

# 양자비트와 양자기반 탐색 알고리즘의 연산자

## Quantum-bit and Operators of Quantum-inspired Search Algorithm



손 수 덕\*  
Shon, Sudeok



이 돈 우\*  
Lee, Donwoo



하 준 홍\*\*  
Ha, Junhong



이 승 재\*  
Lee, Seungjae

### 1. 서언

최근 양자역학의 특성을 이용한 새로운 정보처리와 계산 기계의 출현은 1940년대 이후 대부분의 범용 컴퓨터에서 적용된 폰 노이만 구조(Von Neumann architecture)에 대해서 새로운 패러다임을 제시하고 있다. 고전적 컴퓨터 구조에서 다루어지는 것과는 다른 계산구조에서 다양한 문제를 풀어가고 있으며, 미래형 슈퍼컴퓨터의 개발에 대한 도전은 곧 현실로 나타날 전망이다.

이와 같은 양자전산(Quantum computing) 또는 양자컴퓨터 분야는 양자역학계의 특징을 이용하여 지금까지와는 다른 방식의 정보처리방식과 이와 관련된 정보과학기술 전체를 지칭하는 것으로서, 양자의 특성인 불확정성(Uncertainty), 중첩(Super-position), 양자 얽힘(Entanglement), 간섭(Interference) 등을 이

용한 불확정적 데이터의 처리 기술이 연구된다.<sup>1)</sup> 양자 컴퓨터는 1980년대 R. Feynman에 의해 처음 제안되었으며<sup>2)</sup>, 그는 결정론적 데이터 대신 불확정성을 지닌 데이터를 양자역학적 현상을 동작 원리로 한 연산 기계 장치를 생각하게 되었다. 지금까지의 이진 비트(Binary bit)가 가지는 결정론적인 데이터에서 불확정적인 확률론적 양자비트(Quantum-bit)의 개념으로 획기적인 변화가 시도된 것이다. 0과 1의 모호한 구분에 의한 정보 저장은 차수의 증가에 따른 복잡도가 지수함수적으로 커지는 점에 대해 새로운 연산개념을 고안할 수 있게 되었으며, 이것을 통해 기존의 복잡도 높은 문제에 대한 가능성을 발견하였다.<sup>3,4)</sup>

대중들에게 많이 알려진 양자 연산의 알고리즘으로는 1994년 Shor의 소인수분해 알고리즘(Shor's algorithm)과 1996년 Grover의 양자 데이터 검색 알고리즘(Quantum search algorithm)이 있다. 이후에도 많은 연구자에 의해 다양한 시도와 이론의 융합이 이루어졌고, 양자와 진화 전산(Evolutionary Computation)과의 접목은 1990년 후반에 나타나기 시작했다.<sup>5)</sup> 진화 전산에 특화된 양자 게이트(Quantum gate)나 양

\* 한국기술교육대학교 건축공학과  
Dept. of Architectural Eng., Koreatech Univ.

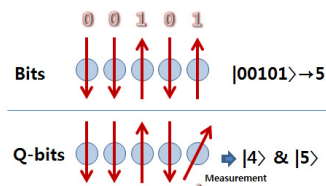
\*\* 한국기술교육대학교 교양학부  
School of Liberal Arts, Koreatech Univ.

자 회로(Quantum circuit)의 설계와 더불어 기존의 결정론적 데이터에서의 새로운 알고리즘 개발로의 연구가 진행되었으며, 양자 기반 연산의 새로운 방향이 제시되었다. 이 중에서 기존의 탐색알고리즘(Search algorithm)의 구조를 유지하면서도 양자비트를 이용해 불확정적 데이터를 표현하려고 시도하였고, 연산자(Operator)도 이 특성이 반영되어 고안되었다.

이 과정들은 주로 데이터의 표현에 있어서 중첩과 얽힘 등에 대한 특성을 양자비트와 게이트 연산자를 통해 표현하려 한 것이고, 이들의 구조를 이해함으로써 새로운 연산자나 알고리즘 구조를 제안할 수 있었다. 결론적으로 탐색알고리즘의 주요 구조와 동작 원리들은 게이트를 통과한 불확정적 양자비트의 상태와 관찰(Measurement)된 결과로부터 오는 관계를 잘 이용하는 것으로부터 시작하며, 양자비트와 양자 게이트의 동작 원리를 파악하는 것이 매우 중요하다. 따라서, 본 고에서는 양자비트의 표현 방법과 게이트 연산자, 그리고 탐색알고리즘의 간단한 구조를 설명하여 양자기반 탐색알고리즘의 이해를 돕고자 한다.

## 2. 양자비트(Q-bit)

고전적인 비트와 양자비트의 가장 큰 차이는 비결정론적인 데이터의 표현이다. <Fig. 1>의 이진 비트는 전압에 따라 결정된 값으로 나타나지만, 양자비트는 스핀의 상태에 따라 달라진다. 이 표현은 정보가 공존한 상태를 모형화하는 것이고, 식(1)과 같이 복소수의 형태로 구체화할 수 있다. 즉 양자비트는 0과 1의 확률로 나타나고, 양자 상태의 관찰확률의 합은 항상 1이 된다.

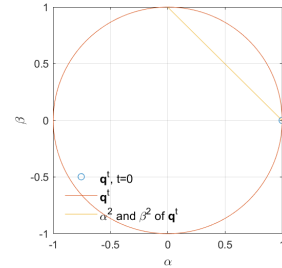


<Fig. 1> Binary-bits vs. Q-bits

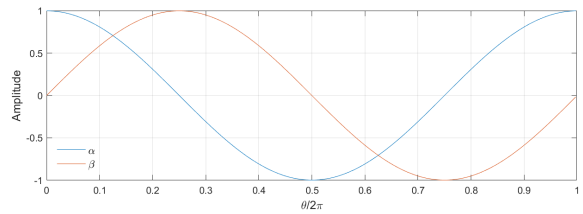
$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (1)$$

양자비트는 블로흐 구(Bloch sphere)로 시각화할

수 있지만, 여기서는 단순하게 설명하기 위해  $\alpha$ - $\beta$  평면에서 다루도록 한다. 즉, 양자비트  $q^t$ 는 <Fig. 2(a)>와 같이 원 궤도 위의 한 값으로 나타나며, 양자비트의 두 성분은 위상에 따라 <Fig. 2(b)>와 같이 변한다.



(a)  $q^t$  and its component



(b)  $\alpha$  and  $\beta$

<Fig. 2> Q-bit in accordance with  $\alpha$  and  $\beta$

만약 정보를  $m$ 개의 양자비트로 표현하면 식(2)와 같이 나타낼 수 있고,  $n$ 차원의 시스템은 식(3)과 같다.

$$q_j^t = \begin{bmatrix} \alpha_{j1}^t & \alpha_{j2}^t & \dots & \alpha_{jm}^t \\ \beta_{j1}^t & \beta_{j2}^t & \dots & \beta_{jm}^t \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$Q(t) = \{q_1^t, q_2^t, \dots, q_n^t\} \quad (3)$$

양자비트의 상태는 측정된 결과에 대해서 식(4)와 같은 확률로 나타난다. 이것은 양자비트의 상태를 확률로 나타내는 방법이다.

$$P(\mathbf{b}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=1}^m p_{ji} \right) \quad (4)$$

여기서,  $p_{ji}$ 는 다음과 같고,  $b_i$ 는 측정값이다.

$$p_{ji} = \begin{cases} |\alpha_{ji}|^2, & \text{if } b_i = 0 \\ |\beta_{ji}|^2, & \text{if } b_i = 1 \end{cases} \quad (5)$$

이 정보는 양자비트가 측정을 바탕으로 정보를 측정할 수 있다는 것을 의미한다. 또한 양자비트의 상태 변화에 대한 수렴성을 예측할 수 있다. 이때의 수렴성

은 양자비트의 관찰확률로써 식(6)과 같고, 시스템의 평균 수렴도는 식(7)과 같다.

$$C_b(\mathbf{q}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |1 - 2|\alpha_i|^2| \quad (6)$$

$$C_b^t(Q(t)) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C_b(\mathbf{q}_j) \quad (7)$$

위 식들이 알려주는 것은 양자비트를 통해서 측정된 결과가 바뀔 확률적 정보이다.

이상의 식들을 이용해서 물리적인 시스템의 양자비트 상태를 정의할 수 있고, 식(8)과 같이 0과 1에 대한 같은 확률 성분으로 초기화할 수 있다.

$$|\psi_{q^0}\rangle = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{\sqrt{2^m}} |\mathbf{x}_k\rangle \quad (8)$$

양자의 초기치는 관측의 범위에 영향을 주며, 식(8)의 경우 각 양자비트에 대한 관측영역이 가장 넓은 상태이다.

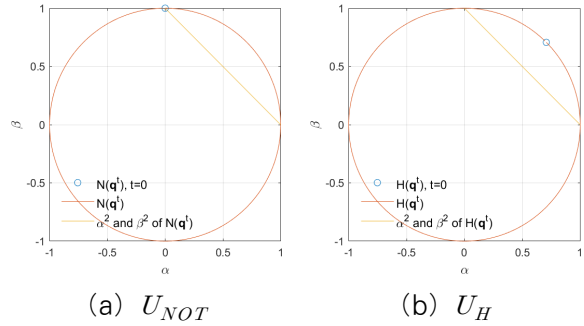
### 3. 양자 게이트(Q-gate) 연산자

양자 게이트는 양자비트의 상태를 조작할 수 있다. 게이트의 특성은 가역적(Reversible)이며, 유니타리 연산자(unitary operator)로 표현할 수 있다. 많이 등장하는 게이트는 파울리(Pauli)-X, -Y, -Z 게이트, 아다마르 게이트(Hadamard gate) 등이 있고, 양자진화 기법에서는 양자회전(Quantum rotation) 게이트가 주로 적용된다. 쉽게 이해할 수 있는 몇 가지 게이트를 설명하면, 비트를 반전시키는 게이트인 NOT 게이트를 들 수 있다. 이 게이트는 식(9)와 같고, 파울리 -X 게이트라고도 불리며, 양자 상태의 반전을 도모할 수 있다.

$$U_{NOT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

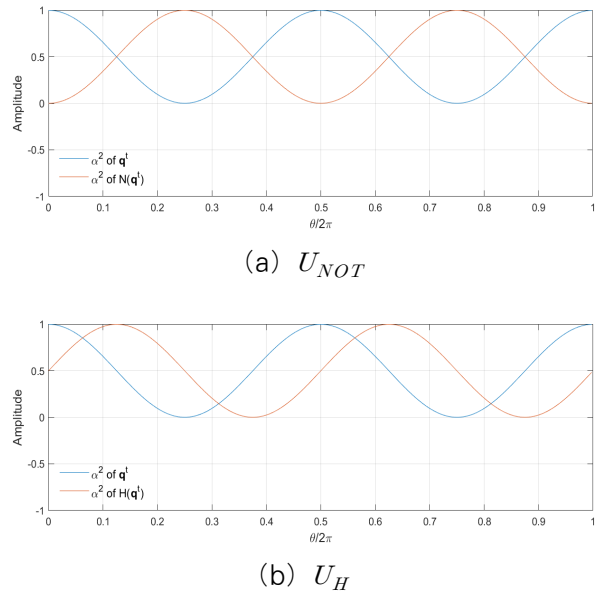
아다마르 게이트는 식(10)과 같고, 양자비트를 통한 데이터의 관측범위를 넓혀준다.

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (10)$$



〈Fig. 3〉 Gate operators

이 두 게이트의 차이를 알아보기 위해서 〈Fig. 2(a)〉의  $q^t$ 를 살펴보자. 이 양자비트는 NOT 게이트를 통해서 〈Fig. 3(a)〉와 같이 상태가 변하며, 이것은 〈Fig. 4(a)〉에서 보는 바와 같이 양자비트의 관측 확률이 반전된다. 그러나 아다마르 게이트의 경우는 〈Fig. 3(b)〉 〈Fig. 4(b)〉와 같이 시작점에서 양자비트의 0과 1에 대한 관측 확률이 같아진다.

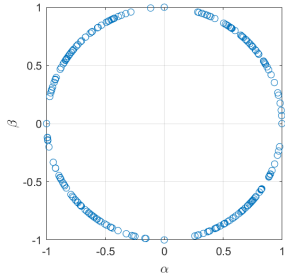


〈Fig. 4〉 Probability of  $q^t$  via  $U_{NOT}$  and  $U_H$

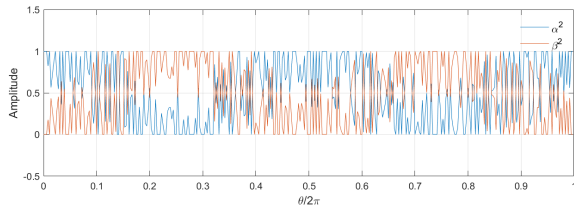
양자비트  $U$ 의 기저(basis)는  $U^\dagger U = U U^\dagger$ 를 만족하는 상태이며, 여기서  $U^\dagger$ 는  $U$ 의 에르미트 행렬(Hermitian)의 수반행렬(adjoint)이다. 이러한 게이트 중에서 양자진화 알고리즘<sup>3),(6),(7)</sup>은 식(11)의 양자 회전(Quantum rotation) 게이트를 적용한다. 이 게이트는 양자비트의 정규화 조건을 만족하는 연산자이다. 〈Fig. 5〉는 〈Fig. 2〉의 상태에 임의의 회전량에 대한

게이트를 통과한 양자의 상태를 나타낸 것이다.

$$U_R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (11)$$



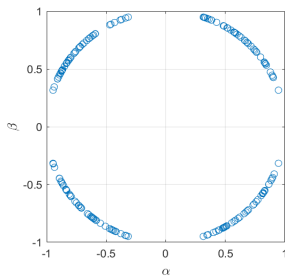
(a) Component of  $q^t$



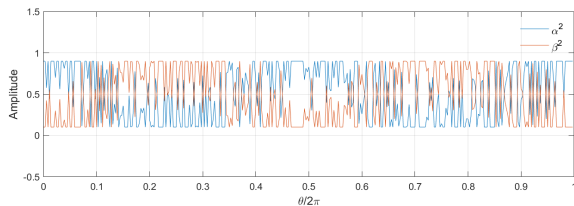
(b)  $|\alpha|^2$  and  $|\beta|^2$

〈Fig. 5〉 Rotated Q-bit (Random)

탐색의 가능성을 높이기 위해 고안된  $H_\epsilon$  게이트는 회전 게이트의 확장된 연산자로서 양자비트가 일정한 상태를 유지하도록 제한한 경우이다.



(a) Component of  $q^t$



(b)  $|\alpha|^2$  and  $|\beta|^2$

〈Fig. 6〉  $H_\epsilon$  gate

회전 게이트의 경우 회전량을 결정하여야 하며, 다양한 기준들이 제시된 바 있다. 이들의 기준은 〈Table

1〉과 같이 결정되며, 양자 간섭을 일으키는 방법에는 여러 가지가 있다.

〈Table 1〉 Look-up table for  $U_R(\theta)$

$x_i$	$b_i$	$f(x) < f(b)$	$\Delta\theta$	$\text{sign}(\alpha_i\beta_i)$			
				$\alpha_i\beta_i > 0$	$\alpha_i\beta_i < 0$	$\alpha_i = 0$	$\beta_i = 0$
0	0	T	$\theta_1$	0	0	0	0
0	0	F	$\theta_2$	0	0	0	0
0	1	T	$\theta_3$	1	-1	0	$\pm 1$
0	1	F	$\theta_4$	0	0	0	0
1	0	T	$\theta_5$	1	-1	$\pm 1$	0
1	0	F	$\theta_6$	0	0	0	0
1	1	T	$\theta_7$	0	0	0	0
1	1	F	$\theta_8$	0	0	0	0

cf)  $\theta = \text{sign}(\alpha_i\beta_i)\Delta\theta$ ;  $\theta = \{00P0N000\}^T$ ;

$P(=N) = 0.001\pi \sim 0.05\pi$

이상과 같이 게이트 연산자들은 알고리즘의 개선을 위해 다양하게 제안되고 있다.

## 4. 양자-기반 탐색알고리즘

양자-기반 탐색알고리즘은 1장에서 언급한 바와 같이 기존의 탐색구조에서 양자비트에 대한 정보의 표현이 중요하며, 게이트 연산자를 이용하여 양자비트의 상태를 제어한다. 이 과정에 대해서 기존의 회음 탐색알고리즘과 같은 구조의 양자-기반 회음 탐색알고리즘의 가상 코드(Virtual code)를 〈Fig. 7〉에 나타내었다.

Initialization : QHM, QHMS, HMC, PAR,  $q_j^t$

while (Not termination)

```

for j = 1:dim do
  if (r<HMC) Memory consideration
     $q_j^t$  from QHM
    if (r<PAR & j ∈ QBW) Pitch adjusting
       $q_j^{t+1} = U_{rand} q_j^t$  for HS,  $x[i, j] = x[i, j] \pm r * bw$ 
    end if
  else (random selection)
    neutral  $q_j^{t+1}$  for HS,  $x[i, j] = x$  ( $\in X$ )
  end if
end do
  
```

**Measurement of set  $q_j^{t+1}$**

**Quantum gate operation  $q_j^{t+1} = U_{rotation} q_j^t$**

Update QHM memory and fitness **Update HM**

end while

〈Fig. 7〉 Quantum-inspired Harmony Search

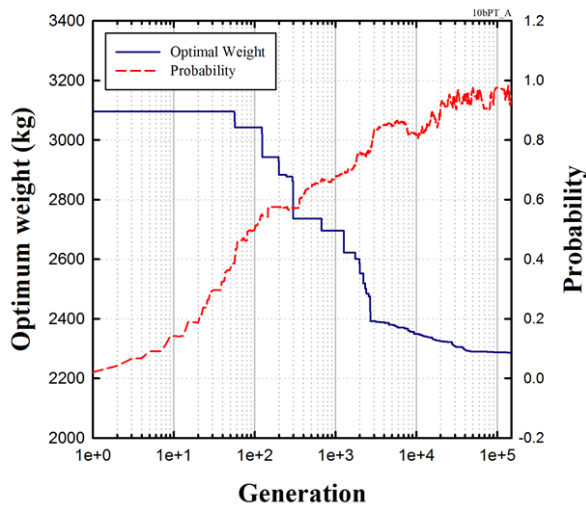
그림에서 보는 바와 같이 전체 탐색알고리즘의 구조는 유사하지만, 데이터의 중첩된 표현과 양자비트의 상태를 조절하는 연산자는 다르게 적용된다. 특히 양자 데이터(Pool)의 측정과 업데이트는 탐색 과정에 따라 달라진다.

### 5. 최적화 문제의 적용

탐색을 위한 최적화 문제는 구조물 중량의 경우 식 (12)와 같이 표현한다.<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & F(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \rho_i L_i A_i \quad (12) \\ \text{subject to} \quad & G_j(\mathbf{A}) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, q) \end{aligned}$$

위 식에서  $\rho_i, A_i, L_i$  는 각각  $i$ 번째 부재의 단위 중량, 단면적, 길이이고,  $G_j$ 는 제약함수이다. 이 문제의 제약함수는 주로 응력(Stress)이나 변위(Displacement)로 나타나며, 이 값들은 일정한 범위 아래에 있어야 하는 조건이다. 결과적으로 최적해는 계산 반복 횟수가 증가하면 일정한 값으로 수렴한다.



〈Fig. 8〉 Quantum-inspired Harmony Search

이 문제의 탐색 과정은 〈Fig. 8〉과 같이 최솟값에 수렴하는 것과 양자비트의 수렴성이 높아지는 것으로 관찰된다. 양자비트의 확률이 증가함으로 수렴도가 높아지는 것을 그림에서 살펴볼 수 있다. 또한 탐색 방법들에서 탐색의 균형을 위한 연산자는 국소 최적점

에 수렴하는 문제를 해소하기 위해 탐사(Exploration)와 개척(Exploitation) 간의 균형을 맞추어 전역 탐색(Global search)을 수행하지만, 양자비트의 회전 게이트에 대한 측정값의 조절은 자연스럽게 이 균형을 조절해 준다. 이러한 양자비트의 상태를 조절하는 것은 양자비트의 정보가 가지는 특징이다.

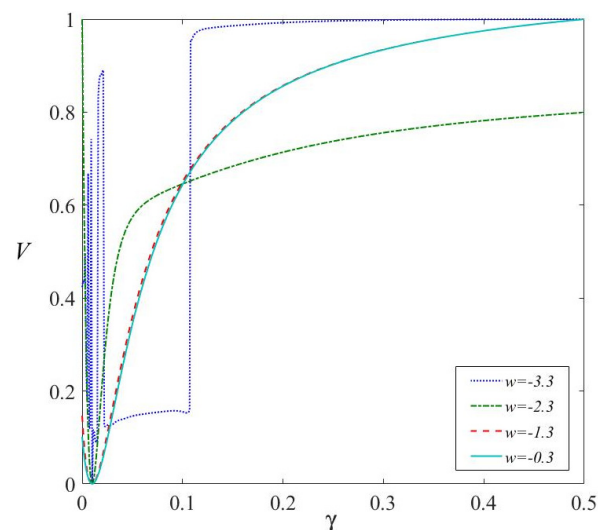
시스템 동정화(Identification) 문제도 함께 살펴보자. 파라미터들의 추정 집합  $R^{2N+1}$ 의 원소를  $v = (\mathbf{h}, \mathbf{w}, \gamma)$ 라 하면, 시스템의 관측값이  $z(x, t)$ 로 주어졌을 경우, 미지 파라미터의 추정을 위한 목적함수는 다음과 같이 나타난다.<sup>8)</sup>

$$V(v) = \int_0^T \int_0^\pi \{y - z\}^2 dx dt \quad (13)$$

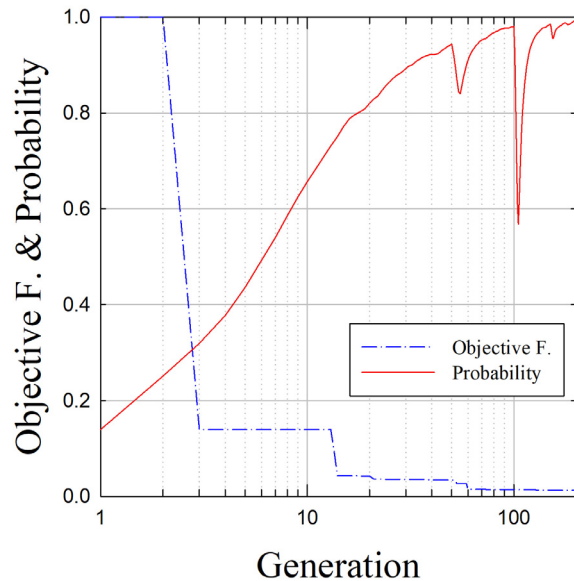
여기서  $y$ 는 추정 시스템의 해이다. 따라서 파라미터 추정 문제는 곧 다음을 만족하는 파라미터들의 최적 원소  $v^*$ 를 구하는 것이다.

$$V(v^*) = \arg \min_{v \in R^{2N+1}} V(v) \quad (14)$$

이러한 파라미터 추정의 문제를 시스템에 적용한 경우, 목적함수는 〈Fig. 9〉와 같은 국소 최적점의 발생을 예상할 수 있다. 이들의 문제에 대해서도 〈Fig. 10〉과 같은 결과를 얻을 수 있다.



〈Fig. 9〉 The graph of  $V := V(\gamma) / \max V(\gamma)$



〈Fig. 10〉 Results of arch system

〈Fig. 10〉의 탐색 과정도 양자비트의 수렴성은 목적함수의 수렴에 따라 높아진다. 문제의 차수가 높지 않은 까닭에 탐색은 매우 빠르게 진행되지만, 최적해에도달하는 데는 적절히 반복 해석해야만 한다.

## 6. 맺음말

본 고에서는 양자비트가 주는 특성과 불확정성에 대한 탐색알고리즘의 접근을 소개하고 양자 게이트가 주는 영향을 주제로 다루었다. 양자의 특성을 이용한 불확정적 데이터 저장과 이를 이용한 연산 방법들은 고전적인 컴퓨팅과는 매우 다른 접근임에는 분명하다. 이것은 거시적으로 확인할 수 없는 양자의 세계를 다루는 과정이 매우 매력적이어서 미래의 발전에 대한 환상만으로 포장될 수도 있지만, 기존의 문제에 대한 새로운 해결 방향을 제시하기에 충분하다.

### 감사의 글

이 논문은 2020년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(NRF-2020R1I1A1A01065032)

## References

1. Shon, S. & Lee, S., Structural optimization of planar truss using quantum-inspired evolution algorithm, *Journal of Korea Institute of Safety Inspection*, Vol.18(4), pp.1-9., 2014
2. Feynman R. (1986), Quantum Mechanical computers. *Foundations of Physics*, 16, 507-531.
3. Han K. & Kim J., "Quantum-inspired evolutionary algorithm for a class of combinatorial optimization", *IEEE Transaction on Evolutionary Computation*, Vol.6, No.6, pp.580-593, 2002.
4. Shon, S. & Lee, S., "Development of quantum-inspired harmony search algorithm for minimum weight design of truss structures", *Journal of the Architectural Institute of Korea, Structure & Construction*, Vol.31(10), pp.39-46, 2015
5. Moore M. and Narayanan A. (1995), Quantum-inspired Computing. Technical report, Department of Computer Science, University of Exeter, UK.
6. Zhang, G., "Quantum-inspired evolutionary algorithms: a survey and empirical study, *J. Heuristics*, Vol.17, pp.303-351, 2011.
7. Han, K. & Kim, J., "Quantum-inspired evolution algorithms with a new termination criterion, He gate, and two-phase scheme," *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, Vol.8(2), pp.156-169, 2004
8. Shon, S. & Ha, J., "Parameter estimation of shallow arch using quantum-inspired evolution algorithm," *Journal of Korean Association for Spatial Structures*, Vol.20(1), pp.95-102, 2020