

# 기준 좌표계에 따른 탄성체의 일반화 파랑 하중 및 응답에 대한 연구

허경욱<sup>†</sup>·최윤락  
울산대학교 조선해양공학부

## Investigation on the Generalized Hydrodynamic Force and Response of a Flexible Body at Different Reference Coordinate System

Kyeonguk Heo<sup>†</sup>·Yoon-Rak Choi  
School of Naval Architecture and Ocean Engineering, University of Ulsan, Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

In this paper, the generalized hydrodynamic force and response of a flexible body are calculated at different reference coordinate systems. We generalize the equation of motion for a flexible body by using the conservation of momentum (Mei et al., 2005). To obtain the equations in the generalized mode, two different reference coordinates are adopted. The first is the body-fixed coordinate system by a rigid body motion. The other is the inertial coordinate system which has been adopted for the analysis. Using the perturbation scheme in the weakly-nonlinear assumption, the equations of motion are expanded up to second-order quantities and several second-order forces are obtained. Numerical tests are conducted for the flexible barge model in head waves and the vertical bending is only considered in the hydroelastic responses. The results show that the linear response does not have the difference between the two formulations. On the other hand, second-order quantities have different values for which the rigid body motion is relatively large. However, the total summation of second-order quantities has not shown a large difference at each reference coordinate system.

**Keywords** : Hydroelasticity(유탄성), Perturbation method(섭동법), Generalized mode method(일반화 모드법), Equation of motion(운동 방정식), Body-fixed coordinate system(물체 고정 좌표계)

## 1. 서론

유탄성 해석은 조선해양공학에서 오랫동안 다루어온 주제로 다양한 분야에서 연구가 진행되고 있다. 몇 가지 예를 들면, mega float의 하중 및 변위, 빙하에서의 파랑 전파, 대형 선박의 파랑 중 스프링잉(springing) 및 휘핑(whipping) 등에 유탄성 해석이 적용되고 있다.

유탄성 해석은 실험, 이론, 실험적 접근 등 여러 방법을 이용한다. 그 중에서 수치적 방법은 약비선형 가정(weakly non-linear assumption)을 이용하는 선박 이론이 주로 사용되었다. 선박에 대한 유탄성 응답의 초기 연구로 2차원 스트립 이론(strip theory)을 기반으로 한 Bishop and Price (1979)의 연구가 있다. 그들은 모드 중첩법을 이용하여 각각의 운동 응답을

하나의 모드 함수로 표현하고 이에 대한 전체 변위를 유한요소법(finite element method)을 이용하여 계산하였다.

90년대 이후 컴퓨터의 발전으로 3차원 패널법(panel method)을 이용한 해석프로그램들이 많이 개발되었다. Newman (1994)은 탄성체에 대한 선형의 파랑 하중 및 응답을 3차원 파랑 그린 함수 기반의 패널법을 이용하여 계산하였다. 그는 유탄성 응답을 가질 때 일반화 방향 여현을 정의하고, 유체 동역학 계수(hydrodynamic coefficient) 및 파랑 하중(wave exciting force)에 대한 경계 조건 문제를 수립하였다. 또한, 일반화 모드의 여러 활용법에 대해 소개하고 동일한 문제에서 다양한 모드 형상을 이용하여 같은 결과를 얻을 수 있음을 보였다.

한편, 탄성체에 대한 유체 정역학 힘의 복원력 계수(hydrostatic restoring stiffness)는 정확히 결정되지 못하고 여러 연구자에 의

해 계속 개선되어 왔다 (Price & Wu, 1985; Newman, 1994; Riggs, 1996; Huang & Riggs, 2000; Malenica et al., 2003).

Malenica et al. (2009)은 근래 제시되었던 유체 정역학 복원력 계수 중에서 몇 가지 식들을 비교 검토하고, 압력 변화 항이 없는 대신 내부 응력(stress)이 포함된 Huang and Riggs (2000)의 식을 제외한 나머지 식들이 동일하다는 것을 보인 바 있다. 최근, Malenica and Bigot (2020)의 연구에서는 강체 운동에 의한 물체 고정 좌표계를 기준 좌표계로 하여 탄성체에 대한 일반화된 유체 정역학 복원력 계수를 새로 유도하였다. 그들은 Lagrange 동역학을 이용하여 물체 고정 좌표계에 대한 운동 방정식을 세우고, 새로 유도한 복원력 계수를 이용하여 탄성체에 대한 선형 운동 응답을 계산하였다.

본 연구에서는 유탄성 응답을 가지는 탄성체에 대하여 파랑 하중 및 응답을 계산하였다. 섭동법을 이용하여 선형 응답뿐 아니라 2차항에 대한 여러 하중도 함께 구하였다. 특히, 탄성체의 2차항 파랑 하중을 구한 Choi (2004)의 연구에서 나아가 물체 관성력 및 중력 복원력을 포함하는 운동 방정식을 적용하였다. 더불어, 유탄성 응답에 대한 기준 좌표계를 관성 좌표계와 물체 고정 좌표계로 달리하여 각각의 식을 구하였고 얻어진 식과 계산 결과를 함께 비교하였다.

## 2. 수 식

### 2.1 좌표계 및 변위

관성 좌표계와 물체 고정 좌표계에서 위치 벡터는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\vec{X} = \vec{\xi} + [D]^T \vec{x} \quad (1)$$

여기서,  $\vec{\xi}$ : 병진 운동 벡터,  $\vec{X}$ : 관성 좌표계에서의 위치 벡터,  $\vec{x}$ : 물체 고정 좌표계에서의 위치 벡터이다.

식 (1)에서 정의된  $[D]^T$ 는 회전 연산자로 다음과 같이 정의된다.

$$[D]^T = [I] + (\vec{\alpha} \times) + [H] \quad (2)$$

여기서,  $[I]$ 는 identity matrix,  $(\vec{\alpha} \times)$ 는 회전 운동 연산자  $[H]$ 는 오일러 각(Euler angle)의 2차항 성분이다.

식 (1)에 유탄성 응답이 추가된다면(Fig. 1 참조), 전체 변위는 다음과 같이 쓸 수 있다 (Shabana, 1989).

$$\vec{X} = \vec{\xi} + [D]^T \left( \vec{x} + \sum_{j=1}^{N_f} \vec{S}^j \xi_f^j \right) = \vec{\xi} + [D]^T \{ \vec{x} + \vec{X}_f \} \quad (3)$$

여기서,  $\vec{S}^j$ 는 모드 형상 벡터,  $\vec{X}_f$ 는 유탄성 응답에 의한 변위 벡터,  $\xi_f^j$ 는 유탄성 응답의 모드 크기,  $N_f$ 는 유탄성 응답의 모드 개수

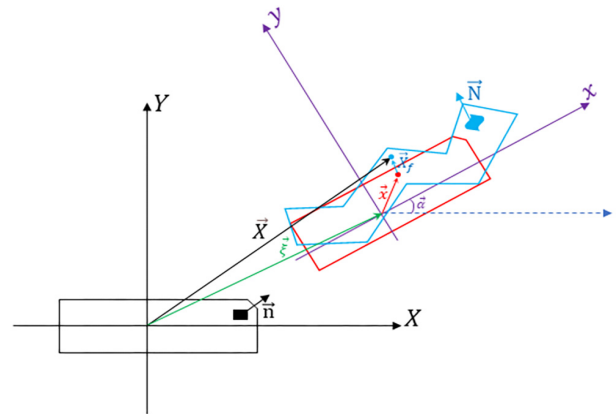


Fig. 1 Coordinate system(X,Y: inertial coordinate & x,y: body-fixed coordinate) and displacement vector

### 2.2 운동 방정식

물체의 운동 응답을 얻기 위하여 우선 운동 방정식을 수립해야 한다. 물체가 강체 운동(병진, 회전)만을 가질 때와 유탄성 응답을 포함할 때 각각의 식을 다음과 같이 유도하였다.

#### 2.2.1 강체 운동(병진 + 회전 운동)

운동량 보존 법칙을 이용하여, 병진 운동에 대한 운동 방정식을 아래와 같이 표현할 수 있다 (Mei et al., 2005).

$$\iiint_{V_B} \vec{X} dm = \iint_{S_B} p \vec{N} dS - mg \hat{e}_3 \quad (4)$$

식 (4)에서 좌변은 물체 관성력에 해당하며, 우변의 첫째 항은 부유체에 가해지는 유체 정역학 및 동역학 힘을 나타낸다. 여기서,  $p$ 는 유체 압력이며 이상 유체 가정에서 Bernoulli 방정식을 통하여 구할 수 있다. 세 번째 항은 중력에 의한 항으로  $m$ 은 물체의 질량,  $g$ 는 중력 가속도이다.

수치 해석을 위하여 약비선형 가정에서 섭동법(perturbation scheme)을 채택하고, 무차원화된 파기울기( $kA = \epsilon$ )를 기준으로 변수들을 분류한다. 예를 들면 다음과 같다.

$$p \cong p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \epsilon^2 p^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (5)$$

$$\vec{X} \cong \vec{X}^{(0)} + \epsilon \vec{X}^{(1)} + \epsilon^2 \vec{X}^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (6)$$

섭동법으로 전개된 물리량들을 식 (4)에 대입하고, Taylor 급수 전개를 이용하여 평균 위치의 값으로 근사한다. 근사된 값들을 1차항과 2차항의 값으로 모으면, 각각의 운동 방정식은 다음과 같이 정리된다.

#### 1차항(선형) 병진 운동

$$\iiint_{V_B} (\xi^{(1)} + \alpha^{(1)} \times x) dm = \iint_{S_B} (p^{(1)} \vec{N}^{(0)} + p^{(0)} \vec{N}^{(1)}) dS \quad (7)$$

2차항 병진 운동

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_B} (\overset{\leftrightarrow}{\xi} + \overset{\leftrightarrow}{\alpha} \times \vec{x} + [\ddot{H}]\{\vec{x}\}) dm \quad (8) \\ &= \iint_{S_B} (p^{(2)} \vec{N}^{(0)} + p^{(1)} \vec{N}^{(1)} + p^{(0)} \vec{N}^{(2)}) dS \\ &+ \int_{WZ} (p^{(0)} \vec{N}^{(0)} + p^{(1)} \vec{N}^{(0)}) dl \end{aligned}$$

다음으로, 회전 운동은 회전 기준점에 따라 다르게 표현 가능하며 일반적으로 물체 고정 좌표계의 원점에 대한 회전 운동 방정식을 채택한다. 이는 식 (4)에 회전 운동을 외적하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_B} (\vec{X} - \vec{\xi}) \times \ddot{X} dm \quad (9) \\ &= \iint_{S_B} p(\vec{X} - \vec{\xi}) \times \vec{N} dS - mg(\vec{X} - \vec{\xi}) \times \hat{e}_3 \end{aligned}$$

회전 운동의 식 (9)는 고전 동역학에서 사용되는 관성 모멘트를 이용하여서도 표현 가능하며, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & -[D]^T \vec{x}_g \times mg \hat{e}_3 + \vec{M}_0 \quad (10) \\ &= \frac{d}{dt} ([D]^T [I_n] \cdot \vec{\omega}) + [D]^T \vec{x}_g \times m \vec{\xi} \end{aligned}$$

여기서,  $\vec{\omega}$ 는 각속도,  $\vec{M}_0$ 는 물체 고정 좌표계의 원점에 대한 외력 모멘트,  $[I_n]$ 은 질량 관성 모멘트이다. 식 (9)와 (10)은 수학적 변환을 통해 동일하게 될 수 있다.

병진 운동과 같이 섭동법을 이용하여 2차항까지 근사한 뒤 같은 차수끼리 묶으면, 물체 고정 좌표계의 원점에 대한 회전 운동 방정식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

1차항(선형) 회전 운동

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_B} (\vec{x}) \times (\overset{\leftrightarrow}{\xi} + \overset{\leftrightarrow}{\alpha} \times \vec{x}) dm \quad (11) \\ &= \iint_{S_B} p^{(1)} (\vec{x} \times \vec{N}^{(0)}) + p^{(0)} (\vec{x} \times \vec{N}^{(1)}) + p^{(0)} (\overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(1)} \times \vec{x}) \times \\ & \vec{N}^{(0)} ds - mg(\overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(1)} \times \vec{x}) \times \hat{e}_3 \end{aligned}$$

2차항 회전 운동

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_B} (\vec{x}) \times (\overset{\leftrightarrow}{\xi} + \overset{\leftrightarrow}{\alpha} \times \vec{x} + [\ddot{H}]\{\vec{x}\}) dm \\ &+ \iiint_{V_B} (\overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(1)} \times \vec{x}) \times (\overset{\leftrightarrow}{\xi} + \overset{\leftrightarrow}{\alpha} \times \vec{x}) dm \\ &= \iint_{S_B} p^{(0)} (\overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(2)} \times \vec{x} + [H]\{\vec{x}\}) \times \vec{N}^{(0)} dS \\ &+ \iint_{S_B} p^{(0)} (\overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(1)} \times \vec{x}) \times \vec{N}^{(1)} + p^{(0)} (\vec{x} \times \vec{N}^{(2)}) dS \\ &+ \iint_{S_B} p^{(1)} (\overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(1)} \times \vec{x}) \times \vec{N}^{(0)} + p^{(1)} (\vec{x} \times \vec{N}^{(1)}) + p^{(2)} (\vec{x} \times \vec{N}^{(0)}) dS \\ &+ \int_{WZ} (p^{(0)} + p^{(1)}) (\vec{x} \times \vec{N}^{(0)}) dl - mg(\overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(2)} \times \vec{x}_g + [H]\{\vec{x}\}) \times \hat{e}_3 \quad (12) \end{aligned}$$

식 (11)과 (12)의 마지막 항은 중력에 의한 복원력으로 병진 운동과 달리 회전 운동에서는 중력이 복원력으로 작용하는 것을 알 수 있다.

식 (7)와 (11), 식 (8)과 (12)는 강체 운동에 대한 방정식으로 함께 쓸 수 있으며, 물체에 가해지는 유체력을 운동 응답의 가속도, 속도, 변위에 비례하는 항으로 분류하여 묶으면 널리 사용되는 질량-감쇠-스프링의 식으로 표현할 수 있다. 다만, 2차항에서는 1차항의 곱으로 이루어진 추가 항들이 외력으로 존재하게 된다.

### 2.2.2 유탄성 응답(관성 좌표계 기준)

탄성체의 운동 응답을 구하기 위해서 일반화 모드법을 채택한다. 일반화 모드법에서 강체 운동과 유탄성 응답은 각각의 운동 응답들이 하나의 모드가 되며, 일반적으로 처음 몇 가지 모드를 강체 운동으로 두고 뒤의 모드들을 유탄성 응답으로 해석한다. 각 모드에 대한 운동 방정식을 구하기 위해서는 우선 식 (4)에 모드 형상을 양변에 내적해준다.

$$\iiint_{V_B} \delta S^j \cdot \ddot{X} dm = \iint_{S_B} p \delta S^j \cdot \vec{N} ds - mg \delta S^j \cdot \hat{e}_3 \quad (13)$$

이때 모드 형상은 Taylor 급수를 이용해 근사가 가능하며, 2차항까지는 다음의 형태로 표현할 수 있다 (Choi, 2004). 여기서, 근사를 수행하는 기준 좌표계는 관성 좌표계가 된다.

$$\begin{aligned} \delta S^j &\approx \vec{S}^j + \vec{X}^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] + \vec{X}^{(2)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \quad (14) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_l \sum_k X_l^{(1)} X_k^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{S}^j \end{aligned}$$

위에 정의된 일반화 모드법의 식 (13)은 강체 운동에 대한 식으로 표현 가능하다. 이를 위해서는 운동 응답을 나타내는 다음의 6가지 모드 형상을 이용하면 된다.

$$\begin{aligned} \vec{S}^1 &= \hat{e}_1, \quad \vec{S}^2 = \hat{e}_2, \quad \vec{S}^3 = \hat{e}_3, \quad (15) \\ \vec{S}^4 &= \hat{e}_1 \times \vec{x}, \quad \vec{S}^5 = \hat{e}_2 \times \vec{x}, \quad \vec{S}^6 = \hat{e}_3 \times \vec{x} \end{aligned}$$

식 (15)를 식 (13)에 대입하면, 병진 운동과 관성 좌표계의 원점에 대해 회전 운동을 기술하는 운동 방정식으로 변환하게 됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_B} \ddot{X} dm = \iint_{S_B} p \vec{N} dS - mg \hat{e}_3 \\ & \iiint_{V_B} (\vec{X} \times \ddot{X}) dm \quad (16) \\ &= \iint_{S_B} p (\vec{X} \times \vec{N}) dS - mg (\vec{X} \times \hat{e}_3) \end{aligned}$$

앞서와 같이 섭동법을 이용하여 식 (14)를 식 (13)에 넣고, 1차항과 2차항으로 정리하여 탄성체에 대한 일반화된 운동 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

1차항(선형) 일반화 모드(관성 좌표계 기준)

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_B} (\vec{S}^j) \left( \overset{\leftrightarrow}{\xi}^{(1)} + \overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(1)} \times \vec{x} + \sum_{j=7}^N \ddot{\xi}_j^{(1)} \vec{S}^j \right) dm \quad (17) \\ &= \iiint_{S_B} p^{(0)} (\vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(1)} + \vec{X}^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{ \vec{N}^{(0)} \}) \\ &+ \iiint_{S_B} p^{(1)} (\vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(0)}) dS - mg (\vec{X}^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{ \hat{e}_3 \}) \end{aligned}$$

선형 운동 방정식에서 좌변에 표현된 선형 물체 관성력은 일반화된 질량 매트릭스로 표현할 수 있다 (Newman, 1977).

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_B} (\vec{S}^j) \left( \overset{\leftrightarrow}{\xi}^{(1)} + \overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(1)} \times \vec{x} + \sum_{j=7}^N \ddot{\xi}_j^{(1)} \vec{S}^j \right) dm \quad (18) \\ &= \sum_{i=1}^N [M_{ij}] \ddot{\xi}_i^{(1)} \end{aligned}$$

여기서,  $[M_{ij}] = \iiint_{V_B} (\vec{S}^j \cdot \vec{S}^i) dm$

또한, 식의 우변에 있는 유체 정역학 힘과 중력 복원력을 변위에 대해 방향 미분을 취하면 일반화 모드에서의 복원력 계수를 얻을 수 있다 (Malenica et al., 2009).

$$\begin{aligned} & -\rho g \iiint_{S_B} z (\vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(1)} + \vec{X}^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{ \vec{N}^{(0)} \}) dS \quad (19) \\ & -\rho g \iiint_{S_B} X_3^{(1)} (\vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(0)}) dS - mg (\vec{X}^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{ \hat{e}_3 \}) \\ &= \sum_{i=1}^N [c_{ij}] \xi_i^{(1)} \end{aligned}$$

여기서,  $[c_{ij}] = \rho g \iiint_{S_B} S_3^j \vec{S}^i \vec{n} dS$

$$\begin{aligned} & + \rho g \iiint_{S_B} z \left\{ (\nabla \cdot \vec{S}^j) \vec{S}^i + \vec{S}^j \cdot [\nabla \vec{S}^i] \right\} \cdot \vec{n} dS \\ & + g \iiint_{V_B} (\vec{S}^j \cdot \nabla S_3^i) dm \end{aligned}$$

나머지 유체 동역학 힘에서 파랑에 의한 외력을 제외하면 일반화된 부가 질량 및 동유체 감쇠 계수를 계산할 수 있으므로 (Newman, 1994), 일반화 모드법에서도 강체 운동과 같이 N개의 운동 응답을 가지는 질량-감쇠-스프링의 식을 구성하게 된다.

2차항 일반화 모드 (관성 좌표계 기준)

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_B} (\vec{S}^j) \cdot \left( \overset{\leftrightarrow}{\xi}^{(2)} + \overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(2)} \times \vec{x} + [\ddot{H}] \{x\} + \sum_{j=7}^N \ddot{\xi}_j^{(2)} \vec{S}^j \right) dm \quad (20) \\ & + \iiint_{V_B} (\vec{S}^j) \cdot \left( \overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(1)} \times \sum_{j=7}^N \ddot{\xi}_j^{(1)} \vec{S}^j + \overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(1)} \times \sum_{j=7}^N \ddot{\xi}_j^{(1)} \vec{S}^j \right) dm \\ & + \iiint_{V_B} (\vec{X}^{(1)}) [\nabla \vec{S}^j] \left( \overset{\leftrightarrow}{\xi}^{(1)} + \overset{\leftrightarrow}{\alpha}^{(1)} \times \vec{x} + \sum_{j=7}^N \ddot{\xi}_j^{(1)} \vec{S}^j \right) dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \iiint_{S_B} p^{(0)} (\vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(2)} + \vec{X}^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{ \vec{N}^{(1)} \}) dS \\ &+ \iiint_{S_B} p^{(0)} \left( \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 X_k^{(1)} X_l^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k} (\vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(0)}) \right) dS \\ &+ \iiint_{S_B} p^{(1)} (\vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(1)} + \vec{X}^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{ \vec{N}^{(0)} \}) dS \\ &+ \iiint_{S_B} p^{(2)} (\vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(0)}) dS + \int_{WL} (p^{(0)} + p^{(1)}) (\vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(0)}) dl \\ &- mg \left( \vec{X}^{(2)} \cdot [\nabla \vec{S}_g^j] + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 X_k^{(1)} X_l^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k} (\vec{S}_g^j) \right) \hat{e}_3 \end{aligned}$$

2차항도 1차항과 동일하게 질량-감쇠-스프링의 식으로 표현이 가능하나, 강체 조건에서와 같이 1차항의 곱으로 이루어진 항들이 남게 된다. 최종적으로 1차항 및 2차항 일반화된 운동 방정식을 정리하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{j=1}^N [M_{ij} + a_{ij}^{(k)}] \ddot{\xi}_j^{(k)} + [b_{ij}^{(k)}] \dot{\xi}_j^{(k)} + [c_{ij}] \xi_j^{(k)} = F_{ex,i}^{(k)} \quad (21)$$

여기서,  $a_{ij}, b_{ij}$  는 부가 질량 및 동유체 감쇠 계수이며, 2차항에서 1차항의 곱으로 이루어진 항들은 모두 외력으로 계산된다.  $k = 1, 2$  이다.

일반화된 운동 방정식 우변에 있는 파랑 하중을 구하기 위해서는 모드 형상(mode shape)과 물체 법선 벡터(normal vector)의 내적을 구해야 한다. 탄성체에서는 물체 표면의 변형을 고려한 법선 벡터를 기술하여야 하며, 연속체 역학(continuum mechanics)의 표현식을 이용해 법선 벡터의 변화를 관성 좌표계를 기준으로 다음과 같이 쓸 수 있다 (Huang & Riggs, 2000; Choi, 2004).

$$\vec{N}^{(0)} = [I] \{ \vec{n} \} \quad (22.1)$$

$$\vec{N}^{(1)} = \{ (\nabla \cdot \vec{X}^{(1)}) - [\nabla \vec{X}^{(1)}] \} \{ \vec{n} \} \quad (22.2)$$

$$\begin{aligned} \vec{N}^{(2)} = & \{ (\nabla \cdot \vec{X}^{(2)}) - [\nabla \vec{X}^{(2)}] \} \{ \vec{n} \} \quad (22.3) \\ & + \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{X}^{(1)}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{X}^{(1)}}{\partial z}, \frac{\partial \vec{X}^{(1)}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{X}^{(1)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{X}^{(1)}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{X}^{(1)}}{\partial y} \end{array} \right] \{ \vec{n} \} \end{aligned}$$

### 2.2.3 유탄성 응답(물체 고정 좌표계 기준)

앞 절에서는 근사를 수행하는 기준 좌표계가 관성 좌표계였다. 최근 Malenica and Bigot (2020)은 강체 운동에 의한 물체 고정 좌표계를 기준 좌표계로 이용하여 선형의 유탄성 응답을 구하는 운동 방정식이 더 나은 결과를 준다고 보고하였다. 여기서는 식 (4)에 대하여 식 (2)에서 정의된 회전 매트릭스의 역을 양변에 취하여 강체 운동에 의한 물체 고정 좌표계의 운동 방정식을 다음과 같이 세울 수 있다.

$$\iiint_{V_B} [D] \overset{\leftrightarrow}{X} dm = \iiint_{S_B} p \vec{n} dS - mg [D] \{ \hat{e}_3 \} \quad (23)$$

또한, 앞서와 마찬가지로 모드 형상을 내적하여 유탄성 응답에 대한 탄성체의 운동 방정식을 세울 수 있으며 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_B} (\delta \vec{S}^j \cdot [D]\{\vec{X}\}) dm \\ &= \iint_{S_B} p(\delta \vec{S}^j \cdot \vec{n}) ds - mg \delta \vec{S}^j \cdot [D]\{\hat{e}_3\} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서, 내적을 취하는 모드 형상은 Taylor 급수 전개하여 근사하게 되지만 기준 좌표계는 강체 운동에 의한 물체 고정 좌표계가 된다. 따라서 근사를 하는 변위는 유탄성 응답에 의한 값만을 가지게 되며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \vec{S}^j &\approx \vec{S}^j + \vec{X}_f^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] + \vec{X}_f^{(2)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_l \sum_k X_{fl}^{(1)} X_{fk}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{S}^j \end{aligned} \quad (25)$$

여기서,  $\vec{X}_f^{(k)} = \sum_{j=1}^{N_f} \vec{S}^j \xi_f^{(k)}$

최종적으로 식 (25)를 식 (24)에 대입한 뒤, 항별로 묶어보면 물체 고정 좌표계에 대한 1차항 및 2차항 일반화된 운동 방정식을 얻을 수 있다.

1차항(선형) 일반화 모드(물체 고정 좌표계 기준)

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_B} (\vec{S}^j) \cdot \left( \xi^{(1)} + \alpha^{(1)} \times \vec{x} + \sum_{j=7}^N \xi_j^{(1)} \vec{S}^j \right) dm \\ &= \iint_{S_B} (p^{(1)}) (\vec{S}^j \cdot \vec{n}^{(0)}) dS \\ &+ \iint_{S_B} (p^{(0)}) (\vec{S}^j \cdot \vec{n}^{(1)} + \vec{X}_f^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{\vec{n}^{(0)}\}) dS \\ &+ mg (\alpha^{(1)} \times \vec{S}_g^j) \cdot (\hat{e}_3) - mg (\vec{X}_f^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}_g^j] \{\hat{e}_3\}) \end{aligned} \quad (26)$$

2차항 일반화 모드(물체 고정 좌표계 기준)

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_B} (\vec{S}^j) \cdot \left( -\alpha^{(1)} \times \left( \xi^{(1)} + \alpha^{(1)} \times \vec{x} + \sum_{j=7}^N \xi_j^{(1)} \vec{S}^j \right) \right) dm \\ &+ \iiint_{V_B} (\vec{S}^j) \cdot \left( \xi^{(2)} + \alpha^{(2)} \times \vec{x} + [\ddot{H}]\{x\} + \sum_{j=7}^N \xi_j^{(2)} \vec{S}^j \right) dm \\ &+ \iiint_{V_B} (\vec{S}^j) \cdot \left( \alpha^{(1)} \times \sum_{j=7}^N \xi_j^{(1)} \vec{S}^j + \alpha^{(1)} \times \sum_{j=7}^N \xi_j^{(1)} \vec{S}^j \right. \\ &\quad \left. + \alpha^{(1)} \times \sum_{j=7}^N \xi_j^{(1)} \vec{S}^j \right) dm \\ &+ \iiint_{V_B} (\vec{X}_f^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j]) \left( \xi^{(1)} + \alpha^{(1)} \times \vec{x} + \sum_{j=7}^N \xi_j^{(1)} \vec{S}^j \right) dm \\ &= \int (p^{(0)} + p^{(1)}) (\vec{S}^j \cdot \vec{n}^{(0)}) dl \\ &+ \iint_{S_B} p^{(0)} \left( \vec{S}^j \cdot \vec{n}^{(2)} + \vec{X}_f^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{\vec{n}^{(1)}\} \right. \\ &\quad \left. + \vec{X}_f^{(2)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{\vec{n}^{(0)}\} \right) dS \\ &+ \iint_{S_B} p^{(0)} \left( \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 X_{fl}^{(1)} X_{fk}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k} (\vec{S}^j \cdot \vec{n}^{(0)}) \right) dS \\ &+ \iint_{S_B} p^{(1)} (\vec{S}^j \cdot \vec{n}^{(1)} + \vec{X}_f^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{\vec{n}^{(0)}\}) dS \\ &+ \iint_{S_B} p^{(2)} (\vec{S}^j \cdot \vec{n}^{(0)}) dS \\ &- mg (\vec{S}_g^j \cdot \{ [H]^T \hat{e}_3 - \alpha^{(2)} \times \hat{e}_3 \} - \vec{X}_f^{(2)} \cdot [\nabla \vec{S}_g^j] \{\hat{e}_3\}) \\ &+ mg (\vec{X}_f^{(2)} \cdot [\nabla \vec{S}_g^j] \{ \alpha^{(1)} \times \hat{e}_3 \}) \\ &- mg \left( \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 X_{fl}^{(1)} X_{fk}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k} (\vec{S}_g^j \cdot \hat{e}_3) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

마지막으로 우변의 파랑 하중을 구하기 위해 필요한 법선 벡터의 변화도 물체 고정 좌표계를 기준으로 얻어지며, 변위는 유탄성 응답에 의한 값만을 포함하게 된다. 따라서 물체 고정 좌표계를 기준으로 하는 법선 벡터의 변화는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\vec{n}^{(0)} = [I] \{\vec{n}\} \quad (28.1)$$

$$\vec{n}^{(1)} = \{ (\nabla \cdot \vec{X}_f^{(1)}) - [\nabla \vec{X}_f^{(1)}] \} \{\vec{n}\} \quad (28.2)$$

$$\vec{n}^{(2)} = \{ (\nabla \cdot \vec{X}_f^{(2)}) - [\nabla \vec{X}_f^{(2)}] \} \{\vec{n}\} \quad (28.3)$$

$$+ \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \vec{X}_f^{(1)}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{X}_f^{(1)}}{\partial z}, \frac{\partial \vec{X}_f^{(1)}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{X}_f^{(1)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{X}_f^{(1)}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{X}_f^{(1)}}{\partial y} \end{array} \right] \{\vec{n}\}$$

관성 좌표계에서의 법선 벡터( $\vec{N}$ )를 위의 식과 비교해보면,

Table 1 Comparison of linear physical variables at different reference coordinate system

Physical variable	Inertial coordinate	Body-fixed coordinate
Inertial force	$\iiint_{V_B} (\vec{S}^j) \cdot \left( \xi^{(1)} + \alpha^{(1)} \times \vec{x} + \sum_{j=7}^N \xi_j^{(1)} \vec{S}^j \right) dm$	
Hydrodynamic force	$\iint_{S_B} (p^{(1)}) (\vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(0)}) dS = \iint_{S_B} (p^{(1)}) (\vec{S}^j \cdot \vec{n}^{(0)}) dS$	
Hydrostatic force	$\iint_{S_B} (p^{(0)}) \left( \vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(1)} + \vec{X}_f^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{\vec{N}^{(0)}\} \right) dS$	$\iint_{S_B} (p^{(0)}) \left( \vec{S}^j \cdot \vec{n}^{(1)} + \vec{X}_f^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}^j] \{\vec{n}^{(0)}\} \right) dS$
Gravity restoring force	$-mg (\vec{X}_f^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}_g^j] \{\hat{e}_3\})$	$mg (\alpha^{(1)} \times \vec{S}_g^j) \cdot (\hat{e}_3) - mg (\vec{X}_f^{(1)} \cdot [\nabla \vec{S}_g^j] \{\hat{e}_3\})$

물체 고정 좌표계에서의 법선 벡터( $\vec{n}$ )에 추가적으로 강제 운동에 의한 성분을 포함하면 된다는 것을 알 수 있다.

관성 좌표계와 물체 고정 좌표계를 기준으로 하는 선형 운동 방정식의 각 성분을 Table 1에 나타내었다. Table 1에서 보듯이 선형 문제에서 물체 관성력과 유체 동역학 힘은 두 방법에서 동일하지만, 유체 정역학 힘과 중력 복원력이 다르게 나타남을 볼 수 있다. 두 힘은 일반적으로 합쳐져서 유체 정역학 복원력 계수(hydrostatic restoring stiffness)를 구성하므로, Malenica and Bigot (2020)에서도 볼 수 있듯 선형 문제에서 유탄성 응답을 해석하기 위한 기준 좌표계가 달라지면 유체 복원력 계수가 다르게 표현됨을 알 수 있다.

### 3. 수치 해석

유도된 식들에 대한 계산 결과를 비교하기 위하여, 간단한 테스트를 수행하였다. 수치 해석을 위한 모델로는 유연한 barge 모델을 사용하였다. 이 모델은 유탄성 해석 코드의 검증을 위해 만들어졌으며, 프랑스 Toulon의 BGO-First에서 실험이 수행되었다 (Malenica et al., 2003; Remy et al., 2006). Fig. 2에 나타나 있듯, barge 모델은 작은 사이즈의 floater(길이: 0.19 m, 폭 0.6 m, 깊이 0.25 m, 흘수 0.12 m) 12개로 구성되어 있다. 선두의 floater를 제외하고 모두 동일한 형상을 가지고 있으며, 각각의 floater는 충돌을 방지하기 위해 작은 간격(0.015 m)을 두고 상부에 위치한 beam을 통해 연결된다. Floater를 연결하는 beam의 수직 굽힘 감성(flexural rigidity)은 175 N/m<sup>2</sup>이다.

Remy et al. (2006)에서는 다방향의 불규칙파에 대해 실험이 수행되었으며, Fig. 2에 나타난 여러 point들에서 변위 RAO가 광학 센서로 측정되었다. 본 논문에서는 선수파(head wave) 조건만을 다루며, 유탄성 응답은 수직 굽힘(vertical bending)만을 고려하였다. 따라서, 유탄성 응답의 모드 형상은 다음의 형태를 가지게 된다.

$$\vec{S}^j = -\frac{dw^j}{dx}(z - z_N)\hat{e}_1 + w^j\hat{e}_3 \quad (29)$$

여기서,  $w^j$ 은 고유치 해석을 통해 얻는 고유 함수,  $z_N$ 은 종립축이다.

식 (29)의 모드 형상을 얻기 위해 free-free end 조건을 적용한 Euler-Bernoulli beam의 고유 함수를 사용하였다. 이들은 다음과 같다.

$$w^{2j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos\kappa_{2j}(2x/L) + \cosh\kappa_{2j}(2x/L)}{\cos\kappa_{2j} \cosh\kappa_{2j}} \right) \quad (30)$$

$$w^{2j+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin\kappa_{2j+1}(2x/L) + \sinh\kappa_{2j+1}(2x/L)}{\sin\kappa_{2j+1} \sinh\kappa_{2j+1}} \right)$$

여기서,  $K_j$ 는 beam의 고유치 해석을 통해 얻은 고유값이며,  $w^0 = 1$ 이라고 두었다.

고유치 해석을 통하여 얻은 고유 함수의 몇 가지 모드들이 계산에 사용되었으며, 이들에 대한 형상을 Fig. 3에 나타내었다. 여기서, 고유값은 반복 계산을 통해 얻을 수 있으며, 처음 3개는 다음의 값을 갖는다.

$$\kappa_2 = 2.365, \kappa_3 = 3.927, \kappa_4 = 5.498 \quad (31)$$

또한, 모드 형상들은 Euler-Bernoulli beam뿐 아니라 Sturm-Liouville 형 방정식을 만족하는 다른 여러가지 polynomial들이 용하여도 무방하며, 그 결과들은 모두 동일한 것으로 알려져있다 (Newman, 1994).

파랑 하중을 구하기 위해서 일반화 모드법이 적용된 시간 영역 고차경계요소법(higher-order boundary element method)을 사용하였다. 해석을 위한 경계 적분 방정식은 다음과 같다.

$$\alpha(P)\phi(P) + \iint_S \phi(Q) \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_q} dS(Q) \quad (32)$$

$$= \iint_S \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_q} G(P,Q) dS(Q)$$

여기서 P=(x,y,z)는 필드(Field) 포인트, Q=(x',y',z')는 소스(Source) 포인트이고,  $\alpha(P)$ 는 입체각(solid angle)이다.

유탄성 응답을 구하기 앞서 기준 좌표계의 변화에 따른 유체

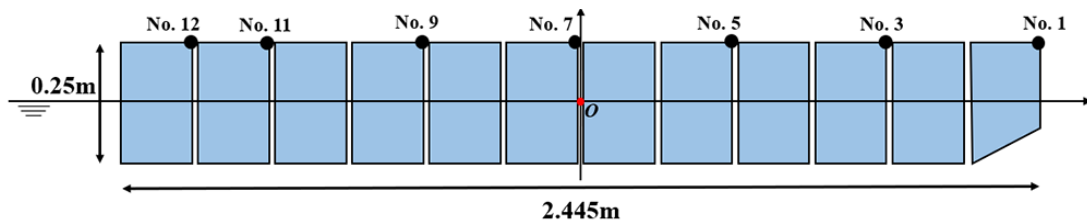


Fig. 2 Barge model for numerical test(length(L): 2.445m, breadth: 0.6m, draft: 0.12m, depth: 0.25m)

Table 2 Comparison of hydrostatic restoring stiffness(C) (3: heave, 5: pitch, 7 & 8 & 9: two & three & four-node vertical bendings)

Restoring stiffness	C(3,3)	C(5,5)	C(7,7)	C(8,8)	C(9,9)
Inertial coor.	14722	7232	3892	3973	3999
Body-fixed coor.	14722	7444	3536	3461	3401

복원력 계수를 계산하였고, 결과는 Table 2에 표시하였다. Table 2에서 보여 주듯이, 수직 굽힘(vertical bending)에 대하여

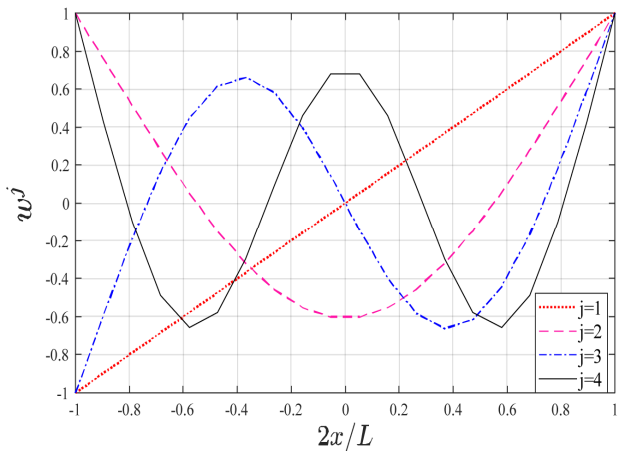


Fig. 3 Mode shape from Euler-Bernoulli beam equation

기준 좌표계를 달리하였을 때 유체 복원력 계수의 차이가 거의 나타나지 않았다. 선형 문제에서 두 기준 좌표계의 차이는 유체 복원력으로 나오기 때문에 식 (17)과 (26)을 이용하여 각각의 기준 좌표계에서 구한 운동 응답의 선형 RAO가 동일한 결과를

주게 된다는 것을 알 수 있다.

수직 변위의 RAO를 각 지점에서 측정한 Remy et al. (2006)의 실험 결과와 Kim et al. (2009)의 시간 영역 수치 해석 결과를 Fig. 4에 나타내었다. 본 연구의 계산 결과는 기준 좌표계에 따른 차이가 매우 작아 하나의 결과만을 도식하였고, 공진 이외에는 전반적으로 다른 결과들과 잘 일치하고 있는 것을 볼 수 있다.

다음으로 기준 좌표계에 따른 일반화된 2차항 하중들의 차이를 살펴보기 위해, 식 (20)과 (27)의 각 성분의 결과값을 구하고 비교해보았다.

Fig. 5에는 전후 동요(surge)에 대한 평균 하중(mean drift force)을 나타내었다. 거의 모든 주파수에서 아주 조금의 차이가 나타나는 것을 볼 수 있다. 선수파에서 전후 동요에 대한 2차항 파랑 하중은 두 기준 좌표계에서 아래 항의 차이만 존재한다.

$$\iint_{S_B} p^{(1)}(\vec{S}^j \cdot \vec{N}^{(1)}) dS \text{ at inertial coor.} \quad (33.1)$$

$$\iint_{S_B} p^{(1)}(\vec{S}^j \cdot \vec{n}^{(1)}) dS \text{ at body-fixed coor.} \quad (33.2)$$

Fig. 5의 오른쪽 그림은 식 (33.1)과 (33.2)를 표시한 것이다. 그림에서 볼 수 있듯이, 물체 고정 좌표계를 기준으로 구한

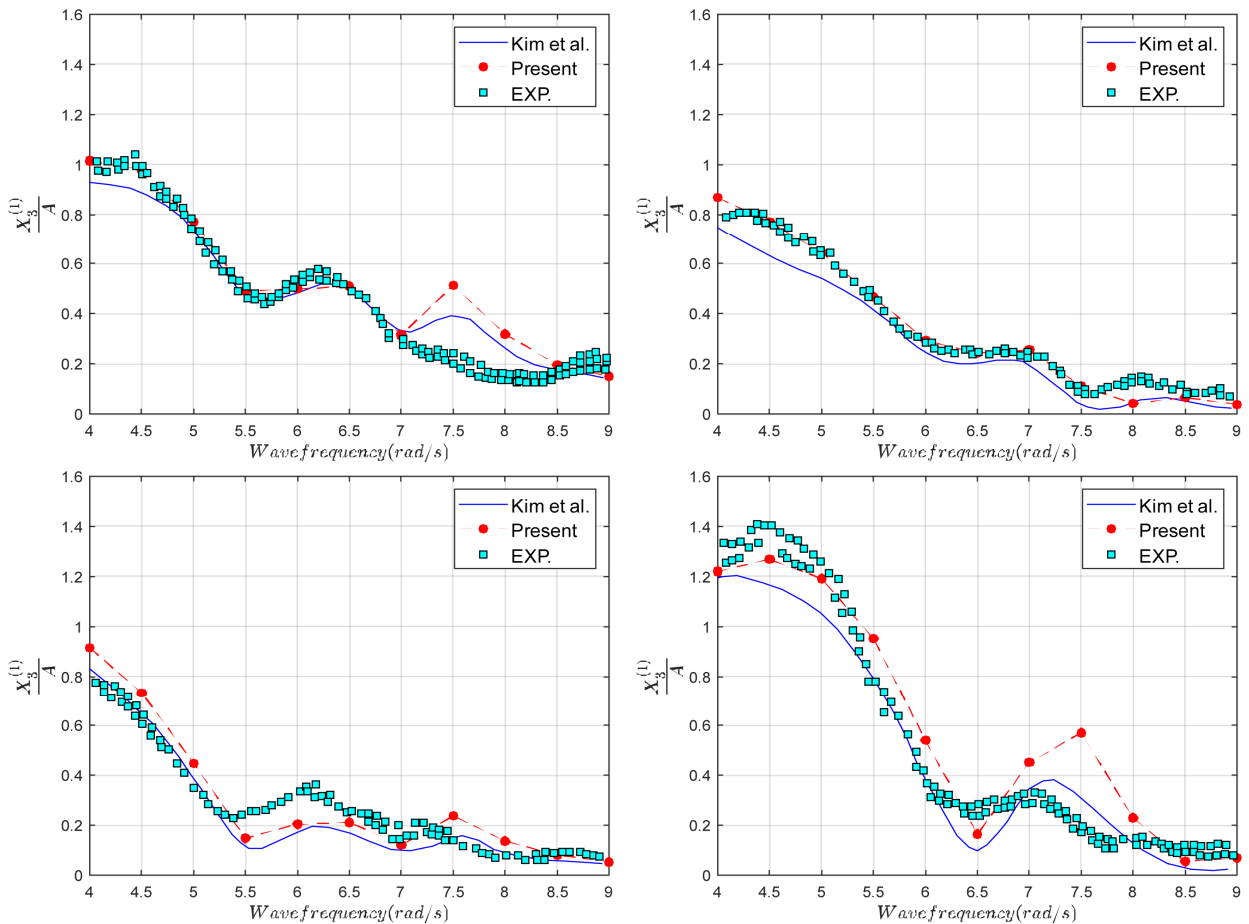


Fig. 4 Vertical displacement response amplitude operator (RAO) at 3,5,9,12 points in head waves. Subscript in y-axis label means (1,2,3) = (x,y,z) direction.

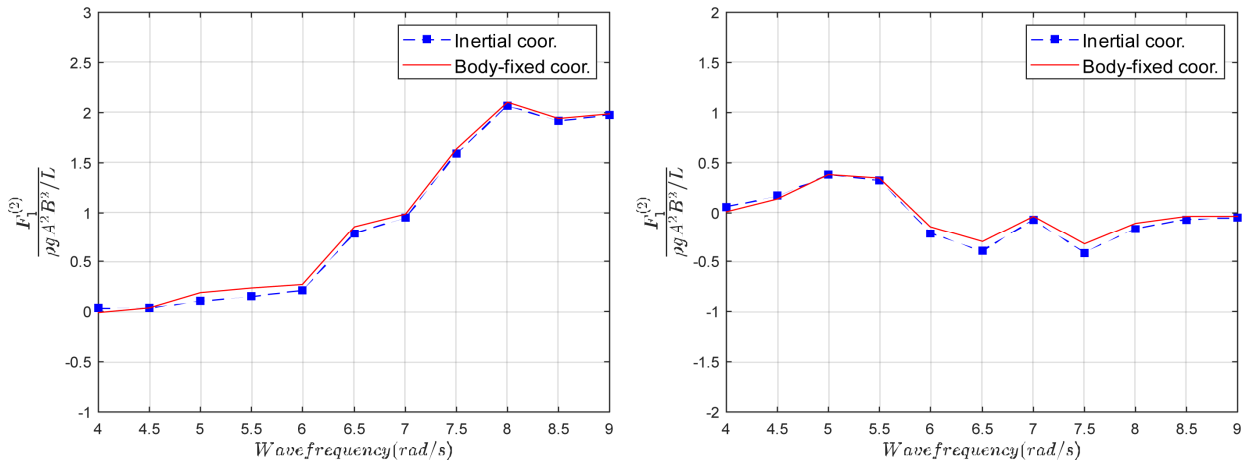


Fig. 5 Surge mean drift force in head waves at inertial & body-fixed coordinate in head waves (Right figure shows different component at each coordinate.). Subscript in y-axis label means mode number of motion response.

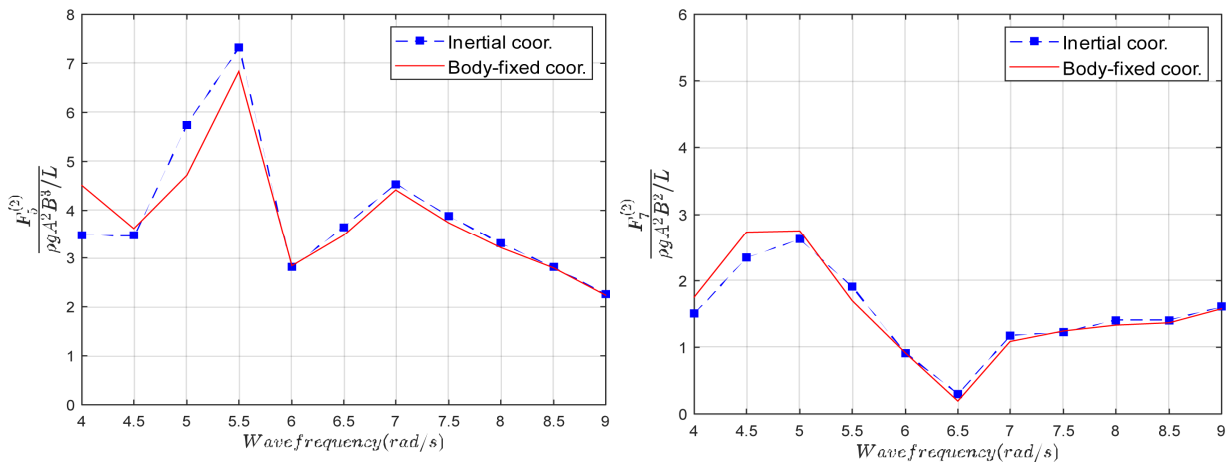


Fig. 6 Second-order time-harmonic pitch & two-node vertical bending hydrodynamic forces at inertial & body-fixed coordinate in head waves

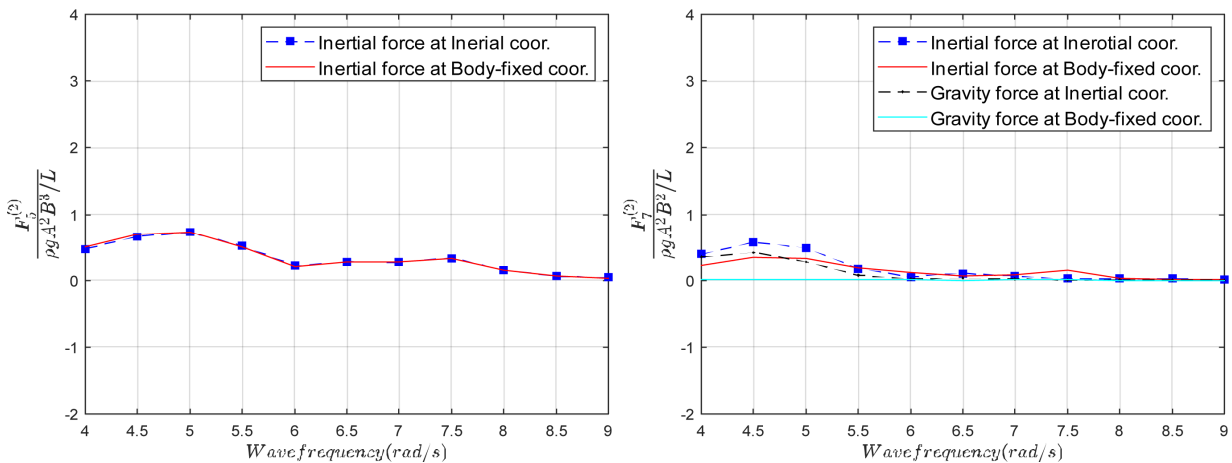


Fig. 7 Second-order time-harmonic pitch & two-node vertical bending inertial & gravity restoring forces in head waves at each reference coordinate

힘이 관성 좌표계로 구하였을 때보다 양의 값을 주므로 물체 고정 좌표계의 2차항 파랑 하중이 대부분 조금 큰 결과를 주게 된다.

Fig. 6은 종동요(pitch) 그리고 2절점 수직굽힘(two-node

vertical bending)에 대한 2차 조화(2nd-harmonic) 파랑 하중(hydrodynamic force)을 나타내었다. 수직 방향에 대한 강체 운동이 큰 영역의 주파수에서 조금의 차이가 나타나는 것을 볼 수 있다.

Fig. 7은 종동요(pitch)와 2절점 수직굽힘(two-node vertical



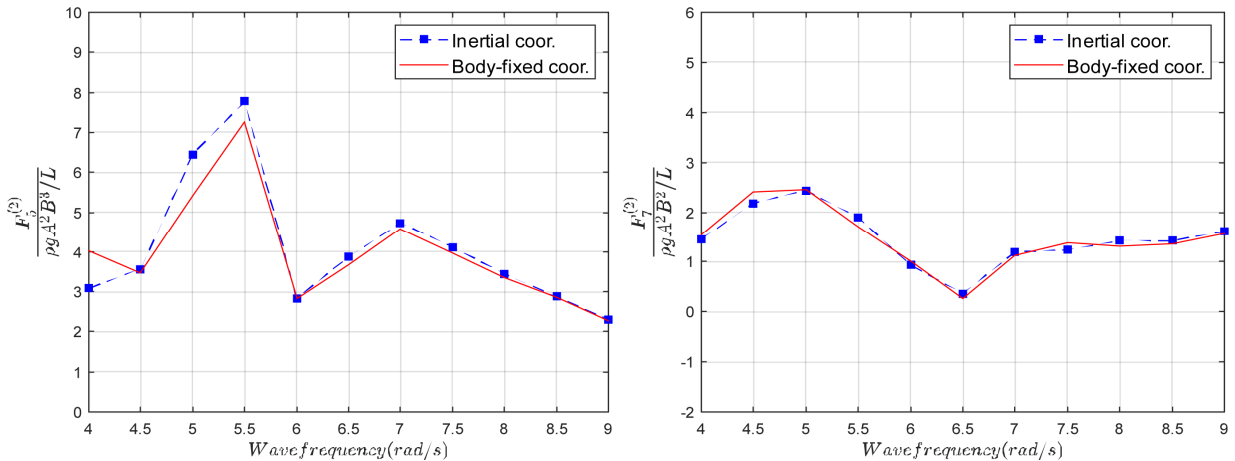


Fig. 8 Total second-order time-harmonic forces for pitch & two-node vertical bending head waves at each reference coordinate

bending)에 대한 2차항 물체 관성력(inertial force)과 중력 복원력(gravity restoring force)을 나타내었다. 여기서, 2차항 힘은 1차항의 곱으로 이루어진 값만을 구하였으며, 종동요에서는 중력 복원력이 두 좌표계에 따라 차이가 없으므로 물체 관성력만 표기하였다. 우선 결과들은 파랑 하중에 비해 크기가 작았고, 2절점 수직 굽힘에서는 물체 관성력이 파랑 하중과 같이 강체 운동이 큰 부분에서 차이가 나타났으며 관성 좌표계에서 존재하던 중력 복원력이 물체 고정 좌표계에서는 나타나지 않게 되었다.

마지막으로 Fig. 8에 식 (20)과 (27)에서 앞서 계산된 힘들인 2차항 파랑 하중, 물체 관성력, 중력 복원력의 합을 도식하였다. 그림을 보면 종동요(pitch)와 2절점 수직 굽힘(two-node vertical bending)에 대한 2차항 성분들의 합은 Fig. 6의 파랑 하중과 비교해보았을 때 두 기준 좌표계에 따른 차이가 작다는 것을 알 수 있다. 이는 파랑 하중에서의 차이가 물체 관성력과 중력 복원력에서 상쇄되었기 때문이다. 얻어진 계산 결과를 통해 전반적으로 2차항 힘들에 대한 기준 좌표계의 영향도 선형 문제에서처럼 매우 작은 것을 알 수 있다.

#### 4. 결론

운동량 보존 법칙을 이용하여 탄성체에 대한 일반화된 운동 방정식을 유도하였다. 운동 방정식은 약비선형 가정에서 섭동법과 Taylor 급수 전개를 이용하여 평균 위치에서 1차항과 2차항의 물리량으로 근사되었다. 탄성체의 유탄성 응답을 구하기 위해 일반화 모드법이 사용되었고, 관성 좌표계와 강체 운동에 의한 물체 고정 좌표계를 기준 좌표계로 하여 유도된 식을 비교하였다. 기준 좌표계가 달라지면 선형 문제에서는 유체 복원력 계수가 다르게 표현됨이 확인되었고, 2차항은 각각의 항들이 다르게 표현되었다.

유연한 barge 모델을 이용하여 유도된 식에 대한 계산을 선수파(head wave)에 한하여 수행하였다. 기준 좌표계에 따라 선형 유체 복원력 계수는 아주 작은 차이만을 보여 주었고, 그 결

과 수직 굽힘에 대한 운동 응답은 거의 동일한 결과를 주었다.

2차항 파랑 하중, 물체 관성력, 중력 복원력에 대해서는 운동 모드에 따라서 강체 운동이 큰 영역에서는 기준 좌표계가 다르면 작은 차이가 나타날 수 있음을 확인하였다. 2차항 힘 중에서 파랑 하중이 가장 큰 차이를 보였으며, 전체 2차항 힘의 합은 서로 상쇄되어 선형과 같이 거의 차이를 보여주지 않게 되었다.

본 연구에서는 선수와 조건을 다루어 유탄성 응답은 수직 굽힘만이 사용되었으나, 횡 굽힘(horizontal vending) 및 비틀(torsion)과 같은 다른 유탄성 응답에 대한 비교 연구가 수행될 수 있을 것이다. 또한, 비선형 외력의 계산에는 유체력에 대해서만 포함되었으며, 다른 비선형성에 대해서도 고려할 필요가 있을 것으로 사료된다.

#### 후기

이 논문은 2021년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2020R11A1A01065411)

#### References

Bishop, R.E.D. & Price, W.G., 1979. *Hydroelasticity of ships*, Cambridge University Press.  
 Choi, Y.-R. 2004. Analysis of wave drift forces acting on a hydroelastic structure, *Proceeding of the Annual Spring Meeting SNAK*, pp.162-167, Tongyeong, Korea, 22-23, April.  
 Huang, L.L. & Riggs, H.R., 2000. The hydrostatic stiffness of flexible floating structures for linear hydroelasticity. *Marine Structures*, 13(2), pp.91-106.  
 Kim, Y., Kim, K.H. & Kim, Y., 2009. Analysis of hydroelasticity of floating shiplike structure in time domain using a fully coupled hybrid BEM-FEM. *Journal of Ship Research*, 53(1), 31-47.  
 Malenica, Š., Molin, B. & Senjanovic, I., 2003. Hydroelastic

- response of a barge to impulsive and non-impulsive wave loads. *Proceeding of 3rd International Conference on Hydroelasticity in Marine Tech.*, Oxford, UK.
- Malenica, Š. et al., 2009. Some aspects of hydrostatic restoring for elastic bodies, *Proceedings of the 24th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Zelenogorsk, Russia, 19–22, April.
- Malenica, Š. & Bigot, F., 2020. On the generalized motions/deformations of the floating bodies, *Proceedings of the 35th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*.
- Mei, C.C., Stiassnie, M. & Yue, D.K.P., 2005. *Theory and applications of ocean surface waves: linear aspects*. World scientific, Singapore.
- Newman, J.N., 1977. *Marine hydrodynamics*, MIT press.
- Newman, J.N., 1994. Wave effects on deformable bodies. *Applied Ocean Research*, 16(1), 47–59.
- Price, W.G. & Wu, Y., 1985. Hydroelasticity of Marine Structures, *Theoretical and applied mechanics*, 311–337.
- Remy, F., Molin, B. & Ledoux, A., 2006. Experimental and numerical study of the wave response of a flexible barge, *Proceeding of 4th International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology*, Wuxi, China.
- Riggs, H.R., 1996. Hydrostatic stiffness of flexible floating structures, *Proceedings of the Workshop on Very Large Floating Structures*, pp.229–234.
- Shabana, A.A., 1989. *Dynamics of multibody systems*, John Wiley & Sons.

