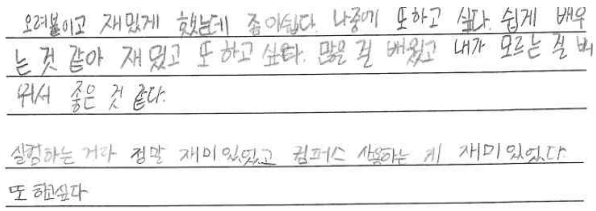


[그림 Ⅳ-6] 본 수업에 대한 S31의 소감문

또한 본 연구에 참여한 학생들 대부분이 수업 이전에 삼각형의 세 각의 합이 180°라는 사실을 알고 있었다는 점에 비추어볼 때, [그림 Ⅳ-6]은 특별히 의미 있는 것으로 분석되었다. 학생들은 '알고 있으나 설명할 수 없는' 상태에서 '알고 있으며 설명할 수 있는' 상태로 발전하였고 이 과정에서 '기분 좋다'는 느낌을 경험함으로써 수학하는 즐거움을 느낄 수 있었다. 물론 이와 같은 학생들의 반응은 교과서에 제시된 원래 활동을 통해서도 도출될 수 있다는 점에서 특별한 장점으로 부각되지 않을 수 있다. 그러나 본 고에서 제시되는 대안적인 방법이 단지 학생들의 인지적인 성취만을 강조한 것이 아님을 보여주는 사례가 될 수도 있을 것이다. 아울러 이는 2015 개정 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 성취기준인 '삼각형의 내각의 합에 대한 자신의 추론 과정을 설명할 수 있다'에 도달 여부를 보여준다는 점에서 본 사례에서 적용한 지도 방안의 긍정적인 측면을 확인할 수 있었다.

나. 수학에 대한 태도

학생들은 조작 활동과 활동 결과의 측면에서 측정 활동과 추론 과정에 대한 긍정적인 태도를 표현하였다. 본 연구에 참여한 학생들의 소감문 중 일부는 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-7] 본 수업에 대한 S32, S33의 소감문

첫 번째로 학생들은 자신이 알게 된 지식에 대한 자신감을 표현하였다("오늘 배운 문제가 나오면 시험을 잘 볼 수 있을 것 같다"). 또한 학생들은 수학을 한다는 것에 대한 새로운 인식을 갖게 되었음을 보여주었다. 이는 '실험', '오려붙이고' 라는 표현으로 나타났는데 이러한 접근 방법이 학생들에게 수학에 대한 흥미, 수학하는 즐거움, 쉽게 배우는 수학이라는 느낌을 느끼게 해 준 것으로 보였다. 세 번째로 학생들의 소감문에는 '또 하고 싶다', '아쉽다'는 표현이 등장하였다. 이는 학생들이 수학에 대하여 느낀 흥미를 바탕으로 앞으로의 학습에 대한 기대감을 갖고 수학 학습에 참여할 수 있는 바탕으로 작용할 수 있을 것으로 보인다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 삼각형의 내각의 합 지도를 위한 대안적 방법으로서 측정 오차를 활용한 지도 방안이 갖는 실천가능성과 교수학적 의미를 탐색하기 위하여 초등학교 4학년 수학 수업에 이를 적용하였으며, 다음과 같은 연구 결과를 도출하였다.

첫째, 측정 활동을 통해 측정 오차의 발생을 확인한 학생들은 측정 오차가 발생할 수 있는 가능성을 인식하였다. 둘째, 측정 오차에 대한 토론 과정을 통해 학생들은 수학적 정당화를 시도하였다. 셋째, 반원을 활용한 수학적 정당화 과정은 학생들에게 자연스럽고 직관적으로 인식되었을 뿐만 아니라 지식의 일반화와 확장에 기여하였다. 넷째, 측정 오차를 활용한 삼각형의 내각의 합 지도 방안의 적용은 학생들의 수학적 의사소통 능력과 수학에 대한 긍정적인 태도 함양에 도움을 주었다.

이상의 연구 결과를 통해 측정 오차를 활용한 삼각형의 내각의 합에 대한 지도 방안이 가져오는 교수학적 의미를 찾을 수 있다. 첫째, 학생들은 측정 과정에서 발생하는 측정 오차를 직접 인식할 수 있는 기회를 가질 수 있다. 사물이나 물체를 측정하는 과정에는 필연적으로 측정 오차가 발생하지만, 교과서 등에서는 암묵적으로 측정 오차의 발생 가능성이 낮은 문항들이 제시되는 경향이 있다(홍갑주, 오성훈, 2018). 각도의 끝 숫자가 0이나 5와 같이 측정 오차의 발생 가능성이 낮은 경우 정답을 명확하게 도출할 수 있다는 점에서 선호되고 있지만, 실제 학생들이 일상에서 경험하고 해결해야 하는 문제는 항상 측정 과정에서 오차의 발생 가능성을 포함하고 있다는 점에서 보다 실천 지향적인 접근 방법이 될 수 있다.

둘째, 직접 측정한 데이터로부터 발생한 자발적 궁금증은 수학적 정당화에 대한 담론의 변화를 효과적으로 이끌어내는 마중물이 될 수 있다. 수업 초반 직접 측정한 데이터를 통해 측정 오차의 발생을 알게 되었을 때 학생들은 자신이 알고 있던 지식에 비추어 이를 부정하기도 하였으나 동시에 왜 그럴까 하는 자발적인 의문을 품게 되었다. 이러한 궁금증을 해결하기 위해 학생들은 기존에 알고 있었던 지식 또는 타인으로부터의 권위에 의한 지식을 이용하여 이를 정당화하고자 하였고, 궁극적으로 짝 토론과 전체 토론을 통해 생산적인 담론으로 발전할 수 있었다. 학생들은 측정 오차로 생성된 데이터에 하여 자신의 의견에 대한 근거를 찾고자 노력했으며 이는 얼핏 보기에 마치 실패한 시행착오의 과정처럼 보일 여지가 있었다. 그러나 학생들의 내면에 공고하게 자리잡은 궁금증은 조작 활동이 측정 활동과 분절되지 않을 수 있게 도왔으며 조작 활동을 통한 정당성을 부각시킴으로써 추론 결과의 일반화에 기여하였다. 이처럼 수학적 정당화 과정에서 측정 오차는 데이터에 기반하여 학생들에게 의미 있는 의문과 질문을 생성하고 수학적 의사소통의 기회를 풍부하게 제공함으로써 조작 활동을 강화할 수 있다.

셋째, 측정 오차를 활용한 지도 방안은 학생들이 기존에 학습한 지식을 활용하여 문제를 해결한다는 측면에서 의미 있는 지도 방법이 될 수 있다. 학생들은 컴퍼스로 원 그리기를 3학년에서 이미 학습하였다(교육부, 2015). 그러나 기존에 학습한 지식은 주로 각 차시와 해당 단원 내에서 다루어져 다른 영역이나 제재와 연결성을 확보하기 어려웠다. 본 연구에서 다룬 활동 과정은 삼각형의 세 각의 합이 얼마인지를 추론하기 위해 각도기를 사용하여 각도 읽기, 컴퍼스로 원 그리기 등 기존에 학습한 다양한 지식을 통합적으로 활용할 수 있는 기회를 제공하였다. 실제 이 과정은 학생들에게 녹록지 않았다. 컴퍼스로 호를 그리는 과정에서 컴퍼스의 바늘과 연필이 고정되지 않고 벌어지는 일이 발생하였고 이 과정에서 일정한 크기를 유지하며 호를 그리는 것은 학생들에게 도전적인 과제가 되었다. 그러나 대부분의 어려움이 첫 번째 조작 활동이었던 예각 삼각형의 경우에 나타났고 이후 직각과 둔각 삼각형의 조작 활동에서는 부각되지 않았다는 점에서 학생들은 점차 이를 극복해 나간 것으로 보인다. 오히려 기존에 배운 지식을 사용하고 통합함으로써 새로운 지식 창출에 기여하는 경험을 통해 수학의 유용성과 수학에 대한 흥미를 느끼는 계기를 마련할 수 있었다.

본 연구 결과는 궁극적으로 학생 중심의 수학 수업이 어떠해야 하는가에 대한 재고의 필요성을 제기한다. 학습 주제와 관련하여 학생들이 직접 생산해 낸 데이터는 수학 수업을 더욱 생동감 있고 역동적으로 이끌 수 있었다. 이는 다인수학급에서 더욱 효과적인 교수 방법이 될 수 있는데, 학생들이 만든 다양한 데이터에서 나타난 공통점과 차이점을 바탕으로 사고할 수 있는 기회를 가질 수 있기 때문이다. 따라서 교사는 측정 활동을 지도할 때 학생들이 수학 수업에서 실제 측정한 데이터에 기반한 수업을 계획하고 실행할 필요가 있다. 또한 초등학교 학생들은 본질적으로 직관적이므로 반원 모양, 각도기 모양과 같이 수학적으로 완벽한 용어는 아니라 할지라도 학생들이 쉽게 인식할 수 있는 표현이 무엇인지 알고 이를 수업에 적용할 필요가 있다.

측정 오차를 활용한 지도 방법은 비단 본 주제에 국한되는 것이 아니라 측정 영역의 다른 주제에도 적용 가능하기 때문에 이 과정에서 나타나는 공통적이거나 차별화된 특징에 대하여 연구할 필요가 있다. 나아가 자료와 가능성과 같이 데이터를 직접 다루는 수학의 다른 영역에도 확장하여 적용해볼 수 있을 것이다. 무엇보다도 본 연구 결과는 학생의 궁금증을 불러일으키고 이를 활용하여 수학 수업의 목표를 달성하는 접근을 통해, 성공적인 학생 중심 수업 방법을 모색하는 데 기여할 수 있을 것으로 기대한다.

참 고 문 헌

강흥규 (2019). 초등수학교육에서 각과 각도 개념의 지도에 관한 연구. 교육논총, **56(1)**, 1-15.

Kang, H. K. (2019). A study on angle and angle measurement concepts in elementary mathematics education. *The Journal of Education Studies*, **56(1)**, 1-15.

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호. [별책8].

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*. Ministry of Education Report 2015-74.

구미영・이광호 (2015). 인지적 요구 수준 및 사고수준의 발달방향에 따른 초등학교 길이 측정 단원의 수학과제 분석. 한국초등수학교육학회지, **19(3)**, 387-408.

Ku, M. Y. & Lee, K. H. (2015). Analyzing and restructuring mathematical tasks of length measurement in elementary school mathematics - Focused on 2nd graders -. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **19(3)**, 387-408.

권성룡 (2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 초등수학교육, **7(2)**, 85-99.

Kwon, S. Y. (2003). A study on mathematical justification activities in elementary school. *Education of Primary School Mathematics*, **7(2)**, 85-99.

김동희・김민경 (2020). 각과 각도에 대한 초등학교 4학년 학생의 이해 및 오개념 분석. 학교수학, **22(2)**, 183-203.

Kim, D. H. & Kim, M. K. (2020). A study on understanding and misconception about Angle of elementary 4th grade students. *School Mathematics*, **22(2)**, 183-203.

김신영・강완 (2005). 초등학교 수학 교과서에 나타난 삼각형과 사각형의 넓이 지도 방법에 대한 분석. 한국초등수학교육학회지, **9(2)**, 161-180.

Kim, S. Y. & Kang, W. (2005). An analysis of teaching areas of triangles and quadrilaterals in elementary school mathematics textbooks. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **9(2)**, 161-180.

김은정・강흥규 (2014). 초등수학에서 측정활동에 한 소수의 학습·지도 방안 및 학생의 이해 실태 분석. 한국초등수학교육학회지, **18(1)**, 37-62.

Kim, E. J. & Kang, H. K. (2014). A construction of 'Decimal Fraction' unit of elementary mathematics textbook and analysis of students' state of understanding based on measurement activity. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **18(1)**, 37-62.

김정하 (2019). 삼각형의 세 내각의 크기의 합과 관련 교과서 분석 및 지도방안 연구. 학습자중심교과교육연구, **19(7)**, 141-159.

Kim, J. H. (2019). A study on teaching method and textbook analysis of the sum of internal angles of triangle. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, **19(7)**, 141-159.

김정하・강문봉 (2011). 평면도형의 넓이 측정 지도에 대한 고찰. 한국초등수학교육학회지, **15(3)**, 509-531.

Kim, J. H. & Kang, M. B. (201). A study on mathematical justification of elementary school teachers. *Journal of EJementary Mathemaûcs Education in Korea*, **15(3)**, 509-531.

박교식 (2010). 우리나라 초등학교 수학과에서의 각도 관련 내용의 분석과 비판. 학교수학, **12(1)**, 45-60.

Park, K. S. (2010). An analysis and criticism on contents related on angular measure in Korean elementary mathematics subject. *School Mathematics*, **12(1)**, 45-60.

방정숙・김정원・김혜정 (2012). 측정 영역의 핵심 교수・학습 요소에 의한 좋은 수학 수업 분석. 초등수학교육, **15(2)**, 77-89.

Pang, J. S., Kim, J. W. & Kim, H. J. (2012). An analysis of good mathematics instruction by key instructional elements of measurement. *Education of Primary School Mathematics*, **15(2)**, 77-89.

송미정, 박종서 (2005). 수학학습의 측정 영역에 대한 초등학생의 학업 성취도 분석. 과학교육연구, **28**, 39-58.

Song, M. J. & Park, J. S. (2005). An analysis of mathematics learning achievements of elementary students in measurement, *The Research of Science Education*, **28**, 39-58.

오영열 (2021). 삼각형의 내각의 합 지도방안에 대한 연구. 한국초등교육, **32(1)**, 123-135.

Oh, Y. Y. (2021). A study on teaching method for sum of the internal angles of a triangle. *The Journal of Korea Elementary Education*, **32(1)**, 123-135.

이경화 (1999). 측정영역의 지도에 관한 소고-4 학년을 중심으로. 초등수학교육, **3(1)**, 55-62.

Lee, K. H. (1999). A study on teaching measurement in grade 4. *Education of Primary School Mathematics*, **3(1)**, 55-62.

임미인・장혜원 (2018). 초등학교 2학년의 부러진 자를 이용한 길이 측정 활동 분석. 수학교육학연구, **28(1)**, 97-112.

Lim, M. I. & Chang, H. W. (2018). An analysis of second-grade students' mathematical activities using broken rulers. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, **28(1)**, 97-112.

임재훈 (2009). 삼각형의 내각의 합: 180°, 2직각, 평각, 불변성. 과학교육논총, **22(1)**, 23-35.

Lim, J. H. (2009). An analysis of activities to explore the sum of the interior angles of a triangle. *Studies on Constitutional Cases*, **22(1)**, 23-35.

홍갑주・오성훈 (2018). 초등학교 수학에서 삼각형의 내각의 합의 도입과 설명 방법. 초등수학교육, **21(1)**, 75-91.

Hong, G. J. & Oh, S. H. (2018). A study on the introduction and explanation of the sum of the angles of a triangle in elementary school mathematics. *Education of Primary School Mathematics*, **21(1)**, 75-91.

Common Core State Standards Initiative. (2010). Common core state standards for mathematics. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.

Hiebert, J. (1984). Why do some children have trouble learning measurement concepts?. *The Arithmetic Teacher*, **31(7)**, 19-24.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Smith, J. P., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Teppo, A. R. (2011). Learning, teaching, and using measurement: Introduction to the issue. *ZDM*, **43(5)**, 617 - 620.

Tall, D. (1995). Cognitive developments, representations and proof. *Paper presented at the conference Justifying and Proving in School Mathematics Institute of Education*, London, pp. 27-38.

Wilson, P. S., & Adams, V. M. (1992). A dynamic way to teach angle and angle measure. *The Arithmetic Teacher,* **39(5)**, 6-13.

Yin, R. K. (2011). *Qualitative research from start to finish (2nd ed.)*. 박지연, 이숙향, 김남희 역 (2013). 질적 연구: 시작부터 완성까지. 서울: 학지사.

A Case Study on Teaching the Sum of the Interior Angles of a Triangle Using Measurement Errors

Oh, Youngyoul

Seoul National University of Education, Seoul, Korea

E-mail : yyoh@snue.ac.kr

Park, Jukyung†

Seoul Haenghyun Elementary School, Seoul, Korea

E-mail : bluelihd@gmail.com

In this study, under the assumption that the goal pursued in measurement area can be reached through the composition of the measurement activity considering the mathematical process, the method of summing the interior angles of a triangle using the measurement error was applied to the 4th grade class of the elementary school. Results of the study, first, students were able to recognize the possibility of measurement error by learning the sum of the interior angles of a triangle using the measurement error. Second, the discussion process based on the measurement error became the basis for students to attempt mathematical justification. Third, the manipulation activity using the semicircle was recognized as a natural and intuitive way of mathematical justification by the students and led to generalization. Fourth, the method of guiding the sum of the interior angles of a triangle using the measurement error contributed to the development of students' mathematical communication skills and positive attitudes toward mathematics.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40

* Key words : measurement error, the sum of the interior angles of a triangle, mathematical justification

† corresponding author