

시추공 공곡 측정의 원리 - 좌표계 변환의 응용

송윤호*

한국지질자원연구원 심지층연구센터

Tutorial on the Principle of Borehole Deviation Survey - An Application of the Coordinate Transforms

Yoonho Song*

Deep Subsurface Research Center, Korea Institute of Geoscience and Mineral Resources

요약: 이 논문에서는 시추공을 이용한 탐사나 자료 해석 시에 중요한 시추공 궤적 정보 획득 방법에 대한 이해를 공유하고자, 깊이에 따른 시추공의 좌표를 구하는 시추공 공곡 측정 문제를 좌표계 변환 공식에 기초하여 수학적으로 정리하였다. 먼저, 철재 케이싱이 설치되어 있지 않은 시추공에 적용 가능한 방법으로서 3성분 가속도계와 3성분 자력계를 함께 이용하여 시추공의 방위각, 편차각 그리고 센서회전각을 구하는 원리를 정리하였다. 다음으로, 철재 케이싱이 설치되어 있을 경우에 자이로스코프에서 3성분 각속도가 측정되었을 때, 좌표계 변환 행렬의 시간 미분 관계식에 기초해 각속도의 시간에 따른 적분을 통해 요-피치-롤 각을 구하는 수학적 이론을 정리하고 지구 자전의 영향을 제거함으로써 측정 자료의 시간 적분에 의해 시추공의 궤적을 구하는 방법을 설명하였다. 오차가 포함된 측정 자료로부터 시추공 공곡 결정의 정확도를 높이는 중요한 방법으로 센서 또는 측정 자료를 융합하는 원리도 예를 들어 설명하였다. 시추공 공곡 측정 원리는 GPS 수신이 불가능한 터널내에서의 궤적 추적 또는 무인비행체를 이용한 공중 탐사나 항공 탐사 시 센서의 자세 측정에도 활용될 수 있다. 또한, 센서의 융합에서 필수적으로 접목되어야 할 최적화 필터에 대해서도 중요 문헌 및 사례를 소개함으로써, 앞으로의 연구에 도움을 주고자 하였다.

주요어: 시추공 공곡 측정, 방위각, 편차, 센서회전, 가속도계, 자력계, 자이로스코프

Abstract: To share an understanding of trajectory measurement in surveys using borehole, this tutorial summarizes the relevant mathematical principles of the borehole deviation survey based on coordinate transform. For uncased or open holes, calculations of the azimuth-deviation-tool face rotation using three-component accelerometer and magnetometer measurements are summarized. For the steel-cased holes, calculations are based on the time-derivative formula of the coordinate transform matrix; yaw-pitch-roll angles through time are mathematically determined by integrating the three-component angular velocity measurements from the gyroscope while also removing the Earth's rotation effect. Sensor and data fusion to increase the accuracy of borehole deviation survey is explained with an example of the method. These principles of borehole deviation surveys can be adapted for attitude estimation in air-borne surveys or for positioning in tunnels where global positioning system (GPS) signals cannot be accessed. Information on the optimization filter that must be incorporated in sensor fusion is introduced to help future research.

Keywords: borehole deviation survey, azimuth, deviation, tool face rotation, accelerometer, magnetometer, gyroscope

서 론

지표에서 지하의 원하는 깊이까지 굴착되는 모든 시추공은,

Received: 10 July 2020; Revised: 12 August 2020; Accepted: 7 October 2020

*Corresponding author

E-mail: song@kigam.re.kr

Address: 124 Gwahak-ro, Yuseong-gu, Daejeon 34132, Korea

©2020, Korean Society of Earth and Exploration Geophysicists

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

정교한 방향제어 기술을 적용하지 않은 한, 그 정도의 차이는 있으나 목표로 한 방향으로부터 벗어난다. 우리나라에서 굴착되는 대부분의 시추공은 수직방향으로의 굴착을 목표로 하나, 비록 공개적으로 보고되고 있지는 않아도 수직축으로부터 3° ~ 5° 벗어나는 것이 일반적이고, 10° 이상 편향되는 경우도 발생한다. 깊이 500 m(측정 깊이, Measured Depth, MD)까지 굴착했다고 가정했을 때, 수직축으로부터 5°의 편차가 있다면 시추공의 수직 깊이(True Vertical Depth, TVD)는 약 498.10 m ($\cong 500 \times \cos(5^\circ)$)가 되어 크게 문제되지 않을 것이다. 그러나, 수평적으로는 지표 착수 지점으로부터 약 43.58 m ($\cong 500 \times$

$\sin(5^\circ)$ 나 벗어나게 되어 이를 무시한다면 시추공을 이용한 탐사(예를 들어 VSP 탐사) 결과의 정확도에 심각한 문제를 야기하게 된다. 따라서 시추공을 이용한 탐사나 시추공 영상검층, 또한 시추코어 내 절리의 경사각 해석 등에서 시추공이 휘어진 정도 즉, 공곡을 측정하는 것은 매우 중요한 문제인데, 안타깝게도 이 중요성이 간과되는 현상을 종종 마주치게 된다.

시추공 공곡 또는 궤적 측정(borehole deviation survey, borehole survey 또는 wellbore survey)은 이미 굴착되어 있는 시추공의 3차원적 궤적 확인을 전통적인 목적으로 하여 왔으나, 석유 시추에서 방향제어 시추가 일반화된 지금에는 시추중-측정(Measurement-While-Drilling, MWD) 장비의 기본이 되고 있다. 시추공에 철재 케이싱이 설치되어 있지 않은 시추공에서는 3성분 가속도계와 3성분 자력계를 이용하여 공곡을 측정하게 되지만, 철재 케이싱이 설치되어 있는 시추공이나 MWD에서 자성이 있는 drill collar에 부착된 센서는 지구 자기장이 왜곡되기 때문에 이로부터 영향을 받지 않는 자이로스코프를 사용하여야 한다. 석유 시추 현장이나 광산 시추에서 시추공 공곡 측정 장비 또는 측정 서비스는 외국에서 고정밀 기기가 상용화되어 있지만(예를 들어 SPT사의 GyroMaster; <https://sptab.com/products/gyromaster/>나 gyrodata사의 GyroGuide; <https://www.gyrodata.com/technology-and-services/surveying-services/gyroguide/> (2020년 6월 30일 검색)) 깊이가 깊어질수록 적지 않은 비용을 요구하며 국내에는 1 km 급 기기는 보급되어 있지 않다. 최근 국내에서도 500 m 급 장비를 개발한 연구가 발표된 바 있는데(Cho *et al.*, 2019) 철재 케이싱내에서 작동하는 목적으로는 사용되지 않고 있으나, 머지 않은 장래에 다목적 기기도 개발될 수 있을 것이다.

이 해설 논문에서는 공곡검층 장비를 개발하려고 할 때나

상업적 기기의 자료 해석을 위해 그 원리의 이해에 기본이 될 수 있도록 시추공의 공곡을 결정하는 수학적 이론을 정리하였다. 수식의 유도는 Song (2020)의 좌표계 변환 공식을 기본으로 하여 관성항법(Inertial Navigation System, INS)에서 사용하는 측정 장비인 IMU (Inertial Measurement Unit)에서 이용하는 방식과(예를 들어 Titterton and Weston, 2004) 가능한 한 일관성을 가지도록 하였다. 그러므로 여기서 정리한 공곡 측정의 원리를 GPS 수신기 불가능한 지하 공간 내 탐사나 항공탐사 시 센서의 자세 측정 장치를 개발하려 할 때에도 IMU 자료 처리나 해석에 응용할 수 있도록 의도하였다. 자이로스코프 관련 수식의 유도는 어쩔 수 없이 복잡해지는데, 기본 원리의 이해를 위해 꼭 필요한 수식만 일관성있게 정리하고 나머지는 중요한 참고문헌을 인용함으로써 가능한 한 복잡성을 줄이고자 하였다.

철재 케이싱이 설치되지 않은 시추공의 공곡 측정

시추공의 공곡 또는 궤적을 측정하는 가장 기본적인 직접적인(straight forward) 방법은 3성분 가속도계와 3성분 자력계를 이용하는 것이다. 그러나 이 방법은 지구 자기장의 왜곡을 야기하는 철재 케이싱이 설치되어 있지 않은 시추공에만 적용 가능하고 또한 주변 매질의 자성도 무시할 수 있어야만 한다. 이 원리를 설명하기 위해 먼저 기본이 되는 좌표계 및 기호를 정리한다.

좌표계 회전에 관한 기본 원칙은 오른손 좌표계에 기초한 Song (2020)의 방식을 따른다. Fig. 1은 기준 좌표계(North-East-Down, *NED*)와 시추공 좌표계(*XYZ*)의 관계(Fig. 1a) 및 기준 좌표계에서 지구 자기장(**B**) 및 중력장(**g**) 벡터의 관계

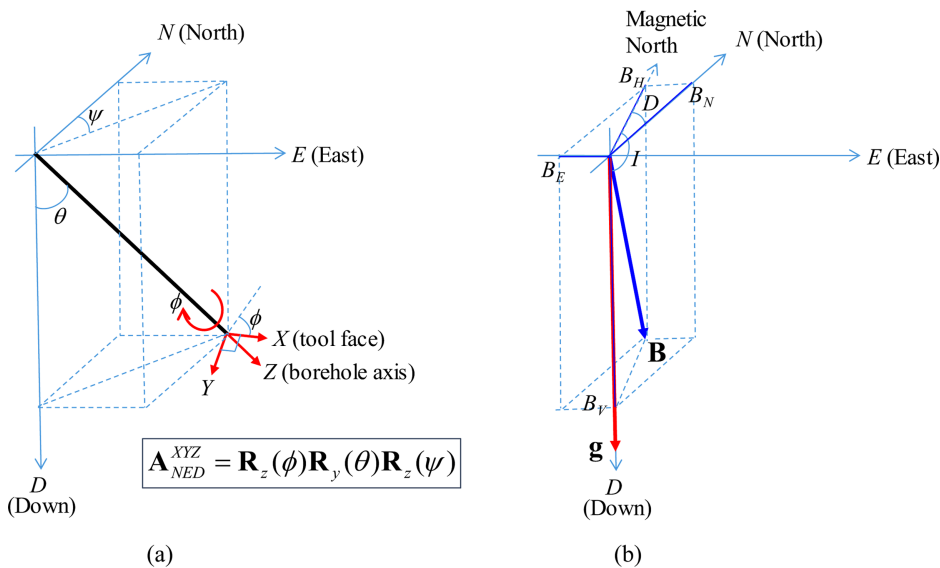


Fig. 1. Schematic diagrams of frames. (a) Borehole as *XYZ* coordinate frame (adapted from Song (2020)); (b) gravity (**g**) and geomagnetic (**B**) fields with respect to the reference (*NED*) frame. In (b), *I* means Inclination while *D* denotes Declination of geomagnetic field that is negative (westward from true North) in Korea.

(Fig. 1b)를 보여준다. Fig. 1b에서는 우리나라에서 지구 자기장의 수평 성분(B_H)이 진북(N)으로부터 서쪽을 향하므로($D < 0$) 이를 반영하여 도시하였다. 시추공 좌표계는 기준 좌표계를 방위각(ψ), 시추공 편차각(θ), 그리고 검층 센서 회전각(ϕ)을 각각 z - y - z 축을 기준으로 회전함으로써 얻어지며, 다음 식 (1)과 같은 회전 행렬 \mathbf{A}_{NED}^{XYZ} 로 나타난다(Song, 2020).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{NED}^{XYZ} &= \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\theta\sin\psi + \sin\phi\cos\psi & -\cos\phi\sin\theta \\ -\sin\phi\cos\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & -\sin\phi\cos\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

또한 기준 좌표계에서의 물리량 벡터 \mathbf{f}_{NED} 는 검층 센서에서는 \mathbf{f}_{XYZ} 로 측정될 것이고, 이는 아래의 관계를 따르게 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{XYZ} &= \mathbf{A}_{NED}^{XYZ}\mathbf{f}_{NED} \\ &= \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{f}_{NED} \end{aligned} \quad (2)$$

Russel and Russel (1979)은 이러한 좌표계 회전에 기초하여 3성분 가속도계와 3성분 자력계의 측정값을 이용해 시추공의 공곡을 결정하는 수식을 다음과 같이 정리하였다. 먼저, 3성분 가속도를 이용해 측정된 중력값은 식 (2)에 의해 식 (3)으로 정리되므로, 아래의 식 (4) 및 식 (5)와 같이 쉽게 시추공 편차(θ) 및 센서회전(ϕ) 각을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{XYZ} &= \mathbf{A}_{NED}^{XYZ}\mathbf{g}_{NED} \\ &= \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -g\cos\phi\sin\theta \\ g\sin\phi\sin\theta \\ g\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}{g_z}\right) \quad (4)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{g_y}{g_x}\right) \quad (5)$$

나머지 변수인 방위각은 자기장 측정값으로부터 얻어지게 되는데, 자기장 측정값도 식 (1) 및 식 (2)의 좌표계 변환을 만족하므로 기준 좌표계에서의 지구 자기장은 아래와 같이 센서 좌표계로 변환된다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} &= \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi) \begin{pmatrix} B_N \\ B_E \\ B_V \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi') \begin{pmatrix} B_H \\ 0 \\ B_V \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 지구 자기장의 크기를 B_{total} 이라고 할 때, 지구 자기장의 수평 성분(B_H) 및 수직 성분(B_V)은 복각(Inclination, I)을 이용해서 아래와 같이 구할 수 있고, ψ' 은 방위각에서 편각(Declination, D)을 빼준 양이다. 지구 자기장의 복각과 편각은 측정 지점의 위경도 좌표를 알면 NOAA의 인터넷 서비스 (<https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/geomag.shtml> (2020년 6월 30일 검색))를 통해 구할 수 있다

$$\begin{aligned} B_H &= B_{total} \cos I \\ B_V &= B_{total} \sin I \\ \psi' &= \psi - D \end{aligned} \quad (7)$$

식 (6)의 역을 취하면 좌표계 변환 행렬의 역행렬이 전치(transpose)행렬과 동일함에 기초하여(Song, 2020),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_H \\ 0 \\ B_V \end{pmatrix} &= [\mathbf{R}_z(\psi')]^T [\mathbf{R}_y(\theta)]^T [\mathbf{R}_z(\phi)]^T \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi'\cos\theta\cos\phi - \sin\psi'\sin\phi & -\cos\psi'\cos\theta\sin\phi - \sin\psi'\cos\phi & \cos\psi'\sin\theta \\ \sin\psi'\cos\theta\cos\phi + \cos\psi'\sin\phi & -\sin\psi'\cos\theta\sin\phi + \cos\psi'\cos\phi & \sin\psi'\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

이 되는데, 이때 결과적인 벡터의 두번째 행은 0이 되므로 아래와 같이 방위각도 직접적으로 얻어지게 된다.

$$\begin{aligned} \sin\psi' \{ \cos\theta(B_x \cos\phi - B_y \sin\phi) + B_z \sin\theta \} \\ + \cos\psi' (B_x \sin\phi + B_y \cos\phi) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\psi' = \tan^{-1} \left\{ -\frac{B_x \sin\phi + B_y \cos\phi}{\cos\theta(B_x \cos\phi - B_y \sin\phi) + B_z \sin\theta} \right\} \quad (10)$$

$$\psi = \psi' + D$$

한편, 시추공이 수직이라면 가속도계에서 측정되는 중력값의 수평 성분이 0이 되므로 식 (5)로부터 센서회전각을 알 수 없는 문제가 발생한다. 그러나 시추공이 수직이라는 것은 방위각도 0이라는 것을 의미하므로, 이 경우에 식 (8)은 다음과 같이 간단해진다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_H \\ 0 \\ B_V \end{pmatrix} &= [\mathbf{R}_z(\phi')]^T \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_x \cos\phi' - B_y \sin\phi' \\ B_x \sin\phi' + B_y \cos\phi' \\ B_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

역시 식 (11)의 두번째 행이 0이 되어야 하므로 시추공이 수직일 경우에는 아래와 같이 자기장의 수평 성분을 이용해 센서 회전각을 구하게 된다.

$$\phi' = \tan^{-1}\left(-\frac{B_y}{B_x}\right) \tag{12}$$

$$\phi = \phi' + D$$

시추공의 궤적은 지표에서부터 시작해서 측정이 이루어지는 단계별 길이의 증가분에 식 (4), 식 (5) 및 식 (10)의 각도를 식 (1)의 전치행렬에 대입해 *NED*의 증가분을 계산하고 이를 이전 단계의 좌표에 더해줌으로써 순차적으로 얻게 된다. 이상과 같이, 3성분 가속도계와 3성분 자력계를 이용하게 되면 시추공의 궤적을 곧바로 얻을 수 있음을 알 수 있다. 단, \tan^{-1} 는 $\pm 180^\circ$ 의 불확실성이 있기 때문에 식 (4), 식 (5), 식 (10) 및 식 (12)의 분자 및 분모에 포함되는 측정값의 부호에 따라 계산결과가 속하는 사분면을 고려하여야 한다. 물론 모든 측정값에는 원치 않은 잡음이 포함되고 특히 시추공 검층에서는 센서의 흔들림이 필연적으로 발생하기 때문에 상당한 수준의 잡음이 발생하게 되므로 경우에 따라 적절한 필터링이 필요하지만 이의 해결 방안은 또 다른 연구 주제가 될 것이다.

철재 케이싱이 설치된 시추공내에서의 공극 측정: 자이로스코프의 응용

자이로스코프(gyroscope) 또는 자이로(gyro)는 항법이나 로보틱스에서 자세 측정 및 제어에 필수적으로 동원되는 장치이다. 자이로스코프의 큰 장점은 자기장에 영향을 받지 않는다는 것이고, 따라서 철재 케이싱이 설치된 시추공 내에서 시추공의 궤적을 추적하는 데 사용되는 필수적인 센서이다. 석유 시추에서 대부분의 경우에 동원되는 방향제어 시추에서 요구되는 MWD에서도 drill collar의 자성에 영향을 받지 않도록 자이로스코프가 기본 장비로 채택된다(Noureldin *et al.*, 2004; ElGizawy *et al.*, 2010; Zhang and Lin, 2016).

그러나 자이로스코프를 이용한 측정의 기본이 되는 수식의 유도는 앞서 살펴본 가속도계+자력계의 경우와 달리 직관적이지도, 직접적이지도 않다. 또한 짧은 간격의 측정 시간 동안 각속도가 일정하다는 가정을 도입한 반복 계산이 필연적으로 요구되므로 계산 과정에서의 오류가 축적될 위험성도 높다. 이러한 문제에 대해서는 수많은 연구가 이루어져 왔고 현재에도 진행 중이므로, 여기서는 근본원리 만을 다룬다. 물론 이마저도 간단하지는 않지만, 지금까지 서술해왔던 좌표계 회전 방식과 관성항법에서 주로 사용하는 이론에 기초해서 가능한 한 복잡성을 줄여서 설명하고자 한다.

자이로스코프는 정해진 축을 기준으로 회전하는 비율(turn rate) 즉, 각속도를 측정하는 장치로서 기계식 자이로는, 장남감 팽이에서 볼 수 있는 것처럼, 빠른 속도로 회전하는 원판

(wheel) 또는 회전자(rotor)의 회전축이 각 모멘텀(angular momentum) 보존법칙에 따라 그 방향을 유지하려는 관성의 원리에 기초한다(Titterton and Weston, 2004, Ch. 4). 이러한 기계식 자이로스코프는 19세기말부터 북쪽 방향을 찾는 자이로 콤파스(gyro-compass)에 많이 사용되어 왔으며, 측정 기술의 정밀도 향상에 힘입어 지금도 가장 높은 정확도를 갖는다고 알려져 있지만 매우 고가이다(Titterton and Weston, 2004; Passaro *et al.*, 2017).

한편, 20세기 후반에 들어서는 광(optical) 자이로와 MEMS (Micro-Electro-Mechanical System) 자이로가 상업화되었고, 전자기술의 발전에 힘입어 점점 소형화하게 되어 지금은 스마트 폰에도 MEMS 자이로가 기본적으로 장착되고 있다. 광 자이로나 MEMS 자이로의 정밀도는 아직 기계식에 미치지 못하지만, 최근의 소형화된 광 자이로(Fiber Optic Gyro, FOG)는 방향제어 시추를 위한 MWD (Noureldine *et al.*, 2004; Zhang and Lin, 2016) 및 자화율 검층(Ehmann *et al.*, 2015)에 사용되고 있다. 여기서는 FOG나 MEMS 자이로를 이용해 3성분 각속도를 측정한다고 가정하고 항법에서 자세를 구하게 되는 수학적 방법에 기초해 이론을 정리함으로써, 시추공 공극 측정의 적용 원리를 살펴본다. 최근에 상용화된 MEMS 자이로의 경우 자체적으로 최적화 필터 및 적분을 거치거나 AHRS (Attitude and Heading Reference System; https://en.wikipedia.org/wiki/Attitude_and_heading_reference_system (2020년 8월 11일 검색)) 기법을 적용해 요-피치-롤 각을 각속도 값과 함께 제공하기도 하나 정확한 각도 측정을 위해서 기본적인 원리를 알아두는 것은 필요하다고 생각된다.

각속도의 적분을 통한 회전각 계산

자이로스코프는 임의의 회전축에 대해서 센서가 회전하는 것을 기본 가정으로 하므로 이 때의 회전은 서로 직교하는 3개의 축을 중심으로 한 회전에 관한 일반적인 요-피치-롤(yaw-pitch-roll) 회전식에서 출발한다. Fig. 2는 시추공 좌표계와 기준 좌표계의 요-피치-롤 관계(Fig. 2a) 및 비교를 위해 항법에서의 관계(Fig. 2b)를 모식도로 보여준다. 이 경우 기준 좌표계에서 센서 좌표계로의 회전은 아래 식 (13)과 같이 표현된다 (Song, 2020).

$$\mathbf{A}_{NED}^{XYZ} = \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}$$

우리가 자이로스코프(FOG 또는 MEMS 자이로)로부터 측

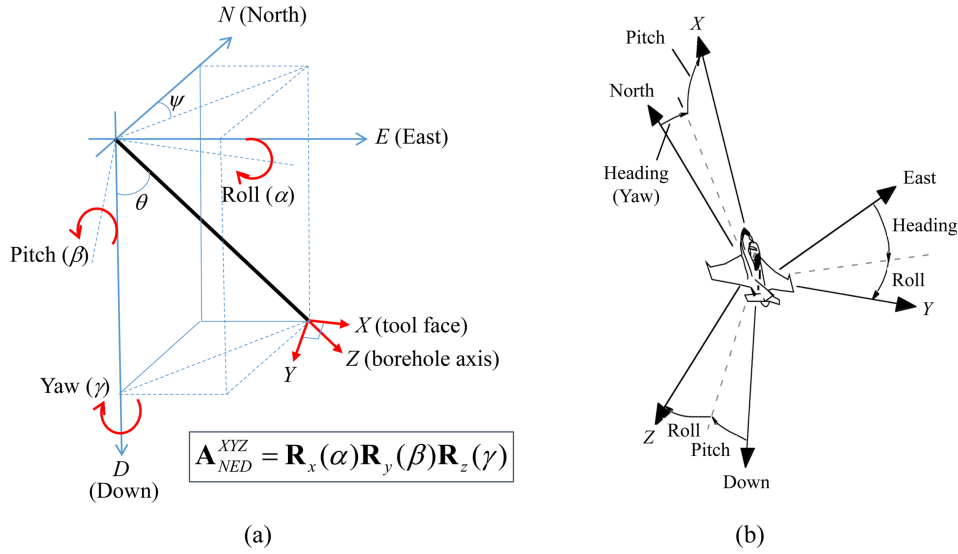


Fig. 2. Schematic diagrams showing Yaw-Pitch-Roll in (a) the borehole coordinate (adapted from Song (2020)) and (b) navigation platform shown in Stovall (1997). Because rotation begins from Yaw, its initial axis appears to coincide with D (Down) axis in (a).

정하는 값은 기준 좌표계에 대해 회전하는 센서 좌표계(또는 센서 체계, *body frame*)의 회전을 즉, 각속도를 센서 좌표계에 입각하여 표현한 양임을 유의하여야 한다. 센서 좌표계로부터 기준 좌표계로의 변환 행렬 C_B^N 은 식 (13)의 역행렬이 되므로 아래 식 (14)와 같이 표현된다. 앞으로의 수식에서 첨자 B 는 센서 좌표계를, N 은 기준 좌표계(NED) 또는 항법 체계 (*navigation frame*)를, I 는 관성 체계(*inertial frame*), 그리고 k 는 시간 단계를 나타낸다.

$$C_B^N = [A_{NED}^{XYZ}]^T \quad (14)$$

좌표계 변환 행렬과 각속도의 관계는 항법이나 로봇공학 등에서 위치 및 자세를 구하는 문제의 기본 출발점이 되며 (Stovall, 1997; Spong *et al.*, 2006), 좌표계 변환 행렬의 시간 미분 \dot{C}_B^N 은 아래와 같이 변환 행렬 자체와 각속도 벡터곱 행렬의 곱으로 나타난다(Zhao, 2016)

$$\dot{C}_B^N = C_B^N \Omega_{NB}^B \quad (15)$$

$$\Omega_{NB}^B = [\omega_B \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

여기서 $\omega_B = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ 는 회전 각속도로서, 즉 Ω_{NB}^B 는 기준 좌표계(아래 왼쪽 첨자 N)에 대해 센서(아래 오른쪽 첨자 B)가 회전한 각속도(ω_B)를 센서 좌표계에서(위 첨자 B) 벡터곱 행렬로 표현한 양으로 이해하면 된다. 우리가 원하는 회전각을 구하는 문제는 식 (15)로 표현된 행렬 미분방정식의 해를 구하는 문제가 된다. 즉 $t = 0$ 에서 센서 좌표계와 기준 좌표계의 관계는 알고 있으므로, 각속도가 일정할 정도로(즉, 각의 변화

가 선형적) 충분히 작은 시간 단계별로 측정이 이루어진다면 식 (15)의 해는 다음과 같이 구할 수 있다(Titterton and Weston, 2004, Ch. 11).

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= C_k \exp \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Omega dt \right] \\ &= C_k \exp [\varphi \times]_k \\ &= C_k D_k \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 C_k 는 k 번째 측정 시간(t_k)에서 센서 좌표계로부터 기준 좌표계로의 변환 행렬이며, D_k 는 각속도 벡터곱 행렬의 지수 적분으로서 센서 좌표계에서 k 번째 시간의 각(*angle*) 벡터와 $k+1$ 번째 시간에서의 각 벡터의 관계를 나타낸다. 한편, φ 는 우리가 구하고자 하는 각 벡터로서 시간 단계별로 회전이 크지 않아 Δt 동안 각속도가 일정하다는 가정을 만족하면, 아래와 같이 표현된다(수식의 복잡성을 피하기 위해 아래 첨자 k 를 생략했음).

$$[\varphi \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \Delta t \quad (18)$$

$$\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} = \varphi = \|\varphi\| \quad (19)$$

행렬 지수(matrix exponential)로 나타나는 D_k 는 아래 식 (20)과 같이 방향 코사인 행렬(Direction Cosine Matrix, DCM)로 귀결되며 이는 임의의 회전축에 대한 회전을 표현하는 일반식인 Rodrigues 회전 공식(Song, 2020)을 회전각의 크기로 정규화 한 형태이다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_k &= \exp[\boldsymbol{\varphi} \times]_k \\
 &= \mathbf{I} + [\boldsymbol{\varphi} \times]_k + \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k^2}{2!} + \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k^3}{3!} + \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k^4}{4!} \\
 &\quad + \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k^5}{5!} + \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k^6}{6!} \dots \\
 &= \mathbf{I} + [\boldsymbol{\varphi} \times]_k + \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k^2}{2!} - \varphi_k^2 \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k}{3!} - \varphi_k^2 \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k^2}{4!} \\
 &\quad + \varphi_k^4 \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k}{5!} + \varphi_k^4 \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k^2}{6!} \dots \quad (20) \\
 &= \mathbf{I} + (\varphi_k - \frac{\varphi_k^3}{3!} + \frac{\varphi_k^5}{5!} - \frac{\varphi_k^7}{7!} + \dots) \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k}{\varphi_k} \\
 &\quad + (\frac{\varphi_k^2}{2!} - \frac{\varphi_k^4}{4!} + \frac{\varphi_k^6}{6!} - \dots) \frac{[\boldsymbol{\varphi} \times]_k^2}{\varphi_k^2} \\
 &= \mathbf{I} + \frac{\sin \varphi_k}{\varphi_k} [\boldsymbol{\varphi} \times]_k + \frac{(1 - \cos \varphi_k)}{\varphi_k^2} [\boldsymbol{\varphi} \times]_k^2
 \end{aligned}$$

따라서, $t = 0$ 일 때에 센서(자이로) 좌표계와 NED 를 일치시키면 $\mathbf{C}_0 = \mathbf{I}$ 가 될 것이므로 연속적인 측정이 이루어질 때 아래와 같이 순차적으로 좌표계 회전 행렬, 즉 NED 좌표계에서의 자세를 구할 수 있게 된다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_1 &= \mathbf{C}_0 \exp[\boldsymbol{\varphi} \times]_0 \\
 &= \mathbf{D}_0 \\
 \mathbf{C}_2 &= \mathbf{C}_1 \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 \\
 \mathbf{C}_3 &= \mathbf{C}_2 \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \\
 &\vdots \\
 \mathbf{C}_{k+1} &= \prod_{j=0}^k \mathbf{D}_j \quad (21)
 \end{aligned}$$

측정 시간 간격을 충분히 짧게 하여 각속도를 작게 함으로써 회전각이 $0.1^\circ (\cong 0.0017453 \text{ radian})$ 보다 작으면 $\sin \varphi \cong \varphi$, $\cos \varphi \cong 1$ 이므로 식 (20)은 다음과 같이 간단해지고

$$\mathbf{D} \cong \mathbf{I} + [\boldsymbol{\varphi} \times] = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

이를 일반 회전 행렬인 식 (13)의 전치행렬에 작은 각도 근사 ($\delta\alpha \ll 1$; $\delta\beta \ll 1$; $\delta\gamma \ll 1$)를 취한 아래 식 (23)과 비교하면 미소 회전각은 Euler 각도(요-피치-롤)와 동일해 짐을 알 수 있다. 이렇게 작은 각도에서는 요-피치-롤 회전 행렬의 순서가 바뀌어도 결과는 달라지지 않으며, 따라서 작은 회전각에 대해서는 서로 직교하는 3축을 기준으로 동시에 회전하였다는 의미가 된다.

$$[\mathbf{A}_{NED}^{XYZ}]^T \cong \begin{pmatrix} 1 & -\delta\gamma & \delta\beta \\ \delta\gamma & 1 & -\delta\alpha \\ -\delta\beta & \delta\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

지구 자전 효과의 보정

지금까지의 유도도를 통해 충분히 짧은 시간 간격에 따라 연속적으로 자이로스코프의 각속도를 측정하면 이의 적분을 통해 회전각을 구할 수 있음을 적어도 수학적으로는 확인하였다. 그러나 자이로스코프의 원리상 위의 수식만으로는 정확한 회전각을 알 수 없는데, 이는 지구 자전의 영향을 고려하지 않았기 때문이다. 자이로스코프는 관성에 입각하여 변화하는 각도(즉 각속도)를 측정하는데, 측정에서 기초하고 있는 기준 좌표계(즉, 측정 시추공의 좌표)는 지구 자전에 의해 매일 360° 회전한다. 공극 측정을 위한 검증에는 짧게는 수십분에서 길게는 몇 시간이 소요되기 때문에, 측정되는 각속도에는 측정점의 이동(즉, 지구 자전의 효과)이 포함되어 있다. 따라서, 센서 좌표계로부터 기준 좌표계를 연결하는 행렬을 정확히 나타내기 위해서는 측정값에 포함된 지구 자전의 효과를 제거하여야 한다.

이러한 관계를 이해하기 위해서는 지구를 포함한 관성 체계에서 각 좌표 체계(frame)의 관계를 살펴보아야 한다. Fig. 3은 항법에서 사용하는 방식으로, 항성 기준으로 고정되어 있는 천체(관성 체계)와 지구 체계(Earth-centered, Earth-fixed, ECEF frame), 그리고 기준 체계 또는 항법 체계(local geographic 또는 navigation frame)의 관계를 나타낸다. 고정되어 있는 관성 체계에서 바라본다면 지구(ECEF)는 자전축을 중심으로 매일 360° 회전할 것이고, 비행체를 가정한다면 기준 체계(또는 항법 체계) 또한 움직이고 있다. 따라서 관성 체계 내에서 자이로스코프에 의해 측정된 각속도($\boldsymbol{\omega}_{IB}^B$)는 식 (24)와 같이 관성 체계에 대한 기준 체계의 각속도($\boldsymbol{\omega}_{IN}^B$)와 기준 체계에 대한 센서 체계(body frame)의 각속도($\boldsymbol{\omega}_{NB}^B$)의 벡터 합이 된다 (Kok et al., 2017). 또한 $\boldsymbol{\omega}_{IN}^B$ 는 다시 관성 체계에 대한 지구 체계의 각속도($\boldsymbol{\omega}_{IE}^B$) 및 지구 체계에 대한 기준 체계의 각속도($\boldsymbol{\omega}_{EN}^B$)의 벡터 합이 되는데, 공간 이동을 무시할 수 있는 시추공 검증에서는 $\boldsymbol{\omega}_{EN}^B = 0$ 으로 간주한다.

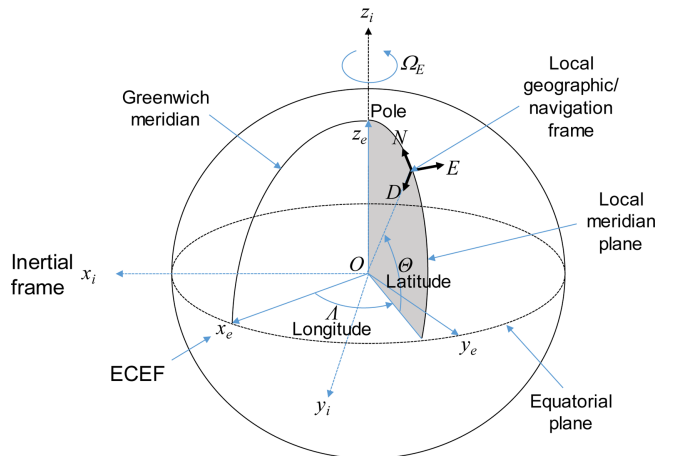


Fig. 3. Relationships among inertial, Earth-centered and Earth-fixed (ECEF), and local geographic (our reference) frames.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{IB}^B &= \boldsymbol{\omega}_{IN}^B + \boldsymbol{\omega}_{NB}^B \\ &= \boldsymbol{\omega}_{IE}^B + \cancel{\boldsymbol{\omega}_{EN}^B} + \boldsymbol{\omega}_{NB}^B\end{aligned}\quad (24)$$

식 (24) 아래 우변의 첫번째 항 $\boldsymbol{\omega}_{IE}^B$ 은 관성 체계(아래 첨자 I) 에 대한 지구(아래 첨자 E)의 회전 각속도를 센서 체계(위 첨자 B)에서 표현한 것이므로, 이는 다시 기준 좌표계로부터 센서 좌표계로의 변환 행렬과 지구 회전 각속도의 기준 좌표계 표현(위 첨자 N)을 이용하면 아래의 식 (25)로 나타난다.

$$\boldsymbol{\omega}_{IE}^B = \mathbf{C}_N^B \boldsymbol{\omega}_{IE}^N \quad (25)$$

한편, 지구의 회전 각속도는 지구 체계에 대한 기준 좌표계의 변환 행렬과 지구 자전 각속도 크기($\Omega_E \cong 15.041067$ °/hr $\cong 7.292115 \times 10^{-5}$ rad/s)를 이용해 식 (26)의 위도(Θ) 및 경도(Λ)를 포함하는 좌표계 변환을 통해서 식 (27)과 같이 측정 위치의 위도의 함수로 나타낼 수 있으며(Stovall, 1997), 결과적으로 식 (25)는 식 (28)로 정리된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_E^N &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Lambda & \sin \Lambda & 0 \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \Theta \cos \Lambda & -\sin \Theta \sin \Lambda & \cos \Theta \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ -\cos \Theta \cos \Lambda & -\cos \Theta \sin \Lambda & -\sin \Theta \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (26)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{IE}^N = \mathbf{C}_E^N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_E \cos \Theta \\ 0 \\ -\Omega_E \sin \Theta \end{pmatrix}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{IE}^B &= \mathbf{A}_{NEV}^{XYZ} \boldsymbol{\omega}_{IE}^N \\ &= [\mathbf{C}_B^N]^T \boldsymbol{\omega}_{IE}^N \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{\sin \phi}{\phi} [\boldsymbol{\phi} \times] + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} [\boldsymbol{\phi} \times]^2 \right) \begin{pmatrix} \Omega_E \cos \Theta \\ 0 \\ -\Omega_E \sin \Theta \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (28)$$

식 (28)의 회전 행렬 또한 식 (21)과 마찬가지로 시간 $t = 0$ 에서 시작해서 순차적으로 구하면 되는데, 식 (21)과는 달리 전치행렬인 것을 주의하면 된다.

$$\begin{aligned}[\mathbf{C}_1]^T &= [\mathbf{D}_0]^T \\ [\mathbf{C}_2]^T &= [\mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1]^T \\ [\mathbf{C}_3]^T &= [\mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2]^T \\ &\vdots \\ [\mathbf{C}_k]^T &= \left[\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{D}_j \right]^T = [\mathbf{D}_{k-1}]^T [\mathbf{D}_{k-2}]^T \cdots [\mathbf{D}_1]^T [\mathbf{D}_0]^T\end{aligned}\quad (29)$$

시추공 공극 검층에서 자이로스코프의 측정 간격은 각속도

가 그 기간 동안 일정할 만큼 충분히 짧게 설정하므로, 첫번째 측정점 $t = t_1$ 에서의 회전각은 아래 식 (30)으로 표현할 수 있고, 여기에 순차적으로 지구 자전의 효과를 보정하면 식 (31)로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_{1,m} &= [\varphi_{x,1m}, \varphi_{y,1m}, \varphi_{z,1m}]^T \\ &= [\omega_{x,1m}, \omega_{y,1m}, \omega_{z,1m}]^T \Delta t\end{aligned}\quad (30)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_{1,c} &= \boldsymbol{\Phi}_{1,m} - [\mathbf{C}_1]^T \boldsymbol{\omega}_{IE}^N \Delta t = \left\{ \boldsymbol{\omega}_{1,m} - [\mathbf{D}_0]^T \boldsymbol{\omega}_{IE}^N \right\} \Delta t \\ \boldsymbol{\Phi}_{2,c} &= \boldsymbol{\Phi}_{2,m} - [\mathbf{C}_2]^T \boldsymbol{\omega}_{IE}^N \Delta t = \left\{ \boldsymbol{\omega}_{2,m} - [\mathbf{D}_1]^T [\mathbf{D}_0]^T \boldsymbol{\omega}_{IE}^N \right\} \Delta t \\ &\vdots\end{aligned}\quad (31)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{k,c} = \boldsymbol{\Phi}_{k,m} - [\mathbf{C}_k]^T \boldsymbol{\omega}_{IE}^N \Delta t = \left\{ \boldsymbol{\omega}_{k,m} - \left[\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{D}_j \right]^T \boldsymbol{\omega}_{IE}^N \right\} \Delta t$$

여기서 아래 첨자 m 과 c 는 각각 측정값 및 보정된 값을 나타낸다. 각 단계별 방향 코사인 행렬 \mathbf{D}_j 의 계산에 필요한 각도는 보정된 각도 $\phi_{j,c}$ 이다. 이렇게 보정된 각도는 식 (21)의 방향 코사인 행렬 계산에 순차적으로 이용되어 최종적으로 $t = t_{k+1}$ 에서의 방향 코사인 행렬로 얻어지고 이것이 식 (14)에 표현된 바와 같이 좌표계 변환 행렬의 전치행렬과 동일하므로 식 (1)에 의해 깊이별로 시추공의 방위각(ψ)과 편차(θ)를 구하면 공극 측정이 된다. 시추공 텔레뷰어와 같이 공내 영상의 방향을 알고자 할 경우에는 센서의 회전각(ϕ)도 계산할 수 있어 각각 아래의 식 (32)로 정리되고, 또한 항법에서의 경우에는 식 (33)을 통해 요-피치-롤을 계산하게 된다(Song, 2020).

$$\begin{aligned}\psi &= \tan^{-1} \left(\frac{C_{23}}{C_{13}} \right) \\ \theta &= \cos^{-1} (C_{33})\end{aligned}\quad (32)$$

$$\begin{aligned}\phi &= -\tan^{-1} \left(\frac{C_{32}}{C_{31}} \right) \\ \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{C_{32}}{C_{33}} \right) \\ \beta &= -\sin^{-1} (C_{31}) \\ \gamma &= \tan^{-1} \left(\frac{C_{21}}{C_{11}} \right)\end{aligned}\quad (33)$$

센서 또는 측정 자료의 융합

식 (3) ~ 식 (5)에서 알 수 있듯이, 가속도계의 측정 자료로부터는 시추공의 편향각과 센서회전각만 얻을 수 있으며, 시추공의 방위각을 알 수는 없다. 만약, 센서가 회전하지 않는다면 ($\phi = 0$), 3성분 자력계의 측정 자료로부터 시추공의 편향각과 방위각을 얻을 수도 있겠지만, 수 m 깊이 이내가 아닌 한에는

센서의 회전없이 시추공 내에 삽입할 수 없을 것이다. 따라서, 3성분 가속도계 및 3성분 자력계가 동시에 적용되어야만 연속 측정을 통해 깊이에 따른 시추공 궤적을 알 수 있다. 그러나, 이 또한 철재 케이싱이 설치되어 있는 시추공에서는 적용할 수 없다.

한편, 3성분 자이로스코프는 그 자체만으로 3성분 각속도를 측정할 수 있어서, 이의 적분을 통해 요-피치-롤을 구할 수 있으므로 단독적으로 시추공 공곡에 대한 정보를 얻을 수 있다. 그러나, 시추공의 깊이에 따라 수천~수만번 이상의 측정 자료를 수치적으로 적분하여야 하므로 각속도 측정의 작은 오차가 누적되면 깊이가 늘어날 수록 오차는 매우 커질 수 밖에 없다. 시추공 공곡 측정의 경우에 비행체에 비해 센서의 하강 또는 상승 속도도 매우 늦고(보통 수 m/min) 또한 변화폭도 제한적이므로(예를 들어 시추공의 각도가 갑자기 10° 만큼 변화할 수 없음) 통상적으로 매초 또는 매 0.5초 간격으로 측정하는 것으로 충분한 것으로 보고된 바 있지만(Virgil *et al.*, 2015), 검층 속도를 5 m/min으로 1 km 깊이의 시추공에서 검층을 수행한다고 할 때에 1초 간격으로 측정해도 12,000번의 측정이 필요하므로 오차의 누적은 무시할 수준을 넘어설 가능성이 매우 높다.

이러한 이유로 자이로스코프를 사용할 때에도 다른 종류의 센서로부터 얻은 자료를 융합함으로써 오차를 줄이는 방법을 사용하는데, 항법에서는 GPS 측정 자료 및 가속도계 측정 자료를 융합하는 것이 대표적이며, 공곡 검층에서도 센서의 융합을 거친다(Noy and Leonard, 1997, Noureldin *et al.*, 2004; Zhang and Lin, 2016). 시추공 공곡 측정에 자이로스코프를 동원하는 이유가 철재 케이싱 또는 drill collar 등의 자성체에 의해 올바른 자력 측정이 불가능하기 때문이므로, 자료의 융합은 가속도계와 자이로스코프 자료에 해당한다. 가속도계 또한 주변 물질의 자성에 영향을 받지 않으므로, 식 (4) 및 식 (5)와 같이 센서 회전각과 시추공 편향각을 얻을 수 있고, 이를 요-피치-롤 좌표계 변환 행렬인 식 (13)과 연결하면 아래의 식 (34)로부터 식 (35)와 같이 롤 각(α)과 피치 각(β)을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \\ = g \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1}(g_y / g_z) \\ \beta &= -\sin^{-1}(g_x / g) \end{aligned} \quad (35)$$

따라서 자이로스코프로부터 나머지 하나의 각 즉, 식 (4) 및 식 (5)의 경우에는 방위각(ψ)을, 식 (35)의 경우에는 요 각(γ)을 구하는 문제가 된다. 가속도계와 자이로를 융합하는 방식은

항법에서 매우 많은 연구가 이루어져 왔고 적용 목적 또는 제품 별로 고유한 방법을 사용하고 있는데, 시추공 공곡 측정을 위해 간단하면서도 수학적으로 직접적인 방식으로는 자이로 콤파스의 원리를 이용하는 것을 생각해 볼 수 있다(Noy and Leonard, 1997).

북쪽 방향 탐지 자이로(north-seeking gyro) 또는 자이로 콤파스라고 불리는 이 방식은 지구의 회전율은 일정하다는 사실에 기초하고 있다. 만약, 검층 센서가 특정 구간에서 정지하고 있다고 한다면, 자이로스코프에서 측정되는 각속도는 지구 자전 각속도가 센서 좌표계에 투영된 값이 된다. 따라서 식 (24)는 곧 식 (25)가 되고, 또한 공곡 검층에서 원하는 값은 요 각보다는 방위각일 것이므로 자력계로부터 방위각을 얻는 방법에서처럼 아래 식 (36)의 역인 식 (37)에서 결과 벡터의 두번째 행이 0이 되므로 식 (38)과 같이 방위각을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega_{IB}^B &= C_N^B \begin{pmatrix} \Omega_E \cos \Theta \\ 0 \\ -\Omega_E \sin \Theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{EH} \\ 0 \\ \Omega_{EV} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{pmatrix} \Omega_{EH} \\ 0 \\ \Omega_{EV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta \cos \phi - \sin \psi \sin \phi & -\cos \psi \cos \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi & -\sin \psi \cos \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x^0 \\ \omega_y^0 \\ \omega_z^0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left\{ \frac{\omega_x^0 \sin \phi + \omega_y^0 \cos \phi}{\cos \theta (\omega_x^0 \cos \phi - \omega_y^0 \sin \phi) + \omega_z^0 \sin \theta} \right\} \quad (38)$$

한편, 정지상태에서 자이로스코프에서 측정된 각속도의 크기는 지구 자전 각속도와 동일하므로 시추공 축(Z축)에 직교하는 두 성분의 측정만으로 나머지 한 성분의 계산이 가능해져서 식 (38)은 아래 식 (39)와 같이 두 성분 값만의 함수로 표현되며 이 것이 Noy and Leonard (1997)에 의해 제안된 정지상태에서의 측정(stationary measurement) 방법의 기초가 된다.

$$\psi = \tan^{-1} \left\{ \frac{\cos \theta (\omega_x^0 \sin \phi + \omega_y^0 \cos \phi)}{\Omega_{EV} \sin \theta + (\omega_x^0 \cos \phi - \omega_y^0 \sin \phi)} \right\} \quad (39)$$

정지상태에서의 측정은 자이로스코프에서 측정되는 각속도의 적분이 필요하지 않으므로 계산 오차의 여지가 없어지는 큰 장점이 있지만, 시추공이 깊어질 수록 측정 시간이 매우 길어지는 문제를 피할 수 없어 실용성이 떨어지게 된다. 따라서 상용화된 기기에서는 각기 독특한 자이로스코프 방식이나 복잡한 자료처리 기법 등을 동원해서 연속 측정 시 각속도 적분에 따른 오차 누적을 최소화하는 방식을 추구한다. 예를 들어, Noy and Leonard (1997)에서 시작된 gyrodata사의 GyroGuide 기기는 고정밀 기계식 자이로를 통해 2성분 각속도를 측정하

고 3성분 가속도 측정 자료와 융합해서 적분을 통해 방위각과 편차를 구하는 방식을 사용하는 것으로 알려져 있다.

측정 오차 및 잡음

모든 계측에는 그 정도의 차이는 있지만 반드시 계측기 고유의 측정 오차가 수반되고 또한 측정 환경에 좌우되는 잡음도 포함된다. 시추공 검층 시 측정 환경에 따른 대표적 잡음으로는 연속적으로 센서를 하향 또는 상향시키면서 측정함에 따라 발생하는 진동에 의한 잡음을 들 수 있다. 이러한 진동에 의한 잡음은 센서를 천천히 이동함으로써 어느 정도 줄일 수 있고, 또한 측정 간격을 짧게 설정한 후에 이동 중간값(moving median) 필터를 적용하면 상당부분 해결할 수 있다. 따라서 성공적인 계측을 위해서는 가능한 한 측정 오차가 적은 기기의 선정이 필수적임은 잘 알려져 있다.

시추공 검층 기기는 기기 축에 수직한 단면의 크기가 제한되는 것이 절대적인 제약 요소이다. 따라서 측정 정확도와 정밀도를 높이기 위해서 선택할 수 있는 장비의 선택 폭이 상당히 제한적이다. 최근에 MEMS 기술이 고도화 함에 따라 소형의 가속도계, 자력계 및 자이로스코프가 상용화되어 있지만 물리검층 용으로 원하는 정밀도를 낼 수 있는 것은 제한적이다. 우리나라에서 고해상도 영상 검층용으로 사용되고 있는 벨기에 ALT사의 초음파 텔레뷰어(Acoustic televiewer; 모델 QL40, QL43)에 사용되는 가속도계+자력계 장치의 경우 시추공 편차 및 센서회전 오차 $\pm 0.4^\circ$, 방위각 오차 $\pm 1.2^\circ$ 로 알려져 있고 (www.appliedphysics.com/_main_site/wp-content/uploads/model-544-miniature-orientation-sensor.pdf (2020년 6월 25일 검색)), 최근 좀 더 정밀한 센서가 개발되고 있는 추세를 고려한다면, 수백만원의 가속도+자력계 센서를 통해 방위각 오차 또한 $\pm 1^\circ$ 이내의 측정 정확도를 확보할 수도 있을 것이다.

자이로스코프의 경우 서론에서 소개한 바와 같이 소형 고정밀 기계식 자이로 콤파스를 장착한 공극검층 장비가 상업적으로 서비스되고 있는데, 사용 부품에 대한 상세한 정보가 일반에 공개되고 있지 않다. 최근에는 FOG를 장착해서 매우 높은 정밀도를 보이는 것으로 보고된 사례를 찾을 수 있는데 (Ehman *et al.*, 2015), 3성분을 장착하려면 우리나라에서 시추코어 회수용으로 굴착하는 NQ (시추공 직경 75 mm)나 HQ (96 mm) 크기에 맞추기 어려운 문제가 있다. 최근 들어 MEMS 자이로의 성능이 계속 좋아지고 있고 (Passaro *et al.*, 2017) 이를 MWD에 적용하는 연구도 발표된 바 있어서 (ElGizawy *et al.*, 2010), 머지 않은 장래에는 충분한 정확도의 소형 자이로를 장착해서 다양한 시추공 환경에서 방위각 $\pm 1^\circ$ 이내의 측정 정확도를 확보할 수 있을 것으로 기대된다.

어떠한 부품을 사용한다고 해도 모든 센서에는 각기 고유의 잡음을 갖고 있고 또한 이러한 잡음의 특성은 측정 시간의 경과 및 온도 변화에 따라 달라지게 된다. 더욱이 서로 다른 센

서들을 검층 기기 내의 동일한 축에 정확하게 장착하는 것도 쉬운 문제는 아니다. 측정의 정확도를 높이기 위해 센서의 융합을 시도할 경우에 센서 별로 서로 다른 잡음 특성과 수준에 대해서도 고려해야 할 것이다. 관성항법이나 측정 시스템(IMU)에서는 가능한 한 잡음을 제거해서 측정 오차를 최소화하는 자료처리 기법을 필수적으로 채택하는데, 거의 모든 자료처리 기법은 Kalman 필터를 이용하고 있으며 이에 대해서는 교과서 수준의 저술을 어렵지 않게 찾을 수 있다 (Rogers, 2003; Titterton and Weston, 2004; Grewal and Andrews, 2008).

이러한 문헌에서는, 잡음이 정규분포를 보인다는 가정에 기초한 초창기 선형 Kalman 필터에서 출발하여 항법과 같은 비선형 문제에 적용하기 위해서 대부분의 경우에 적용되는 확장(extended) Kalman 필터에 대해 수학적 이론과 적용 예를 설명하고 있는데, 최근에는 간단하게 비선형 문제에 적용할 수 있는 Unscented Kalman 필터도 응용되고 있는 추세이다 (Labbe, 2018). Kalman 필터를 이용한 최적화는 그 자체로서 방대한 연구분야인데, 자이로스코프를 사용하는 시추공 공극 측정 문제에서도 필수 불가결할 것이며 (Titterton and Weston, 2004, Ch. 15), 실제로 Kalman 필터를 적용한 사례가 발표되고 있다 (Noureldin *et al.*, 2004; ElGizawy *et al.*, 2010; Zhang and Lin, 2016).

결 론

이 해설 논문에서는 깊이에 따른 시추공의 좌표를 구하는 시추공 공극 측정 문제를 좌표계 변환 공식에 기초하여 수학적으로 정리하였다. 먼저 철재 케이싱이 설치되어 있지 않은 시추공에 적용 가능한 방법으로서 3성분 가속도계와 3성분 자력계를 함께 이용하여 시추공의 방위각, 편차 그리고 센서회전각을 구하는 수학적 원리를 정리하였다. 철재 케이싱이 설치되어 있거나, 자성이 있는 drill collar를 사용하는 MWD 문제에 적용하는 센서인 자이로스코프에서 3성분 각속도가 측정되었을 때, 항법이나 로봇공학에서 사용하는, 좌표계 변환 행렬의 시간 미분 관계식에 기초해 각속도의 시간에 따른 적분을 통해 요-피치-롤 각도를 구하는 수학적 이론을 정리하고 지구 자전의 영향을 제거함으로써 측정 자료의 시간 적분에 의해 시추공의 궤적을 구하는 방법을 설명하였다.

모든 센서에서 측정되는 자료는 다양한 원인에 의한 오차를 포함하고 있다. 측정 오차의 문제를 극복하는 기술로서 센서 또는 측정 자료의 융합을 통해 좀 더 정확하게 시추공 공극을 측정할 수 있는 방법에 대해서도 살펴보았으며, 몇가지 상용화된 기기에 대한 정보에 대해서도 간단하게 소개하였다. 이 논문에서 다른 방법이 시추공 공극 측정의 모든 기술을 망라하고 있지는 않겠으나, 적어도 3차원 좌표계 변환 공식을 이용한 기본적인 수학적 접근 방법은 정리하였다고 판단된다.

앞으로 국내에서 새로운 공극 측정 장치를 개발하거나 자료

처리 또는 해석 방법론을 연구한다면 이 논문에서 정리한 방식이 기본적인 참고 자료로 활용될 수 있을 것으로 생각된다. 특히, 여기서 서술한 시추공 공극 측정 원리는 GPS 수신에 불가능한 터널내에서의 궤적 추적이나 무인비행체를 이용한 공중 탐사나 항공 탐사 시 센서의 자세 측정에도 그대로 활용될 수 있으므로 새로운 개념의 탐사 방법론 개발에도 참고가 될 수 있을 것으로 기대해본다. 새로운 방법론의 개발 시에는 연속 측정에서 필연적으로 포함되고 또한 누적되는 높은 수준의 측정 잡음을 효과적으로 처리하여 유용한 신호를 추출하는 필터링 기법의 접목도 동시에 고려하면서 연구가 이루어져야 할 것이다.

감사의 글

이 논문은 한국지질자원연구원 주요사업 '심지층 개발과 활용을 위한 지하심부 특성평가 기술 개발' 과제(GP2020-010) 수행의 일환으로 작성되었다. 논문의 서술이 좀 더 이해하기 쉽게 다듬어질 수 있도록 유익한 조언을 해주신 심사위원께 감사드린다.

References

- Cho, S.-H., Jung, H.-K., Lee, H., and Kim, Y., 2019, Development of real-time borehole deviation and magnetic gradient logging system and its preliminary field test, *J. Korean Soc. Miner. Energy Resour. Eng.*, **56(1)**, 23-32, doi: 10.32390/ksmer.2019.56.1.023. (in Korean with English abstract and illustrations)
- Ehmann, C., Hördt, A., Leven, M., and Virgil, C., 2015, Paleomagnetic inclination and declination from three-component borehole magnetometer data—New insights from logging in the Louisvilles eamounts, *J. Geophys. Res. Solid Earth*, **120(1)**, 18-41, doi:10.1002/2014JB011531.
- ElGizawy, M., Noureldin, A., Georgy, J., Iqbal, U., and El-Sheimy, N., 2010, Wellbore surveying while drilling based on Kalman filtering, *Americal J. of Engineering and Applied Sciences*, **3(2)**, 240-259, doi: 10.3844/ajeassp.2010.240.259.
- Grewal, M. S., and Andrews, A. P., 2008, *Kalman filtering - Theory and practice using MATLAB*, 3rd. ed., John Wiley & Sons, Inc., 575p.
- Kok, M., Hol, J. D., and Schön, T. B., 2017, Using inertial sensors for position and orientation estimation, *Foundations and Trends in Signal Processing*, **11**, 1-153, doi: 10.1561/20000000094.
- Labbe, R., Jr., 2018, *Kalman and Bayesian filters in Python*, <https://github.com/rllabbe/Kalman-and-Bayesian-Filters-in-Python> (2020년 3월 16일 다운로드).
- Noureldin, A., Tabler, H., Smith, W., Irvine-Halliday, D., and Mintchev, M. T., 2004, *Continuous Measurement-While-Drilling surveying*, US Patent No. **US 6,823,602 B2**.
- Noy, K. A., and Leonard, J. G., 1997, A new rate gyroscopic wellbore survey system achieves the accuracy and operational flexibility needed for today's complex drilling challenges, *SPE/IADC 37664*, doi: 10.2118/37664-MS.
- Passaro, V. M. N., Cuccovillo, A., Vaiani, L., De Carlo, M., and Campanella, C. E., 2017, Gyroscope technology and application: A review in the industrial perspective, *Sensors*, **17(10)**, 2284, doi:10.3390/s17102284.
- Rogers, R. M., 2003, *Applied mathematics in integrated navigation system*, 2nd Ed., AIAA Education Series, 330p.
- Russel, M. K., and Russel, A. W., 1979, *Surveying of boreholes*, **US Patent 4,163,324**.
- Song, Y., 2020, Tutorial on the coordinate transforms in applied geophysics, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **23(2)**, 89-96, doi: 10.7582/GGE.2020.23.2.089. (in Korean with English abstract and illustrations)
- Spong, M. W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M., 2006, *Robot modeling and control*, John Wiley & Sons, Inc., 407p.
- Stovall, S. H., 1997, Basic inertial navigation, *Naval Air Warfare Center Weapons Division*, NAWCWPNS TM8128.
- Titterton, D. H., and Weston, J. L., 2004, *Strapdown inertial navigation technology*, 2nd Ed., The Institution of Electrical Engineers, 576p.
- Virgil, C., Ehmann, S., Hördt, A., Leven, M., and Steveling, E., 2015, Reorientation of three-component borehole magnetic data, *Geophys. Prosp.*, **63(1)**, 225-242, doi: 10.1111/1365-2478.12175.
- Zhang, C., and Lin, T., 2016, A long-term performance enhancement method for FOG-based measurement while drilling, *Sensors*, **16(8)**, 1186, doi:10.3390/s16081186.
- Zhao, S., 2016, Time derivative of rotation matrices: A tutorial, *arXiv:1609.06088v1*.