



Statistical investigation on size distribution of suspended cohesive sediment

Park, Byeoungeun^a · Byun, Jisun^{b*} · Son, Minwoo^c

^aPh.D. Candidate, Department of Civil Engineering, Chungnam National University, Daejeon 34134, Korea

^bPost-Doctoral Fellow, Research Institute for Smart Infrastructure and Construction, Chungnam National University, Daejeon 34134, Korea

^cAssociate Professor, Department of Civil Engineering, Chungnam National University, Daejeon 34134, Korea

Paper number: 20-066

Received: 14 July 2020; Revised: 25 August 2020; Accepted: 25 August 2020

Abstract

The purpose of this study is to find the appropriate probability distribution representing the size distribution of suspended cohesive sediment. Based on goodness-of-fit test for a significance level of 5% using the Kolmogorov-Smirnov test, it is found that the floc size distributions measured in laboratory experiment and field study show different results. In the case of sample data collected from field experiments, the Gamma distribution is the best fitting form. In the case of laboratory experiment results, the sample data shows the positively-skewed distribution and the GEV distribution is the best fitted. The lognormal distribution, which is generally assumed to be a floc size distribution, is not suitable for both field and laboratory results. By using 3-parameter lognormal distribution, it is shown that similar size distribution with floc size distribution can be simulated.

Keywords: Cohesive sediment, Floc, Size distribution, Goodness-of-fit test

점착성 부유사의 입도분포형 검증

박병은^a · 변지선^{b*} · 손민우^c

^a충남대학교 공과대학 토목공학과 박사과정, ^b충남대학교 스마트인프라건설연구소 박사후연구원, ^c충남대학교 공과대학 토목공학과 부교수

요 지

본 연구는 점착성 부유사의 입도분포에 적합한 이론적 확률분포형을 찾는 것을 목적으로 수행되었다. 유의수준 5%에 대해 적합도 검정을 수행한 결과, 실험실 실험자료와 현장실험 자료에서 측정된 플럭입도분포는 다른 결과를 나타냈다. 현장실험으로부터 얻어진 표본자료의 경우 왼쪽으로 치우친 지수분포의 형태를 나타내며, Gamma 분포가 가장 우수하였다. 실험실실험 자료의 경우 표본자료가 양의 왜도를 가지며 GEV 분포가 가장 적합하였다. 많은 연구에서 점착성 유사의 입도분포로 가정되는 2매개변수 Lognormal 분포의 경우 현장실험 자료와 실험실실험 자료 모두 적합하지 않았으며, 위치매개변수를 추가하여 3매개변수 Lognormal 분포 적용 시 점착성 유사의 입도분포를 모사할 수 있는 것으로 나타났다.

핵심용어: 점착성 유사, 플럭, 입도분포, 적합도 검정

1. 서 론

흐름을 따라 부유 상태로 이동하는 유사는 점착성 유무에 따라 점착성 유사와 비점착성 유사로 구분할 수 있다. 점착성 유사는 비점착성 유사에 비해 유사입자의 크기가 작으며, 1차 입자(Primary Particle) 표면의 전자기적 점착력으로 인해 점

착성을 띠는 유사로 정의할 수 있다. 점착성 유사는 응집과정과 파괴과정으로 구성되는 응집현상(Flocculation Process)을 통해 수십 개에서 수천 개의 1차 입자와 물의 덩어리인 플럭(Floc)을 형성한다. 응집현상으로 인해 플럭의 크기, 밀도, 침강속도와 같은 물리적 특성은 지속적으로 변화하며, 침강속도의 변화는 유사의 부유와 퇴적과정에 직접적으로 영향을 미치게 된다. 반면 비점착성 유사는 점착성 유사에 비해 입자의 크기가 상대적으로 크며, 유사입자의 물리적 특성은 변하지 않는 유사를 말한다.

*Corresponding Author. Tel: +82-42-821-7745
E-mail: jsbyun@cnu.ac.kr (J. Byun)

점착성 유사의 응집현상에 따른 밀도, 크기, 입도분포와 같은 물리적 특성에 관한 실험실 및 현장실험은 꾸준히 수행되어 왔으며(*e.g.*, Eisma *et al.*, 1990; Owen, 1976; Dyer *et al.*, 1996; Gibbs, 1982; Agrawal and Traykovski, 2001; Mikkelsen *et al.*, 2006; Mazumder *et al.*, 2005; Wu *et al.*, 2012; Zhang *et al.*, 1997; Blott and Pye, 2006; Guo *et al.*, 2018), 응집현상을 살펴보기 위한 수치모형의 개발 또한 활발하게 수행되어왔다. 점착성 유사의 응집모형은 Population Balance Equation (PBE) 모형과 Floc Growth Model (FGM) 모형으로 구분할 수 있다. PBE모형은 특정 지역에서 존재할 것으로 예상되는 플럭 크기의 범위를 가정한 후 여러 계급구간으로 나누어 시간에 따른 계급구간 별 플럭의 개수 변화를 계산한다. PBE모형은 플럭의 응집현상에 관여하는 다양한 메커니즘들을 모두 고려할 수 있는 반면, 수치계산 비용이 크고, 지나치게 많은 매개변수로 인한 보정의 문제점 등을 가진다(McAnally and Mehta, 2000; Maggi *et al.*, 2007; Lick *et al.*, 1992; Verney *et al.*, 2011). FGM모형은 플럭의 응집현상을 응집과 파괴의 과정으로 고려하고, 이들의 경쟁관계를 식으로 표현하여 시간에 따른 플럭 평균 입경의 크기 변화를 계산한다. PBE모형에 비해 적은 수의 매개변수만이 요구되며, 닫힌 계(Closed System)에서의 질량보존을 이론적으로 만족하는 장점이 있다. 그러나 FGM모형은 플럭의 평균크기만을 계산하기 때문에 입도 분포에 대한 정보를 얻을 수 없다는 단점 또한 존재한다.

점착성 유사의 특성과 응집현상에 대한 연구가 활발히 이루어져 왔으나, 많은 연구에서 플럭입도분포의 형태는 대수정규분포를 따르는 것으로 가정하여 적용되어 왔다(*e.g.*, Shen and Maa, 2015; Marchiso *et al.*, 2003). Biggs and Lant (2000)는 활성슬러지를 이용하여 교반 탱크(Mixing Tank) 내 난류의 소산매개변수(Turbulent Shear Rate, G)에 따른 플럭의 평형크기와 입도분포를 살펴보았다. 여기서, G 는 플럭의 응집현상에 관여하는 난류의 영향을 나타내는 매개변수로 정의할 수 있다. 실험실 실험결과로부터 난류의 소산매개변수와 플럭 평형크기가 지수법칙을 따르는 관계가 있음을 확인하였으며 입도분포가 대수정규분포를 따른다고 주장하였다(Biggs and Lant, 2000). Fettweis *et al.* (2012)과 Lee *et al.* (2012)은 현장실험을 통해 부유사의 입도분포를 측정하였는데, 일반적으로 플럭의 입도분포는 대수정규분포를 따른다고 가정하였다. 다봉분포(Multimodal Distribution)의 경우, 플럭을 구성하는 성분(Building Block) 별로 구분되는 대수정규분포가 중첩되어 생성된다고 주장하였다(Lee *et al.*, 2012). 연구 동향 조사결과에 따르면 많은 연구에서 플럭의 입도분포를 대수정규분포로 가정하여 적용하는 것이 확인되나, 실제 확

률분포형에 관한 논의를 수행한 연구사례는 많지 않다. Li and Ganczarczyk (1990)은 Metro Toronto 인근 지역의 5개 지점에서 부유사를 채취하여 플럭의 입도분포를 살펴보고, 확률분포형에 관한 연구를 수행하였다. 채취된 샘플을 모든 크기의 플럭이 포함된 샘플과 $10 \mu\text{m}$ 보다 큰 플럭만 포함된 샘플로 구분하여 분석하였는데, 이는 대다수의 플럭이 $10 \mu\text{m}$ 보다 작은 계급구간에 존재하기 때문이다. 모든 플럭이 포함된 샘플을 대상으로 회귀분석을 수행한 결과, 지수분포가 가장 적합하다고 주장하였다(Li and Ganczarczyk, 1990). $10 \mu\text{m}$ 보다 큰 플럭만을 추출하여 적합도 검정을 수행한 결과, Lognormal분포, Weibull분포, Gamma분포 중 Lognormal 분포가 다른 분포에 비해 우수함을 확인하였다. 그러나 전체 표본 31개 중 8개는 5% 유의수준을 통과하지 못한 것으로 나타났다(Li and Ganczarczyk, 1990). Li and Ganczarczyk (1990)은 분석결과를 바탕으로 확률밀도함수식을 제안하였으나, 해당 식은 Metro Toronto 지역에서 채취된 플럭의 입도분포만을 대상으로 개발되었다는 한계점이 존재한다. 수치모형을 이용한 연구로는 플럭의 평형크기를 모의하는 FGM모형의 계산과정에 통계학적 접근법을 적용한 사례가 조사되나(Shin *et al.*, 2015), 난수를 발생시키는 과정에서 플럭의 입도분포를 대수정규분포로 가정하여 적용하였다.

대수정규분포는 자연현상을 모사하기 위해 널리 이용되며 특히 생물의 성장이나 입자의 입도분포, 인구수의 증가와 같은 많은 사회 및 과학적 현상에 이용되는 분포이다. 그러나 플럭입도분포의 대수정규분포에의 적합성을 이론적으로 규명한 사례는 많지 않으며 그 신뢰성과 적합성에 대한 연구는 부족한 실정이다. 이에 본 연구에서는 통계학적 기법인 적합도검정법을 이용하여 점착성 유사의 입도분포가 실제로 모사하는 이론적 확률분포형을 찾아보고자 한다. 점착성 유사의 입도분포를 측정된 현장 및 실험실 자료를 수집하여 데이터 처리를 수행한 후, 적합도 검정을 실시하여 점착성 유사의 입도분포를 나타내는 이론적 확률분포형을 찾아 결과를 구체화한다.

2. 연구 방법

2.1 적합도 검정

통계학에서 사용하는 적합도 검정(Goodness-of-fit Test)은 자료에 가장 적합한 확률분포형을 결정하는 절차로, 널리 이용되는 적합도 검정법에는 K-S 검정법과 카이제곱(Chi-Squared) 검정법이 있다. 카이제곱 검정법은 각 계급구간에서의 기대도수와 관측도수의 차이를 이용한 방법으로 이산형 데이터에

주로 사용된다. 연속형 자료를 이용하여 카이제곱 검정을 적용하고자 할 때, 계급구간을 나누어 이산형 자료로 변환하는 과정이 필요하며 분할하는 계급구간의 수가 검정결과에 영향을 미치게 된다. 이로 인해 표본 자료의 크기가 충분히 커야만 검정법의 정확도가 높은 특징이 있다. 반면 K-S검정은 표본의 크기가 작은 경우에도 연속형 자료에 적용할 수 있어 카이제곱 검정에 비해 효율적인 것으로 알려져 있다(Massey Jr, 1951). 본 연구에서 분석하고자 하는 점착성 유사의 입도분포 자료는 연속형 데이터에 속하므로 K-S 검정법을 이용하여 적합도 검정을 수행하였다.

K-S 검정법은 관측된 자료의 누가주상도와 검정하려는 이론적인 누가확률곡선과의 차이를 구해 그 중 최대로 나타나는 차이를 임계치와 비교하여 판단하는 방법이다. 먼저 관측자료를 크기순으로 배치하여 Eq. (1)을 이용하여 누가 확률을 구한다.

$$F_o(x) = \frac{k}{n} \quad x_k \leq x < x_{k+1} \quad (1)$$

여기서 $F_o(x)$ 는 k 번째 구간에 속하는 x 의 누가확률을 의미하고, k 는 자료의 순번이며, n 은 자료의 총 수이다. $x_k \leq x < x_{k+1}$ 는 관측자료를 오름차순으로 정렬한 것을 나타낸다. K-S 검정의 검정통계량 D_n^α 는 관측된 자료의 누가확률 $F_o(x)$ 와 가정된 이론 확률분포의 누가확률 $F(x)$ 의 최대편차로 Eq. (2)로 계산된다.

$$D_n^\alpha = \text{Max} |F(x) - F_o(x)| \quad (2)$$

계산된 D_n^α 가 자료의 수와 유의수준(α)에 따라 결정되는 임계값 보다 작은 경우 이 자료는 검정하는 확률분포형을 유의수준 α 를 가지고 따른다고 할 수 있다.

2.2 확률분포형

점착성 부유사 입도분포 자료의 적합도 검정과정에서 고려한 총 29개의 분포형 중 공통적으로 적합도가 높은 분포형인 Lognormal 분포, Weibull 분포, Gamma 분포, GEV 분포로 제한하여 적합도 검정을 수행하였다.

2.2.1 Lognormal 분포

무작위변수에 대수를 취한 자료가 정규분포를 따를 때, 원래의 무작위변수는 대수정규(Lognormal) 분포를 따르는 것으로 정의된다. 즉, $y = \log x$ 라고 할 때 y 가 정규분포를 따르면 x 는 Lognormal 분포를 따르게 된다. Lognormal 분포에는

2변수 및 3변수 Lognormal 분포가 있으며, 2변수 Lognormal 분포는 매개변수로 평균과 표준편차를 가지며, 분포의 기본 확률밀도함수는 Eq. (3)과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu_l}{\sigma_l} \right)^2 \right] \quad 0 \leq x < \infty \quad (3)$$

여기서 μ_l, σ_l 는 각각 $y(=\ln x)$ 의 평균과 표준편차를 나타낸다. Fig. 1(a)은 Lognormal 분포의 축척 매개변수인 표준편차에 따른 분포의 변화를 나타낸다. Lognormal 분포는 일반적으로 자료가 양의 값을 가지며, 오른쪽으로 왜곡된 경우의 분포를 모사할 때 이용한다.

2.2.2 Weibull 분포

Weibull 분포는 Type-III 극치분포로도 불리는 연속확률 분포로, 하한치가 0이며 일반적으로 오른쪽으로 왜곡되어 있는 형태를 보인다. 축척 매개변수와 형상 매개변수를 가지는 2변수 확률분포형으로, 기본 확률밀도함수는 Eq. (4)와 같다.

$$f(x) = \frac{\xi}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{\xi-1} \exp \left[-\left(\frac{x}{\sigma} \right)^\xi \right] \quad (4)$$

여기서, σ 는 축척 매개변수이며 ξ 는 형상 매개변수이다. Fig. 1(b)는 ξ 에 따른 Weibull 분포의 형태를 나타낸다. Weibull 분포는 지수 분포의 형태도 모사가 가능하며 Lognormal 분포 보다 다양한 형태를 나타낼 수 있다(Fig. 1(b)).

2.2.3 Gamma 분포

2변수 Gamma 분포는 축척 매개변수(λ_g)와 형상 매개변수(r_g)를 가지는 연속확률분포로 기본확률밀도함수는 Eq. (5)와 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_g \Gamma(r_g)} \left(\frac{x}{\lambda_g} \right)^{r_g-1} \exp \left(-\frac{x}{\lambda_g} \right) \quad (5)$$

여기서 Γ 는 감마 함수이다. r_g 의 값에 따라 감마 분포, 지수 분포, 카이제곱 분포 등 다양한 분포형을 나타낼 수 있다. Fig. 1(c)은 λ_g 와 r_g 에 따른 Gamma 분포를 나타낸다.

2.2.4 GEV 분포

GEV 분포는 3변수 연속확률분포로, 축척 매개변수(α_g), 형상 매개변수(k_g), 위치 매개변수(ϵ_g)를 갖는다. 기본확률밀

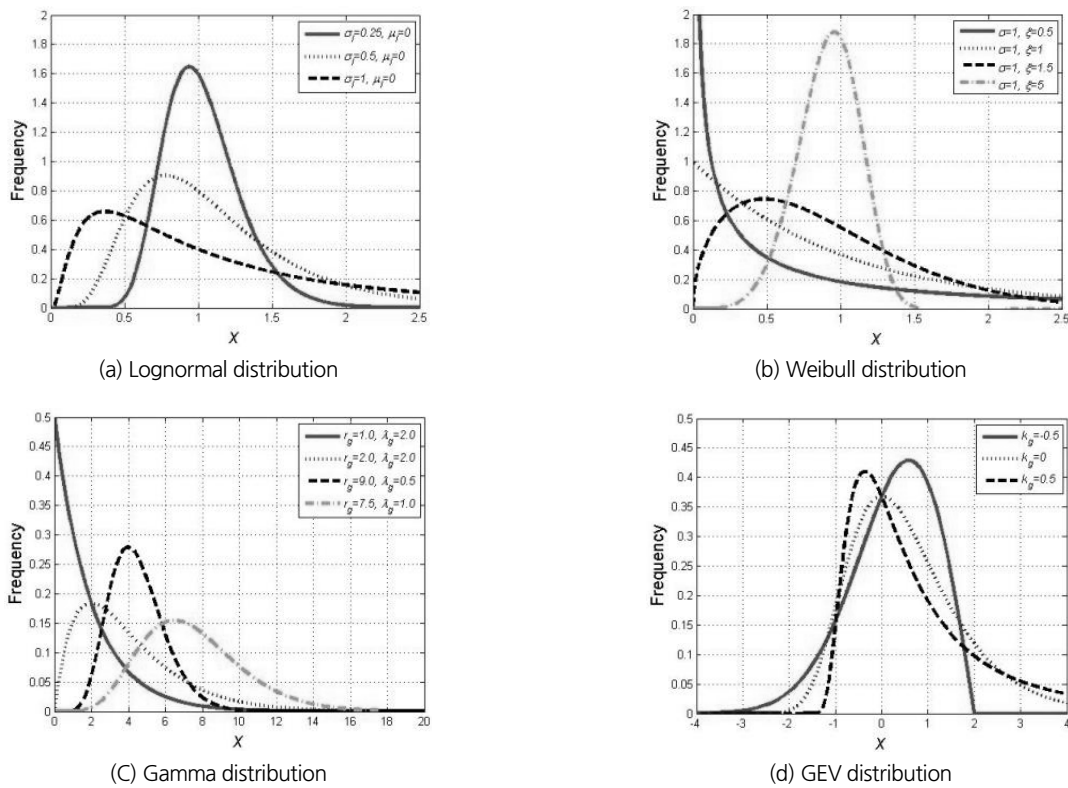


Fig. 1. Probability distributions of continuous random variables

도 함수는 Eq. (6)과 같으며, k_g 에 따른 분포변화가 Fig. 1(d)에서 나타난다.

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_g} \left[1 - \frac{k_g(x - \epsilon_g)}{\alpha_g} \right]^{\frac{1}{k_g} - 1} \exp \left[- \left(1 - \frac{k_g(x - \epsilon_g)}{\alpha_g} \right)^{\frac{1}{k_g}} \right] \quad (6)$$

여기서 변수 x 의 범위는 k_g 의 부호에 따라 결정된다. $k_g < 0$ 경우 분포의 왜도가 음의 값을 나타내는 Frechet 분포를 따르고, $k_g = 0$ 인 경우 Gumbel 분포, $k_g > 0$ 인 경우 양의 왜도를 나타내는 Weibull 분포를 따른다.

2.3 표본 자료 생성과정

점착성 유사의 입도분포를 추정하기 위해 수집한 입도분포 자료는 총 27개로 이 중 18개는 실험실실험 자료이며 9개는 현장실험 자료에 해당한다. 수집된 자료들은 플럭의 크기에 따른 계급구간별 상대빈도가 나타난 히스토그램 자료이다. 적합도 검정을 수행하기 위해 히스토그램 자료를 바탕으로 난수를 이용하여 표본자료를 생성하였다. 수집된 히스토그램

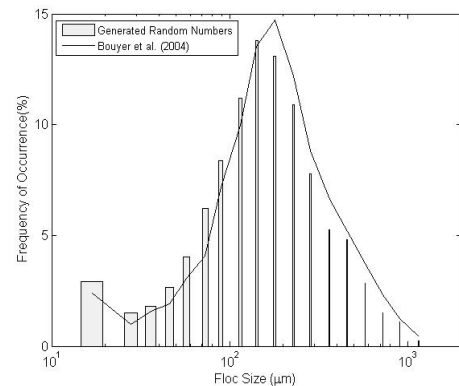


Fig. 2. Results of generated random numbers and laboratory experiments (Bouyer *et al.*, 2004)

별 계급구간과 상대빈도의 수치를 바탕으로 Matlab을 이용하여 계급구간 별로 균등분포를 따르는 난수를 상대빈도만큼 발생시켜 표본 자료를 생성하였다. 계급구간의 개수는 원자료와 동일하게 지정하였으며, 자료의 크기는 가정하여 적용하였다. Fig. 2는 생성된 표본자료와 원자료를 함께 도시한 결과이다. 모든 자료는 동일한 방식으로 표본자료를 생성한 후, EasyFit을 이용하여 GEV 분포, Lognormal 분포, Weibull 분포, Gamma 분포에 대한 적합도 검정을 수행하였다.

3. 결과 및 분석

K-S 검정법의 검정 통계량은 표본이 가지는 분포가 가정된 이론적 확률분포를 잘 모사할수록 작다. 본 연구에서는 자료의 적합도 검정 통과여부를 살펴볼 때, 가시성을 높이기 위해 유의수준 5%를 기준으로 검정 통계량과 검정 통계를 위한 임계값의 차이를 계산하여 ‘통계량(D)’으로 정의하였으며, 이를 식으로 나타내면 Eq. (7)과 같다.

$$D = D_c - D_n^{0.05} \tag{7}$$

여기서 D_c 는 임계값을 나타내며, D 는 통계량, $D_n^{0.05}$ 는 유의수준 5%, 표본자료의 크기 n 일 때의 검정통계량을 나타낸다. D 가 양수인 경우는 $D_n^{0.05}$ 이 D_c 보다 작은 경우로, 적합도 검정을 통과한 것을 나타내며, 음수인 경우에는 검정을 통과하지 못한 것으로 정의된다. 검정통계량은 누가주상도와 검정하려는 이론적 누가확률곡선과의 차이 중 가장 큰 값으로, 검정통계량의 값이 작을수록 자료의 형태가 가정된 분포에 적합도가 높다. 이에 따라 임계값과 검정통계량의 차이인 통계량의 값이 클수록 자료의 형태가 가정된 분포에 가까운 것으로 생각해 볼 수 있다.

3.1 현장 측정 실험자료

현장실험으로부터 얻어진 9개의 자료를 이용하여 적합도 검정을 수행하였다. 현장실험시 플럭의 입도분포를 측정하기 위해 널리 이용되는 장비인 LISST-100X는 측가능한 플럭의 최대크기가 $500 \mu\text{m}$ 로 제한된다. 이에 따라 본 연구에서는 수집된 입도분포 자료 중 최빈값이 $500 \mu\text{m}$ 보다 충분히 작은 데이터만을 이용하여 분석하였다. Table 1은 현장실험 자료의 적합도 검정결과를 나타낸다.

Schwarz *et al.* (2017)은 Scheldt 하구에서 유체의 흐름, 난류 특성, 부유사의 농도, 플럭의 특성을 조사하였다. 장비의 한계로 $500 \mu\text{m}$ 이하의 플럭들만이 측정된 것이 확인되며, 히스토그램의 첫 번째 계급구간에서 관측도수가 가장 높은 것이 확인된다(Fig. 3).

적합도 검정결과에서는 자료의 분포가 오른쪽으로 왜곡된 분포를 모사할 수 있는 Weibull 분포와 Gamma 분포가 유의수준 5%의 적합도 검정을 통과하는 것으로 나타난다. 계산된 통계량을 기준으로 살펴보면 Gamma 분포의 경우 0.0219이고, Weibull 분포의 경우 0.0175로, Gamma 분포의 D 가 더 크므로 Schwarz *et al.* (2017)의 자료는 Gamma 분포에 더 가까운 형태인 것을 알 수 있다.

Yang *et al.* (2016)은 중국 황해 남서부에 위치한 B4지점과 D1지점에서 점착성 유사의 입도분포를 살펴보았다. B4지점의 수심이 D1지점보다 깊다. D1지점이 B4지점보다 평균유속은 빠르며, 부유사의 농도는 약 4배 이상 높은 것으로 확인된다. 각 지점에서 하상으로부터 각각 0.5 m 떨어진 지점과 1.0 m 떨어진 지점에서 조석의 간조(Low Water)일 때와 간조에서

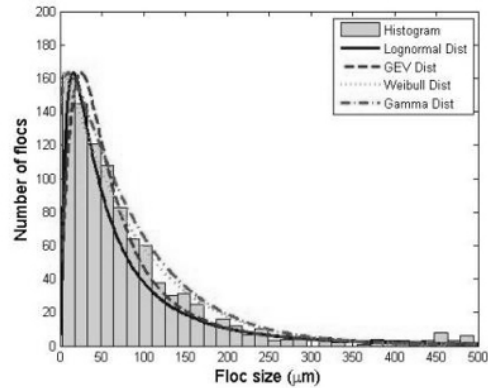


Fig. 3. Size distribution of Schwarz *et al.* (2017)

Table 1. Calculated value of D based on K-S test (in-situ measurement data, 2-parameter)

Reference	Case	GEV	Lognormal	Weibull	Gamma	Distribution
Schwarz <i>et al.</i> (2017)		-0.0037	-0.0189	0.0175	0.0219	Gamma
Yang <i>et al.</i> (2016)	1	-0.0177	-0.0019	0.0056	-0.0145	Weibull
	2	-0.0279	-0.0057	0.0045	0.0056	Gamma
	3	-0.0099	-0.0057	0.0056	-0.0172	Weibull
	4	-0.0190	0.0001	0.0042	0.0079	Gamma
	5	-0.0444	-0.0827	-0.0408	-0.0804	
	6	0.0158	-0.0466	0.0139	0.0152	GEV
	7	0.0238	-0.0309	0.0177	0.0245	Gamma
	8	0.0205	-0.0289	0.0216	0.0245	Gamma

만조로 상승할 때(Mid-Flood) 플럭입도분포를 측정하였다. 측정이 수행된 지점과 하상으로부터의 거리, 흐름 조건 등 각 케이스별 실험조건이 Table 2에서 요약된다. Yang *et al.* (2016)의 실험 케이스 8개 중 7개의 자료가 모두 Weibull 분포를 통과한 것이 Table 1에서 확인된다. 그러나 Weibull 분포와 Gamma 분포를 동시에 통과하는 경우에는 Gamma 분포의 통계량이 조금 더 큰 값을 가지므로 Gamma 분포가 플럭입도분포를 더 우수하게 모사하는 것으로 생각해 볼 수 있다. B4 측정지점에서 측정된 자료의 경우 매개변수가 2개인 Weibull 분포와 Gamma 분포 모두 적합도 검정을 통과함을 알 수 있다. D1 지점에서 측정된 자료 중 Case 6, Case 7, Case 8의 경우 Weibull 분포와 Gamma 분포 뿐 아니라 GEV 분포도 함께 통과하는 것이 나타난다. Fig. 4(a)는 Case 4의 적합도 분포 결과를 나타낸다. 가장 작은 계급구간에서 관측도수가 가장 높다. Case 4 및 Case 8의 경우 일반적인 양의 왜도를 나타내는 분포인 것이 확인되나(Fig. 4), 대수정규분포에 대한 적합도 검정을 통과하지 못했으며 Gamma 분포가 가장 우수한 것으로 나타난다 (Table 1).

Figs. 3 and 4(a)에서 가장 작은 계급구간에서 대부분의 표본이 위치하는 것을 알 수 있는데, 분포의 중심이 치우치지 않은 자료를 이용하여 표본자료를 생성하는 경우에도 원 자료의

히스토그램이 대수축을 기준으로 도시되어 있어 표본의 대부분이 히스토그램의 가장 작은 계급구간에 위치하는 것을 확인하였다. 따라서 가장 작은 계급구간에서 많은 자료들이 분포하는 이유는 변화하는 흐름조건으로 인해 평형상태에 도달하지 못한 플럭이 다수 존재하거나, 응집 및 파괴 중 우세한 과정으로 인해 작은 크기의 유사입자가 많이 생성되기 때문으로 생각해 볼 수 있다.

3.2 실험실실험 자료

실험실 자료는 통제된 흐름 조건에서 충분히 시간이 지나 플럭의 응집과정이 평형상태에 도달했을 때의 입도분포를 나타낸다. 하나의 연구에서 수행한 여러 실험결과를 모두 분석하였는데, 이는 흐름의 유동학적 특성에 따라 플럭의 크기와 입도분포가 변화하기 때문이다.

Bouyer *et al.* (2004)은 난류소산매개변수(G)에 따른 응집 과정, 파괴과정, 파괴 후 재응집과정으로 구분하여 플럭의 크기 변화 및 입도분포를 살펴보았다. 여기서 G 는 난류가 플럭의 응집현상에 영향을 미치는 정도를 정량화하는 매개변수로 정의할 수 있다. Bouyer *et al.* (2004)의 실험조건은 Table 3에서 요약된다. Case 1은 A310 임펠러를 이용하여 G 가 10 s^{-1} 인 경우의 자료를 나타낸다. 해당 실험에서 G 의 크기를 증가시켜

Table 2. Experimental conditions of Yang *et al.* (2016)

Case	Site	Depth	Tidal phase	Case	Site	Depth	Tidal phase
1	B4	0.5 m	Low	5	D1	0.5 m	Low
2	B4	0.5 m	Mid	6	D1	0.5 m	Mid
3	B4	1.0 m	Low	7	D1	1.0 m	Low
4	B4	1.0 m	Mid	8	D1	1.0 m	Mid

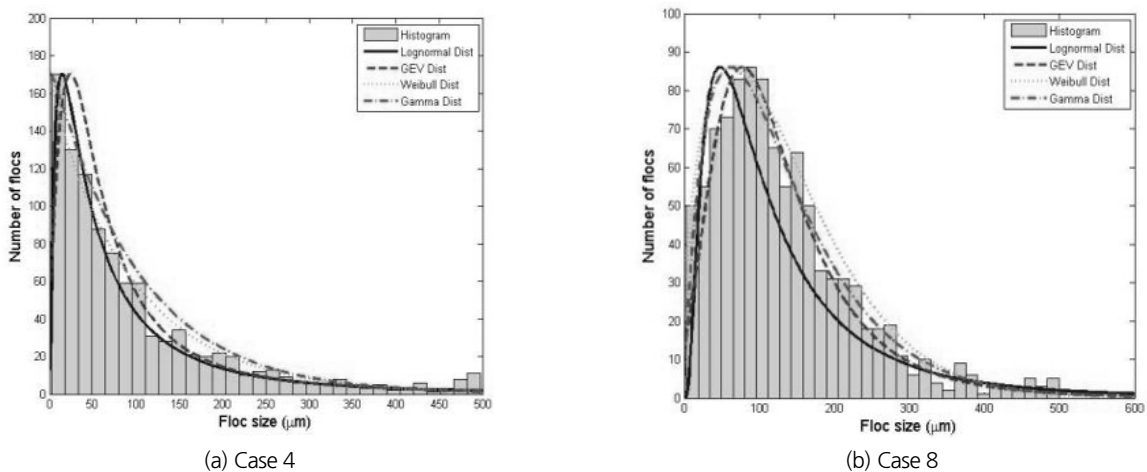


Fig. 4. Size distribution of Yang *et al.* (2016)

Table 3. Experimental conditions for Bouyer *et al.* (2004)

Case	G (s^{-1})	Stage	Impeller	Case	G (s^{-1})	Stage	Impeller
1	10	Flocculation	A310 Foil Impeller	5	10	Flocculation	Rushtone Turbine
2	10	Reflocculation		6	10	Reflocculation	
3	100	Flocculation		7	100	Flocculation	
4	100	Reflocculation		8	100	Reflocculation	

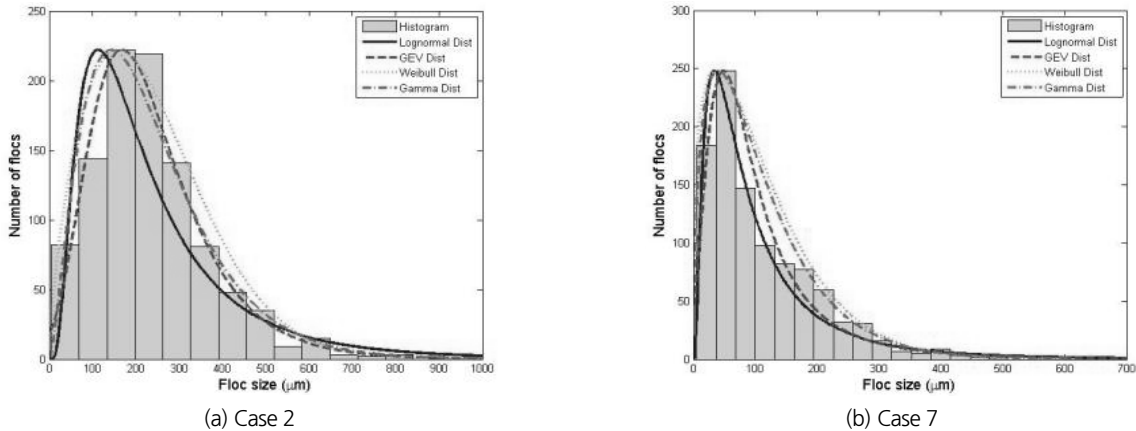


Fig. 5. Size distribution of Bouyer *et al.* (2004)

플럭의 파괴 과정을 모사하여 보다 작은 크기의 입자로 모두 파괴가 발생하고 난 후, G 의 크기를 다시 $10 s^{-1}$ 으로 감소시켜 재응집과정에 따른 입도분포와 크기변화를 살펴보았다. 이때 재응집과정이 Case 2에 해당한다. G 를 $100 s^{-1}$ 으로 설정하여 동일한 실험을 시행하였으며(Case 3 및 Case 4), 다른 종류의 임펠러를 사용하여 동일한 실험을 반복 수행함으로써 임펠러의 형태에 따른 플럭 입도분포의 변화 또한 살펴보았다. Bouyer *et al.* (2004)에서 제시된 입도분포 자료의 대다수는 오른쪽으로 왜곡된 형태인 것이 나타난다(Fig. 5). 각 실험 케이스별 적합도 검정 결과는 Table 4에서 요약된다. 총 8개의 자료 중 6개의 자료가 GEV 분포에 가장 적합하며, 2개 자료는 2매개변수의 Weibull 분포와 Gamma 분포에 적합한 것으로 확인된다(Case 3 및 Case 7). 통계량 값을 비교해보면 Weibull 분포보다는 Gamma 분포에 더 적합함을 알 수 있다. Figs. 5(a) and 5(b)는 각각 GEV 분포에 적합한 Case 2와 Gamma 분포에 적합한 Case 7의 자료를 분석한 결과이다. 2매개변수 Gamma 분포에 적합한 경우의 자료를 살펴보면 GEV 분포에 적합한 경우보다 자료의 분포가 오른쪽으로 왜곡되어 있다. 또한 Lognormal 분포를 통과한 Case 8의 경우 왜곡도가 양수이며, 함께 적합도 검정을 통과한 GEV 분포 및 Gamma 분포와 비교 시 Lognormal 분포의 통계량이 가장 작다.

Bouyer *et al.* (2001)은 벤토나이트와 알루미늄 응고제를 이

용하여 교반 탱크(Mixing Tank)에서 응집실험을 수행하였다. 임펠러의 회전속도를 조정하여 탱크 내 G 값을 변화시켜가며 실험을 수행하였다. 실험은 총 4가지 조건으로 수행되었으며 Case 1, Case 2, Case 3, Case 4는 각각 30 rpm, 45 rpm, 60 rpm, 150 rpm의 실험조건에 해당한다. Case 1에서는 실험 초기에 분포가 오른쪽으로 왜곡된 지수 분포의 형태에서 시간이 흐를수록 점차 플럭의 평균 크기가 성장한다. Case 1의 경우 가장 적합한 확률분포형은 2매개변수 Gamma 분포로 확인된다(Table 4). Case 2는 4개의 확률분포형 모두 유의수준 5%의 적합도 검정을 통과하지 못하였다(Fig. 6(a)). Case 3의 실험 결과는 평형상태에 도달함에 따라 플럭입도분포의 최빈값이 증가하며 분포의 범위는 Case 1 보다 작다. 적합도 검정결과 GEV 분포와 2매개변수 Gamma 분포 모두 유의수준 5%를 통과하나, GEV 분포가 더 적합한 것으로 나타난다(Table 4). Case 4는 평형상태에 도달함에 따라 입도분포의 최빈값이 감소하는 현상을 보였으며, 입도분포의 범위 또한 가장 작은 값을 가진다. 적합도 검정 결과, GEV 분포와 2매개변수 Gamma 분포 모두 유의수준 5%를 통과하였지만 통계량을 비교해볼 때 GEV 분포가 더 적합한 것이 확인된다(Table 4 및 Fig. 6(b)).

Jin and Lant (2004)는 활성슬러지를 이용하여 반응기의 종류에 따른 평형상태의 플럭입도분포의 변화를 살펴보았다.

Table 4. Calculated value of *D* based on K-S test (experiment results, 2-parameter)

Reference	Case	GEV	Lognormal	Weibull	Gamma	Distribution
Bouyer <i>et al.</i> (2004)	1	0.0189	-0.0159	-0.0272	-0.0269	GEV
	2	0.0046	-0.0210	-0.0146	-0.0116	GEV
	3	0.0240	-0.0237	0.0138	0.0233	GEV
	4	-0.0284	-0.0045	-0.0269	-0.0102	
	5	0.0146	-0.0620	-0.0100	-0.0080	GEV
	6	0.0003	-0.1280	-0.0625	-0.0320	GEV
	7	0.0180	-0.0115	0.0048	0.0232	Gamma
	8	0.0199	0.0009	-0.0099	0.0105	GEV
Bouyer <i>et al.</i> (2001)	1	-0.0013	-0.0470	-0.0268	0.0061	Gamma
	2	-0.0255	-0.0204	-0.0617	-0.0385	
	3	0.0207	-0.0022	-0.0160	0.0139	GEV
	4	0.0207	0.0022	-0.0053	0.0141	GEV
Jin and Lant (2004)	1	-0.0001	-0.0768	-0.0083	-0.0556	
	2	-0.0044	-0.0610	-0.0150	-0.0314	
	3	-0.0038	-0.0643	-0.0196	-0.0464	
Barbusiński and Kościelniak (1995)	1	0.0135	-0.0016	-0.0389	-0.0274	GEV
	2	-0.0413	-0.0409	-0.1084	-0.0587	
	3	-0.0562	-0.0724	-0.1127	-0.1790	

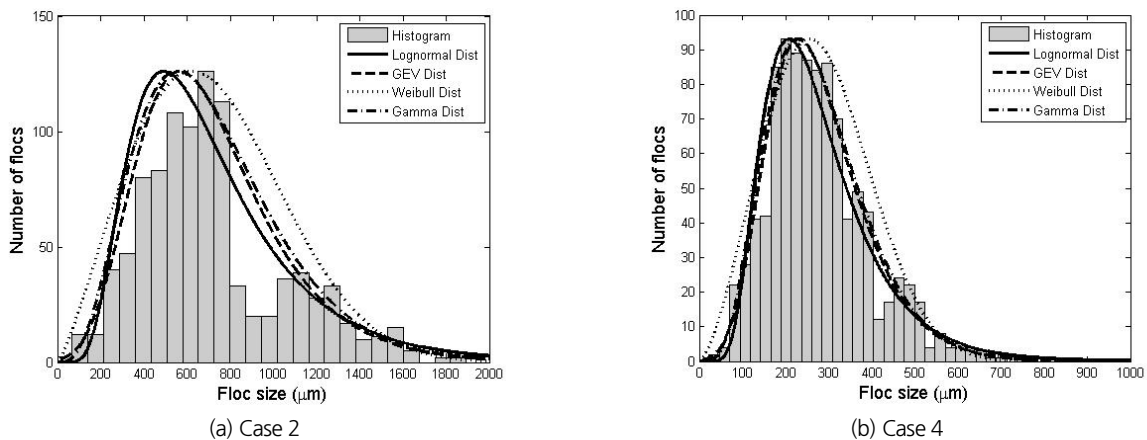


Fig. 6. Size distribution of Bouyer *et al.* (2001)

Jin and Lant (2004)의 실험결과를 살펴보면, 본 연구에서 분석한 다른 실험실실험 자료보다 자료가 정규분포에 가까운 형태를 나타내는 것이 확인된다(Fig. 7). Case 1은 ALR 반응기를 이용하여 실험을 수행한 경우로, 크기가 크고 밀도가 높은 플러크이 형성되었다(Jin and Lant, 2004). 이 때 측정된 플러크입도분포의 범위는 좁다. 적합도 검정결과로 얻어진 통계량을 분석해보면 GEV 분포가 가장 적합한 것으로 확인되나, 유의수준 5%를 통과하는 분포는 없는 것으로 확인된다(Table 4).

Case 2는 ASR 반응기를 이용한 실험결과로 얻어진 입도분

포 자료이다. 플러크입도분포의 범위는 상당히 좁으며 생성되는 플러크는 크기가 작고 밀도가 매우 높다. 다른 분포에 비해 좌우가 대칭인 정규분포에 가까운 형태를 보였으나, 적합도 검정을 통과한 확률분포형은 없다(Fig. 7(b)). 통계량 비교시 GEV 분포의 통계량이 가장 크게 나타난다. Case 3은 BCR반응기를 이용한 실험결과로 얻어진 입도분포자료로서 다른 반응기에 비해 흐름이 가장 복잡하게 형성된다. 난류가 매우 강한 흐름이 형성되며 플러크의 성장과 파괴가 모두 활발하게 발생한다. 이에 따라 플러크 입도분포의 범위가 매우 넓게 형성되었고, 평균

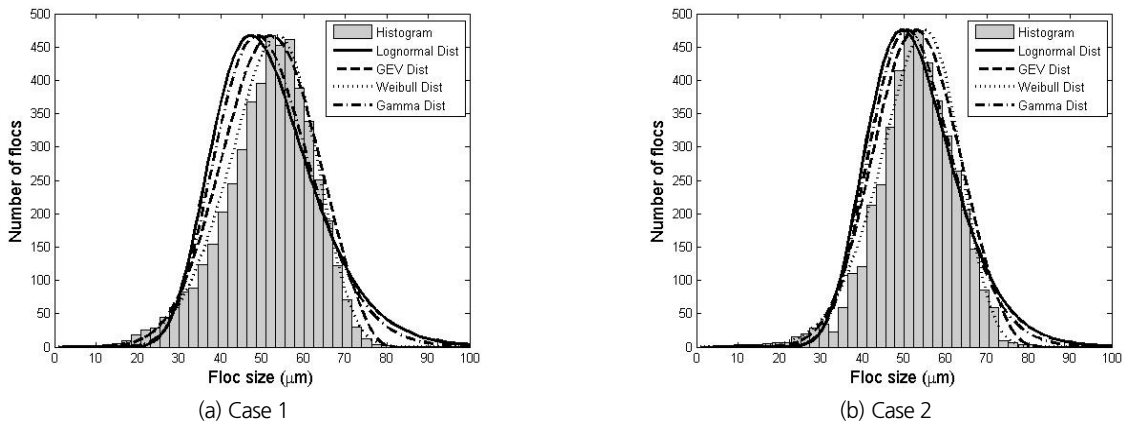


Fig. 7. Size distribution of Jin and Lant (2004)

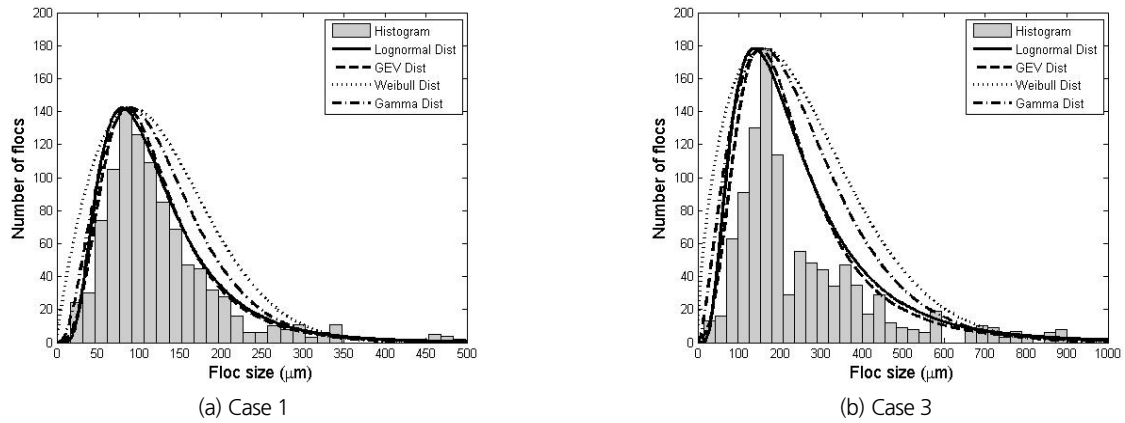


Fig. 8. Size distribution of Barbusiński and Kościelniak (1995)

Table 5. Experimental conditions for Barbusiński and Kościelniak (1995)

Case	Experimental condition
1	Initial floc size distribution observed after completing stabilization stage but before starting an increase phase in sludge loading
2	Floc size distribution corresponding with maximum organic loading
3	Floc size distribution when the concentration of organic loading is reduced again

크기가 커져 분포의 평균이 오른쪽으로 이동한 형태를 나타낸다. 적합도 검정결과 GEV 분포가 가장 적합한 것으로 나왔으나 유의수준 5%를 통과하는 분포는 없었다(Table 4). 정규분포에 유사한 형태를 나타냈던 ASR 반응기 실험결과를 제외한 Case 1 및 Case 3의 실험결과는 큰 플러키가 많이 형성되었으며 분포가 오른쪽으로 치우친 형태로 왜도가 음수인 분포를 나타낼 수 있는 GEV 분포가 가장 근사하였던 것으로 판단된다.

Barbusiński and Kościelniak (1995)은 활성슬러지를 이용하여 유기물함량과 입도분포 형태의 상관관계에 관한 연구를 수행하였다. 각 실험별로 유기물함량을 증가시킨 후 감소시키며 입도분포를 살펴보았는데, 슬러지의 입도분포 65개 중

92%에 해당하는 60개의 자료가 Lognormal 분포를 따른다고 주장하였다(Fig. 8). 이를 바탕으로 해당 연구에서 제시된 실험 조건은 Table 5에서 요약되며, 적합도 검정을 수행한 결과가 Table 4에서 나타난다. Case 1은 일반적인 양의 왜도를 가지는 입도분포를 나타내며 GEV 분포가 적합한 것으로 나타난다(Fig. 8(a)). Case 2 및 Case 3의 적합도 검정결과 4개의 분포가 5%의 유의수준을 통과하는 경우는 없었으며, 통계량을 살펴보면 Case 1, 2, 3 모두 GEV 분포를 제외할 경우 Lognormal 분포의 통계량이 가장 작은 것으로 확인된다(Table 4). 이는 Barbusiński and Kościelniak (1995)의 결과와 일치하는 것으로 생각해 볼 수 있으나, 본 연구에서 적합도 검정의 기준으로

이용한 유의수준 5%에는 통과하지 못했음을 알 수 있다.

3.3.3 매개변수 분포에 대한 검토

현장실험 자료를 이용하여 분석한 결과에 따르면(Table 1), 3매개변수의 GEV 분포보다 2매개변수 분포인 Weibull 분포와 Gamma 분포가 적합도 검정을 통과하는 경우가 더 많은 것이 확인된다. 3매개변수 분포가 2매개변수 분포보다 확률분포형의 자유도가 높아 표본에 의해 작성되는 히스토그램 형태를 나타내기 쉬움에도 2매개변수 확률분포가 더 적합하다고 나오는 이유는 앞서 언급한 것과 같이 현장실험 자료의 경우 분포의 대부분이 왼쪽으로 완전히 치우친 지수 분포의 형태를 가지는 그래프이기 때문으로 생각해 볼 수 있다. Weibull 분포는 GEV 분포의 특수한 경우로 GEV 분포를 이용하여 그릴 수 있는 다양한 분포 중에서 왼쪽으로 치우친 분포를 모사하기에 적합한 분포이다. 또한 Gamma 분포 역시 2매개변수 분포로 왼쪽으로 치우친 지수 분포를 모사할 수 있는 특징이 있다. 지수 분포의 형태를 나타낼 수 있는 경우 그래프의 위치를 조절하는 위치 매개변수가 필요하지 않으며 형상 매개변수가 필요하지 않다. 따라서 현장실험 자료의 경우 3매개변수의 GEV 분포보다 Weibull 분포나 Gamma 분포가 적합도 검정을 통과하는 자료의 수가 많은 것으로 이해할 수 있다. Weibull 분포와 Gamma 분포를 비교해보면 현장실험 자료 9개의 표본 중 각각 7개와 6개를 통과하였다. 두 분포가 동시에 통과하는 Yang *et*

al. (2016)의 Case 4, Case 6, Case 7, Case 8의 자료를 비교해보면 통계량에서 Gamma 분포가 더 큰 값을 가지며 우수하게 모사하는 것이 확인된다(Table 1).

실험실실험 자료는 현장 측정 자료와 다르게 대부분의 실험이 교반 탱크에서 진행되며 플러크이 충분히 성장할 수 있는 응집 시간을 가져 평형상태에 도달한 플러크의 입도분포를 측정한다. 이미지 분석을 통해 입자의 크기를 측정하므로 측정이 가능한 플러크의 최대 크기가 제한되지 않는다. 따라서 가장 작은 계급 구간이 가장 큰 확률을 가지지 않고 두 번째나 세 번째 계급 구간에서 가장 큰 도수가 발생하는 형태를 가진다. 실험실실험 자료의 경우 3매개변수 분포가 2매개변수 분포보다 1개의 매개변수(형상 매개변수)를 더 이용하여야 정확하게 그모양을 모사할 수 있다. 이러한 이유로 GEV 분포의 적합도 검정 통과 횟수가 많은 것으로 판단된다. 즉, 현장의 실측 자료는 지수 분포를 모사할 수 있는 Gamma 분포와 Weibull 분포가 왼쪽으로 완전히 치우친 분포의 모양을 모사할 수 있는 것과는 달리 실험실 측정 자료는 분포의 왜도를 조절할 수 있는 형상 매개변수가 필요한 것으로 판단된다.

Tables 1 and 4의 결과를 종합해보면, 현장실험 자료와 실험실실험 자료에서 Lognormal 분포가 적합하지 않다는 것은 공통된 결과임을 알 수 있다. 이러한 결과가 왼쪽으로 완전히 치우친 형태의 지수 분포를 모사하지 못하는 특성으로 인한 결과라면, 위치 매개변수가 포함된 3매개변수로 변환시킨 후 분

Table 6. Calculated value of *D* based on K-S test (experiment results, 3-parameter)

Reference	Case	GEV	Lognormal	Weibull	Gamma	Distribution
Bouyer <i>et al.</i> (2004)	1	0.0189	0.0126	-0.0204	-0.0106	GEV
	2	0.0046	0.0103	-0.0069	0.0054	Lognormal
	3	0.0240	0.0156	-0.0054	-0.0023	GEV
	4	-0.0284	-0.0032	-0.0282	-0.0200	
	5	0.0146	0.0291	0.0145	0.0248	Lognormal
	6	0.0003	0.0185	0.0164	0.0236	Gamma
	7	0.0180	-0.0022	0.0001	0.0059	GEV
	8	0.0199	0.0227	-0.0063	0.0082	Lognormal
Bouyer <i>et al.</i> (2001)	1	-0.0013	-0.0039	-0.0208	-0.0062	
	2	-0.0255	-0.0337	-0.0624	-0.0420	
	3	0.0207	0.0194	-0.0004	0.0164	GEV
	4	0.0207	0.0176	-0.0135	0.0118	GEV
Jin and Lant (2004)	1	-0.0001	-0.0357	0.0113	-0.0456	Weibull
	2	-0.0044	-0.0222	-0.0100	-0.0218	
	3	-0.0038	-0.0038	-0.0081	-0.0294	
Barbusiński and Kościelniak (1995)	1	0.0135	0.0072	-0.0230	-0.0048	GEV
	2	-0.0413	-0.0568	-0.0761	-0.0770	
	3	-0.0562	-0.0080	-0.0218	-0.0497	

포를 좌우로 이동시킬 수 있을 때 양수 값을 가지는 범위에서 지수 분포의 그래프를 그릴 수 있을 것이다. 각각의 2매개변수 확률분포에 위치 매개변수를 추가하여 3매개변수 확률분포로 적합도 검정을 한 결과가 Table 6에서 요약된다. 위치 매개변수가 추가된 3매개변수 Lognormal 분포, Weibull 분포, Gamma 분포의 확률밀도함수는 Eqs. (8) ~ (10)과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)\sigma_l\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x-\alpha) - \mu_l}{\sigma_l} \right)^2 \right] \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{\xi}{\sigma} \left(\frac{x-\alpha}{\sigma} \right)^{\xi-1} \exp \left[- \left(\frac{x-\alpha}{\sigma} \right)^\xi \right] \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_g \Gamma(r_g)} \left(\frac{x-\alpha}{\lambda_g} \right)^{r_g-1} \exp \left(- \frac{(x-\alpha)}{\lambda_g} \right) \quad (10)$$

각각 Eqs. (3) ~ (5)로부터 위치매개변수인 α 만이 추가된 형태임을 확인할 수 있다. 매개변수를 추가하는 경우 점착성 부유사 입도분포가 3매개변수 Lognormal 분포에 대해 적합도 검정을 통과하는 것이 확인된다(Table 6). 2매개변수 Lognormal 분포는 다른 2매개변수의 Weibull 분포, Gamma 분포처럼 지수 분포를 모사할 수 없어 적합도 검정을 통과하지 못한 경우가 많았지만, 위치 매개변수를 추가하여 그 분포를 좌우로 움직일 수 있다면 우수하게 표본을 모사하는 것으로 생각해볼 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 점착성 부유사 입도분포의 형태를 구체화하기 위해 현장 및 실험실 실험으로부터 얻어진 자료를 이용하여 적합도 검정을 수행하였다. 현장실험으로부터 얻어진 플럭입도분포자료는 장비의 특성으로 인해 측정 가능한 플럭의 최대 크기가 제한되며 이에 따라 측정 자료가 최대값 부근에 집중된 자료는 분석에 포함하지 않았다. 현장실험 자료를 이용하여 적합도 검정을 수행한 경우 양의 왜도를 가지는 Weibull 분포, 2변수 Gamma 분포가 가장 적합한 것으로 확인되었다. 이는 현장실험 자료의 경우 충분히 평형상태에 도달했을 때의 측정 자료가 아니기 때문으로 생각해 볼 수 있다. 반면 실험실 실험 자료는 플럭의 응집현상이 충분히 평형상태에 도달한 이후에 측정된 자료로, 플럭의 평균 크기가 비교적 큰 값을 나타낸다. 플럭카메라를 이용하여 가능최대크기 또

한 제한되지 않아 입도분포의 범위가 넓다. 실험실 실험 자료를 이용하여 적합도 검정을 수행한 경우, 분포의 넓은 범위를 고려할 수 있는 3매개변수 GEV 분포가 가장 적합한 것으로 나타났다. 2매개변수 확률분포형으로는 Gamma 분포가 가장 우수한 것으로 확인된다. 현장 및 실험실 실험자료를 분석한 결과에 따르면, 많은 연구에서 가정되었던 대수정규분포의 경우 유의수준 5%에 대하여 적합도 검정을 통과하지 못하는 것으로 나타났다. 위치매개변수를 추가한 3매개변수 대수정규분포의 경우 적합도 검정을 통과하는 사례가 있는 것으로 확인되었다. 현장 및 실험실 실험자료의 적합도 검정결과를 종합해보면, 자료의 특성과 응집현상의 영향에 따라 적정확률분포형이 다른 것을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서 수집된 자료들을 바탕으로 수행한 분석결과를 일반화하여 특정 확률분포형으로 플럭입도분포 형태를 정의하기보다는 향후 점착성 유사의 입도분포를 나타내는 확률분포형 선정 시 점착성 유사의 응집특성과 입도분포에 영향을 미칠 수 있는 다양한 인자들에 대한 고려가 필요할 것으로 생각된다. 특히 수치실험을 수행하고자 할 때, 플럭입도분포에 영향을 미치는 인자들에 대한 고려는 모형의 정확도를 향상시킬 수 있을 것으로 생각된다. 또한 점착성 유사의 입도분포를 모사하는 분포를 새로이 개발하여 사용하면 플럭의 이동특성을 연구할 때 가장 중요한 침강속도를 결정하는 크기에 대한 많은 정보가 제공될 수 있을 것이다.

감사의 글

본 연구는 2020년도 한국연구재단 창의도전연구기반지원 과제(No. NRF-2020R1I1A1A01055310)의 지원을 받아 수행되었습니다.

References

- Agrawal, Y.C., and Traykovski, P. (2001). "Particles in the bottom boundary layer: Concentration and size dynamics through events." *Journal of Geophysical Research: Oceans*, Vol. 106, No. C5, pp. 9533-9542.
- Barbusiński, K., and Kościelniak, H. (1995). "Influence of substrate loading intensity on floc size in activated sludge process." *Water Research*, Vol. 29, No. 7, pp. 1703-1710.
- Biggs, C.A., and Lant, P.A. (2000). "Activated sludge flocculation: On-line determination of floc size and the effect of shear." *Water Research*, Vol. 34, No. 9, pp. 2542-2550.
- Blott, S.J., and Pye, K. (2006). "Particle size distribution analysis of sand-sized particles by laser diffraction: an experimental inves-

- tigation of instrument sensitivity and the effects of particle shape." *Sedimentology*, Vol. 53, No. 3, pp. 671-685.
- Bouyer, D., Line, A., Cockx, A., and Do-Quang, Z. (2001). "Experimental analysis of floc size distribution and hydrodynamics in a jar-test." *Chemical Engineering Research and Design*, Vol. 79, No. 8, pp. 1017-1024.
- Bouyer, D., Liné, A., and Do-Quang, Z. (2004). "Experimental analysis of floc size distribution under different hydrodynamics in a mixing tank." *American Institute of Chemical Engineers Journal*, Vol. 50, No. 9, pp. 2064-2081.
- Dyer, K.R., Cornelisse, J., Dearnaley, M.P., Fennessy, M.J., Jones, S. E., Kappenberg, J., McCave, I.N., Pejrup, M., van Leussen, W., and Wolfstein, K. (1996). "A comparison of in situ techniques for estuarine floc settling velocity measurements." *Journal of Sea Research*, Vol. 36, No. 1-2, pp. 15-29.
- Eisma, D., Schuhmacher, T., Boekel, H., Van Heerwaarden, J., Franken, H., Laan, M., Vaars, A., Eijgenraam, F., and Kalf, J. (1990). "A camera and image-analysis system for in situ observation of flocs in natural waters." *Netherlands Journal of Sea Research*, Vol. 27, No. 1, pp. 43-56.
- Fettweis, M., Baeye, M., Lee, B.J., Chen, P., and Jason, C.S. (2012). "Hydro-meteorological influences and multimodal suspended particle size distributions in the Belgian nearshore area (southern North Sea)." *Geo-Marine Letters*, Vol. 32, No. 2, pp. 123-137.
- Gibbs, R.J. (1982). "Floc stability during coulter-counter size analysis: Research-method paper." *Journal of Sedimentary Research*, Vol. 52, No. 2, pp. 657-660.
- Guo, C., He, Q., van Prooijen, B.C., Guo, L., Manning, A.J., and Bass, S. (2018). "Investigation of flocculation dynamics under changing hydrodynamic forcing on an intertidal mudflat." *Marine Geology*, Vol. 395, pp. 120-132.
- Jin, B., and Lant, P. (2004). "Flow regime, hydrodynamics, floc size distribution and sludge properties in activated sludge bubble column, air-lift and aerated stirred reactors." *Chemical Engineering Science*, Vol. 59, No. 12, pp. 2379-2388.
- Lee, B.J., Fettweis, M., Toorman, E., and Molz, F.J. (2012). "Multimodality of a particle size distribution of cohesive suspended particulate matters in a coastal zone." *Journal of Geophysical Research: Oceans*, Vol. 117, No. C3, p. C03014.
- Li, D.H., and Ganczarczyk, J.J. (1990). "Structure of activated sludge flocs." *Biotechnology and bioengineering*, Vol. 35, No. 1, pp. 57-65.
- Lick, W., Lick, J., and Ziegler, C.K. (1992). *Flocculation and its effect on the vertical transport of fine-grained sediments*, Sediment/Water Interactions. Springer, Dordrecht, pp. 1-16.
- Maggi, F., Mietta, F., and Winterwerp, J.C. (2007). "Effect of variable fractal dimension on the floc size distribution of suspended cohesive sediment." *Journal of Hydrology*, Vol. 343, No. 1-2, pp. 43-55.
- Marchiso, D.L., Vigil, R.D., and Fox, R.O. (2003). "Quadrature method of moments for aggregation-breakage processes." *Journal of colloid and interface science*, Vol. 258, No. 2, pp. 322-334.
- Massey Jr, F.J. (1951). "The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit." *Journal of American Statistical Association*, Vol. 46, No. 253, pp. 68-78.
- Mazumder, B.S., Ray, R.N., and Dalal, D.C. (2005). "Size distributions of suspended particles in open channel flow over bed materials." *Environmetrics: The official journal of the International Environmetrics Society*, Vol. 16, No. 2, pp. 149-165.
- McAnally, W.H., and Mehta, A.J. (2000). "Aggregation rate of fine sediment." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 126, No. 12, pp. 883-892.
- Mikkelsen, O.A., Hill, P.S., and Milligan, T.G. (2006). "Single-grain, microfloc and macrofloc volume variations observed with a LISST-100 and a digital floc camera." *Journal of Sea Research*, Vol. 55, No. 2, pp. 87-102.
- Owen, M. W. (1976). *Determination of the settling velocities of cohesive muds*. Technical Report, No. IT 161, HR Wallingford, U.K., pp. 1-42.
- Schwarz, C., Cox, T., van Engeland, T., van Oevelen, D., van Belzen, J., van de Koppel, J., Soetaert, K., Bouma, T.J., Meire, P., and Temmerman, S. (2017). "Field estimates of floc dynamics and settling velocities in a tidal creek with significant along-channel gradients in velocity and SPM." *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, Vol. 197, pp. 221-235.
- Shen, X., and Maa, J.P.Y. (2015). "Modeling floc size distribution of suspended cohesive sediments using quadrature method of moments." *Marine Geology*, Vol. 359, pp. 106-119.
- Shin, H.J., Son, M., and Lee, G.H. (2015). "Stochastic flocculation model for cohesive sediment suspended in water." *Water*, Vol. 7, No. 5, pp. 2527-2541.
- Verney, R., Lafite, R., Brun-Cottan, J.C., and Le Hir, P. (2011). "Behaviour of a floc population during a tidal cycle: laboratory experiments and numerical modelling." *Continental Shelf Research*, Vol. 31, No. 10, pp. S64-S83.
- Wu, J., Liu, J.T., and Wang, X. (2012). "Sediment trapping of turbidity maxima in the Changjiang Estuary." *Marine Geology*, Vol. 303, pp. 14-25.
- Yang, Y., Wang, Y. P., Li, C., Gao, S., Shi, B., Zhou, L., Wang, D., Li, G., and Dai, C. (2016). "On the variability of near-bed floc size due to complex interactions between turbulence, SSC, settling velocity, effective density and the fractal dimension of flocs." *Geo-Marine Letters*, Vol. 36, No. 2, pp. 135-149.
- Zhang, B., Yamamoto, K., Ohgaki, S., and Kamiko, N. (1997). "Floc size distribution and bacterial activities in membrane separation activated sludge processes for small-scale wastewater treatment/reclamation." *Water Science and Technology*, Vol. 35, No. 6, pp. 37-44.