

MLS 차분법의 결정 변수에 따른 정확도 분석 및 혼합변분이론을 통한 미분근사 성능향상

김 현 영¹·김 준 식^{2†}

¹금오공과대학교 기계시스템공학과 대학원생, ²금오공과대학교 기계시스템공학과 교수

On the Improvement of the Accuracy of Higher Order Derivatives in the MLS(Moving Least Square) Difference Method via Mixed Formulation

Hyun-Young Kim¹ and Jun-Sik Kim^{2†}

¹Graduate Student, Department of Mechanical System Engineering, Kumoh National Institute of Technology, Gumi, 39177, Korea

²Professor, Department of Mechanical System Engineering, Kumoh National Institute of Technology, Gumi, 39177, Korea

Abstract

In this study, we investigate the accuracy of higher order derivatives in the moving least square (MLS) difference method. An interpolation function is constructed by employing a Taylor series expansion via MLS approximation. The function is then applied to the mixed variational theorem in which the displacement and stress resultants are treated as independent variables. The higher order derivatives are evaluated by solving simply supported beams and cantilevers. The results are compared with the analytical solutions in terms of the order of polynomials, support size of the weighting function, and number of nodes. The accuracy of the higher order derivatives improves with the employment of the mean value theorem, especially for very high-order derivatives (e.g., above fourth-order derivatives), which are important in a classical asymptotic analysis.

Keywords : MLS difference method, euler-bernoulli beam, finite differential method, mixed variational theory

1. 서론

MLS 차분법은 높은 미분근사 효율성을 갖는 수치 기법으로, 이동최소제곱법(moving least square method)과 Taylor 전개를 조합하여 고차 미분근사의 연속성을 가질 뿐만 아니라, 지배방정식을 수치적분 없이 이산화하는 완전한 무요소법이라는 점에서 유한요소해석과 차별성을 갖는다. 이러한 MLS 차분법의 특징은 현대에 연구되고 있는 고체역학 이론이 고차 미분항을 포함한다는 점에서 큰 의미를 가진다. 가령 정규점근해석(formal asymptotic method)의 경우 고차 변위장을 포함할수록 정확해에 점근적으로 수렴하는 것이 증명되었는데, 이 때문에 수치 해석이 결합될 경우 복잡한 역학 문제를 푸는데 강력한 성능을 발휘할 것으로 기대되고 있다. 이를 위해서는 정규점근해석의 해에 포함되는 고차 미분항의 정확한 수치 근

사가 필요한데, 이러한 점에서 MLS 차분법이 고체역학 문제에 적용될 차세대 수치 기법으로 거론되고 있다.

무요소법은 Nayroles 등(1992), Belytschko 등(1994)과 Liu 등(1995)이 차례로 분산요소법(Diffuse Element Method, DEM), Element-free Galerkin(EFG)법, 재생 커널 무요소법(Reproducing Kernel Particle Method, RKPM) 등을 제시한 이후로 유한요소법의 대체재로 부각되었다. 갤러킨법에 근거한 이러한 방법론은 요소의 구성을 필요로 하지 않을뿐더러, 유한요소법과 달리 미분의 연속성을 보장하는 반면 필수경계조건 문제와 적분셀(integration cell)이 존재하는 등의 한계를 가지고 있었다. 이를 해결하기 위해 Onate 등(1996; 2001)은 가중최소제곱 정식화(Weighted least-square formulation)에 근거한 점 콜로케이션 기법을 제시하였다. Krongauz와 Beltschko(1997)는 위 방법론이 조각시험(patch test)를 통과하지 못하는 이유를 규명하고,

[†]Corresponding author:

Tel: +82-54-478-7397; E-mail: junsik.kim@kumoh.ac.kr

Received April 8 2020; Revised August 26 2020;

Accepted August 27 2020

© 2020 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

이를 해결한 P-G 분산요소법(P-G DEM)을 제시하였다.

무요소법의 한계는 약정식화(weak formulation)의 풀이로부터 발생한다는 점에 착안하여 Lee와 Yoon(2004)은 강정식화한 점 콜로케이션 기법인 CDDA를 제시하고 Taylor 전개식을 기저로 사용하는 MLS 차분법과 CDDA의 동치성을 증명하였다(Yoon *et al.*, 2005).

MLS 차분법은 두 가지 장점을 갖는다. 첫째, 점 콜로케이션 기법에 근거한 완전한 무요소법이다. 둘째, Taylor 전개식을 기저로 사용하여 실제 미분계산이 필요하지 않아 고차 미분근사가 용이하다.

현재까지 동적 문제에서의 MLS 차분법의 정확성이 연구되었고(Yoon *et al.*, 2012), 균열해석과 같은 특수 고체역학문제에 무요소법이라는 장점을 이용해 MLS 차분법을 적용한 사례는 존재하나(Yoon *et al.*, 2007) 보, 판과 같은 기초적인 고체 구조물의 정적 해석 및 4차 이상의 고차 미분근사에 대한 분석은 아직 보고되지 않았다. 또한, 여타 수치기법과 동일하게 MLS 차분법을 적용할 시 결정해야 하는 조건 변수가 존재하는데 이 결정 변수 크기에 따른 고차 미분근사의 정확도가 연구되지 않았다. 따라서 본 논문에서는 절점(node)의 수, 이동최소제곱법이 적용되는 영향영역의 범위, Taylor 전개에 근거한 기저벡터의 차수를 MLS 차분법의 정확도에 영향을 주는 세 가지 결정 변수로 설정하고 위 변수의 크기에 따른 MLS 차분법의 정확성을 수치예제 결과로부터 분석하여 정리하였다.

MLS 차분법이 유한요소법에 비해 미분근사 결과가 정확하지만 계산하는 미분항의 차수가 올라갈수록 정확도가 떨어지는 것은 피할 수 없다. 반면 점근해석은 해의 차수에 따라 보다 고차의 미분근사를 요구하므로 본 연구에서는 계방정식에 혼합변분이론(mixed variational theory)을 적용하여 MLS 차분법으로 근사되는 미분항의 정확도를 획기적으로 향상시켰다. 혼합변분이론에서는 합응력(stress resultant)이 독립변수로 취급되며, 이러한 합응력은 변위의 미분으로 표현되므로 MLS 차분법으로부터 구해지는 합응력을 후처리함으로써 근사되는 변위의 미분 차수를 낮추는 효과를 얻을 수 있다.

2. 배경 이론

이 장에서는 선행된 연구들(Yoon *et al.*, 2005; 2007)에서 자세히 다루어져 있는 MLS 차분법의 정식화를 간단히 소개하고 MLS 차분법이 적용될 보의 변분이론에 대해 항목별로 정리한다. 가상일의 원리와 같은 변위기반 정식화로부터 평형방정식을 도출할 경우 이산화 과정에서 경계조건의 구속이 필요함을 설명한다. 또한 계방정식에 혼합변분이론을 적용한 경우 변위기반 정식화의 결과에 비해 미분근사의 성능이 향상됨을 수치예제로부터 확인한다.

2.1 MLS 차분법

MLS(Moving Least Square) 차분법은 Taylor 전개를 기저로 사용한 이동최소제곱법으로 고차 미분근사의 효율성을 갖는다. 또한 평형방정식을 직접 이산화하는 점 콜로케이션 기법을 사용하여 수치적분을 요구하지 않는다. 유한요소법의 경우 일정 차수 이상의 미분 계산이 불가능한 반면, 고차 미분근사의 연속성을 나타내는 MLS 차분법은 점근해석 및 논로컬 이론과 같이 기존 유한요소해석으로 정확한 결과를 얻기 어려웠던 문제에 적용 가능할 것으로 기대된다.

MLS 차분법을 통한 고차 미분근사의 정식화는 앞선 연구들에 정리되어 있으나 본 절에서 간단하게 다시 소개한다. 1차원 함수 $u(x)$ 를 임의의 점 x_0 에 대하여 Taylor 전개하고, k 차 이상의 미분항을 제외하여 함수 $u(x)$ 를 근사한다. 이 식은 다항식 기저벡터와 계수벡터의 내적으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 u(x) &\simeq \sum_{i=0}^k \frac{(x-x_0)^i}{i!} u^{(i)}(x_0) \\
 &= \left(1, (x-x_0), \dots, \frac{(x-x_0)^k}{k!} \right) \begin{pmatrix} u^{(0)}(x_0) \\ u^{(1)}(x_0) \\ \vdots \\ u^{(k)}(x_0) \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{P}_k^t(x, x_0) \mathbf{c}(x_0)
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $u^{(i)}$ 는 u 의 i 차 미분을 의미하고, $\mathbf{P}_k^t(x, x_0)$ 는 형상함수를 구축하는 기저벡터이며 $\mathbf{c}(x_0)$ 는 미지의 미분계수벡터이다.

이제 미분계수벡터를 절점에서의 $u(x)$ 의 미분값과 형상함수의 조합으로 나타낸다. 점 x_0 가 중심이 되는 영향영역 내 N 개의 절점에 대하여 아래와 같은 이동최소제곱 잔차식(residual functional) J 를 정의할 수 있다.

$$J = \sum_{I=0}^N w \left(\frac{|x_I - x_0|}{r} \right) \left\{ \mathbf{P}_k^t(x_I, x_0) \mathbf{c}(x_0) - u_I \right\}^2 \tag{2}$$

여기서, $w \left(\frac{|x_I - x_0|}{r} \right)$ 는 가중함수(weight function)이고, r 은 영향영역의 반경(support size)을 나타내며 u_I 는 $u(x_I)$, 즉 절점해(nodal solution)이다.

잔차식 J 를 $\mathbf{c}(x_0)$ 에 대해 최소화하면 $\left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}(x)} = 0 \right)$ 미분계수 벡터 $\mathbf{c}(x)$ 를 형상함수와 절점해의 조합으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} u^{(0)}(x) \\ \vdots \\ u^{(k)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^{(0)}(x) & \dots & \phi_N^{(0)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(k)}(x) & \dots & \phi_N^{(k)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \tag{3}$$

여기서, $\phi_I^{(k)}(x)$ 는 위치 x 의 영향영역 내 I 번째 절점 형상함수의 k 차 미분근사이다.

위에서 제시한 정식화를 따를 경우 첨점(sharp peak)을 갖고 홀쭉한, 즉 불연속 미분을 갖는 가중함수를 사용할 수 있고 이 경우 분산 미분근사의 정확도가 향상됨이 밝혀져 있다(Lee and Yoon, 2004). 본 논문의 경우 식 (3)과 같이 다항식 형태의 첨점이 존재하는 가중함수를 사용하였다.

$$w(r) = (1 - |r|^4) \tag{4}$$

식 (3)의 미분계수벡터 $\mathbf{c}(x_0)$ 는 실제로 미분을 수행하여 구해지는 값이 아니다. MLS 차분법은 Taylor 전개를 근간으로 하여 형상함수의 복잡한 미분 계산없이 미분계수벡터를 매우 간단히 근사하며, 이는 4차 이상의 고차미분 수치근사에 큰 이점이 된다.

2.2 보 해석을 위한 변분이론

이 절에서는 변위기반 정식화 및 혼합변분이론을 적용한 정식화에 대하여 MLS 차분법을 적용한 이산화 과정을 설명한다. 평형방정식에 혼합변분이론을 적용하고, MLS 차분법을 이용하여 이산화할 경우 변위기반 정식화보다 정확한 수치 해석이 가능하다. 변위기반 계방정식의 경우 이산화하면 경계 절점에서의 경계조건 개수와 내부 절점의 평형방정식 개수가 다르다. 본 연구에서는 이를 해결하기 위하여 라그랑주 승수로부터 경계조건을 구속하였다. 한편, 고전 보에 혼합변분이론을 적용하면 변위 w 및 모멘트 M 이 독립변수로 취급되는데, MLS 차분법을 통해 구해지는 M 의 미분으로부터 w 의 미분을 근사할 경우 필요한 형상함수의 차수가 2차 줄어드는 효과가 발생한다. 따라서 이 경우 가상일의 원리를 이용하거나, 혼합변분이론의 변위를 이용한 결과에 비해 정확도가 대폭 향상된다. 3장에서 위 내용을 수치예제 결과로 확인한다.

2.2.1 변위기반 정식화

변위기반 정식화는 변위만을 변수로 가정한다. 체적력을 무시한 3차원 문제의 경우 가상일의 원리는 아래와 같이 표현된다.

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_x q_i \delta u_i dx = 0 \tag{5}$$

여기서, σ_{ij} 는 응력(stress)이고 ϵ_{ij} 는 변형률(strain)이다. q_i 는 분포력이고 u_i 는 변위이다. 변위기반 정식화로부터 고전 보의 평형방정식과 경계조건을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Ehw^{(4)}(x) = q(x) \text{ at } x = 0, L \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \delta w(x) = 0 \text{ or } Ehw^{(3)} = 0 & \text{ at } x = 0, x = L \\ \delta w^{(1)}(x) = 0 \text{ or } Ehw^{(2)} = 0 & \text{ at } x = 0, x = L \end{aligned} \tag{7}$$

여기서, $w(x)$ 는 보의 횡방향 변위이고 L 은 보의 길이, E, I 는 각각 영계수(Young's modulus)와 보 단면의 이차 면적 모멘트(Second moment of inertia)이다. 식 (6), (7)로부터, 보의 내부 절점은 하나의 평형방정식으로 이산화되지만 경계의 경우 두 개의 경계조건이 나오는 것을 알 수 있다. 이 경우 각 절점에서 이산화된 차분식을 조립(assembly)하면 직사각 계행렬이 구해진다. 이 문제를 해결하기 위해 라그랑주 승수를 이용하여 보의 경계조건에 구속을 부여한다.

2.2.2 혼합변분이론

일반적인 3차원 문제에 대한 혼합변분이론 정식화는 아래와 같다.

$$I_R = \int_V [\sigma_{ij} \epsilon_{ij} - U_0^*] dV - \int_{S_i} \bar{T}_i^{(v)} u_i dS \tag{8}$$

여기서, U_0^* 는 보완 변형에너지 밀도함수(complimentary strain energy density function)이고, B 는 체적력, T 는 트래션(traction)이다. 혼합변분이론에서는 변위(u_i)와 응력(σ_{ij})이 독립변수이다.

위 식으로부터 고전 보 이론의 평형방정식을 유도하면 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} w^{(2)} - \frac{1}{EI} M &= 0 \\ M^{(2)} - q &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \delta w(x) = 0 \text{ or } M^{(1)} = 0 & \text{ at } x = 0, x = L \\ \delta w^{(1)}(x) = 0 \text{ or } M = 0 & \text{ at } x = 0, x = L \end{aligned} \tag{10}$$

여기서, M 은 모멘트이다. 위 식에서 독립변수는 $w(x)$ 와 M 이고, 보의 내부와 경계 모두 2개의 식이 이산화되기 때문에 MLS 차분법 적용 시 경계의 구속없이 정사각 계행렬을 조립할 수 있다.

변위의 미분을 MLS 차분법으로 근사할 때 혼합변분이론을 적용함으로써 얻을 수 있는 이점은 독립변수인 합응력으로부터 변위의 미분을 계산할 경우 미분 차수가 감소하는 효과가 생겨 근사 오차가 크게 줄어든다는 것이다. 보 이론에서

모멘트 M 은 변위의 이차 미분에 비례한다($w^{(2)} = \frac{1}{EI}M$). M 으로부터 구해지는 변위의 미분은 아래 식과 같다.

$$w^{(n)} = \frac{1}{EI}M^{(n-2)} \approx \sum_{i=1}^N \phi_i^{(n-2)} M_i \quad (n \geq 3) \quad (11)$$

위 식으로부터, 변위의 n 차 미분근사에 M 을 이용할 경우 사용되는 형상함수의 차수가 $n-2$ 로 차수가 줄어드는 것을 알 수 있다. 이로부터 변위기반 정식화 결과에 비해 미분근사의 정확도가 크게 증가한다.

3. 수치 예제

이 장에서는 수치예제를 통하여 MLS 차분법 내의 결정 변수에 따른 오차를 분석하였다. 예제는 Fig. 1과 같은 사인 하중을 받는 단순지지보 문제이다. $E=70\text{GPa}$ 이고, $\nu=0.3$ 으로 가정하였다. 보의 길이 $L=40$, 두께 $h=1$, 폭 $b=1$ 이다. 조건변수를 각각 $R_s=30$, $N=150$, $k=11$ 로 설정하여 얻은 변위의 5차 및 8차 미분을 정해와 비교하여 Figs. 2~3에 도시했다. 변위기반 계방정식을 그대로 차분하여 근사할 경우 고차 미분의 정확도가 떨어지는 것이 확인된다. 반면, 계방정식에 혼합변분이론을 적용할 경우 근사 오차가 큰 폭으로 줄어들고, 합응력을 후처리하여 미분해를 계산하면 매우 높은 차수의 미분도 무리없이 근사 가능함을 Fig. 3으로부터 알 수 있다.

한편, Figs. 2~3에서 보듯이 고차 미분근사 시 해석범위의 경계에서 오차가 발생한다. 이는 MLS 차분법에서 경계 바깥에 가상 절점이 존재하지 않기 때문에 생기는 현상이다. Taylor 근사는 이론적으로 무한히 미분 가능한 해석적 함수에 적용 가능한데 불연속한 경계의 경우 근사에 필요한 기저벡터 차수가 무한히 늘어나며 정확도가 떨어지게 된다.

4. 결정 변수에 따른 MLS 차분법의 정확도

이 장에서는 MLS 차분법의 조건 변수를 소개하고, 각 변수 크기에 따른 정확성을 분석한다. MLS 차분법을 이용해 미분근사를 할 때 결과의 정확성을 위해 조절할 수 있는 변수는 다음과 같다.

1. 영향영역의 크기(R_s)
2. 해석 영역 내 절점 수(N)
3. 기저벡터의 차수(k)

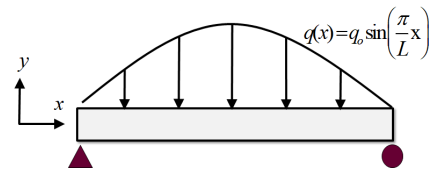


Fig. 1 A simply-supported beam under a sinusoidal loading

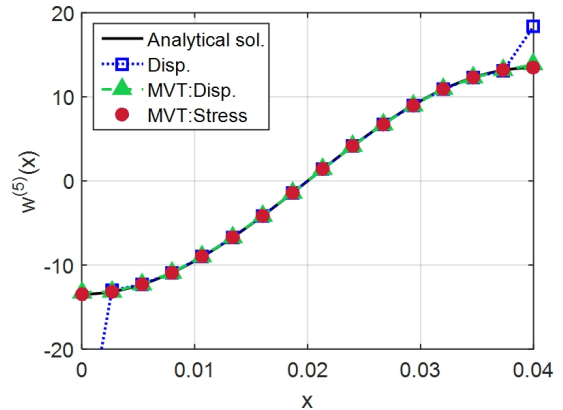


Fig. 2 A comparison of fifth-order derivatives of displacements for the simply-supported beam

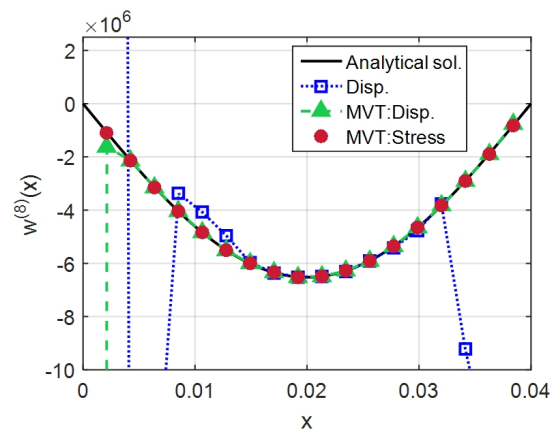


Fig. 3 A comparison of eighth-order derivatives of displacements for the simply-supported beam

본 연구에서는 언급한 세 변수 값에 따라 달라지는 근사 결과의 오차를 분석하였다. 식 (2)의 r 은 영향영역의 반경이다. 본 논문에서는 r 을 다음과 같이 정의하였다.

$$r = R_s \cdot dx \quad (12)$$

여기서, dx 는 Fig. 4와 같이 절점 간 거리를 나타낸다. 나머지 두 결정변수 값이 고정되어 있을 때 영향영역 크기를 제어하는 변수는 R_s 이다. 결정변수 중 N 은 해석영역 내에 존재하는 총 절점수를 의미한다. k 는 기저벡터의 차수로 Taylor 전개식의 차수와 동일하다.

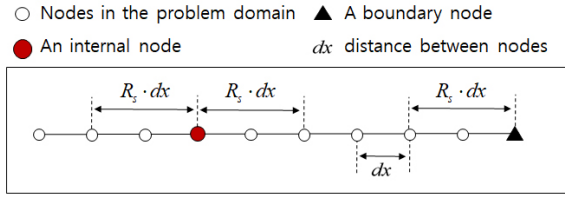


Fig. 4 Discretization and influence domain for one-dimensional problems

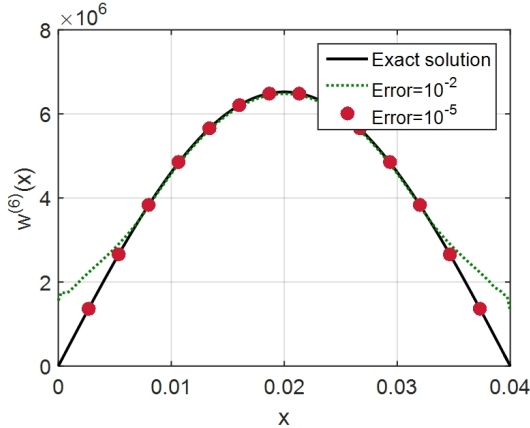


Fig. 5 An accuracy of the sixth-order derivative of displacements with the order of errors

4.1 오차 추산

본 연구에서는 MLS 차분법을 이용한 미분근사 결과와 정해 간 오차를 다음과 같이 계산하였다.

$$error = \frac{\int_0^L \|w^{(n)}(x) - w_{ex}^{(n)}(x)\| dx}{\int_0^L \|w_{ex}^{(n)}(x)\| dx} \quad (13)$$

여기서, $w_{ex}^{(n)}$ 는 정해의 n 차 미분이고, $w^{(n)}$ 는 MLS 차분법을 이용한 n 차 미분근사 결과이다. Fig. 5는 수치예제의 6차 미분에 대하여 식 (13)으로부터 계산한 오차 크기에 따른 정확도를 보여준다. 오차 크기가 10^{-5} 이하일 경우 근사 결과가 정확함을 알 수 있다.

4.2 영향영역의 크기(R_s)에 따른 경향성

MLS 차분법을 적용하여 미분을 근사할 때 서포트 범위가 주는 영향을 관찰하기 위해 E-B보의 미분값에 대하여 MLS 차분법을 적용한 근사값과 정해와의 오차를 R_s 의 크기에 따라 도시하였다. Fig. 1의 수치예제에 대하여 해석을 진행하였다. $N=100$ 이다.

Figs. 6-8은 기저벡터 차수 k 가 각각 5, 7, 11일 때 R_s 에 따른

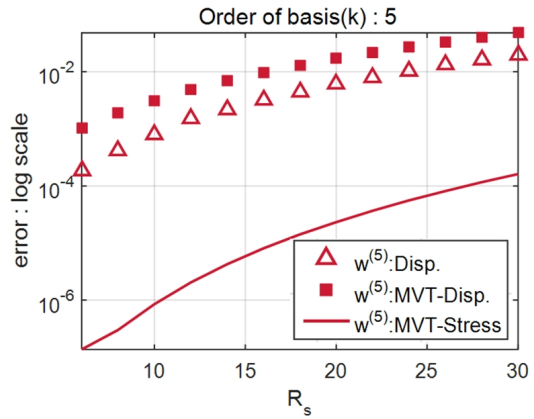


Fig. 6 Errors of fifth-order derivatives of displacements with varying R_s for the order of basis $k=5$

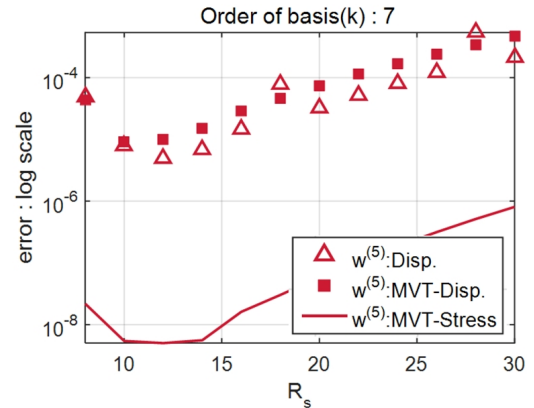


Fig. 7 Errors of fifth-order derivatives of displacements with varying R_s for the order of basis $k=7$

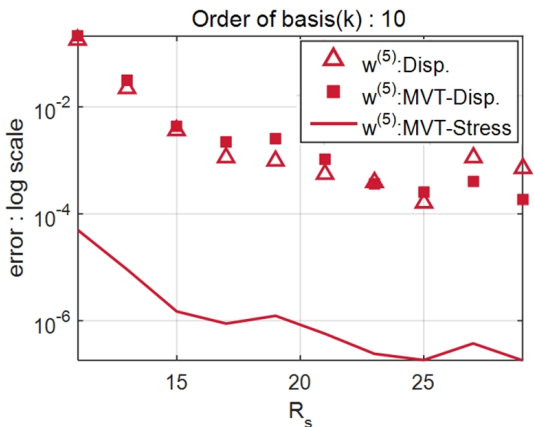


Fig. 8 Errors of fifth-order derivatives of displacements with varying R_s for the order of basis $k=10$

오차를 보여준다. 차수 k 가 5보다 작은 경우 Fig. 6과 같이 R_s 가 증가할수록 오차가 커진다. 그러나 Figs. 7-8에서 보듯이 k 값이 커질수록 그래프가 감소함수를 형성하는 것을 알 수 있다. 식 12로부터 영향영역 반경은 상수 R_s 에 비례한다. 영향영역이 넓어질수록 해당 영역을 근사하기 위한 기저벡터의 최적 차

수가 기하급수적으로 증가한다. Fig. 6에서 R_s 의 크기가 커질수록 오차가 증가하는 현상은 이로부터 설명할 수 있다. 반면, Fig. 8은 과적합(overfitting)으로 인한 결과이다. 과적합은 Fig. 9와 같이 근사 범위가 기저 차수에 비해 과도하게 좁을 경우 나타나는 현상이다. Fig. 7은 $k=7$ 일 때, R_s 가 15보다 작을 경우 과적합이 나타남을 의미한다.

4.3 절점 개수에 따른 경향성

Fig. 10은 3장의 수치예제에 대하여 절점 수 N 의 변화에 따른 오차 양상을 나타낸 그래프이다. $k=8$ 이고, $R_s = 1.8 \times k$ 이다. N 이 증가할수록 오차가 줄어들다가 특정 값을 기점으로 오차가 다시 증가한다. 절점 수 N 이 증가할수록 서포트 범위가 좁아지므로 정확성이 향상되다가 절점 간 거리가 과도하게 증가할 경우 불안정성(instability)에 의하여 오차가 발산한다는 것이 일반적인 추측이지만 MLS 차분법을 사용할 경우 불안정성이 나타나기 전에 과적합에 의하여 오차가 증가하는 것이 수치 예제로부터 확인되었다. 흥미로운 점은 차분법에서 나타나는 불안정성에 의한 오차의 발산이 나타나기 전에 과적합에 의해 오차의 증가가 발생한다는 점이다.

MLS 차분법은 영향영역이 이동하며 국소 부위를 근사하므로

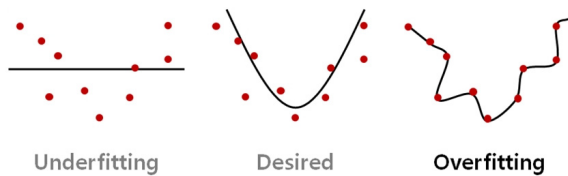


Fig. 9 Examples of the overfitting with increasing the order of basis

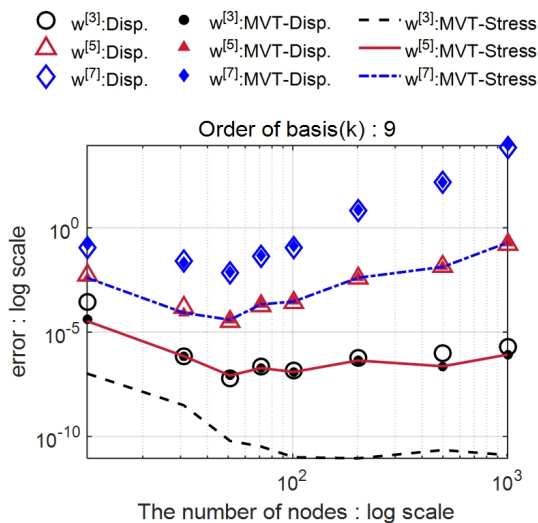


Fig. 10 Errors of third, fifth and seventh-order derivatives of displacements with varying the number of nodes N

로 기존의 차분법보다 일반적으로 정확한 반면 절점 수가 증가하면 국소 부위에서 일반 차분법에서 나타나지 않는 과적합이 발생한다.

Fig. 10에서 보듯이 N 의 크기에 따른 과적합 발생 여부와 관계없이 변위기반 정식화의 차분 결과에 비해 혼합변분이론의 응력을 후처리한 결과가 더 정확하다. 특히 Fig. 10에서 변위기반 정식화의 $n-2$ 차 미분근사 오차와 혼합변분이론의 응력기반 n 차 미분근사 결과가 겹친다. 식 (11)과 같이 응력기반 근사시 미분 차수가 2차 낮아지는 것을 보여준다.

4.4 기저벡터 차수(k)에 따른 경향성

3장의 수치예제를 통해 기저벡터 차수 k 에 따른 MLS 차분법의 정확성을 분석하였다. Fig. 1의 수치예제에 대하여 근사를 진행하였다. $N=100$, $R_s = 1.8 \times k$ 이다.

Fig. 11은 5차 미분에 대하여 기저벡터 차수 k 가 증가함에 따라 변화하는 오차를 보여준다. 앞의 예제와 마찬가지로 k 가 커질수록 오차가 감소하다가 특정 k 값을 기점으로 오차가 다시 증가하는 것이 확인된다. $R_s = 1.8 \times k$ 으로부터 기저차수가 증가할수록 영향영역이 넓어진다. Fig. 11의 오차 증가현상은 4,2절과 동일하게 사용한 기저 차수에 비해 영향영역 크기가 과도하게 넓어지면서 발생하는 결과이다.

한편, 결과로부터 k 의 크기가 짝수일 때 오차가 증가하는 경

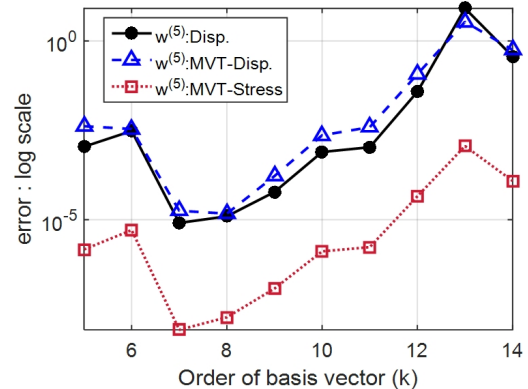


Fig. 11 Errors of fifth-order derivatives with varying the order of basis k

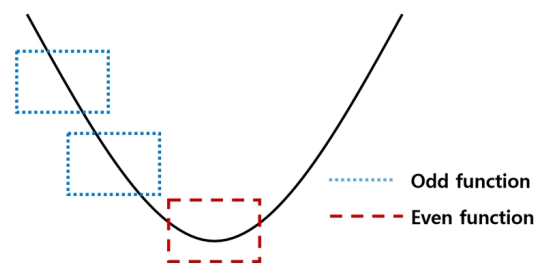


Fig. 12 Distributions of even and odd functions around local zone

향이 확인된다. Fig. 12에서 나타나듯이 본 연구의 수치예제를 포함한 대부분의 함수는 국부적으로 기함수(odd function)이다. 근사 시 k 가 짝수이면 우함수 기저의 영향이 커지는데 영향영역 내에서 대부분 기함수 형상을 띠므로 오차가 증가한다.

5. 직교 기저를 사용한 MLS 차분법의 정확성

Taylor 기저 기반 MLS 차분법과 분산 미분을 적용한 MLS 차분법은 서로 동치임이 밝혀져 있다(Yoon *et al.*, 2005). Chebyshev의 직교 기저에 분산 미분을 적용하여 3장의 수치예제 결과의 정확성을 비교한 결과, 본 연구의 Taylor 기저 기반 차분법 대비 성능 향상을 확인할 수 없었다. 강성행렬 구성 과정에 적분이 포함될 경우 직교 기저를 이용하여 근사를 수행하면 계행렬이 대각화(diagonalize)되며 수치적 이점을 가지지만 MLS 차분법과 같은 점 콜로케이션 기법에서는 직교 기저가 큰 장점을 가지지 않는다.

6. 결론

본 연구에서는 단순지지 보에 대하여 MLS 차분법 내에 사용되는 결정 변수의 값에 따라 달라지는 고차 미분근사의 성능을 분석하였다. 또한 혼합변분이론의 합응력을 통한 미분 계산 시, 기존의 변위기반 정식화에 의한 결과보다 고차미분근사의 정확도가 큰 폭으로 향상됨을 확인하였다.

MLS 차분법이 가지는 결정 변수는 절점 수(N), 기저벡터의 차수(k) 및 가중함수의 영향영역 범위(R_s)로 총 세 가지이다. 각 결정 변수에 따른 오차의 변화는 아래와 같이 나타난다.

1. R_s
 - k 가 작을 경우 : R_s 가 커질수록 오차가 증가함
 - k 가 클 경우 : R_s 가 커질수록 오차가 감소함
2. N
 - N 이 커질수록 오차가 감소하나 특정 N 값을 기점으로 과적합(overfitting)에 의하여 오차 증가
3. k
 - k 가 커질수록 오차가 감소하나 특정 k 값을 기점으로 영향영역 크기 증가에 따른 오차 증가

1에서 R_s 크기가 커질수록 영향영역이 넓어져 오차가 증가한다. 그러나 사용한 기저 차수 k 가 클 경우 영향영역이 좁으면 과적합이 발생하므로 R_s 의 크기가 클수록 유리하다. 2의 경우 N 이 과도하게 클 경우 영향영역이 좁아지므로 오차가 증가한

다. 3에서 k 값에 따라 오차가 증가하는 것은 R_s 의 최적값이 k 의 크기에 비례하기 때문이다.

한편, 수치예제로부터 계방정식에 혼합변분이론을 적용하고 MLS 차분법을 사용할 경우 미분근사의 효율성을 극대화할 수 있다. 혼합변분이론은 변위와 합응력을 동시에 독립변수로 처리하는 이론으로 합응력은 변위의 미분과 관련되기 때문에 MLS 차분법을 통해 합응력을 근사하고 후처리하여 변위의 미분을 구할 경우 변위 자체로부터 미분을 근사하는 것에 비해 미분 차수가 줄어드는 이득을 보게 된다. 수치 예제로부터 혼합변분이론을 적용하여 합응력을 후처리할 경우 기존의 방법론에 비해 어떠한 결정 변수 값에서도 근사 오차가 큰 폭으로 작아짐을 보였다.

고차 미분항을 포함하는 정규점근해석(Formal asymptotic method, FAM), 논로컬 이론(Nonlocal elasticity)에 MLS 차분법을 적용하여 수치해를 구하는 것이 향후 연구 과제이다.

감사의 글

이 논문은 2016년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2016R1D1A1B01009576).

References

Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1994) Element-free Galerkin Methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37, pp.229~256.

Krongauz, Y., Belytschko, T. (1997) A Petrov-Galerkin Diffuse Element Method(PG DEM) and Its Comparison to EFG, *Comput. Mech.*, 19, pp.327~333.

Lee, S.H., Yoon, Y.C. (2004) Meshfree Point Collocation Method for Elasticity and Crack Problems, *Numer. Methods Eng.*, 61, pp.22~48.

Liu, W.K., Jun, S., Zhang, Y.F. (1995) Reproducing Kernel Particle Methods, *Int. J. Numer. Methods Fluid.*, 20, pp.1081~1106.

Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P. (1992) Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements, *Comput. Mech.*, 10, pp.307~318.

Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Sacco, C. (1996) A Stabilized Finite Point Method for Analysis of Fluid Mechanics Problems, *Comp. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 139, pp.315~346.

Onate, E., Perazzo, F., Miquel, J. (2001) A Finite Point Method for Elasticity Problems, *Comput. & Struct.*, 79, pp.2151~2163.

Yoon, Y.C., Kim, D.J., Lee, S.H. (2007) A Gridless Finite Difference Method for Elastic Crack Analysis, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 20(3), pp.321~327.

Yoon, Y.C., Kim, K.H., Lee, S.H. (2012) Dynamic Algorithm for Solid Problems using MLS Difference Method, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 25(2), pp.139~148.

Yoon, Y.C., Seo, C.B., Kim, M.W., Lee, S.H. (2005) Consistent Diffuse Derivative Approximation in Particle Methods for Weak and Strong Formulations (1): Mathematical Foundations and Discretizations, *J. Korean Soc. Civil. Eng.*, 25(5), pp.907~913.

요 지

본 연구에서는 점근해석 및 논로컬 이론에서 요구하는 4차 이상의 고차 미분근사를 수행하기 위하여 계방정식에 혼합변분이론을 적용하여 MLS 차분법으로부터 구해지는 고차 미분근사의 정확도를 큰 폭으로 향상시킨다. 또한, MLS 차분법에 존재하는 세 가지 조건변수에 따른 고차미분근사의 정확도를 비교·분석한다. 혼합변분이론의 합응력을 후처리하여 변위의 미분을 근사할 경우 기존의 변위장 기반 계방정식의 차분 결과에 비해 미분 차수가 2차 낮아진다. 해석 범위내 절점 수가 과도하게 많거나 기저 차수가 클 경우 MLS 차분법의 영향영역 내에서 과적합(overfitting)이 발생한다. 또한 영향영역이 최적 범위 이상으로 넓어질 경우 근사의 정확도가 떨어진다. 위 내용을 사인 하중을 받는 단순지지보 수치예제로부터 확인하였다.

핵심용어 : MLS 차분법, 혼합변분이론, 고전 보 이론