The Korean Journal of Applied Statistics (2020) DOI: https://doi.org/10.5351/KJAS.2020.33.5.579
33(5), 579–590

The number of games of Rock-Paper Scissors according to game rules

Daehyeon Cho[a,1]

[a]Department of Statistics/Institute of Statistical Information, Inje University

(Received July 17, 2020; Revised August 14, 2020; Accepted August 14, 2020)

Abstract

We would use a coin or a game of Rock-Paper Scissors before the a main game to determine which team will begin first. We can use the game of Rock-Paper Scissors to choose one of two or one of many. There can be many rules in a game of Rock-Paper Scissors between two teams and two teams may consist of a different number of players. In this paper, we find the means and variances of the total number of games till the winning team is decided according to different game rules.

Keywords: Rock-Paper Scissors, mean, number of cases, variance

1. 서론

우리는 테니스 복식경기의 경우 먼저 공격할 팀을 정하기 위해 선수 네 명이 동시에 가위바위보를 하곤 한다. 이처럼 각종 경기에서 게임에 앞서 먼저 시작할 사람이나 팀을 선택하고자 할 때 가위바위보 게임을 통해서 하곤 한다. 가위바위보 게임은 남녀노소 할 것 없이 모르는 사람이 없을 정도로 자주 하게 되는 게임이다. 가위바위보란 두 사람 이상이 '가위, 바위, 보'를 외치며 동시에 각기 특정한 손 모양을 내어 상성 관계에 따라 승부를 결정짓는 게임이다. 가위바위보 게임은 17세기에 중국에서 일본에 전해진 놀이를 통하여 19세기 말에 일본에서 발명되었다고 전해지고 있다. 서양에는 20세기에 가서야 전해졌다. 영어로는 rock paper scissors, scissors paper stone 등으로 말하는데, 이것은 일본에서 보 대신에 종이를 썼던 것이 서양에 전해졌기 때문이다. 보(보자기)는 일본에서는 종이였지만 한국에 전해질 때 보(보자기)로 바뀌었다 (Cho와 Kim, 2012).

가위바위보 게임에서 바위는 가위에 이기며, 가위는 보에 이기고, 보는 바위에 이긴다. 바위는 가위를 부술 수 있으며, 가위는 보를 자를 수 있고, 보(보자기)는 바위를 쌀 수 있기 때문이라는 설명이 널리 퍼져 있다. 여러 사람 중 한 사람을 선택하기 위해 가위바위보 게임은 유용하게 사용될 수 있으며 전체를 두 팀으로 갈라서 경기를 갖는 경우 선제공격팀이나 진영을 가위바위보 게임을 통하여 결정할 수 있다.

가위바위보 게임을 통하여 두 팀 중 한 팀을 결정하는 경우 승부 결정방식은 여러 가지를 고려할 수 있다. 가장 보편적인 방법은 대표로 한 명씩 나온 두 명의 승부에 따라 결정하는 방식과 모든 참가자가 한 명씩 순번을 정해서 이긴 사람이 계속하여 어느 한 팀에 가위바위보 게임에 참가할 사람이 더 이상 없는

This work was supported by 2019 Inje University Research Grant.
[1]Department of Statistics/Institute of Statistical Information, Inje University, 197 Inje-ro, Gimhae-si, Gyeongnam-do 50834, Korea. E-mail: statcho@inje.ac.kr

경우 상대 팀이 이기는 방식이 있을 수 있다. 다른 방법으로는 두 팀의 팀원 전체가 동시에 참여하는 방법을 생각해 볼 수 있다. 이 경우 매 게임에서 두 팀 중 이긴 사람의 수가 많은 팀이 이기고 각 팀에서 같은 수의 승자가 나오는 경우 승자들만이 이긴 사람들의 수가 많을 때까지 가위바위보 게임을 계속하여 승부를 결정하는 방식과 승자가 한 팀에만 나오면 그 팀이 이기고 두 팀에 적어도 1명씩 있는 경우 승자들만이 다시 승부를 겨루어 한 팀에만 승자가 나오는 팀이 최종으로 승리하는 승부 결정방식을 고려할 수 있다.

다양한 참가 인원에 따른 게임에 대한 파산 확률이나 파산할 때까지의 총 게임 수에 관한 많은 연구가 있다 (Chang, 1995; Cho, 1996, 2010; Sandell, 1989). 이러한 연구들은 주로 경우의 수와 조건부확률의 성질 등 확률이론 (Ross, 2006; Chung, 1974)에 의해 연구된 결과들이다.

Cho와 Kim (2012)는 각 팀 2명씩으로 구성된 복식경기에서 가위바위보 게임을 통해 먼저 공격할 팀을 결정할 경우 다양한 룰에 따른 승부가 결정될 때까지 필요한 총 게임 수에 관하여 연구하였다. Cho (2019)는 두 팀 전체 구성원이 동시에 참여하여 가위바위보 게임을 통하여 승리 팀을 결정하고자 할 때 승부 매번의 게임에서 한 팀에만 승자가 있으면 그 팀이 이기는 방식으로 승부를 결정하는 경우 승부가 결정될 때까지 필요한 총 게임 수에 대한 평균과 분산을 구하였다. 본 연구에서는 구성원의 수가 같은 두 팀이 벌이는 가위바위보 게임을 통한 다양한 승부 결정방식에 따른 승부가 결정될 때까지 필요한 총 게임 수에 대한 평균과 분산을 구하여 비교하고자 한다.

2. 두 팀이 벌이는 가위바위보 게임

구성원이 각각 1명인 경우 A와 B 두 사람이 어느 한쪽이 이길 때까지 가위바위보 게임을 하는 경우를 생각해 보자. 편의를 위해 가위를 1, 바위를 2, 보를 3이라 하자. 두 명이 하는 가위바위보 게임에서 한 번의 시합에서 비길 확률은 1/3이며 승부가 결정될 확률은 2/3임을 알 수 있다. 승부가 결정될 때까지의 게임 수를 X라 하자. 그러면 X의 분포는 모수가 2/3인 기하분포를 따른다 (즉, $P(X = x) = (1/3)^{x-1} \times (2/3)$, $x = 1, 2, \ldots$). 모수가 p인 기하분포를 따르는 확률변수 X의 1, 2차 적률 및 분산은 다음과 같다 (Shin, 2004).

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad E\left(X^2\right) = \frac{2-p}{p^2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

그러므로 가위바위보 게임은 $p = 2/3$인 기하분포를 따르는 확률변수인 경우에 해당하므로 $E(X) = 1.5$이며 $E(X^2) = (2 - 2/3)/(4/9) = 3$이 되고 분산은 $\mathrm{Var}(X) = (1 - 2/3)/(4/9) = 3/4$이 된다.

다음으로 두 팀 A, B가 각각 m명으로 구성된 경우 이들이 가위바위보 게임을 통하여 승리 팀을 결정하는 방식은 다양하게 생각할 수 있다. 여기서는 다음의 세 가지 승부 경정 방식을 고려하고자 한다.

- 승부 결정방식 Ⅰ:

  각 팀에서 1명씩 가위바위보 게임을 하여 승자가 다음 사람과 계속하여 상대 팀의 남은 자가 없는 경우 승자 팀이 최종 승리하는 승부 결정방식

- 승부 결정방식 Ⅱ:

  $2m$명이 동시에 가위바위보 게임을 하여 두 팀 중 이긴 사람의 수가 많은 팀이 이기고 각 팀에서 같은 수의 승자가 나오는 경우 승자들만이 이긴 사람들의 수가 많을 때까지 가위바위보 게임을 계속하여 승부를 결정하는 방식

- 승부 결정방식 Ⅲ:

$2m$명이 동시에 가위바위보 게임을 하여 승자가 한 팀에만 나오면 그 팀이 이기고 두 팀에 적어도 1명씩 있는 경우 승자들만이 다시 승부를 겨루어 한 팀에만 승자가 나오는 팀이 최종 승리하는 승부 결정 방식

2.1. 승부 결정방식 I에 따른 게임 수

각각 m명으로 구성된 A, B 두 팀에서 1명씩 가위바위보 게임을 하여 승자가 다음 사람과 계속하여 상대 팀의 남은 자가 없는 경우 승자 팀이 최종 승리하는 승부 결정방식으로 게임을 하는 경우의 최종 승부가 결정될 때까지 게임 수에 대한 평균과 분산을 구하고자 한다.

각각 1명으로 구성된 경우, 즉 $m = 1$인 경우는 위에서 본 것처럼 기하분포를 이용하여 평균과 분산이 각각 3/2, 3/4임을 알 수 있다.

각각 m명으로 구성된 A, B 두 팀에서 1명씩 가위바위보 게임을 하여 승자가 상대 팀의 다음 사람과 계속하여 상대 팀에 남은 자가 없는 경우 최종 승자 팀이 승리한다. 이 때, 첫 번째 두 사람이 가위바위보 게임을 하여 승부가 결정될 때까지의 게임 수를 X_1, 두 번째 시합에서 승부가 결정될 때까지의 게임 수를 $X_2, \ldots$ 등으로 하여 최종 승부가 결정될 때까지의 게임 수를 Y_m이라 하면 Y_m은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Y_m = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

여기서 N은 승부가 결정될 때까지의 시합의 수이며 이는 X_i, $i \geq 1$과 독립이며, X_i는 서로 독립인 기하분포를 따르는 확률변수이다.

정리 2.1

$$E(Y_m) = E(N) \cdot E(X_1), \quad \mathrm{Var}(Y_m) = E(N)\mathrm{Var}(X_1) + E(X_1)^2\mathrm{Var}(N).$$

그러므로 최종 승부가 결정될 때까지 게임 수에 대한 평균과 분산은 X_1과 N의 분포에 따라 결정됨을 알 수 있다.

두 팀이 각각 m명으로 구성된 경우 승부가 결정될 때까지의 시합 수인 N의 분포는 다음과 같다.

정리 2.2

$$P(N = i) = \frac{(i-1)!}{(m-1)!(i-m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}, \quad i = m, \ldots, 2m-1.$$

증명: 각각 m명으로 구성된 A, B 두 팀에서 1명씩 가위바위보 게임을 하여 상대가 없을 때까지 시합하는 경우 A팀이 이기려면 적어도 A팀에서 m번을 이겨야 최종적으로 A팀이 승리하게 된다. 그러므로 N은 연속으로 m번을 이기는 경우인 $N = m$인 경우에서 $m-1$번을 지고 $2m-1$번째 최종적으로 m번째 승리하는 경우인 $N = 2m-1$까지 나누어 생각해 볼 수 있다. 임의의 i $(m \leq i \leq 2m-1)$에 대하여 $N = i$인 경우는 다음과 같이 생각할 수 있다.

매번의 시합에서 A팀이 이기면 A라하고 B팀이 이기면 B라 하면 최종으로 A팀이 승리하는 경우는 i번째 시합에서는 A가 승리하고 나머지 $i-1$번의 시합에서 A팀이 $m-1$번 이겨야 한다. 그러므로 i번의 시합이 진행될 확률인 $(1/2)^i$와 경우의 수인 $\binom{i-1}{m-1}$ 및 B팀이 승리하는 경우를 함께 고려하면 $P(N = i)$은 $2\binom{i-1}{m-1}(1/2)^i = \binom{i-1}{m-1}(1/2)^{i-1}$이 됨을 알 수 있다. □

Table 2.1. Probability distribution of N in case of $m = 2$

	i	
	2	3
$P(N = i)$	1/2	1/2

Table 2.2. Probability distribution of N in case of $m = 3$

	i		
	3	4	5
$P(N = i)$	2/8	3/8	3/8

2.1.1. $m = 2$인 경우 $m = 2$인 경우 게임이 끝날 때까지 시합 수 N이 가질 수 있는 경우는 다음의 경우이다.

- $N = 2$인 경우: AA BB
- $N = 3$인 경우: ABA ABB BAB BAA

위의 결과를 이용하여 N의 분포를 구하면 N의 분포는 Table 2.1과 같이 주어진다. 그러므로 $E(N) = 2.5$, $\mathrm{Var}(N) = 0.5$이다. 또한 $E(X_1) = 1.5$, $E(X_1^2) = 3$, $\mathrm{Var}(X_1) = 3/4$이므로 승부가 결정될 때까지 게임 수 Y_2에 대한 평균과 분산은 정리 2.1에 의해 다음과 같다.

결과 2.1

$$E(Y_2) = \frac{15}{4}, \quad \mathrm{Var}(Y_2) = 3.$$

2.1.2. $m = 3$인 경우 $m = 3$인 경우 게임이 끝날 때까지 시합 수 N이 가질 수 있는 경우는 다음의 경우이다.

- $N = 3$인 경우: AAA BBB
- $N = 4$인 경우: $AABA$ $ABAA$ $BAAA$ $BABB$ $BBAB$ $ABBB$
- $N = 5$인 경우: $AABBA$ $ABBAA$ $ABABA$ $BAABB$ $BBAAB$ $AABBB$

위의 결과를 이용하여 N의 분포를 구하면 N의 분포는 Table 2.2와 같이 주어진다. 그러므로 N에 대한 평균과 분산은 $E(N) = 33/8$, $\mathrm{Var}(N) = 39/64$이다. 또한 $E(X_1) = 1.5$, $E(X_1^2) = 3$, $\mathrm{Var}(X_1) = 3/4$이므로 승부가 결정될 때까지 게임 수 Y_3에 대한 평균과 분산은 정리 2.1에 의해 다음과 같다.

결과 2.2

$$E(Y_3) = \frac{99}{16}, \quad \mathrm{Var}(Y_3) = \frac{333}{64}.$$

Cho (2019)는 승부 결정방식 방법 Ⅲ에 의해 각 팀 m명이 동시에 가위바위보 게임을 하는 경우 최종 승부가 결정될 때까지의 게임 수에 대한 평균을 구하였다. 본 연구에서는 승부 결정방식 Ⅱ에 따른 게임 수를 고려하고자 한다.

2.2. 승부 결정방식 Ⅱ에 따른 게임 수

A, B 두 팀이 각각 m명씩($m = 1, 2, 3$) $2m$명이 동시에 가위바위보 게임을 통하여 승부 결정방식 Ⅱ에 의해 최종 승부가 결정될 때까지 게임을 계속한다고 하자. 이 경우 전체 게임 수를 X_m이라 하자. 본 연

구에서는 두 팀 A, B가 m명씩 $2m$명이 동시에 가위바위보 게임을 통하여 승부 결정방식 II에 의해 최종 승부가 결정될 때까지 게임을 계속하는 경우 전체 게임 수 X_m에 대한 기댓값과 분산을 구하는 방법을 알아보고자 한다.

임의의 이산 확률변수 X와 $Y \sim f(y)$, $y \in S$에 대하여 확률변수 X에 대한 적률은 다음과 같이 조건부 기댓값에 의해 다음과 같이 표현된다 (Ross, 2006; Chung, 1974).

정리 2.3

$$E\left(X^k\right) = \sum_{y \in S} E\left(X^k | Y = y\right) P(Y = y).$$

이를 이용하면 두 팀 A, B가 각각 m명씩 $2m$명이 동시에 가위바위보 게임을 통하여 승부 결정방식 II에 의해 최종 승부가 결정될 때까지의 게임 수 X_m에 대한 평균과 분산을 구할 수 있다. $2m$명이 동시에 가위바위보 게임을 하는 경우 첫 시합에서 각 팀에서 탈락하는 선수들의 수를 확률변수 Y라 하면 즉, $Y \sim p_Y(y) = P(Y = y)$, $y \in S = \{i : i = 0, 1, \ldots, m\}$일 때, X_m의 적률은 다음과 같이 주어진다.

정리 2.4

$$E\left(X_m^k\right) = \sum_{y=0}^{m} E\left(X_m^k | Y = y\right) \times p_i,$$

여기서, $p_i = P(Y = i)$, $i = 0, 1, \ldots, m$이며 p_m은 첫 시합에서 승부가 결정될 확률에 해당한다.

확률변수 Y의 분포는 다음과 같이 주어진다.

a) $p_i = \dfrac{3\binom{m}{i}^2}{3^{2m}} = \dfrac{\binom{m}{i}^2}{3^{2m-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1.$

b) $p_0 = \dfrac{\left(\displaystyle\sum_{\substack{x_1+x_2+x_3=2m,\\ x_i \geq 1}} \frac{(2m)!}{x_1! x_2! x_3!} + 3\right)}{3^{2m}}.$

c) $p_m = 1 - \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} p_i.$

증명:

a) 첫 시합에서 가위로 A팀과 B팀에서 각각 i명씩 탈락하는 경우는 각 팀에서 i개의 1과 $(m-i)$개의 2로 된 열의 개수를 생각해 볼 수 있다. 즉, $1111 \cdots 1122222 \cdots 2$ $1111 \cdots 1122222 \cdots 2$의 배열을 생각하면 경우의 수는 $\binom{m}{i} \times \binom{n}{i}$이 되고 바위인 경우와 보인 경우를 고려하면 경우의 수는 $3\binom{m}{i} \times \binom{n}{j}$이다. 전체 경우의 수가 3^{2m}이므로 p_i는 위와 같다.

b) 전체 확률은 1이므로 $p_0 = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} p_i$임은 명백하다. 경우의 수를 이용한 p_{00}는 다음과 같다. 이 경우의 수는 모두 같은 모양을 내는 3가지 경우와 가위 바위 보가 적어도 1번씩 나오는 경우를 더하면 된다. 가위 바위 보가 경우가 적어도 1번씩 나오는 경우의 수는 다음과 같이 구할 수 있다. $2m$명 중 1을 낸 인원을 x_1, 2를 낸 인원을 x_2, 3을 낸 인원을 x_3이라 할 때 서로 다른 경우의 수는 $x_1 + x_2 + x_3 = 2m$, $x_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3$의 정수 해집합의 수에 해당한다. 그러므로 가위 바위 보가 경우가 적어도 1번씩 나오는 경우의 수는 $\sum_{\substack{x_1+x_2+x_3=2m,\\ x_i \geq 1}} (2m)!/(x_1! x_2! x_3!)$이다. 가위 바위 보 중 모두 같은 것을 낸 경우도 탈락자가 없는 경우이며 전체 경우의 수가 3^{2m}이므로 p_0는 위와 같다.

□

Table 2.3. Probability distribution of Y in case of $m = 2$

	i		
	0	1	2
$P(N=i)$	13/27	4/27	10/27

2.2.1. 각 팀 1명씩 2명이 가위바위보 게임을 하는 경우 A와 B 두 사람이 어느 한쪽이 이길 때까지 가위바위보 게임을 하는 경우를 생각해 보자. 두 명이 하는 가위바위보 게임에 대한 경우의 수는 9가지이며 매 번의 시행에서 비길 확률은 1/3이며 승부가 결정될 확률은 2/3임을 알 수 있다. 두 명이 승부가 결정될 때까지의 게임 수를 X_1이라 하자. 그러면 X_1은 모수가 2/3인 기하분포를 따른다. 그러므로 확률변수 X_1의 1, 2차 적률 및 분산은 다음과 같다 (Shin, 2004).

$$E(X_1) = 1.5, \quad E\left(X_1^2\right) = \frac{2-2/3}{4/9} = 3, \quad \mathrm{Var}(X_1) = \frac{1-2/3}{4/9} = \frac{3}{4}.$$

2.2.2. 각 팀이 2명씩 참가하여 가위바위보 게임을 하는 경우 이 경우 최종 승부가 결정될 때까지의 시행 횟수를 고려해보자. 승부의 결정은 한 팀에만 승자가 있을 때까지 시합을 계속한다. 최종 승부가 결정될 때까지의 시행 횟수를 확률변수 X_2라 할 때 다음의 결과를 얻을 수 있다.

결과 2.3

최종 승부가 결정될 때까지의 시행 횟수인 X_2의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E(X_2) = \frac{33}{14}, \quad \mathrm{Var}(X_2) = \frac{23667}{9604}$$

증명: 한 팀은 2명씩 참가하여 가위바위보 게임을 하는 경우 첫 시행 결과에 대한 확률변수 Y의 분포는 Table 2.3과 같이 주어짐을 알 수 있다.

경우의 수를 이용하여 위의 Y에 대한 분포를 알아보면 다음과 같다.

1) 첫 번째 시합에서 승부가 결정되는 경우

   A팀이 가위로 이기는 경우

   $$1\ 3 \mid 3\ 3 \quad 1\ 1 \mid 3\ 3 \quad 1\ 1 \mid 1\ 3$$

   그러므로 경우의 수는 5가지이다. 바위와 보의 경우 및 B팀이 이기는 경우를 고려하면 $5 \times 3 \times 2 = 30$가지이다.

2) 첫 번째 시합에서 무승부가 되는 경우

   2.1) 모두 생존하고 무승부가 되는 경우

   이 경우는 가위 바위 보가 적어도 1번 이상 나온 경우에 해당한다. 4명 중 1을 낸 인원을 x_1, 2를 낸 인원을 x_2, 3을 낸 인원을 x_3라 할 경우 서로 다른 경우의 수는 $x_1+x_2+x_3=4$, $x_i \geq 1$, $i=1,2,3$의 정수해집합의 수에 해당한다. 해집합은 $(2,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$이다. 그러므로 경우의 수는 $(4!/2!) \times 3 = 36$가지이다. 모두 같은 것을 내는 경우도 이 경우에 해당하므로 모두 생존하고 무승부가 되는 경우의 수는 39가지이다.

   2.2) 1명씩 탈락하고 무승부가 되는 경우

   가위로 1명씩 탈락하는 경우

   $$1\ 2 \mid 1\ 2$$

경우의 수는 4가지이고 바위와 보로 탈락하는 경우를 고려하면 12가지임을 알 수 있다.

Table 2.3의 결과들은 정리 2.2를 이용한 결과들과 동일함을 알 수 있다. 확률변수 X_2는 Y의 값에 따라 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$X_2 = \begin{cases} 1 + X_2, & Y = 0, \\ 1 + X_1, & Y = 1, \\ 1, & Y = 2. \end{cases} \tag{2.1}$$

식 (2.1)과 X_2의 성질 및 Y의 분포를 이용하면 승부가 결정될 때까지의 시행 횟수 X_2의 평균은 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} E(X_2) &= \sum_{y \in S} E(X_2|y)P(Y = y) \\ &= (1 + E(X_2)) \times \frac{13}{27} + (1 + E(X_1)) \times \frac{4}{27} + 1 \times \frac{10}{27} \\ &= (1 + E(X_2)) \times \frac{13}{27} + 2.5 \times \frac{4}{27} + \frac{10}{27} \end{aligned} \tag{2.2}$$

식 (2.2)를 이용하면 $E(X_2) = 33/14$임을 알 수 있다. 식 (2.1)로부터 X_2에 대한 2차 적률은 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} E\left(X_2^2\right) &= \sum_{y=0}^{2} E\left(X_2^2|y\right) P(Y = y) \\ &= E(1 + X_2)^2 \times \frac{13}{27} + E(1 + X_1)^2 \times \frac{4}{27} + 1 \times \frac{10}{27} \\ &= \left(1 + 2E(X_2) + E\left(X_2^2\right)\right) \times \frac{13}{27} + \left(1 + 2E(X_1) + E\left(X_1^2\right)\right) \times \frac{4}{27} + \frac{10}{27} \end{aligned} \tag{2.3}$$

여기서 $E(X_1) = 3/2$이고 $E(X_1^2) = 3$, $E(X_2) = 33/14$이므로 식 (2.3)으로부터

$$E\left(X_2^2\right) = \frac{1}{14}\left(\left(1 + \frac{33}{7}\right) \times 13 + 7 \times 4 + 10\right) = \frac{393}{49}$$

이므로

$$\mathrm{Var}(X_2) = \frac{483}{196} = 2.464286$$

이다. □

2.2.3. 각 팀 3명씩 참가하여 가위바위보 게임을 하는 경우 각 팀 3명씩 참가하여 가위바위보 게임을 하는 경우 최종 승부가 결정될 때까지 시행 횟수를 확률변수 X_3라 할 때 다음 결과를 얻을 수 있다.

결과 2.4

최종 승부가 결정될 때까지의 시행 횟수인 X_3의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E(X_3) = \frac{11684}{2604}, \quad \mathrm{Var}(X_3) \simeq 12.66.$$

증명: 각 팀 2명이 참가하여 가위바위보 게임을 하는 경우 첫 시행 결과에 대한 확률변수 Y의 분포는 Table 2.4와 같이 주어짐을 알 수 있다.

경우의 수를 이용하여 Table 2.4의 Y에 대한 분포를 알아보면 다음과 같다.

Table 2.4. Probability distribution of Y in case of $m=3$

	i			
	0	1	2	3
$P(N=i)$	543/729	27/729	27/729	132/729

1) 첫 번째 시합에서 승부가 결정되는 경우
   A팀이 가위로 이기는 경우

$$\begin{array}{ll} 1\ 3\ 3 \mid 3\ 3\ 3\ :3\text{가지} & 1\ 1\ 3 \mid 3\ 3\ 3\ :3\text{가지} \\ 1\ 1\ 3 \mid 1\ 3\ 3\ :9\text{가지} & 1\ 1\ 1 \mid 3\ 3\ 3\ :1\text{가지} \\ 1\ 1\ 1 \mid 1\ 3\ 3\ :3\text{가지} & 1\ 1\ 1 \mid 1\ 1\ 3\ :3\text{가지} \end{array}$$

   그러므로 경우의 수는 22가지이다. 바위와 보의 경우 및 B팀이 이기는 경우를 고려하면 $22\times 3\times 2=132$가지이다.

2) 첫 번째 시합에서 무승부가 되는 경우

   2.1) 모두 생존하고 무승부가 되는 경우
   이 경우는 가위, 바위, 보가 적어도 1번 이상 나오는 경우에 해당한다. 4명 중 1을 낸 인원을 x_1, 2를 낸 인원을 x_2, 3을 낸 인원을 x_3라 할 경우 서로 다른 경우의 수는 $x_1+x_2+x_3=6$, $x_i\geq 1$, $i=1,2,3$의 정수해집합의 수에 해당한다. 해집합은 10가지로 다음과 같다.

$$(1,1,4),(1,2,3),(1,3,2),(1,4,1),(2,1,3),(2,2,2),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1),(4,1,1)$$

   그러므로 경우의 수는 $(6!/4!)\times 3+(6!/(3!2!))\times 6+(6!/(2!2!2!))=540$가지이다. 모두 같은 것을 내는 경우도 여기에 해당되므로 모두 생존하고 무승부가 되는 경우의 수는 543가지이다.

   2.2) 1명씩 탈락하고 무승부가 되는 경우
   가위로 1명씩 탈락하는 경우

$$1\ 2\ 2 \mid 1\ 2\ 2$$

   경우의 수는 9가지임을 알 수 있다. 바위와 보로 탈락하는 경우를 고려하면 27가지임을 알 수 있다.

   2.3) 2명씩 탈락하고 무승부가 되는 경우
   가위로 2명씩 탈락하는 경우

$$1\ 1\ 2 \mid 1\ 1\ 2$$

   경우의 수는 9가지임을 알 수 있다. 바위와 보로 탈락하는 경우를 고려하면 27가지임을 알 수 있다.

Table 2.4의 결과들은 정리 2를 이용한 결과들과 동일함을 알 수 있다. 확률변수 X_3은 Y의 값에 따라 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$X_3=\begin{cases} 1+X_3, & Y=0,\\ 1+X_2, & Y=1,\\ 1+X_1, & Y=2,\\ 1, & Y=3. \end{cases} \tag{2.4}$$

식 (2.4)와 X_3의 성질 및 Y의 분포를 이용하면 승부가 결정될 때까지의 시행 횟수 X_3의 평균은 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned}
E(X_3) &= \sum_{y \in S} E(X_3|y)P(Y=y) \\
&= (1+E(X_3)) \times \frac{543}{729} + (1+E(X_2)) \times \frac{27}{729} + (1+E(X_1)) \times \frac{27}{729} + \frac{132}{729} \\
&= (1+E(X_3)) \times \frac{543}{729} + \left(1+\frac{33}{14}\right) \times \frac{27}{729} + (1+1.5) \times \frac{27}{729} + \frac{132}{729} \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

식 (2.5)를 이용하면

$$E(X_3) = \frac{1}{186 \times 14}(543 \times 14 + 47 \times 27 + 2.5 \times 14 \times 27 + 132 \times 14) = \frac{11664}{2604} = 4.48$$

임을 알 수 있다. 또한, 식 (2.4)로부터 X_3에 대한 2차 적률은 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned}
E\left(X_3^2\right) &= \sum_{y \in S} E\left(X_3^2|y\right)P(Y=y) \\
&= (1+E(X_3))^2 \times \frac{543}{729} + (1+E(X_2))^2 \times \frac{27}{729} + (1+E(X_1))^2 \times \frac{27}{729} + \frac{132}{729} \\
&= \left(1+2E(X_3)+E\left(X_3^2\right)\right) \times \frac{543}{729} + \left(1+2E(X_2)+E\left(X_2^2\right)\right) \times \frac{27}{729} \\
&\quad + \left(1+2E(X_1)+E\left(X_1^2\right)\right) \times \frac{27}{729} + \frac{132}{729} \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

여기서 $E(X_1) = 3/2$이고 $E(X_1^2) = 3$, $E(X_2) = 33/14$, $E(X_2^2) = 393/49$, 그리고 $E(X_3) = 11664/2604$이므로 식 (2.6)으로부터

$$\begin{aligned}
E\left(X_3^2\right) &= \left(1+2\times\frac{11664}{2604}+E\left(X_3^2\right)\right) \times \frac{543}{729} + \left(1+2\times\frac{33}{14}+\frac{393}{49}\right) \times \frac{27}{729} \\
&\quad + \left(1+2\times\frac{3}{2}+3\right) \times \frac{27}{729} + \frac{132}{729} \\
E\left(X_3^2\right) &= \frac{1}{186}\left(\frac{12966 \times 543}{1302} + \frac{(49+231+393)\times 27}{49} + 7 \times 27 + 132\right)
\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
E\left(X_3^2\right) &= \frac{1}{186}\left(\frac{12966 \times 543}{1302} + \frac{(49+231+393)\times 27}{49} + 7 \times 27 + 132\right) \\
&= \frac{1}{186 \times 7 \times 7 \times 93}((6483 \times 543) \times 7 + 673 \times 27 \times 93 + 321 \times 49 \times 93) \\
&= \frac{27794583}{847602} = 32.7902
\end{aligned}$$

이고 $E(X_3) = 11684/2604 = 2921/651$이므로

$$\mathrm{Var}(X_3) = \frac{27794583}{847602} - \left(\frac{2921}{651}\right)^2 \simeq 12.66$$

이다.

그러므로 A_1, A_2, A_3가 한 팀이며 B_1, B_2, B_3가 한 팀인 6인의 가위바위보 게임에서 승부가 결정될 때까지의 총 시행 횟수 X_3에 대한 분산은 $\mathrm{Var}(X_3) \simeq 12.66$임을 알 수 있다. □

Table 2.5. Statistics of the number of games according to game rules

m	Statistics	Method Ⅰ	Method Ⅱ	Method Ⅲ
1	Mean	1.50	1.50	1.50
	Variance	0.75	0.75	0.75
2	Mean	3.75	2.36	2.93
	Variance	3.00	2.46	3.42
3	Mean	6.19	4.49	5.78
	Variance	5.20	12.66	14.72

각 팀의 참가 인원 m이 1, 2, 그리고 3인 경우 승부 결정방식 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ에 따른 결과들을 정리하면 Table 2.5와 같다. 매번의 시합에서 이긴 사람이 많은 팀이 이기는 승부 결정방식 방법 Ⅱ인 경우보다 이긴 사람이 한 팀에만 있는 경우 승부가 결정되는 승부 결정방식 Ⅲ인 경우 평균과 분산이 더 많음을 알 수 있다. $m = 3$인 경우 1명씩 상대 팀에 선수가 없을 때까지 가위바위보 게임을 하는 경우 승부 결정방식 Ⅱ보다 평균 횟수는 많으나 분산은 더 작음을 알 수 있다.

3. 결언

두 팀 간에 벌이는 다양한 경기에서 공격과 수비를 정하거나 진영을 결정할 때 토스나 가위바위보 게임을 이용한다. 각 두 명씩 한 팀이 되어 벌이는 복식경기에서 4명이 동시에 가위바위보 게임을 통하여 진영을 결정하는 것은 보편화 되어 있다. 가위바위보 게임을 통하여 두 팀 중 한 팀을 결정하거나 여러 팀 중 하나를 선택하는 경우 다양한 승부 결정방식이 있을 수 있다. 본 연구에서는 두 팀의 구성원 수가 같은 경우 다양한 승부 결정방식에 따라 승부가 결정될 때까지의 총 게임 수의 평균과 분산을 구하였다. 승부 결정방식으로는 각 팀에서 1명씩 시합하여 상대 팀의 구성원이 없을 때까지 하는 방식과 구성원 모두가 동시에 하는 가위바위보 게임을 고려하였다. 구성원 모두가 동시에 하는 게임의 경우 매 시합에서 승자가 많은 팀이 이기는 승부 결정방식과 매 시합에서 승자들이 한 팀에서만 승자가 나올 때까지 계속하는 승부 결정방식을 고려하였다.

복식경기에서 가위바위보 게임을 통하여 먼저 공격할 팀을 결정할 경우, 4명 모두가 동시에 가위바위보에 참여하는 것이 한 명씩의 대표를 뽑는데 머뭇거리는 시간까지를 고려하면 심리적인 측면과 함께 시간적인 측면에서도 대표인 2명이 하는 것보다 4명 모두가 참여하는 것이 바람직하다고 할 수 있다. 그러나 각 팀이 3명씩으로 구성된 경우 어느 승부 결정방식을 고려하더라도 게임이 끝날 때까지 걸리는 시간이 만만치 않음을 알 수 있다. 본 연구에서 사용한 방법들은 각 팀 구성원의 수가 같지 않은 경우에도 활용할 수 있다. 본 연구의 결과들을 활용하면 구성원 수가 다른 두 팀이 가위바위보 게임을 통하여 팀의 승리를 결정하는 경우 걸리는 시간을 예측할 수 있으며 참여 인원과 주어진 시간에 따라 다양한 전략을 세울 수 있다.

References

Chang, D. K. (1995). A game with four players, *Statistics and Probability Letters*, **23**, 111–115.

Cho, D. (1996). A game with n players, *Journal of Korean Statistical Society*, **25**, 185–193.

Cho, D. (2010). Decision making through the game of scissors-paper-stone and simulation, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **23**, 1217–1224.

Cho, D. (2019). The game of Rock-Paper-Scissors between two teams, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **32**, 277–289.

Cho, D. and Kim, B. (2012). Method of choosing one in the doubles through the game of rock-paper scissors, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 785–792.

Chung, K. L. (1974). *A Course in Probability Theory* (2nd ed), Academic Press, New York.

Ross, S (2006). *A First Course in Probability* (4th ed), Prentice Hall, New Jersey.

Sandell, D. (1989). A game with three players, *Statistical Probability Letters*, **7**, 61–63.

Shin, Y. (2004). *Basic Theory of Probability*, Kyungmoon Press, Seoul.

게임 룰에 따른 두 팀 간에 벌이는 가위바위보 게임 수 비교

조대현[a,1]

[a]인제대학교 통계학과

(2020년 7월 17일 접수, 2020년 8월 14일 수정, 2020년 8월 14일 채택)

요 약

우리는 게임에 앞서 먼저 가위바위보 게임을 통하여 공격할 팀을 결정하곤 한다. 가위바위보 게임은 둘 중 혹은 여러 사람 중에서 하나를 선택하고자 할 때도 사용된다. 두 팀 중 한 팀을 선택하고자 할 때 가위바위보 게임을 사용할 경우 다양한 승부 결정방식이 존재한다. 각 팀에서 1명씩 가위바위보 게임을 하여 승자가 다른 팀의 남은 사람과 계속하여 상대 팀의 남은 자가 없는 경우 승자 팀이 최종 승리하는 승부 결정방식을 생각할 수 있다. 참여한 모든 사람이 함께 가위바위보 게임을 하여 매 게임에서 승자들의 수가 많은 팀이 승리하는 경우와 한 팀에만 승자가 남는 경우 그 팀이 승리하는 승부 결정방식도 고려할 수 있다. 본 연구에서는 승부 결정방식에 따라 게임이 끝날 때까지 가위바위보의 총 게임 수에 대한 평균과 분산을 구하는 방법을 연구하였다.

주요용어: 가위바위보 게임, 경우의 수, 평균, 분산

이 연구는 2019년 인제대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음.

[1](50834) 경남 김해시 인제로 199, 인제대학교 통계학과, 통계정보연구소. E-mail: statcho@inje.ac.kr