韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2021.35.4.505
제 35집 제 4호, 2021. 12. 505-525

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 35, No. 4, Dec. 2021. 505-525

한국, 일본, 싱가포르, 미국의 초등교과서에 제시된 곱하는 수가 두 자리 수인 자연수 곱셈 지도 내용의 비교 분석

최 은 아 (우석대학교, 교수)
정 연 준 (한국교육과정평가원, 연구원)†

본 연구에서는 한국과 일본, 싱가포르, 미국의 초등학교 수학 교과서에서 곱하는 수가 두 자리 수인 자연수 곱셈 계산을 어떻게 제시하는지를 비교・분석하여 곱셈 지도 관련 교육적 시사점을 도출하고자 하였다. 교과서 분석 결과, 우리나라 교과서는 10과 10의 거듭제곱의 곱을 별도로 지도하지 않는 반면, 일본, 싱가포르, 미국 교과서는 관련 내용을 명시하여 제시하고 있음을 확인하였다. '×(몇십)'의 지도에서는 일본과 미국 교과서가 자릿값에 따라 나누어 곱한 부분곱의 계산과정에서 적용되는 곱셈의 결합법칙 지도를 형식적으로 접근하고 있었다. 세로셈 계산 도식은 대체적으로 분배법칙에 따른 부분곱 계산을 자리를 맞추어 표기하는 표준적인 방식을 따르고 있었지만, 지도 모델과 분배법칙의 지도 방법, 끝 자리 '0'의 표기 등에서 차이가 확인되었다. 이상의 분석결과를 토대로 곱셈 지도와 관련한 시사점을 제안하였다.

Ⅰ. 서론

자연수 곱셈은 사칙연산의 일원으로 나눗셈과 역연산 관계에 있을 뿐 아니라 이후 초등학교에서 학습하게 되는 분수, 평면도형의 넓이, 비와 비율, 비례식과 연결되며, 중학교 이후 학습하게 되는 유리수 계산, 평균, 대수식, 선형함수와 비선형함수를 조작하는 데 기본이 되는 중요 개념이다(정영옥, 2013; Otto, Caldwell, Lubinski & Hancock, 2011). 우리나라 초등학교에서 자연수 곱셈은 곱해지는 수와 곱하는 수의 자릿값 구조가 단계적으로 확대되면서 단계적으로 지도된다. 2학년 2학기에 곱셈 개념의 기초와 곱셈구구의 학습을 시작으로 3학년 1학기에 (두 자리 수)×(한 자리 수), 3학년 2학기에 (세 자리 수)×(한 자리 수)가 이어져서 곱하는 수가 한 자리 수인 곱셈의 지도가 일단락된다. 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈은 3학년 2학기에 (두 자리 수)×(두 자리 수)로 시작하여 4학년 1학기에 (세 자리 수)×(두 자리 수)가 제시되며, 이로써 자연수 곱셈 지도가 완료된다.

우리나라 초등학교에서 자연수 곱셈 지도가 (세 자리 수)×(두 자리 수)로 마무리되는 것은 계산 원리를 이해하여 지도 범위를 넘어서 곱해지는 수가 네 자리 수 이상인 수 또는 곱하는 수가 세 자리 수 이상의, 더 큰 수의, 곱셈을 해낼 수 있다고 기대하기 때문이다(정연준, 조영미, 2012). 정연준(2011)의 역사적 분석에 의하면, 곱셈 계산의 발달 과정은 큰 수의 곱셈을 계산하기 쉬운 한 자리 수와 십의 거듭제곱으로 나누고 각각의 곱을 구하여 모두 더하는 계산법의 발달 과정이었다. 오늘날의 곱셈 계산법은 두 수를 각각 자릿값에 따라 나누어 곱할 때 발생한 부분곱 $(a\times10^m)\times(b\times10^n)$ 을 $(a\times b)\times(10^m\times10^n)$ 형태로 바꾸어 계산하는 방법으로, 이러한 변환 과정에서 곱셈에 대한 교환법칙과 결합법칙, 분배법칙 등이 적용된다(정연준, 2011). 곱셈 계산법에 필수적인 연산의 성질은 다양한 계산 전략을 산출함으로써 범자연수 계산에 유연성을 부여하고 계산 절차에 대한 정당성을

* 접수일(2021년 11월 22일), 심사(수정)일(2021년 12월 9일), 게재확정일(2021년 12월 21일)
* MSC2000분류 : 97D10, 97U20
* 주제어 : 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈, 세로셈 곱셈 계산법, 계산 원리, 연산법칙, 교과서 분석
† 교신저자 : yjjoung03@kice.re.kr

제공하는 역할을 한다(Otto et al., 2011). 두 자리 수 이상의 곱셈 지도의 핵심은 이와 같은 곱셈 계산 원리에 대한 이해와 압축적이고 효율적인 계산을 가능하게 해주는 세로셈 계산법의 능숙한 수행에 있다고 할 수 있다.

자연수 곱셈과 관련된 선행연구의 한 축은 곱셈 개념과 곱셈구구 지도를 중심으로 수행되었다(강흥규, 2009; 김남균·김지은, 2009; Drake & Barlow, 2008 Flowers, Krebs & Rubenstein, 2006; Sherin & Fuson, 2005). 다른 한편에서는 교환법칙과 분배법칙 등 곱셈 연산의 성질에 대한 연구가 여러 연구자에 의해 수행되었다(방정숙·이지영, 2011; 변희현, 2009; 선우진, 2019; 장혜원, 2017). 소수이지만, 두 자리 수 이상으로 확장한 자연수 곱셈 계산에 대한 연구들도 발견된다. 정연준(2011)은 곱셈 계산법의 역사적 발달이 자릿값에 따라 수를 분해하고 각각의 부분곱 계산을 보다 쉽게 처리하는 방법의 발달 과정이었음을 제시한 바 있다. 정연준과 조영미(2012)는 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈에서 적용되는 곱셈의 결합법칙과 분배법칙을 중심으로 하여 우리나라와 다른 나라 교과서를 비교한 바 있다. 정연준과 최은아(2020)는 우리나라 역대 교육과정에서 제시된 두 자리 수 이상의 곱셈의 지도 방법을 분석하여 곱셈 지도와 관련한 교육적 시사점을 제시하였다. 김수미(2000), 윤희태(2002), 강흥규와 심선영(2010)은 곱셈 계산 과정에서 발생하는 초등학생들의 오류와 어려움을 확인하였다.

이 연구에서는, 정연준과 최은아(2020)의 논의를 바탕으로 하여, 곱셈 계산 원리 및 계산법 지도와 관련하여 국가 간 횡적 비교 연구를 실시하고자 한다. 다른 나라에서 사용되는 교과서는 한정된 여건 속에서 진행되는 자국의 수학 학습을 새로운 관점으로 접근하는데 도움을 줄 수 있다. 본 연구의 목적은 곱하는 수가 두 자리 수 이상의 자연수 곱셈이 우리나라를 비롯하여 일본, 싱가포르, 미국의 초등수학 교과서에서 어떻게 지도되고 있는지를 비교·분석하는 것이다. 이를 위해 각 국의 교과서가 '×(몇십)'과 '×(몇십몇)'의 곱셈 계산법의 원리를 어떻게 설명하고 세로셈 계산법을 어떻게 지도하는지를 살펴보고, 분석 결과를 토대로 향후 교육과정 및 교과서 개발과정에서 고려해볼 만한 교육적 시사점을 제안하고자 한다.

Ⅱ. 연구의 배경

1. 이론적 배경

가. 자연수 곱셈 계산 원리의 지도

Flowers, Krebs & Rubenstein(2006)에 의하면, 곱셈은 다른 연산에 비해 계산 절차가 복잡하며 표준 알고리즘이 성립하는 이유를 정당화하기 위해서는 상당한 수학적 사고가 요구되는 연산이라는 점에서, 학생들에게 충분히 도전적인 주제가 될 수 있다. 주지하다시피, 두 자리 수 이상의 곱셈 과정에는 곱셈의 결합법칙과 교환법칙, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 적용되며, 학생들은 곱셈 계산법의 이러한 원리에 대한 이해를 바탕으로 곱셈 계산을 수행해야한다.

곱셈의 계산 원리 지도에 대한 선행연구들은 주로 곱셈 연산의 성질이 초등학교 수학 교과서에서 어떻게 다루어지고 있는지를 분석하여 초등학교에서의 지도 가능성을 검토하고 지도 방안을 모색하였다. 장혜원(2017)은 2009 개정 교육과정에 이르는 우리나라 역대 교육과정 교과서를 대상으로 곱셈과 덧셈 계산의 연산 성질에 대한 지도 내용을 분석하였다. 곱셈에 대한 교환법칙은 모든 교육과정 시기에 지도된 반면에, 곱셈에 대한 결합법칙은 3차와 4차, 2007 개정 교과서만이 명시적으로 지도하였음을 확인하였다. 장혜원(2017)은 학생들이 연산의 성질을 의식적으로 반성할 수 있도록 학습 경험을 제공할 필요가 있다고 주장하며, 귀납적 사례를 통한 연산법칙에 대한 이해, 다양한 지도 모델을 사용한 시각화를 통한 계산 원리의 정당화 활동을 제안하였다. 방정숙과 최지영(2011)은 2009 개정 교과서 분석을 통해 모든 곱셈 단원 학습에서 연산의 성질을 지속적으로 지도함으로써 연산의 성질을 일반화하고 그 아이디어를 정당화할 것을 제안하였다. 연산의 성질에 대한 명시적 지도는 우리나

라와 일본 교과서를 비교 분석한 변희현(2009)의 연구에서도 동일하게 강조되었다. 변희현은 분배법칙의 아이디어를 한 자리 수의 곱셈부터 조기 도입할 것과 세로셈의 각 단계를 분배법칙 계산 원리와 연결지어 설명하고 그림 기호를 이용하는 일반적 표현을 통해 하나의 계산 규칙으로 지도할 것을 시사점으로 제시하였다. 선우진(2019) 또한 우리나라와 일본, 미국교과서에서 분석하여 두 자리 수 이상의 곱셈에서 연산 성질을 설명하는 방식과 일반화 맥락에서 국가별 차이를 확인하고, 분배법칙을 보다 일반화하여 명시적으로 지도할 것을 주장하였다.

한편, 곱셈 연산의 성질은 큰 수의 곱을 한 자리 수의 곱($a \times b$)과 10의 거듭제곱의 곱($10^m \times 10^n$)으로 분해하여 계산할 수 있도록 하는 역할을 한다(정연준, 2011). 곧 곱셈 계산법은 즉각적으로 계산하기 어려운 큰 수의 곱을, 십진기수법 구조에서, 즉각 계산할 수 있는 곱으로 나누어 계산하고 그 결과를 더하여 원래의 곱을 계산하는 방법이다. 곱셈 연산의 성질은 곱셈구구와 십의 거듭제곱의 곱이라는 기본적인 곱셈으로 이용하여 복잡한 곱셈 계산을 가능하게 하는 역할을 한다. 이러한 분석 결과를 바탕으로 하여 정연준(2011)은 우리나라 7차 교육과정의 수학 교과서에서 분배법칙에 비해 곱셈의 결합법칙이 적용되는 계산 과정이 제대로 지도되지 못하고 있음을 지적하였다. 정연준과 최은아(2020)는 두 자리 수 이상의 곱셈을 대상으로 하여 우리나라 역대 초등 교과서의 지도 내용을 분석하였다. 분배법칙은 직관적 이해를 위해 수 모형과 모눈종이 모델을 이용하여 반복적으로 지도되고 있는 반면에, 곱셈의 결합법칙과 교환법칙은 특정한 지점에서만 다소 제한적으로 지도되어 온 것을 확인하였다. 2015 개정 교과서에서 묶음 모델을 다시 묶는 방식을 구성하여 결합법칙과 관련된 내용을 보다 직관적으로 지도하려는 시도를 하였으나, 관련 핵심 내용이 충분히 반영되지 못하였다. 결과적으로 '×(몇십)'의 계산 원리를 결합법칙과 교환법칙에 근거해서 이해하지 못한 채, 단순히 곱하는 두 수의 0의 개수를 더하여 적게 되는 '0 붙여쓰기' 식의 기계적 학습으로 이어질 수 있음을 우려하였다.

이상의 연구들은 초등수학 수준에서 연산의 성질을 의식화하고 반성하는 경험을 제공함으로써, 곱셈 계산 원리인 연산의 성질을 보다 명시적으로 지도할 것을 주장했다는 공통점이 있다. 연산의 성질을 분명하게 인식하는 것은 곱셈 계산법에 대한 깊은 이해뿐 아니라 계산 숙달에 도움이 되며, 필산이나 암산, 표준 알고리즘이나 비표준 알고리즘을 정당화하는데 도움을 준다(Otto et al., 2011)는 장점이 있다. 정연준(2011)의 지적에 의하면, 곱셈 연산의 성질은 큰 수의 곱셈을 쉽게 계산할 수 있도록 한다. 이에 곱하는 수가 두 자리 수인 자연수 곱셈의 계산 원리가 각 국의 교과서에서 어떻게 제시되고 있는지를 살펴볼 필요가 있다.

나. 세로셈 곱셈 계산법의 지도

2015 개정 교육과정의 자연수 곱셈과 관련된 성취기준은 "곱하는 수가 한 자리 수 또는 두 자리 수인 곱셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다."이다(교육부, 2020). 곱셈 지도의 핵심은 계산 원리의 이해와 계산의 숙달 두 측면으로 이루어져 있다. 특히 두 자리 수 이상의 자연수로 확장된 곱셈에서는 계산을 효율적으로 수행하기 위해 세로셈 계산을 이용하는데, 세로셈 계산에는 가로셈 계산에서는 나타나지 않는 다른 수학적 특성이 확인된다. 세로셈 계산법의 특성은 곱셈 계산의 숙달에 중요한 영향을 미친다. 일부 연구에서 세로셈 곱셈 계산법이 가진 수학적 특징에 대한 논의가 발견된다.

정연준(2011)은, 앞서 언급한 바와 같이, 곱셈 계산법의 역사적 발달과정은 즉각적으로 계산하기 어려운 큰 수의 곱을, 십진기수법 구조에서, 즉각 계산할 수 있는 곱으로 나누어 계산하고 그 결과를 더하여 원래의 곱을 계산하는 방법의 발달과정이었다. 수의 곱을, 십진기수법에서 계산이 가장 쉬운, 한 자리 수의 곱($a \times b$)과, 자리값의 곲인, 10의 거듭제곱의 곱($10^m \times 10^n$)으로 분해하여 계산하는 방법이 발달한 것이다. 이를 위해서 두 수를 자리값에 따라 나누고 부분곱 $(a \times 10^m) \times (b \times 10^n)$ 을 $(a \times b)$와 $(10^m \times 10^n)$으로 변환하여 계산하게 된다. 한편, 10의 거듭제곱 사이의 곱은 십진기수법에서 자리값 곧 숫자의 위치에 해당하는 바, 세로셈 계산법은 10의 거듭제곱 사이의 곱을 그에 해당하는 자리를 찾는 것으로 변환하였다(정연준, 2011). 따라서 세로셈 곱셈 계산에서

실제로 곱셈 계산이 실행되는 것은 한 자리 수 사이의 곱 곧 곱셈구구이다. 정연준(2011)은 이러한 분석 결과를 바탕으로 세로셈 계산법을 곱셈 계산 원리와 십진기수법에 대한 이해를 심화할 수 있는 맥락으로 사용할 것을 제안하였다. 최경아와 이정은(2017)은 2009 개정 교과서와 핀란드 수학교과서를 대상으로 올림이 있는 자연수 곱셈 계산법에서 올림수의 표기 방법을 비교하였으며, 초등학생들이 올림 수를 표기하는 방식을 조사하였다. 이들은 분석결과를 토대로 올림수의 지도와 관련한 시사점을 도출하였는데. 올림 수 표기의 표준적 방법과 학생들이 제시한 방법과 비교하여 적절한 것을 선택하는 경험을 제공할 것과 올림 수 표기의 장점을 학생들에게 인식시키고, 올림수를 표기하는 대안적인 방법을 교수학적으로 활용함으로써 학생들의 계산 오류를 줄일 것이 해당한다.

정연준과 최은아(2020)는 우리나라의 1차 교육과정부터 2015 개정 교육과정에 이르는 역대 초등 교과서에서 두 자리 수 이상의 곱셈을 어떻게 지도하고 있는지를 분석하면서 세로셈 계산법을 하위 항목으로 분석한 바 있다. 역대 전 교육과정에 걸쳐 세로셈 곱셈 계산법은 세로셈 도식을 지속적으로 변형한 것과 별개로, 분배법칙에 따른 자리값별 부분곱 계산을 충실하게 기록하는 방법을 지도하고 있다는 것을 분석 결과로 제시하였다. 특히, 부분곱에서 생겨나는 일의 자리 '0'의 생략이 십진기수법의 위치기수법적 특징에 기반한 압축적이고 효율적이며 형식화된 계산법임 강조하였다. 이들은 '×10'의 지도를 강화할 것과 '×(몇십)'의 계산이 '×(몇)×10'으로 진행된다는 점을 지속적으로 강조할 것, 세로셈 곱셈 계산법 지도를 십진기수법의 특징을 지도하는 맥락으로 활용할 것, 곱셈 상황을 곱셈적 비교 상황 등으로 다양화할 것을 곱셈 지도의 개선 방안으로 제안하였다.

이상에서 자연수 곱셈의 세로셈 계산법은 단순히 가로, 세로의 표현상의 문제가 아니라, 자릿값 개념을 기반으로 한 위치기수법의 특징을 활용하는 계산법이라는 것을 알 수 있다. 기수법에 기반한 세로셈 곱셈 계산법의 지도가 초등교과서에서 어떻게 제시되고 있는지를 살펴보는 것은 곱셈 지도의 시사점을 도출하는데 도움이 될 수 있다. 이상 선행연구에서 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈 지도와 관련된 문제점이나 개선 방안 등 논의의 초점이었던 요소들을 추출하여, 다른 나라의 초등수학 교과서를 살펴보고자 한다.

2. 연구 방법

가. 분석 대상

본 연구는 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈 계산의 지도를 위한 시사점을 도출하고자 우리나라와 일본, 싱가포르, 미국의 초등수학 교과서를 비교 분석한다. 일본, 싱가포르, 미국은 다수의 선행 연구에서 국제 비교 대상으로 선정된 바 있는 국가들로, 일본과 싱가포르는 TIMSS(Trends in International Mathematics and Science Study)와 PISA(Programme for International Student Assessment) 등 수학 성취도 국제 비교 연구에서 최상위권을 유지하고 있다는 점을 반영하였고, 미국은 우리나라 수학 교육과정에 미치는 영향력을 고려하여 선정하였다.

분석 대상인 수학 교과서는 각국 교육과정의 충실한 반영 여부와 자국 내 채택 정도, 최근 수행된 국가 간 비교연구에서 선정 여부 등을 고려하여 선정하였다. <표 Ⅱ-1>에서 보는 바와 같이, 한국은 2015 개정 교육과정에 따른 교과서를 선정하였고, 일본의 경우에는 2017년 개정된 '新學習指導要領'에 따라 2020년에 새롭게 발간된 초등학교 교과서 중에서 동경서적(東京書籍)의 '新しい算數'를 분석 대상으로 선정하였다. 싱가포르의 경우에는 최근 2021년에 개정된 교육과정에 따른 교과서가 아직 발간되지 않은 점을 고려하여 2012년에 발표된 'Mathematics Syllabus Primary one to six'에 따른 Marshall Cavendish Education의 'My pals are here! Maths'를 분석 대상으로 선정하였으며, 미국 교과서는 2010년에 공포된 Common Core State Standards for Mathematics(CCSSM)를 반영한 Pearson의 'envision math 2.0'을 분석 대상으로 선정하였다.

<표 Ⅱ-1> 분석 대상

국가	교과서명	출판사
한국	수학	교육부
일본	新しい 算數	東京書籍
싱가포르	My pals are here! Maths	Marshall Cavendish Education
미국	envision math 2.0	Pearson

자연수 곱셈 지도 계열과 지도 시기, 내용 조직 방식 등이 국가 간에 차이가 있다는 점을 고려하여, <표 Ⅱ-2>와 같이 국가별로 상이한 학년 및 학기의 교과서가 분석 대상으로 선정되었다. 본 논문의 초점인 곱하는 수가 두 자리 수인 자연수의 곱셈은 대체적으로 3학년 2학기와 4학년 1학기에서 지도되고 있지만, 선수학습 요소인 한 자리 수인 곱셈과 연속성을 가지고 지도된다는 측면에서, 해당 교과서의 한 자리 수 곱셈 지도 내용을 분석 대상으로 포함시켰다. 또한 두 자리 이상의 큰 수의 곱셈은 결합법칙과 분배법칙 등의 곱셈 계산 원리와 부분곱 계산에서 10의 거듭제곱의 곱셈을 필요로 하고 있다는 점에서 해당 내용과 기타 곱셈 규칙을 별도로 다루는 단원까지를 분석 대상으로 포괄적으로 선정하였다. 이에 따라 각 국의 수학교과서 17권을 대상으로 곱셈 지도 내용을 분석하였다.

<표 Ⅱ-2> 자연수 곱셈의 지도 학년

국가 / 단원	한국	일본	싱가포르	미국
곱셈구구	2-2	2下, 3上	2A, 3A	3-1
두 자리 수×한 자리 수	3-1	3上	3A	4-1
세 자리 수×한 자리 수	3-2	3上	3A	4-1
두 자리 수×두 자리 수	3-2	3下	4A	4-1
세 자리 수×두 자리 수	4-1	3下	4A	5-1
곱셈 규칙 등 기타	없음	4上, 4下	5A	없음

나. 분석 방법

곱셈 계산법 지도는 곱셈 원리의 지도와 세로셈 곱셈 계산법의 지도로 구분된다(정연준・최은아, 2020). 곱셈 계산 원리의 지도는 곱셈의 교환법칙과 결합법칙, 분배법칙 관련 내용의 지도와 주로 관련되어 있으며, 여기에 십의 거듭제곱의 곱을 함께 포함시킬 필요가 있다(정연준, 2011; 정연준・조영미, 2012). 한편 세로셈 곱셈 계산법의 지도는 부분곱 과정과 연결되어 있어, 따라서 분배법칙과 밀접하게 관련되어 있다(정연준・최은아, 2020). 이러한 점을 고려하여 본 연구에서는 '×10' 계열의 지도, '×(몇십)' 계열의 지도, '×(몇십몇)' 계산법의 지도 등 세 측면에서 교과서를 살펴보고자 한다.[1)]

'×10' 계열의 지도 항목에서는 두 자리 수 이상의 큰 수의 곱셈에서 기본적인 요소인 10의 곱셈과 10의 거듭제곱의 곱셈이 지도되는 시기와 방법이 국가별로 어떠한 차이가 있는지를 살펴본다. 특히, 곱하는 수 또는 곱해지는 수가 10의 거듭제곱인 것과 곱셈 결과 사이의 관계를 자릿값에 대한 이해 등 기수법적 구조와 어떻게 연결하여 지도하는지를 살펴본다. 다음 '×(몇십)' 계열의 지도 항목에서는 두 자리 이상의 수 곱셈에서 부분곱 계산에 핵심적인 요소인 '×(몇십)'이 지도되는 시기와 방법이 국가별로 어떠한 특징이 있는지, 그 지도 과정에서 활용되는 계산 원리인 곱셈의 결합법칙이 어떻게 설명되고 있는지를 살펴본다. 또한 곱하는 수가 두 자리 수

1) '몇십', '몇십몇' 등은 우리나라 교과서에서 사용하는 용어이며, 본 연구에서는 이를 확장하여 '몇백', '몇천'등의 용어를 사용하여 교과서를 분석하고자 한다.

이상인 큰 수의 곱셈으로 일반화하기 위해 필요한 '×(몇백)', '×(몇천)' 등이 어떻게 지도되고 있는지도 살펴볼 것이다. 마지막 '×(몇십몇)' 계산법의 지도 항목에서는 지도 시기와 더불어 지도 모델, 복잡한 계산을 효율적으로 수행하는데 필요한 세로셈 계산법을 도입하는 도식과 수학적 표현들이 국가별로 어떠한 차이가 있는지를 살펴볼 것이다. 또한 두 수를 자릿값에 따라 분해한 부분곱의 합을 계산하는 분배법칙의 지도, 부분곱 결과에서 생성된 일의 자리 '0' 표기 등 곱한 결과를 적는 방법과 관련하여 세로셈 표현법을 살펴보고자 한다.

<표 II-3> 분석 항목

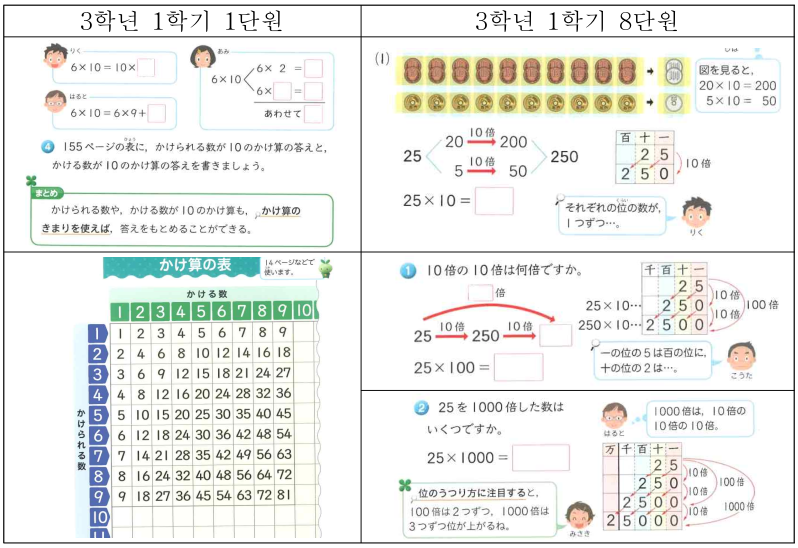
분석 항목	분석 내용
'×10' 계열의 지도	· '×10'의 지도 시기는 언제이며, 어떻게 설명하는가? · '×10', '×100', '×1000' 등 10의 거듭제곱의 곱셈은 기수법적 특징과 어떻게 연결하여 지도하는가?
'×(몇십)' 계열의 지도	· '×(몇십)'의 지도 시기는 언제이며, 어떻게 설명하는가? · '×(몇십)'의 계산과정에서 나타나는 곱셈의 교환법칙과 결합법칙은 어떻게 지도하는가? · '×(몇백)', '×(몇천)'은 '×(몇십)'과 어떻게 연결하여 지도하는가?
'×(몇십몇)' 계산법의 지도	· '×(몇십몇)'의 지도 시기는 언제이며, 어떻게 설명하는가? · 두 수를 자릿값에 따라 나누어 서로 곱하는 과정에서 나타나는 분배법칙은 어떻게 지도되는가? · 세로셈에서 부분곱을 표기하는 방식 등 세로셈 표현법은 어떻게 지도하는가?

Ⅲ. 분석 결과 및 논의

1. '×10' 계열의 지도

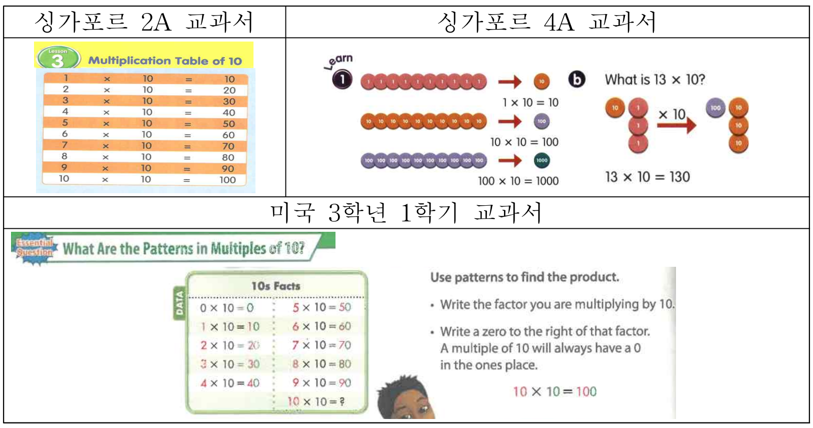
우리나라의 2015 개정 교과서에서는 10 및 10의 거듭제곱의 곱셈을 별도로 지도하는 단원을 찾아볼 수 없지만, 일본, 싱가포르, 미국의 경우에는 관련 내용을 명시적으로 지도하고 있음을 확인할 수 있다. 이하에서는 다른 나라에서 '×10' 계열의 지도가 어떻게 이루어지고 있는지 살펴보겠다.

일본 교과서는 3학년 1학기 1단원에서 이전에 학습한 곱셈구구를 여러 가지 곱셈 규칙을 사용하여 다양한 방법으로 구하는 방법을 제시하고 있는데, 이 때 10의 곱셈이 함께 다루어진다. [그림 Ⅲ-1]에서 제시된 바와 같이, 교환법칙, 분배법칙 등을 이용하여 6×10을 구할 수 있다는 점을 지도하는데, 이러한 활동들을 통해서 10단이 포함된 곱셈표를 완성하고 있다. 한편 10의 거듭제곱의 곱셈은 (두 자리 수)×(한 자리 수), (세 자리 수)×(한 자리 수) 곱셈을 학습하기 직전에 10,000보다 큰 수를 학습하는 기수법 단원에서 지도되고 있다. [그림 Ⅲ-1]의 오른쪽 사례는 곱해지는 수가 25이고 곱하는 수가 10의 거듭제곱인 곱셈을 25×10, 25×100, 25×1000로 확장하며 지도하는 장면이다. 주목할 것은 '10배', '100배', '1000배'를 非비례 수모델과 화살표 도식, 자릿값표 도식을 사용하여 곱셈식을 설명하였다는 점이다. 특히 자릿값표 도식은 학생들로 하여금 10, 100, 1000이 곱해짐에 따른 결과값의 변화를 기수법적 구조와 연결하여 이해할 수 있도록 시각화한 도식이라고 할 수 있다. 예를 들어, 25×10의 결과는 곱해지는 수 25의 자릿값을 각각 왼쪽으로 한 자리씩 이동시켜 세 자리 수 250이 된다는 것을 표상한다. 이러한 지도방식은 10의 곱셈과 10의 거듭제곱의 곱셈을 별도로 지도하지 않는 우리나라와 대비된다고 할 수 있다.



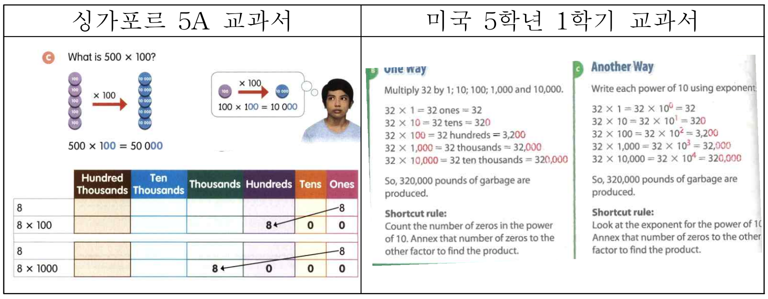
[그림 III-1] 일본 교과서의 10의 곱셈과 10의 거듭제곱의 곱셈

싱가포르와 미국 또한 우리나라 교과서와 달리, 곱셈구구에서 10단을 별도로 지도하는 것이 확인된다. 싱가포르는 곱셈구구를 2학년 1학기와 3학년 1학기에 걸쳐 편성하고 있는데, 2단과 5단을 먼저 지도하는 것은 다른 나라와 동일하지만, 5단에 이어 바로 10단이 제시된다는 점에서 차이를 보인다. 반면에 미국 교과서는 3학년 1학기에 2단→5단→9단→1단→0단의 순서로 곱셈지도를 지도한 후에 10단을 제시하고 있다. 특히 [그림 Ⅲ-2]에서 확인할 수 있듯이, 싱가포르의 4A 교과서는 곱하는 수가 '몇십', '몇십몇'과 같은 두 자리 수 곱셈을 학습하기 직전에 '10×10, 100×10, 13×10'과 같이 곱하는 수가 10인 곱셈을 먼저 학습하도록 구성하고 있는 것이 눈에 띈다. 이러한 지도 순서는 이후에 이어지는 '×(몇십)'과 '×(몇십몇)'의 곱셈이 '×(몇)×10'의 계산을 바탕으로 한다는 것을 학생들에게 강조하는 데 도움이 될 것이다.



[그림 III-2] 싱가포르와 미국 교과서의 10의 곱셈

두 자리 수 이상의 큰 수의 곱셈 계산법을 일반화하고 형식화하기 위해서는 '×10'의 계산뿐 아니라 10의 거듭제곱의 곱에 대한 이해가 필요하다. 싱가포르 5A 교과서는 [그림 Ⅲ-3]와 같이 '7510×200, 549×3000' 등 '×(몇백)', '×(몇천)'이 포함된 보다 큰 수의 곱셈을 지도하는 과정에서 10의 거듭제곱의 곱셈방법을 도식을 이용하여 설명하고 있다. 앞에서 살펴본 일본 교과서와 유사한 자릿값표를 사용하여 10, 100, 1000의 곱셈 결과를 기수법적 구조와 연결하여 제시하고 있다. 즉 '×100'의 결과가 8의 자릿값이 왼쪽으로 두 개 이동하여 백의 자리가 되고, '×1000'의 결과가 8의 자릿값을 왼쪽으로 세 개 이동시켜 천의 자리가 된다는 것을 설명한다. 미국 5학년 1학기 교과서 또한 10의 거듭제곱의 곱셈을 귀납적인 방식으로 지도하고 있으며, 곱하는 수의 0의 개수와 결과값의 0의 개수의 관계를 패턴을 통해 발견하도록 하고 있다. 왼쪽은 10의 거듭제곱을 자릿값을 나타내는 언어적 단위(ones, tens, hundreds 등)를 이용하여 구한 경우이고, 오른쪽은 다른 나라의 초등 교과서에서는 찾아보기 힘든 형식적 표현인 밑과 지수로 이루어진 거듭제곱 표현을 사용하여 규칙성을 표현한 경우이다. 두 가지 모두 곱하는 수의 0의 개수를 확인하여 곱셈 계산에 이용하는 방법을 중점적으로 지도하고 있다고 볼 수 있다.



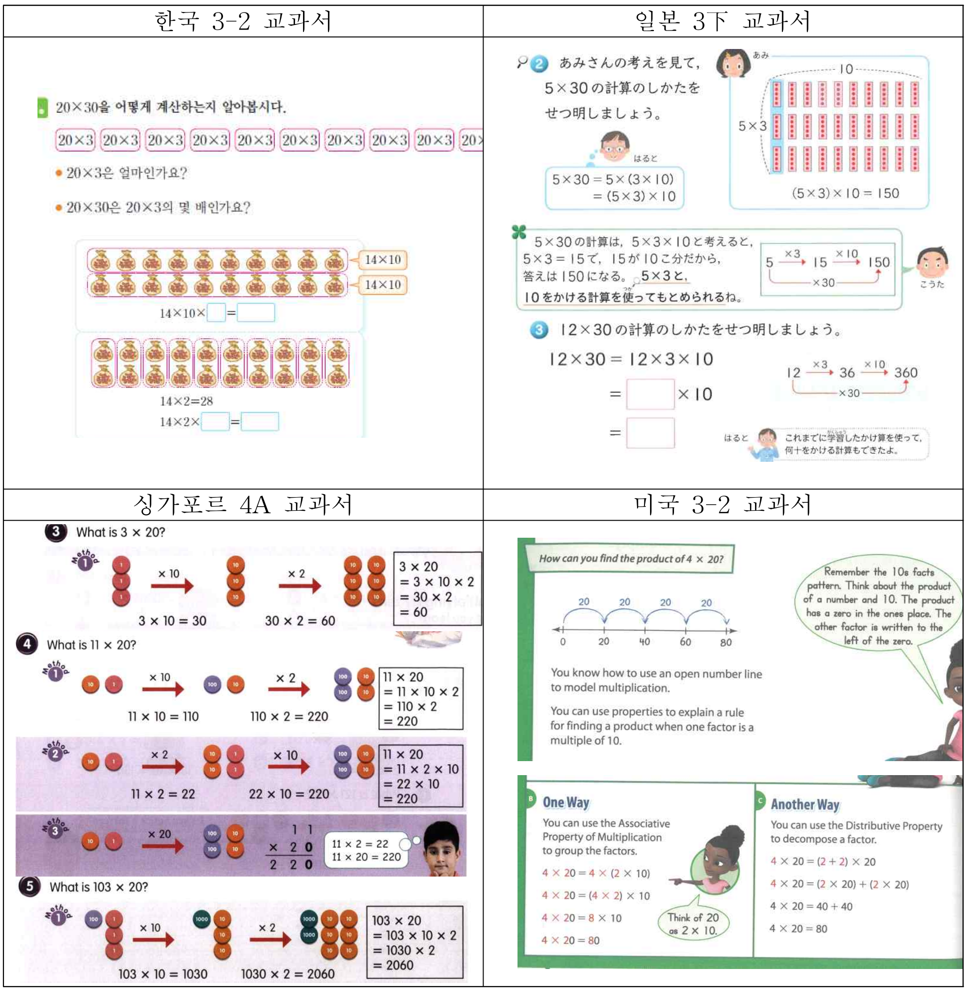
[그림 Ⅲ-3] 싱가포르와 미국 교과서의 10의 거듭제곱의 곱셈

2. '×(몇십)' 계열의 지도

곱셈 계산법은 십진기수법에서 계산하기 쉬운 수로 나누어 만든 부분곱의 합을 구하여 계산하기 어려운 큰 수의 곱을 계산하는 방법이다(정연준, 2011). 앞서 10의 거듭제곱의 곱을 십진기수법 곧 자리값 변동과 관련하여 계산하는 방법을 각 나라의 교과서에서 어떻게 지도하는지 살펴보았다. 여기에서는 이를 바탕으로 하여 '×(몇십) '의 계산을 어떻게 제시하고 있는지 살펴보겠다.

먼저 '×(몇십)'이 처음으로 지도되는 학년은 한국과 일본, 미국이 3학년 2학기, 싱가포르는 4학년 1학기이다. 지도 학년보다 주목할 필요가 있는 것은 자연수 곱셈 지도 계열에서 '×(몇십)'을 지도하는 시기와 방법이다. 한국과 일본 교과서는 곱하는 수를 한 자리 수에서 두 자리 수로 확장하는 단원에서 제일 먼저 지도하고 있으며, 싱가포르 교과서는 지도 단원은 동일하나 '×(몇십)' 이전에 '×10'이 먼저 지도된다는 차이가 있다. 세 교과서 모두 '×(몇십몇)'의 곱셈 지도 직전에 '×(몇십)'을 지도함으로써 곱셈 지도 계열이 논리적으로 자연스럽다고 할 수 있다. 이와 다르게 미국 교과서의 '×(몇십)'의 지도 시기는 (두 자리 수)×(한 자리 수) 등의 곱하는 수가 한 자리 수인 곱셈을 학습하기 전이다. [그림 Ⅲ-4]에서 4×20의 계산은 별다른 설명없이 20×4와 동일하게 취급하여 수직선 모델로 직관적으로 설명하거나 결합법칙과 분배법칙을 사용하여 형식화하여 제시하고 있다. 곱셈구구 지도부터 일찍이 도입한 교환법칙을 전제로 곱해지는 수와 곱하는 수를 특별히 구분하지 않는 미국 교과서 특유의 방식은 4학년 1학기에 이루어지는 두 자리 수 이상의 자연수 곱셈 지도에서도 일관되게 살펴볼 수 있다.

한편, 우리나라의 ‘×(몇십)’ 지도는 20×30, 14×20과 같이 곱해지는 수가 두 자리 수인 곱셈에서 시작하는 것에 반하여, 다른 세 국가의 교과서는 5×30과 같이 (한 자리 수)×(몇십)에서 시작하여 (두 자리 수)×(몇십)으로 진행하는 모습을 보인다. 특히 싱가포르 교과서는 (세 자리 수)×(몇십)으로까지 확장하고 있다, 이처럼 곱해지는 수를 한 자리 수, 두 자리 수, 세 자리 수로 확장하는 방식은 곱해지는 수의 자릿수에 상관없이 ‘×(몇십)’의 계산을 ‘×(몇)×10’으로 나누어 계산할 수 있다는 것을 확실하게 제시할 수 있다.



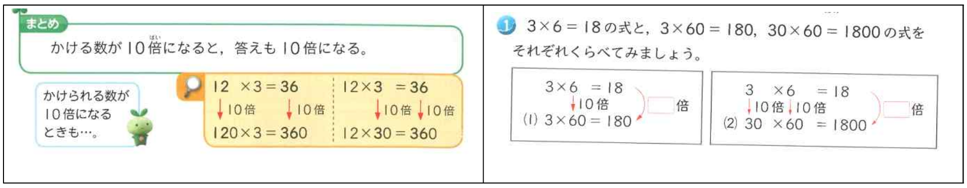
[그림 Ⅲ-4] 한국, 일본, 싱가포르, 미국 교과서의 ‘×(몇십)’의 지도

우리나라 교과서는 모형을 이용하여 ‘×(몇십)’의 계산이 ‘×(몇)×10’으로 나누어 계산할 수 있다는 것을 제한다. 예를 들어, 20×30 계산에서 곱하는 수 30을 3개씩 이루어진 묶음이 10개로 해석하고, 14×20 계산에서 곱하는 수 20을 ‘10×2’와 ‘2×10’으로 해석하는 방식을 적용하여 묶음 모델을 다시 묶어 세는 전략을 사용하고 있다. 이러한 방식은 곱셈의 교환법칙과 결합법칙을 명시적으로 제시하지 않고 있지만, 묶음 상황의 재배열을

통해 두 계산 원리를 직관적으로 접근하고 있다고 할 수 있다. 다만 이러한 직관적인 시도가 '×(몇십)'의 계산 방법을 충분히 강조하여 지도하고 있는지 불명확하다. 무엇보다 '×10'을 먼저 지도하지 않았기 때문에 수를 나누어 곱하는 이유가 불분명하다.

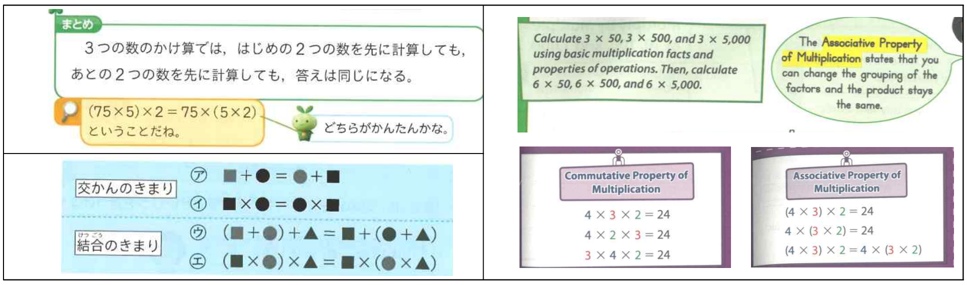
싱가포르 교과서는 '×10' 의 계산을 먼저 지도한 후, 非비례 수모델을 이용하여 '×(몇십)'을 '×(몇)×10'으로 계산할 수 있다는 것을 지도한다. [그림 Ⅲ-4]의 11×20 사례에서 알 수 있듯이, (방법1)과 (방법2)의 오른쪽에 제시된 수식은 곱셈의 결합법칙이 내포된 표현이라고 할 수 있으며, (방법3)의 말풍선에 있는 $11\times2=22$와 $11\times20=220$의 비교 표현은 '×(몇십)' 계산이 '×(몇)×10'에 의해 진행된다는 것을 의미한다고 할 수 있다. 이러한 점에서 싱가포르 교과서는 곱셈의 교환법칙과 결합법칙이 사용되고 있음을 언어적으로 명확히 설명하고 있지 않지만, '×(몇십)'의 계산과정이 '×(몇)×10'으로 진행된다는 점과 결합법칙과 교환법칙 원리에 근거하고 있다는 점을 어느 정도 명확하게 전달하고 있다고 할 수 있다.

일본 교과서와 미국 교과서는 '×(몇십)'의 계산을 상당히 형식적인 방법으로 접근하고 있는 경우이다. [그림 Ⅲ-4]의 일본 교과서에서 5×30 사례는 '5×30 계산은 $5\times3\times10$으로 생각해서 5×3과 10을 곱하는 계산을 사용하여 구한다'는 설명을 명확하게 제시하고 있을 뿐 아니라 곱셈의 결합법칙을 수식으로 완전하게 제시하고 있다. 12×30 계산 또한 12×3을 먼저 계산한 후에 10을 곱한다는 계산방법이 수식과 화살표 도식으로 분명하게 전달되고 있으며, 이와 같은 방식으로 일반적인 '×(몇십)'의 계산을 할 수 있다는 말풍선도 확인된다. '×(몇십)'의 지도와 관련해서 일본 교과서의 차별화된 특징은 배의 아이디어를 강조하고 있다는 점이다. [그림 Ⅲ-5]와 같이, 곱하는 수가 3에서 30으로, 6에서 60으로 10배가 되면 곱셈 결과가 10배가 된다는 설명이 도식과 함께 제시되고 있다. 배의 계산이 소단원으로 구성되어 있을뿐 아니라 자연수 곱셈 전체 단원에 걸쳐서 배의 아이디어를 반복적으로 설명하는 방식은 곱셈의 의미를 통합적으로 이해하는데 도움을 줄 수 있다. 즉 '몇씩 몇묶음'의 묶음 상황 위주의 곱셈의 의미를 '몇의 몇배'라는 두 양의 곱셈적 비교 상황으로 확장할 수 있다는 장점이 있다.



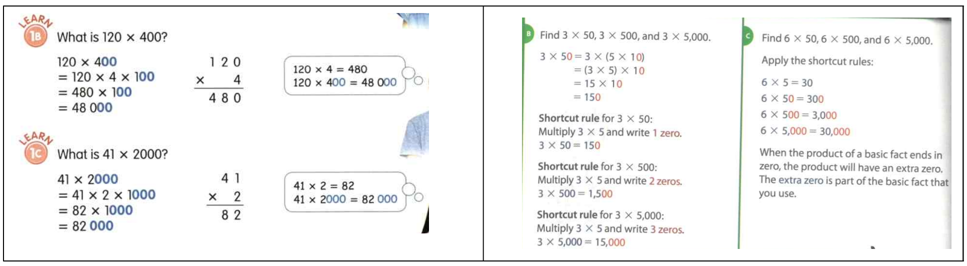
[그림 Ⅲ-5] 일본 교과서의 배의 아이디어

[그림 Ⅲ-4]에서 미국 교과서는 일본 교과서와 마찬가지로 $4\times20=4\times(2\times10)=(4\times2)\times10$이라는 곱셈의 결합법칙을 보여주는 형식화된 수식 표현이 제시되고 있으며, '곱셈의 결합법칙'이라는 용어가 정확하게 제시되고 있다. 일본과 미국 교과서에서 이와 같은 형식적 접근이 가능한 이유는 학생들이 곱셈 계산 원리를 이미 학습한 상태이기 때문이다. [그림 Ⅲ-6]의 왼쪽 위 그림은 일본 3上 교과서에서 (세 자리 수)×(한 자리 수) 곱셈 학습 이후에 이루어지는 곱셈의 법칙 내용이다. 세 수의 곱셈에 대해서 곱하는 순서에 상관없이 결과가 같다는 설명이 보이며, 보다 간단한 계산이 이루어지는 계산 순서를 선택할 것을 유도하는 말풍선도 확인할 수 있다. 왼쪽 아래 그림은 일본 4下 교과서의 계산 규칙 알아보기 단원에서 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙과 결합법칙을 직접 용어를 제시하고 그림 기호를 사용하여 형식화하고 있는 그림이다. 오른쪽 그림은 미국 4-1 교과서에 제시된 곱셈의 결합법칙에 대한 설명과 교환법칙과 결합법칙을 적용한 예시이다. 곱셈의 결합법칙 용어는 [그림 Ⅲ-4]에서 확인한 바와 같이, 이미 3학년 2학기부터 등장하고 있으며, 곱셈의 교환법칙 용어는 3학년 1학기에서 곱셈의 개념 학습부터 제시하고 있다.



[그림 Ⅲ-6] 일본과 미국 교과서의 곱셈의 결합법칙 설명

분석 대상인 모든 교과서가 다루는 자연수 곱셈은 대체적으로 곱하는 수가 두 자리 수에 그친다. 곱하는 수가 세 자리 수 이상인 곱셈을 다루지 않는 것은 교육과정의 적정한 학습량 차원도 있지만, 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈에 사용된 계산 원리와 계산법이 곱하는 수가 세 자리 수 이상인 큰 수의 곱셈에 동일하게 적용되기 때문이다. 다만, 곱하는 수의 자릿값이 증가함에 따라 별도의 학습이 필요한 것으로, 바로 1절에서 살펴본 바 있는 10의 거듭제곱의 곱을 꼽을 수 있다. 싱가포르와 미국 교과서에서는, 이를 더 일반화하여, '×(몇백)', '×(몇천)'을 다루고 있다. '×(몇백)', '×(몇천)'을 포함한 곱하는 수가 세 자리 수 이상인 곱셈을 전혀 다루지 않는 우리나라 교과서와 차별화되는 부분이다. 싱가포르는 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈 지도가 마무리된 다음 학년인 5A 교과서의 '10, 100, 1000과 그 배수의 곱셈' 단원에서 (세 자리 수)×(몇천)까지를 다루는 반면에, 미국 교과서는 4학년 1학기에 곱하는 수가 한 자리 수인 곱셈이 시작되기 직전에 '10, 100, 1000의 배수의 곱셈' 단원에서 다루고 있다. 미국 교과서가 '×(몇백)', '×(몇천)' 지도 계열을 이와 같이 배열한 것은 일찍이 도입한 곱셈의 교환법칙을 전제로 하여 곱해지는 수와 곱하는 수를 특별히 구분하지 않는 특유의 방식에 있다고 보여진다. 싱가포르 교과서는 '몇백'을 '(몇)×100'으로, '몇천'을 '(몇)×1000'으로 분해하여 곱셈의 결합법칙을 적용하고 있지만, 한편으로는 곱해지는 수의 0의 개수와 결과값의 0의 개수가 같다는 패턴을 강조하고 있기도 하다. 미국 교과서 또한 곱하는 수가 5, 50, 500, 5000으로 변화함에 따라 곱셈 결과값의 패턴에 주목한다. 미국 교과서는 결과값에 곱하는 수의 0의 개수를 확인하여 개수의 '0 붙여쓰기' 전략을 직접적으로 설명할 정도로 알고리즘적인 방식의 지도에 치우쳐 있음을 확인할 수 있다.



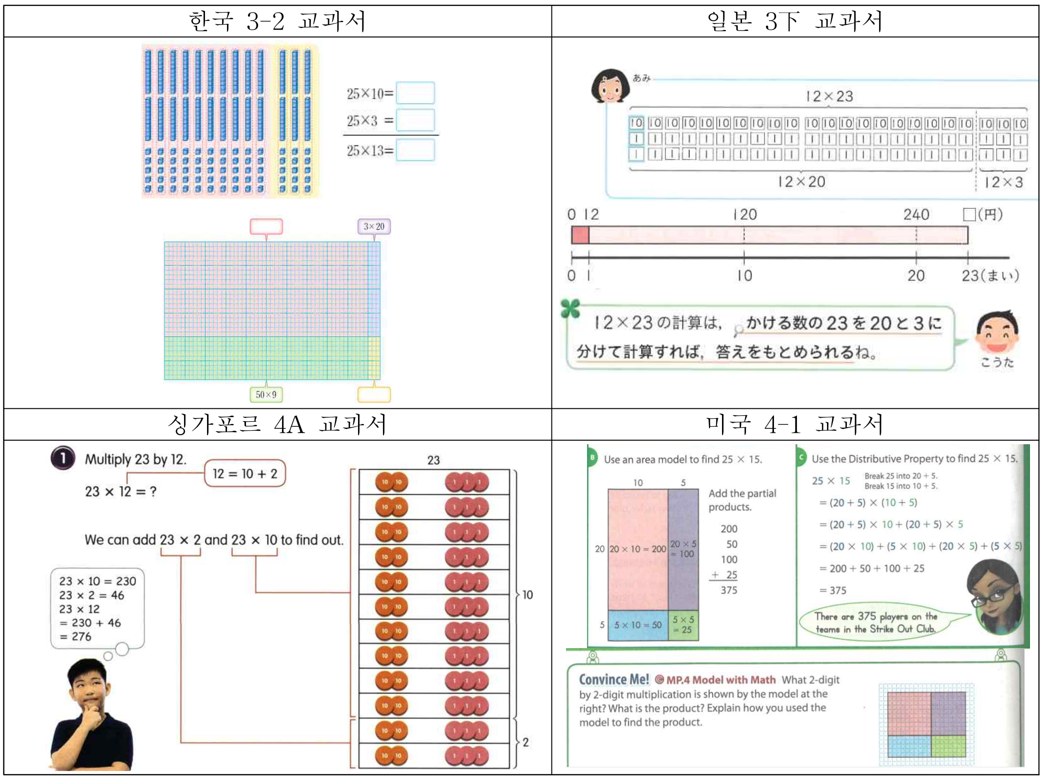
[그림 Ⅲ-7] 싱가포르(5A)와 미국 교과서(4-1)의 '×(몇백)', '×(몇천)'

3. '×(몇십몇)' 계산법의 지도

두 자리 수 이상의 자연수 곱셈의 계산은 곱하는 수와 곱해지는 수 각각을 자릿값에 따라 나누어 서로 곱하

고 그 결과를 모두 더하는 과정으로 이루어진다. 이 때 두 수를 분해하여 부분곱으로 표현하는 과정이 바로 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 적용되는 과정이다. 또한 '×(몇십몇)' 계산을 잘 수행하도록 하기 위해서는 계산 원리에 대한 이해와 더불어 세로셈 계산 연습을 통한 계산 숙달이 중요하다. 이번 절에서는 '×(몇십몇)' 의 지도 시기와 지도 모델, 분배법칙의 지도, 세로셈 계산법을 도입하는 도식과 곱한 결과를 적는 방법 등 수학적 표현에 초점을 맞추어 각 국가의 교과서를 살펴보았다.

먼저 '×(몇십몇)'의 지도 시기와 관련하여 일본과 싱가포르는 동일 학년의 한 학기 동안 지도되는데, 우리나라와 미국은 곱해지는 수의 자리 수에 따라 지도 학년 및 학기가 달라진다. 우리나라는 (두 자리 수)×(두 자리 수)는 3학년 2학기, (세 자리 수)×(두 자리 수)는 4학년 1학기에 분리하여 지도하고 있다. 미국은 4학년 1학기와 5학년 1학기에 각각 지도한다. 반면에 일본과 싱가포르는 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈을 동일 학년에서 지도하는데, 일본은 3학년 2학기, 싱가포르는 4학년 1학기에 지도한다. 뿐만 아니라 한 단원 안에서 (한 자리 수)×(두 자리 수), (두 자리 수)×(두 자리 수), (세 자리 수)×(두 자리 수) 계산을 연결하여 지도한다. 곱하는 수가 한 자리 수인 곱셈도 곱해지는 수의 자리 수에 상관없이 동일 단원에서 학습하고 있는데, 우리나라는 학기를 달리하여 학습한다는 특징이 있다.



[그림 III-8] 한국, 일본, 싱가포르, 미국 교과서의 '×(몇십몇)'의 지도 모델

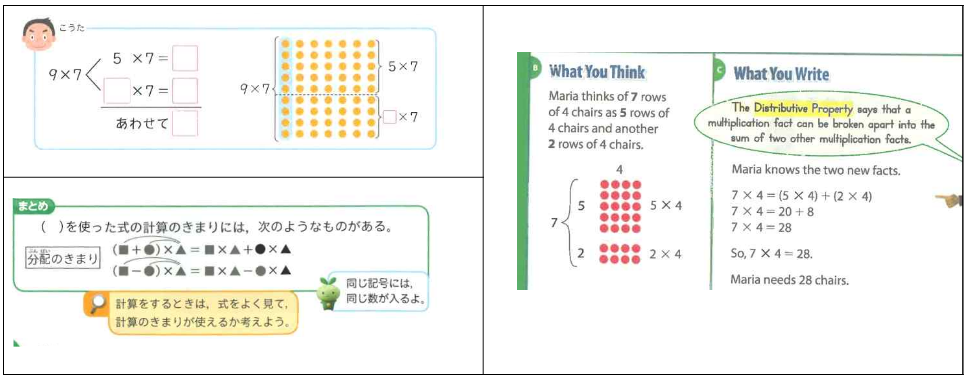
'×(몇십몇)'의 지도 모델에 대해서는 우리나라와 미국 교과서가 주로 모눈종이 모델을 사용하는 것에 비해 일본과 싱가포르 교과서는 동전모델과 유사한 非비례 수모델을 사용하고 있다는 점에서 차이가 있다. [그림 III

-8]에 제시된 2015 개정 교과서 사례는 우리나라 역대 교육과정이 지속적으로 사용해온 모눈종이를 이용한 배열모델(53×29 계산) 이외에 새롭게 추가된 수모델을 이용한 묶음모델(25×13 계산)이 보인다. 같은 모눈종이 모델을 사용하는 미국 교과서는 두 자리 수 곱셈 단원의 상당 부분에 걸쳐 배열모델을 지속적으로 사용하고 있다는 점에서 특징이 있다. 우리나라 교과서가 제시하고 있는 모눈종이 배열모델은 [그림 Ⅲ-8]의 53×29 계산이 유일하다. 이후에는 세로셈 계산법의 도입과 연습으로 바로 이어지기 때문이다. 반면에 미국 교과서는 (두 자리 수)×(두 자리 수)를 계산하는 배열모델을 설명한 후에 주어진 배열모델이 나타내는 곱셈식 찾기 문제, 주어진 곱셈식에 맞는 배열모델 분할하기 문제들을 다양하게 제시하고 있다. 세로셈 계산 알고리즘의 도입을 대단원의 제일 뒤에서 하고 있으며, 가로셈 또는 세로셈 형태의 두 자리 수 곱셈의 대부분을 배열모델을 병행하여 계산을 수행하도록 하고 있다.

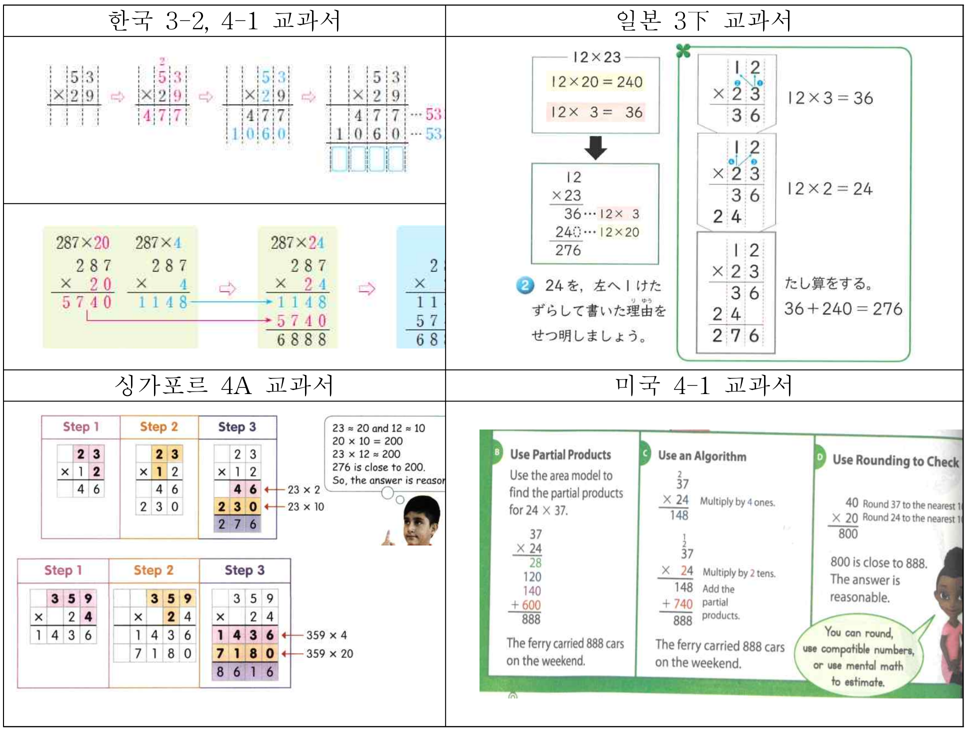
일본과 싱가포르 교과서에는 우리나라와 같은 배열모델이 등장하지 않으며, [그림 Ⅲ-8]과 같은 非비례 수모델을 사용한 묶음모델을 제시하고 있다. 동전과 유사한 수 모형을 사용하여 10과 1을 나타내는 것은 곱하는 수가 한 자리 수인 곱셈의 지도에서부터 일관성있게 사용되고 있다. 일본 교과서에서 제시하고 있는 또 다른 모델은 직사각형 띠 모형을 함께 사용하고 있는 직선모델이다. 이 모델 역시 자릿값에 따른 다양한 곱셈 유형에서 지속적으로 제시되고 있음을 확인할 수 있다. 그런데 지도 모델의 부분곱 표현 방식과 세로셈 계산법의 부분곱 계산을 연계하여 제시하는 것에 주목할 필요가 있다. 예를 들어 53×29의 모눈종이 배열모델은 전체 영역을 수평, 수직으로 구분함으로써 네 개의 부분곱을 모두 나타낸다. 반면에 53×29의 세로셈 계산법의 표준 알고리즘은 53×9와 53×20의 두 행으로 두 개의 부분곱을 나타낸다. 곱셈 모델과 세로셈 알고리즘 수행과의 연계성을 높이기 위해서는 곱해지는 수를 그대로 둔 채 곱하는 수만을 분해하는 것도 생각해 볼 만하다. 일본과 싱가포르 교과서가 제시하고 있는 묶음모델이 바로 곱하는 수를 분해한 경우라고 볼 수 있다. 싱가포르 교과서의 23×12의 모델에서 곱해지는 수 23을 분해하지 않고 그대로 하나의 묶음으로 제시하고 있음을 확인할 수 있다. 우리 나라와 같은 배열 모델을 사용하는 미국 교과서는 각 영역이 나타내는 모든 부분곱을 네 개의 행에 모두 적는 세로셈 표현법을 상당 기간 동안 반복적으로 지도하고 있다.

한편, 수모델과 모눈종이 배열모델, 동전과 유사한 묶음모델 등의 모델은 두 수를 자릿값에 따라 나누어 부분곱을 생성한 후 이를 더한다는 원리, 즉 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 직관적으로 이해할 수 있게 한다. 우리나라 교과서 또한 주어진 두 수를 자릿값에 따라 분해한 곱셈 모델을 제시하는 방법이나 25×10, 25×3을 더하여 25×13이 나온다는 것을 나타내는 화살표 도식 등을 사용하여 분배법칙을 암묵적으로 제시한다. 그런데 다른 국가에서는 분배법칙을 보다 명시적으로 나타내는 수학적 표현을 많이 찾아볼 수 있다. [그림 Ⅲ-8]의 싱가포르 교과서 사례는 곱하는 수 12가 자릿수에 따라 분해된다는 것을 수식 '12＝10＋2'로 나타내고 있으며, 23×2와 23×10을 더한다는 설명과 이에 대한 계산식이 말풍선으로 제시되어 있다. 일본 사례 또한 '12×23의 계산은 곱하는 수 23을 20과 3으로 나누어서 계산을 하면 된다'는 설명이 명확하게 제시되어 있다. 특히, 미국 교과서는 '분배법칙'이라는 용어를 직접적으로 사용하고 있으며, 분뱁법칙이 적용되는 계산 과정을 $25\times15=(20+5)\times(10+5)=(20\times10)+(5\times10)+(20\times5)+(5\times5)$와 같이 제시하고 있다. 일본과 미국 교과서가 이렇듯 직접적이고 형식화된 설명이 가능한 이유는 분배법칙과 관련한 수학적 표현을 곱셈 구구 단원에서부터 지도해왔기 때문이다.

[그림 Ⅲ-9]의 왼쪽 위 그림은 일본 교과서에서 분배법칙의 원리를 적용하여 곱셈 구구의 9단을 지도하는 사례이며, 왼쪽 아래 그림은 일본 4下 교과서의 계산 규칙 알아보기 단원에서 분배법칙의 용어를 직접 제시하고 그림 기호를 사용하여 형식화하고 있는 장면이다. 오른쪽 그림은 미국 3-1 교과서의 곱셈 구구 단원에 제시된 분배법칙에 대한 설명과 이를 적용한 예시이다. 이 사례들은 분배법칙 용어와 관련 수식. 언어적 설명이 거의 생략되어 있는 우리나라 교과서와 차별화된 점이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅲ-9] 일본과 미국 교과서의 분배법칙 설명



[그림 Ⅲ-10] 한국, 일본, 싱가포르, 미국 교과서의 ‘×(몇십몇)’의 세로셈 계산 도식

이미 앞에서 강조한 바와 같이, ‘×(몇십몇)’ 계산 지도는 계산 원리에 대한 이해를 바탕으로 한 곱셈 계산 숙달이 핵심 목표라고 할 수 있다. [그림 Ⅲ-10]은 각 국가별 교과서가 곱하는 수가 두 자리 수로 늘어난 곱셈을 도입하는 단계에서 사용하고 있는 대표적인 세로셈 계산 도식을 보여주고 있다. 먼저 모든 교과서가 분배법칙에 따른 부분곱의 계산을 자리를 맞추어 일의 자리부터 계산하고 있음을 확인할 수 있다. 여러 가지 방법이 제시된

미국 교과서의 경우에도 표준 알고리즘을 사용한 [방법C]와 네 개의 부분곱을 모두 나열한 [방법B] 모두 계산 순서는 동일하다. 또한 [그림 Ⅲ-10]에 제시된 한국과 일본, 싱가포르 교과서의 세로셈 도식에는 자릿값에 따라 나누어 계산한 부분곱의 결과를 적는 방법과 관련된 보조 장치들을 찾아 볼 수 있다. 부분곱의 내용을 보여주는 화살표, 계산 순서를 나타내는 화살표와 번호, 다른 색깔로 표현된 수와 격자, 올림수 등으로 다양하다. 이 중에서 올림수 표현은 우리나라와 미국 교과서에만 보이는데, 일본과 싱가포르 교과서는 올림이 있는 곱셈 유형에서도 올림수 표현을 사용하지 않고 있다. 우리나라 교과서의 '×(몇십몇)'의 지도는 올림이 없는 유형과 올림이 있는 유형을 구분하여 소단원을 별도로 구성하고 있는데, '×(몇)' 의 교과서 구성도 이와 동일하다. 다른 나라 교과서는 곱하는 수가 한 자리 수인 곱셈을 올림 여부에 따라 구분하여 지도한 것에 비해, 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈에서는 올림 여부를 그다지 구분하지 않는다. 예를 들어, 싱가포르 교과서가 본문에서 제시하는 (두 자리 수)×(두 자리 수)는 올림이 없는 곱셈뿐이며, (세 자리 수)×(두 자리 수)는 올림이 있는 곱셈뿐이다. [그림 Ⅲ-10]에서 추가적으로 관찰할 수 있는 것은 싱가포르, 미국 교과서의 어림을 통한 결과값의 타당성을 확인하는 장면이다. 23×12를 20×10으로 어림하고, 37×24를 40×20으로 어림하여 세로셈 결과가 타당한지를 검토하고 있다. 우리나라 교과서가 어림을 세로셈 결과를 검토하는 수단으로 사용하기보다는 도입 맥락에 제시된 상황의 결과값을 먼저 어림으로 추측해보도록 발문하고 있는 것과 차이가 있다.

각 국 교과서의 세로셈 계산 도식은 분배법칙에 따른 부분곱 계산을 자리를 맞추어 표기하는 표준적인 방식을 대체적으로 따르고 있다. [그림 Ⅲ-10]에서 눈에 띄는 것은 한국과 일본 교과서의 자릿값 구분선과 싱가포르 교과서의 격자틀이다. 물론 자릿값 구분선과 격자틀은 세로셈 곱셈 계산에 익숙해지는 이후 학습단계에서는 생략되지만, 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈을 처음 배우는 단계에서는 부분곱의 결과를 적는 자리를 쉽게 찾게 해주는 역할을 한다. 뿐만 아니라 자릿값 구분선은 두 수의 곱셈이 자릿값에 따라 이루어져야 한다는 사실과 부분곱을 적는 자리를 찾는 과정이 위치적 기수법의 구조와 연결된다는 사실을 드러낸다는 점에서도 의미가 있다. 싱가포르 교과서의 23×12를 예로 들면, 23을 12의 일의 자리 2와 곱한 부분곱 46은 기수법에 따라 끝자리를 일의 자리에 맞추어 기록해야 하며, 12의 1은 위치적 기수법에 따라 실제로는 10을 의미하므로 23과 1을 곱한 부분곱 23은 23이 아닌 230으로 기록해야 한다. 이와 같은 설명을 통해 세로셈 곱셈 계산법이 자릿값에 기반한 부분곱의 계산이며 위치적 십진기수법의 구조와 연결되어 기록되는 방식이라는 점이 충분히 지도될 필요가 있다.

세로셈 계산법 지도에서 한 가지 주목할 것은 부분곱에서 생겨나는 끝 자리 '0'의 생략과 그 수학적 근거이다. 우리나라 3학년 2학기 교과서에서 다루는 (두 자리 수)×(두 자리 수)의 모든 세로셈 도식은 부분곱의 끝 자리 '0'을 충실히 표기하고 있다. 그러다가 세로셈 곱셈 계산에 익숙해지는 4학년 1학기 (세 자리 수)×(두 자리 수)에 이르면, [그림 Ⅲ-10]의 5740(287×20)의 사례와 같이, 세로셈 도식에서 부분곱의 끝 자리 '0'을 생략하는 모습을 보인다. 그렇지만 '0'을 생략하는 이유에 대한 특별한 설명은 제시되지 않는다. 반면에 일본 교과서는 (두 자리 수)×(두 자리 수) 도입 단계부터 세로셈의 끝 자리 '0'을 생략하는 모습을 보인다. [그림 Ⅲ-10]의 12×23 사례에서 부분곱 12×20의 결과인 240의 '0'을 생략하여 24로 표기한다. 함께 제시된 발문 "24를 왼쪽으로 한 자릿수 옮겨 쓴 이유를 설명하시오"는 12×2가 실제로는 12×20을 의미한다는 사실과 부분곱 24가 실제로는 240이라는 사실을 의식화하는 학습이 일어나도록 이끈다. 이와 같이 부분곱의 끝 자리 '0'을 생략하는 이면에는 단순히 표기상의 간결함이라는 차원을 넘어서는 이유, 즉 부분곱 계산이 자릿값에 기반하여 위치적 십진기수법의 구조와 연결되어 있다는 사실과 본래의 곱셈 계산 12×20을 보다 계산하기 쉬운 작은 수의 계산 12×2으로 변환하여 계산을 보다 압축적이고 효율적으로 수행한다는 것을 명확하게 지도하려 의도가 있는 것이다. 우리나라와 일본 교과서가 최종적인 세로셈 알고리즘 도식에서 부분곱에서 생성되는 끝 자리 '0'을 생략하는 것으로 동일하게 처리하는 경우라면, 싱가포르와 미국 교과서는 (세 자리 수)×(두 자리 수) 계산에서도 부분곱의 '0'을 생략하지 않고 지속적으로 표기하는 경우이다. 두 자리 수 이상의 곱셈 지도의 최종 단계에서도 곱하는 수의 십의 자리의 부분곱에 끝 자리 '0'을 표기하는 것은 압축적이고 형식화된 표현 대신에 부분곱이 잘못 이해되는 일

이 없이 온전하게 그대로 제시되는 지도방식을 선택한 것이라고 해석할 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 한국과 일본, 싱가포르, 미국의 초등수학 교과서에서 '×(몇십)', '×(몇십몇)' 등 곱하는 수가 두 자리 수인 자연수 곱셈 계산법을 어떻게 지도하는지를 살펴보았다. 선행연구에서 제시한 논의를 바탕으로 하여 우리나라 교과서와 다른 나라의 교과서를 비교하는 연구를 수행하였다. 분석 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 우리나라 교과서는 10의 곱셈과 10의 거듭제곱의 곱셈을 별도로 지도하지 않지만, 일본, 싱가포르, 미국 교과서는 관련 내용을 명시적으로 지도하고 있었다. 싱가포르와 미국 교과서는 곱셈구구에 10단을 포함시키고 있으며, 일본 교과서는 3학년 1학기에 여러 가지 곱셈 규칙을 사용하여 10단이 포함된 곱셈표를 추가하였다. 이후 단원에서 10단 곱셈은 非비례 수모델과 화살표 도식, 자릿값표 도식을 사용하여 (두 자리 수)×10, (세 자리 수)×10의 계산으로 확장되었다.

10의 거듭제곱의 곱셈 지도 시기는 나라별로 차이가 있었는데, 일본 교과서는 ×(두 자리 수) 곱셈을 학습하기 전인 3학년 1학기 기수법 단원에서 지도하고 있었으며, 싱가포르와 미국은 (두 자리 수)×(두 자리 수) 곱셈을 학습한 이후인 5학년 1학기에 좀 더 큰 수의 곱셈으로 일반화하는 단원에서 지도하고 있었다. 이 과정에서 일본과 싱가포르 교과서는 10, 100, 1000이 곱해짐에 따른 결과값의 변화를 기수법적 구조와 연결하여 이해할 수 있도록 자릿값표 도식을 사용하여 시각화하는 특징이 있었다. 미국 교과서는 10의 거듭제곱의 곱셈을 곱하는 수의 0의 개수와 결과값의 0의 개수와의 관계 패턴을 발견하도록 유도함으로써 곱하는 수의 0의 개수를 확인하여 곱셈 계산에 이용하는 방법을 중점적으로 지도하는 모습을 나타내었다.

둘째, '×(몇십)'의 지도와 관련하여, 우리나라 교과서에 비해 싱가포르, 일본, 미국의 교과서가 계산 원리를 명시적으로 설명하는 접근을 하고 있음을 확인할 수 있었다. '×(몇십)'의 지도 시기는 대부분 '×(몇십몇)'의 곱셈 지도 직전이었으나, 미국 교과서만이 곱셈 구구부터 일찍이 도입한 교환법칙을 전제로 곱해지는 수와 곱하는 수를 특별히 구분하지 않는 특징으로 인해 곱하는 수가 한 자리 수인 곱셈을 학습하기 전이었다. 우리나라 교과서는 14×20 계산에서 곱하는 수 20을 '10×2'와 '2×10'으로 해석하는 방식을 적용하여 묶음모델을 다시 묶어 세는 전략을 사용하여, 곱셈의 교환법칙과 결합법칙에 대한 명시적 설명없이 직관적으로 접근하고 있었다. 싱가포르 교과서는 非비례 수모델과 수식, 말풍선들을 사용하여 '×(몇십)'의 계산과정이 '×(몇)×10'으로 진행된다는 점과 결합법칙과 교환법칙 원리에 근거하고 있다는 점을 전달하고 있었다. 일본과 미국 교과서는 $4 \times 20 = 4 \times (2 \times 10) = (4 \times 2) \times 10$이라는 곱셈의 결합법칙을 보여주는 형식화된 수식 표현을 제시하고, '곱셈의 결합법칙'이라는 용어를 정확하게 제시하는 등 상당히 형식적인 지도를 하고 있었다. 두 교과서 모두 교환법칙과 결합법칙이 내포된 수식의 변형활동을 곱셈구구부터 지도해 왔으며, 각 법칙에 대한 용어와 설명이 교과서에 제시되고 있다는 공통점이 있었다.

우리나라 교과서는 '×(몇백)', '×(몇천)' 지도를 다루지 않는 반면, 싱가포르와 미국에서는 이를 '×(몇십)'의 계산 원리를 확장하여 지도한다는 것을 확인할 수 있었다. 지도 시기는 상이했지만, 두 교과서 모두 '10, 100, 1000의 배수의 곱셈' 단원을 별도로 다루고 있다는 점에서 공통점이 있었다. 일반적으로 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈까지를 다루고 있는 각 국의 교육과정을 감안할 때, 10의 거듭제곱의 배수의 곱셈은 향후 학생들이 두 자리 수인 곱셈에 사용한 계산 원리와 계산법을 동일하게 적용하여 보다 큰 자릿수를 가지는 자연수 곱셈을 성공적으로 수행하는데 도움이 되게 하는 의도가 보인다. 또한 '×(몇십)'의 지도를 배의 아이디어와 연결하여 강조하는 것은 일본 교과서의 두드러진 특징이었다. '10배', '100배'의 배의 아이디어는 묶음 상황 위주의 곱셈의 의미를 두 양의 곱셈적 비교 상황으로 보완하여 이해하게 해준다는 측면에서 의미가 있었다.

셋째, ‘×(몇십몇)’의 지도와 관련하여, 각 국 교과서의 세로셈 계산 도식은 대체적으로 분배법칙에 따른 부분곱 계산을 자리를 맞추어 표기하는 표준적인 방식을 따르고 있었지만, 지도 모델과 분배법칙의 지도 방법, 끝 자리 ‘0’의 표기 등에서 차이가 확인되었다. 우리나라는 곱해지는 수가 두 자리 수인지, 세 자리 수인지에 따라 ‘×(몇십몇)’의 지도 학년을 달리하고 있지만, 일본과 싱가포르 교과서는 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈을 동일 학년에서 지도하고 있다. 지도 모델에 대해서는 우리나라와 미국 교과서가 주로 모눈종이 배열 모델을 사용하는 것에 비해 일본과 싱가포르 교과서는 동전모델과 유사한 非비례 수모델을 사용하고 있었다. 일본과 싱가포르 교과서가 제시하고 있는 묶음 모델은 곱하는 수만을 분해하여 두 개의 부분곱으로 표현했다는 측면에서, 네 개의 영역으로 분할하는 우리나라의 배열 모델에 비해 세로셈 계산법에 나타나는 두 개의 부분곱과 대응이 수월하다고 볼 수 있었다. 이와 같은 곱셈 모델은 두 수를 자릿값에 따라 나누어 부분곱을 생성하는 분배법칙을 직관적으로 이해할 수 있게 하는데, 분배법칙 용어와 관련 수식. 언어적 설명이 거의 생략되어 있는 우리나라 교과서와 달리, 다른 나라 교과서에서는 분배법칙을 보다 명시적으로 나타내는 수학적 표현을 많이 찾아볼 수 있었다. 특히, 일본과 미국 교과서는 ‘분배법칙’이라는 용어를 직접적으로 사용하거나 분배법칙의 의미, 수식을 명확히 기술하고 있었다.

각 국 교과서의 세로셈 도식은 화살표, 다른 색깔로 표현된 수와 격자, 올림수 등을 보조적으로 사용하여 자릿값에 따라 나누어 계산한 부분곱의 결과를 적는 방법을 지도하고 있다. 특히, 한국과 일본 교과서의 자릿값 구분선과 싱가포르 교과서의 격자틀은 부분곱의 결과를 적는 자리를 쉽게 찾게 해주고 있었는데, 이는 두 수의 곱셈이 자릿값에 따라 이루어져야 한다는 사실과 부분곱을 적는 자리를 찾는 과정이 위치적 기수법의 구조와 연결된다는 사실과 연결되었다. 또한 부분곱 계산과정에서 발생하는 끝 자리 ‘0’의 생략 여부는 나라별로 차이가 있었다. ‘×(몇십몇)’의 지도 초기에는 끝 자리 ‘0’을 충실히 표기하다가 세로셈 곱셈 계산에 익숙해지는 단계에서는 생략하는 우리나라 교과서와 달리, 일본 교과서는 ‘×(몇십몇)’의 도입 단계부터 세로셈의 끝 자리 ‘0’을 생략하고 있었으며, 싱가포르와 미국 교과서는 끝까지 부분곱의 끝 자리 ‘0’을 생략하지 않는 사례였다. 끝 자리 ‘0’의 생략 이유를 발문하고 있는 일본 교과서는 부분곱 계산이 자릿값에 기반하여 위치적 십진기수법의 구조와 연결되어 있다는 점을 강조하는 의미있는 사례로 해석할 수 있다.

이상의 분석 결과에 비추어 보면, 정연준과 조영미(2012). 정연준과 최은아(2020)의 자연수 곱셈 지도 관련 선행연구에서 제기된 문제점과 개선사항에 대한 교수학적 대응이 국가별로 다른 수준과 방법으로 나타나고 있다고 할 수 있다. 이를 정리하여 향후 교육과정 및 교과서 개정에 고려할 만한 시사점을 도출하면 다음과 같다.

첫째, 10의 곱셈과 10의 거듭제곱의 곱셈을 명시적으로 지도하는 것을 고려할 필요가 있다. 십진기수법에서 10의 거듭제곱의 곱은 계산 결과가 기수법 구조와 연결되어 있는 기본적인 곱셈이다. 곱셈 계산법은 주어진 곱셈을, 10의 거듭제곱의 곱과 한 자리 수의 곱으로 나누어 계산하는 방법이다. 곧 기본적인 곱셈을 이용하여 복잡한 곱셈을 해결하는 것이다. 현재 우리나라 교과서는 곱셈구구에서도 ‘×10’이 배제되어 있으며, 학생들이 ‘×10’, ‘×100’, ‘×1000’ 계산을 의식화하도록 지도하지 않고 있다. ‘×(몇십)’을 ‘×(몇)×10’으로 분해하는 방법을 제시하고 있지만, 그 이유가 명확하게 제시되지 못하는 것이다. 이에 대하여 보다 적극적인 교수학적 대응이 필요해 보인다. 본 연구에서 살펴본 일본, 싱가포르, 미국의 사례를 통하여 10단을 곱셈구구에 포함시키는 방안과 (두 자리 수)×10, (세 자리 수)×10으로의 확장, ×100, ×1000으로의 확장하는 방안을 고려해 볼 수 있다. 이 때, 자릿값표 도식을 사용하여 학생들로 하여금 10, 100, 1000이 곱해짐에 따른 결과값의 변화를 기수법적 구조와 연결하여 이해할 수 있도록 시각화하는 것도 필요하다.

둘째, 곱하는 수가 두 자리 수로 확장되는 곱셈에서 ‘×(몇십)’의 계산 원리에 대한 설명이 보다 강조될 필요가 있다. ‘×(몇십몇)’의 곱셈으로 진행하기 위해서는 ‘×(몇십)’의 계산 원리에 대한 충실한 이해와 계산의 숙달이 필요한데, 자릿값에 따라 나누어 곱한 부분곱을 곱셈의 교환법칙과 결합법칙을 적용하여 $(a\times10^m)\times(b\times10^n)$ 을 $a\times b\times10^m\times10^n$ 형태로 바꾸어 계산한다는 것을 이해해야 한다. 곱셈의 결합법칙을 보여주는 형식화된 수식

표현과 '곱셈의 결합법칙' 용어를 학습하는 일본과 미국 교과서 사례는 묶음 모델을 다시 묶어 세는 전략을 사용하면서 '×(몇십)'을 직관적으로 지도하고 있는 우리나라 사례에 시사하는 바가 크다. '×(몇십)'의 지도를 배의 아이디어와 연결하여 강조하는 방안과 '×(몇백)', '×(몇천)'과 같은 10의 거듭제곱의 배수의 곱셈을 지도하는 방안도 고려해 볼 수 있다.

셋째, '×(몇십몇)' 세로셈 곱셈 계산법 형식을 기수법과 계산 원리와 연계하여 지도하는 방안을 모색할 필요가 있다. 우리나라를 비롯한 각국 교과서의 세로셈 도식은 화살표, 자릿값 구분선과 격자틀 등을 이용하여 부분곱의 결과를 적는 방법을 지도하고 있다. 이 과정에서 분배법칙에 따른 부분곱 계산을 자리를 맞추어 표기하는 '×(몇)×10' 계산 과정에서 끝 자리 '0'을 생략하는 수학적 근거가 표기상의 간결함 차원을 넘어서 부분곱 계산이 자릿값에 기반하여 위치적 십진기수법의 구조와 연결되어 있다는 것과 자릿값을 생략함으로써 본래의 수보다 작은 수의 계산으로 변환하여 세로셈 계산을 보다 압축적이고 효율적으로 수행하고자 하는 의도가 있다는 것이 충분히 지도되어야 할 것이다. 또한 다른 나라 교과서 사례 중에서 곱하는 수가 두 자리 수인 곱셈을 동일 학년에서 지도하는 점, 세로셈에 나타나는 부분곱의 개수와 맞게 수모델을 두 개의 부분곱으로만 분할하고 있는 점, 세로셈 수행 결과의 타당성을 어림으로 검토하게 하는 점 등은 세로셈 계산법과 계산 원리를 연계하여 이해하는 방안으로 고려해 볼만하다.

본 연구는 두 자리 수 이상의 자연수 곱셈 중에서도 곱하는 수가 두 자리 수인 자연수 곱셈에 주목하여 우리나라와 다른 나라 교과서의 지도 방법을 비교함으로써 향후 교육과정 및 교과서 개정에 고려할 만한 시사점을 제안하였다. 본 연구에서는 우리나라와 비교 대상국을 일본, 싱가포르, 미국으로 한정하여 현재 출판되어 있는 최근 교과서를 분석하였다는 제한점이 있다. 비교 대상국을 폭넓게 선정하는 것과 더불어 각 국에서 개정된 교육과정에 따른 교과서들이 새롭게 출판되는 것을 반영하여 분석 대상을 업데이트한 연구가 수행될 필요가 있다. 현재 우리나라도 2015 개정 교육과정에 따른 국정교과서가 검정 교과서도 전환되는 시기에 있고 2022 개정 교육과정을 준비 중에 있으므로, 새로운 교육과정과 교과서에서 자연수 곱셈 지도가 어떻게 이루어지고 있는지에 대한 연구가 수행될 필요가 있다.

참 고 문 헌

강홍규 (2009). 배 개념에 기초한 자연수 곱셈 개념의 지도 방안. <학교수학>, 11(1), 17-37.

Kang, H. K. (2009). An alternative program for the teaching of multiplication concept based on times Idea. *School Mathematics*, 11(1), 17-37.

강홍규・심선영 (2010). 알고리즘의 다양성을 활용한 두 자리 수 곱셈의 지도 방안과 그에 따른 초등학교 3학년 학생의 곱셈 알고리즘 이해 과정 분석, <한국초등수학교육학회지>, 14(2), 287-314.

Kang, H. K. & Sim, S. Y. (2010). A design of multiplication unit of elementary mathematics textbook by making the best use of diversity of algorithm. *Journal of elementary mathematics education in Korea,* 14(2), 287-314.

교육부 (2020). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8].

The Ministry of Education (2020). *2015 Reformed mathematics curriculum*. Seoul: Author.

교육부 (2017). 수학 2-2. 서울: ㈜천재교육.

Ministry of Education (2017). *Mathematics 2-2*. Seoul: Chunjae.

교육부 (2018a). 수학 3-1. 서울: ㈜천재교육.

Ministry of Education (2018a). *Mathematics 3*-1. Seoul: Chunjae.

교육부 (2018b). 수학 3-2. 서울: ㈜천재교육.

Ministry of Education (2018b). *Mathematics 3-2*. Seoul: Chunjae.

교육부 (2018c). 수학 4-1. 서울: ㈜천재교육.

Ministry of Education (2018c). *Mathematics 4-1*. Seoul: Chunjae.

김남균・김지은 (2009) 초등학교 저학년 학생의 곱셈 전략 발달에 관한 연구. <학교수학>, 11(4), 745-771.

Kim, N. K. & Kim, J. E. (2009). A study of the development of children's multiplication strategies and the computational resources. *School Mathematics*, 11(4), 745-771.

김수미 (2009). 영(0)이 초등학생들의 계산 수행에 미치는 영향 분석, <학교수학>, 11(4), 567-581.

Kim, S. M. (2009). An analysis of the effects of zero on children's arithmetic performances. *School Mathematics*, 11(4), 567-581.

방정숙・최지영 (2011). 범자연수와 연산에 관한 수학 교과서 분석 -일반화 된 산술로서의 대수 관점을 중심으로-. <수학교육>, 50(1), 41-59.

Pang, J. S. & Choi, J. Y. (2011). An analysis of the whole numbers and their operations in mathematics textbooks: Focused on algebra as generalized arithmetic. *The Mathematical Education,* 50(1), 41-59.

변희현 (2011). 한국과 일본의 초등교과서에서 다루는 분배법칙 개념에 관한 비교 분석. <한국초등수학교육학회지>, 15(1), 39-56.

Byun, H. H. (2011). A comparative analysis on the distributive property in Korean and Japanese elementary textbooks. *Journal of elementary mathematics education in Korea,* 15(1), 39-56.

선우진 (2019). 한국, 일본, 미국의 초등학교 수학교과서에서 범자연수 곱셈의 연산 성질을 지도하는 방안에 대한 비교·분석. <초등수학교육>, 22(3), 181-203.

Sun, W. J. (2019). A comparative analysis of instructional methods on the properties of multiplication in elementary mathematics textbooks of Korea, Japan, and the US. *Education of primary school mathematics,* 22(3), 181-203

윤희태 (2002). 초등학생들의 기초계산 오류에 대한 분석적 연구. 경인교육대학교 석사학위논문.

Yoon, H. T. (2002). *A Study on Calculation Errors Made by Elementary Students - With the Focus on the Multiplication and Division* -. Master's thesis, Kyeongin national university of education, Kyeong-gi, Korea

장혜원 (2017). 교과서 분석에 기초한 연산법칙의 지도 방안 탐색. <한국초등수학교육학회지>, 21(1), 1-22.

Chang, H. W. (2017). Research on teaching method for the properties of arithmetic based on analysis of elementary school mathematics textbooks. *Journal of elementary mathematics education in Korea,* 21(1), 1-22.

정연준 (2011). 자연수 곱셈 계산법의 역사적 발달 과정에 대한 고찰. <학교수학>, 13(2), 267-286.

Joung, Y. J. (2011). An investigation on the historical developments of the algorithms for multiplication of natural numbers. *School Mathematics*, 13(2), 267-286.

정연준・조영미 (2012). 자연수 곱셈 계산 지도에 관한 초등학교 수학교과서 비교 분석 연구 -우리나라, 미국, 싱가포르, 일본 교과서를 중심으로-. <수학교육학연구>, 22(2), 293-309.

Joung, Y. J. & Cho, Y. M. (2012). Comparative research on teaching and learning of agorithm of natural number multiplication - Focused on the elementary textbooks of South Korea, USA, Singapore, and Japan -. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 22(2), 293-309.

정연준・최은아 (2020). 초등학교 두 자리 수 이상의 곱셈 지도 내용 분석. <학교수학>, 22(3), 739-762.

Joung, Y. J. & Choi, E. A. (2020). Research on teaching method for the algorithms for multiplication of natural numbers based on analysis of Korean elementary school mathematics textbooks. *School Mathematics*, 22(3), 739-762.

정영옥 (2013). 초등수학에서 자연수 곱셈 지도- 곱셈의 도입과 곱셈 구구를 중심으로. <학교수학>, 15(4), 889-920.

Chong, Y. O. (2013). Teaching multiplication with whole numbers in elementary school mathematics -Focusing on the introduction of the concept of multiplication and multiplication facts-. *School Mathematics*, 15(4), 889-920.

최경아 · 이정은 (2017). 올림이 있는 자연수 곱셈 알고리즘의 올림하는 수 표기에 관한 고찰, <한국초등수학교육학회지>, 21(1) 195-214.

Choi, K. A. & Lee, J. E. (2017). A study on marking the carrying number of multiplication algorithm with regrouping. *Journal of elementary mathematics education in Korea,* 21(1) 195-214.

藤井齊亮 外 (2020a). 新しい算數 2-下. 東京: 東京書籍.

藤井齊亮 外 (2020b). 新しい算數 3-上. 東京: 東京書籍.

藤井齊亮 外 (2020c). 新しい算數 3-下. 東京: 東京書籍.

藤井齊亮 外 (2020d). 新しい算數 4-上. 東京: 東京書籍.

藤井齊亮 外 (2020e). 新しい算數 4-下. 東京: 東京書籍.

Drake, J., & Barlow, A. (2008). Assessing Students′ Levels of Understanding ultiplication through Problem Writings. T*eaching Children Mathematics,* 14(5) 272-277.

Flowers, J., Krebs, A., & Rubenstein, R. (2006). Problems to Deepen Teachers′ Mathematical Understanding: Examples in Multiplication. *Teaching Children Mathematics,* 12(9), 478-484.

Howe, R., & Lippman, G. (2017a). *Envision math 2.0 (3 volume 1).* U.S.: Pearson.

Howe, R., & Lippman, G. (2017b). *Envision math 2.0 (3 volume 2).* U.S.: Pearson.

Howe, R., & Lippman, G. (2017c). *Envision math 2.0 (4 volume 1).* U.S.: Pearson.

Howe, R., & Lippman, G. (2017d). *Envision math 2.0 (5 volume 1).* U.S.: Pearson.

Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2014). *My pals are here! Maths 2A (3rd ed).* Singapore: Marshall Cavendish Education.

Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2015). *My pals are here! Maths 3A (3rd ed).* Singapore: Marshall Cavendish Education.

Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2016). *My pals are here! Maths 4A (3rd ed).* Singapore: Marshall Cavendish Education.

Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2017). *My pals are here! Maths 5A (3rd ed).* Singapore: Marshall Cavendish Education.

Otto, A. D., Caldwell, J. H., Lubinski, C. A. & Hancock, S. W. (2011). *Developing essential understanding of multiplication and division for teaching mathematics in grades 3-5.* Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Comparative Research on Teaching Method for Multiplication by 2-Digit Numbers in Elementary Mathematics Textbooks of Korea, Japan, Singapore, and USA

Choi, Eunah
Woosuk University
E-mail : eunachoi@woosuk.ac.kr

Joung, Younjoon†
Korea Institute of Curriculum snd Evaluation
E-mail : yjjoung03@kice.re.kr

In this study, we investigated how multiplication by 2-digit numbers had been taught in elementary mathematics textbooks of Korea, Japan, Singapore, and USA. As a result of analysis, we found as follows. Korean textbooks do not teach the multiplication by 10 and the multiplication by power of 10, but Japanese, Singapore, and US textbooks explicitly teach related content. In the '×tens' teaching, Japanese and American textbooks teach formally the law of association of multiplication applied in the process of calculating the partial product of multiplication. The standard multiplication algorithm generally followed a standard method of recording partial product result according to the law of distribution, but the differences were confirmed in the multiplication model, the teaching method of the law of distribution, and the notation of the last digit '0'. Based upon these results, we suggested some proposals for improving the multiplication teaching.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D10, 97U20
* Key words : multiplication by 2-digit numbers, standard multiplication algorithm, the principles of calculation, the properties of arithmetic, textbook analysis
† corresponding author