韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2020.34.3.393
제 34집 제 3호, 2020. 9. 393-419

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 34, No. 3, Sep. 2020. 393-419

한국, 호주, 핀란드의 수학 교과서에서 삼각법 영역 비교

최 은 (한솔중학교 교사)
권오남 (서울대학교 교수)†

삼각법은 수학의 유용성을 인식하도록 하며 삼각함수와의 연계를 통해 고등 수학 개념의 기반을 다진다. 본 연구는 호주와 핀란드를 비교 대상 국가로 정하여 Charalambous 외(2010)가 제시한 수평적 및 수직적 분석을 통해 교육과정과 교과서를 분석하였다. 세 국가가 삼각비에서 다루는 각을 확장한 학습 순서가 유사하며 삼각함수의 도입 시기 및 학습의 연속성에 차이가 있다. 삼각비의 정의 방법에 대한 학습경로는 공통적으로 삼각형 방법, 단위원 방법, 삼각함수 순서로 나타났는데 우리나라는 제 1사분면의 단위원에서 삼각비를 정의한 후 바로 일반각과 삼각함수가 전개된다는 차이점이 나타났다. 위장 맥락 문제와 인위적 맥락 문제는 우리나라가 호주나 핀란드에 비해 높은 비율을 보였다. 이를 통해 우리나라의 학습경로에서 생략되었던 단위원 방법을 제시하는 것, 실생활 맥락을 강조하는 문제를 제시하고 공학적 도구를 활용할 것, 삼각법을 다루는 교육과정 방식과 영역에 대해 재고할 것을 제안한다.

Ⅰ. 서론

삼각법(trigonometry)이란 삼각비(trigonometric ratios)를 이용하여 삼각형의 세 변의 길이와 세 각의 크기 등 삼각형을 구성하는 요소들 사이의 관계를 연구하는 것이다. 교육과정에서 삼각법을 다루는 데에는 두 가지 의의가 있다(Brown, 2005). 먼저, 삼각법은 삼각함수 학습을 위한 하위 개념이라는 점이다. 삼각함수는 기존에 학생들이 다루던 다항함수와 같은 대수적인 식으로 표현할 수 없으며, 학생들이 교육과정에서 처음 접하는 주기함수라는 측면에서 앞으로의 수학 학습에 중요한 역할을 한다. 직각삼각형에서 변의 길이의 비로 정의되던 삼각비가 단위원 위에서 회전각에 대해 정의되는 삼각비로 확장되는 방식을 이해할 때 비로소 삼각함수 개념을 통합적으로 이해할 수 있다(Demir, 2012). 따라서 삼각법은 삼각함수와 연계된 내용으로 삼각함수를 학습하기 전에 삼각법에서의 충분한 학습 경험이 제공되어야 한다. 실제로 2015 개정 교육과정에서도 삼각비와 삼각함수의 연계를 서술한 내용을 교수·학습 방법 및 유의 사항에 추가하면서 이러한 점을 더 강조하고 있다. 삼각법 학습의 두 번째 의의는 삼각법을 이용해 실생활에서 필요한 거리나 넓이, 높이 등을 구하는 활동을 통해 학생들이 수학의 유용성을 경험할 수 있다는 점이다. 삼각법의 발전이 실생활에서의 필요로부터 발전했다는 점은 이를 뒷받침한다. 실제로 삼각법은 실생활과 과학, 공학 등 다른 학문과 연결된다는 점에서 활용도가 높은 개념이다(Weber, 2005). 우리나라 교육과정에도 삼각법 영역의 교수·학습 방법 및 유의 사항에서 삼각비를 활용하여 측정하기 어려운 거리나 높이 등을 구해보는 활동을 권장하고 있다(교육부, 2015). 그러나 교육과정에서 나타나는 두 가지 의의를 모두 고려한 삼각법[1] 연구는 많지 않다. 삼각법을 다루는 대부분의 연구는 삼각함수나 삼각비 단원 중 하나에

* 접수일(2020년 7월 30일), 심사(수정)일(2020년 8월 18일), 게재확정일(2020년 9월 4일)
* ZDM분류 : U20, G60
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 삼각법, 교과서분석, 국제비교
* 본 논문은 주저자의 2020년 석사학위 논문을 수정 보완한 것임.
† 교신저자 : onkwon@snu.ac.kr

초점을 맞추어 다루고 있는데, 삼각함수에 초점을 두고 호도법을 주제로 다루고 있거나(유재근, 2014; Fi, 2003; Moore, 2013) 삼각비에 초점을 맞춰 학생들의 개념 이미지와 문제해결 간의 관계를 다뤘다(김선형, 2016). 삼각비와 삼각함수의 연계를 고려하고자 한 연구가 있지만 이는 삼각비를 학습하는 시기가 중학교 3학년 말이므로 학습에 소홀해지는 시기라는 점을 들어 설명하고 있으므로(이상원, 방승진, 2004) 삼각법 학습에 근본적인 시사점을 제공하고 있지는 않다. 따라서 교육과정에 서술된 삼각법 내용을 전체적으로 조망하는 연구를 통해 삼각법 학습의 두 가지 의의를 모두 고려하는 연구가 필요하다.

한편 교과서는 교육과정에서 제시한 학습 내용을 바탕으로 학생들이 효과적으로 학습할 수 있도록 만든 교재이므로 교사와 학생은 교과서를 교수·학습을 위한 기본 자료로 활용한다. 교과서가 실제 수업 현장에서 실행되는 수학교육과 의도된 교육과정 사이를 연결하는 중요한 매개체 중 하나라는(Stein, Remillard & Smith, 2007) 점과 우리나라가 다른 나라에 비해 교과서가 수업에서 차지하는 비중이 높아 수업에 미치는 영향이 매우 크다는(김미희, 김구연, 2013) 점을 고려해보면 교과서에 서술된 삼각법 내용은 학생들의 학습에 있어 중요한 역할을 한다. 그러나 삼각법을 주제로 하는 대부분의 연구가 학생의 이해나 교수학적 분석을 다루고 있으므로 교육과정과 교과서에서 삼각법이 어떻게 서술되는지 분석하는 것은 새로운 관점을 제공할 수 있다. 따라서 교과서에서 삼각법 내용의 분석을 통해 추후 교육과정 개정 및 현장에서의 삼각법 지도 방안에 시사점을 도출할 수 있다. 특히, 교과서의 국제 비교를 통해 학생들이 경험할 것으로 예상되는 학습 기회의 유사점과 차이점을 알 수 있으므로(Charalambous 외, 2010) 외국과의 교과서 비교는 서술된 삼각법 내용의 의의를 탐색하고 의미 있는 과제나 학습경로가 우리나라에서도 적용 가능한지에 대한 단서를 제공할 수 있다.

이에 본 연구에서는 국제 비교를 통해 교과서의 삼각법 내용에 대한 시사점을 도출하기 위해 호주, 핀란드를 비교 국가로 선정하였다. 연구 대상은 역량을 강조하며 최근 교육과정을 개정했으며 과학 기술 연구 수준이 높거나 국제적으로 교육과정에서 긍정적인 평가를 받는 국가로 선정했다. 한국, 호주, 핀란드의 교과서에서 삼각법의 지도 내용을 비교하기 위해 Charalambous 외(2010)가 사용한 수평적(horizontal) 분석과 수직적(vertical) 분석을 실시했다. 수평적 분석이란 교과서가 교육 체계의 영향을 받는다는 점에 주목하여 교과서의 배경적인 정보를 검토하며, 수직적 분석은 학생에게 전달되는 내용을 검토하여 특정한 수학적 개념을 어떻게 다루는지를 분석한다. 이러한 분석 방법은 다양한 교과서 비교 연구에서 활용되었는데, Hong, Choi(2014)는 한국과 미국의 교과서에서 이차방정식 내용을 비교했으며 Wijaya, Heuvel-Panhuizen, & Doorman(2015)는 인도네시아의 8학년 수학 교과서들을 비교했다. 본 연구는 삼각법 영역에서 교과서에 서술된 삼각비 정의에 따른 학습경로를 살펴보고자 하므로 삼각법 영역에서 다루는 내용의 학습 순서와 성취기준과 같은 배경에 대한 분석과 그러한 내용이 어떤 삼각비 정의 방법에 기반을 두어 서술했는지의 분석이 모두 필요하다. 이를 위해 수평적 분석으로 교과서 서술의 배경이 되는 수학과 교육과정을 살펴보고 수직적 분석으로서 교과서의 삼각법 내용 특징, 즉 교과서에 서술된 삼각법 내용 요소의 구성, 삼각비 정의 방법에 기초한 학습경로, 과제의 맥락을 살펴본다. 이러한 목적에 따라 본 논문에서는 아래와 같은 연구 질문을 설정하였다.

1. 한국, 호주, 핀란드 교과서 서술의 교육과정 배경은 어떠한가?
2. 한국, 호주, 핀란드 교과서의 삼각법 내용 특징은 어떠한가?

---

1) 우리나라의 교육과정과 교과서에서는 삼각비와 삼각함수라는 용어를 이용해 교과 내용을 설명하므로 삼각법이라는 용어는 쓰이지 않는다. 그러나 국제적으로 삼각비(trigonometric ratios)라는 용어는 삼각법(trigonometry) 학습 중에서 구체적인 사인, 코사인, 탄젠트 비를 언급할 때 이용되고, 우리나라 중학교 교육과정에서 삼각비를 이용하여 변의 길이나 삼각형의 넓이를 구하는 내용을 다룬다는 점을 감안하여 구체적으로 삼각비를 언급하는 것이 아닐 때는 삼각법으로 용어를 사용하기로 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

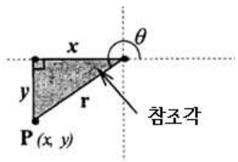
1. 교과서 및 교육과정 비교 연구

호주나 핀란드를 비교 대상으로 한 연구로는 고호경, 장경윤, 이강천(2016)의 우리나라와 호주의 중학교 수학과 교육과정 비교 연구와 정영옥 외(2016)가 미국, 싱가포르, 영국, 일본, 호주의 중고등학교 교육과정을 비교한 연구, 신준식(2011)의 핀란드 수학과 교육과정 비교 분석 연구가 있다. 이들 연구에서는 교육과정 구성 방식이나 운영 방법, 중등 교육과정에서 다루는 내용의 수준에 대한 논의를 제안했다. 이와 같은 교육과정 비교 연구는 우리나라 교육과정 개정 배경의 이해를 돕고 세계적인 수학교육의 흐름을 파악한다는 장점이 있지만 교육과정에 기술된 성취기준이나 내용의 상세화 정도가 다를 수 있어(방정숙 외, 2015) 자세한 내용을 분석하기 위해서는 교과서 분석이 함께 이뤄져야 한다. 한편 최영란, 조민식(2011)은 핀란드와 고등학교 수학 교과서를 비교하면서 영역별로 특징을 분석하여 기하 내용에서는 직관적인 이해를 돕되, 학년이 올라감에 따라 연계되어 반복적이면서도 심화해서 다루는 방안을 제안했다. 이러한 연구는 교육과정 연구가 피상적으로 분석될 수 있다는 한계점을 극복하고자 했으나 교과서에서 단원의 구성이나 내용을 도입하는 시기에 대한 분석에 초점을 두고 있으므로 특정한 내용 요소에 대해 상세하게 분석하여 교수·학습에 구체적인 시사점을 도출하기에는 부족할 수 있다. 국내에서 수행된 비교 연구는 교과서와 교육과정을 통합적으로 분석하는 연구가 부족하여 삼각법과 관련된 구체적인 내용에 대한 시사점을 얻기에는 어려움이 있다고 할 수 있다.

따라서 삼각법 내용에 대해 교과서와 교육과정을 통합적으로 분석할 필요가 있다. 이를 위해 Charalambous 외(2010)가 사용한 수평적 및 수직적으로 분석하는 접근을 택할 수 있다. 수평적 분석은 교육 체계를 고려하며 교과서의 외적인 특징과 내용이 제시된 순서 등과 같은 일반적인 측면을 분석하는 것이다. 즉, 교과서를 살펴보기 위한 배경이 되는 정보로서 제목, 발행 연도, 저자 정보, 교수 안내 사항, 교육과정과 같은 부수적인 자료를 분석하거나 단원의 구성이나 주제의 순서 등과 같은 전체적인 구조를 분석하는 것이다. 수직적 분석은 하나의 수학적 개념을 교과서에서 어떻게 다루는지를 분석하는 것으로 주제 특수적인 관점에서 교과서의 구성을 살펴보거나 정의, 법칙, 삽화와 같은 수학적 내용, 예제나 수학에 대한 관점 등을 분석하는데 수직적 분석으로만 교과서를 분석했을 때 하나의 수학적 주제가 다른 수학적 개념과 관련하여 어떻게 취급되는지 놓칠 수 있다(Charalambous 외, 2010). Hong, Choi(2014)는 이 분석틀을 바탕으로 한국과 미국의 교과서에서 이차방정식 내용을 비교했으며 수평적 분석에서는 교과서 개발과 발행 과정, 내용이 배치된 학년 등을 고려하기 위해 교육과정과 교과서를 분석하고 수직적 분석에서는 개념 발달이나 적용과 같은 특징을 찾고 새로운 주제를 다룰 때 수학적 혹은 실생활 맥락이 활용되는지를 분석했다. Shin, Lee(2018)는 이 분석틀을 발전시켜 한국과 미국의 분수 학습에 대해 비교했으며 수평적 분석으로는 다루는 순서, 페이지 수, 나선형 구성 방식을 분석했으며 수직적 분석은 기존의 분석틀을 발전시켜 수준에 기반을 둔 분수 계산의 주요 영역을 바탕으로 교과서의 과제를 분석했다. Wijaya 외(2015)는 수평적 분석에서는 교과서의 외형적 특징과 지도 구성 요소를 분석했으며 수직적 분석에서는 과제의 특징을 분석하여 인도네시아의 8학년 수학 교과서들을 비교했다. 이처럼 수평적 분석과 수직적 분석을 통한 교과서 비교는 다양한 학년이나 영역의 연구에서 활용되고 있으므로 교과서의 삼각법 영역을 살펴보기 위한 분석틀로 사용해도 적절하다고 판단하였다. 이에 본 연구에서는 수평적 분석으로 교육과정의 목표, 내용체계, 성취기준을 살펴본 뒤 수직적 분석으로 삼각법의 학습 시기, 삼각함수를 학습하기까지의 학습경로 분석, 과제의 실생활 활용 맥락을 분석하여 우리나라 삼각법 학습에 대한 시사점을 얻고자 한다.

2. 삼각법

삼각법은 닮은 직각삼각형 개념으로부터 시작된다. 주어진 한 예각 θ을 한 각으로 갖는 직각삼각형은 무한히 많은데, 이러한 모든 삼각형의 변의 길이의 비는 일정하다. 즉 주어진 한 예각 θ을 한 각으로 갖는 직각삼각형은 서로 닮음이다. 직각삼각형에서 한 예각을 고정시켰을 때, 이를 참조각(reference angle)이라고 하며 다른 변들은 빗변, 참조각에 대한 이웃하는 변(adjacent side), 참조각에 대한 대변(opposite side)이라는 이름을 붙인다. 또는 직각을 끼고 있는 변 중에 수평과 평행한 것을 밑변, 수직인 것을 높이라고 부르기도 한다. 한편 직각삼각형에서의 참조각 정의는 회전각의 끝점의 좌표와의 연결에 적용될 수 있다. [그림 Ⅱ-1]에서 회전각 θ의 끝점 P가 축 위에 있지 않을 때, 끝점에서 x축에 수선을 그리면 수선의 발과 끝점, 원점이 직각삼각형을 이루며 이러한 삼각형을 참조삼각형이라고 한다. 이때 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 한 각을 참조각이라고 부른다. 이처럼 참조삼각형은 직각삼각형 삼각법과 각의 회전 사이의 연결을 제공한다. 회전한 각의 끝점의 좌표 절댓값은 참조삼각형에서 변의 길이와 같으므로 직각삼각형에서의 삼각비 정의는 변의 길이에 부호를 부여하여 새롭게 정의된 방식으로 확장될 수 있다. 즉, [그림 Ⅱ-1]에서 반지름의 길이가 r인 원을 생각해보면 원 위의 한 점의 좌표와 반지름을 이용하여 삼각비를 정의하면 원의 대칭성에 의해 제 1사분면에 대한 정보를 제 2, 3, 4분면에서도 적용할 수 있도록 한다(Brown, 2005). 이제 90°보다 큰 각에 대해서도 $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$로 삼각비의 값을 구할 수 있다.

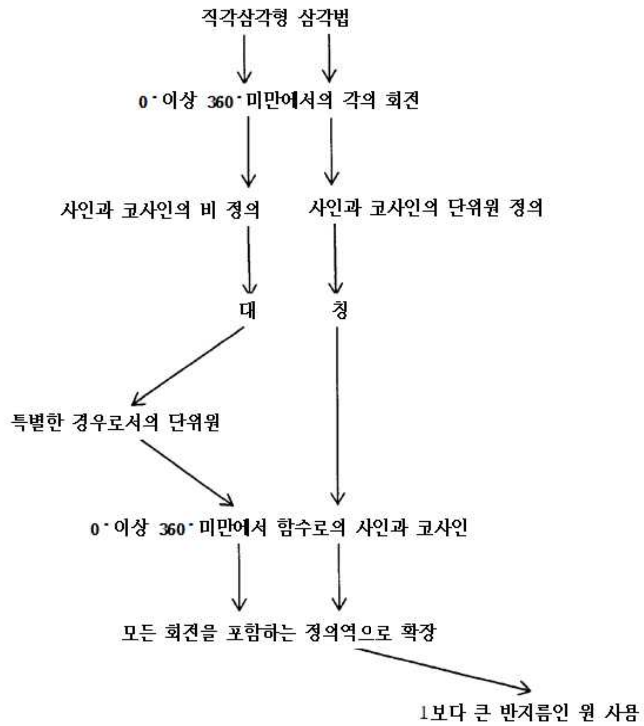


[그림 Ⅱ-1] 참조각과 참조삼각형(Brown, 2005, p.97)

이렇게 삼각비에서 다루는 각이 $0^\circ \le \theta < 360^\circ$로 확장되는데, 회전각 θ를 $0^\circ \le \theta < 360^\circ$ 이외의 값으로 한 번 더 확장이 일어나면서 삼각함수의 주기성이 설명된다. 각 θ에 따른 $\sin\theta \to \frac{y}{r}$, $\cos\theta \to \frac{x}{r}$, $\tan\theta \to \frac{y}{x}$ 의 관계를 대응의 관점에서 보면 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 는 각각 θ의 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수로 정의할 수 있다. 이러한 방법으로 정의된 삼각함수는 θ에 대한 다항식으로 표현되지 않는다.

한편 학교 수학에서 삼각함수 이전의 삼각법을 다룰 때, 삼각비를 정의하기 위해 비 방법(ratio method)과 단위원 방법(unit circle method)이 사용된다. 비 방법이란 삼각비를 직각삼각형에서 변의 길이의 비로 정의하는 것이며 단위원 방법은 단위원 위의 한 점의 x좌표와 y좌표로 각각 코사인과 사인을 정의하는 방법이다. 연구에 따라 삼각형 방법으로 서술하기도 하는데 Brown(2005)은 비 방법은 삼각형을 좌표평면 위로 옮겨와 변의 길이의 비를 살펴본다는 점에서 삼각형 방법과 차이를 뒀다. 삼각형 방법에서는 기하 영역에서 다뤄지고 비 방법은 좌표평면 상에서 삼각형을 다루므로 해석기하학 영역에서 다뤄진다고 할 수 있다. 새수학 운동 이전에 삼각형 방법과 비 방법이 주로 사용되었으나 새수학 운동의 영향을 받아 1960년대 초반 단위원을 이용한 방법이 삼각함수까지 지도하는 방법으로 확장되었다(Kendal & Stacy, 1996). 그러나 아직 어느 한쪽이 지도 방법으로 더 효과적인지는 확실하지 않다(Demir, 2012). 삼각법을 지도하는 여러 방법 중 어느 하나가 효과적이라고 단언하기

는 어렵지만 삼각비를 이해하고 활용하는 데에서는 삼각형 방법과 비 방법이 학생들의 이해를 도왔고 삼각함수로의 연결을 설명할 때는 단위원 방법을 이용하는 것이 적절했다고 할 수 있다. 그러나 학생들은 다양한 방법을 이용해 정의한 삼각비에 대해 서로 통합하지 못하고, 이로 인해 삼각함수를 불완전하고 단편적으로 이해한다 (Brown, 2005; Thompson, 2008; Demir, 2012). 이와 관련하여 여러 연구는 내용 요소의 체계를 조직하거나 학생들의 이해에 대해 분석함으로써 서로 다른 방법의 연결을 강조하고 적절한 교수 방안에 대해 논의했다. Thompson(2008)은 삼각법을 가르치는데 있어 삼각형 방법과 단위원 방법이 연결되지 않는 것을 문제점으로 지적했으며 서로 다른 방법끼리의 연결을 도와야 한다고 주장했다. Brown(2005)은 직감삼각형에서 좌표평면으로, 또 사인과 코사인 함수로 연결되는 과정을 [그림 Ⅱ-2]과 같이 두 가지 경로로 나타냈으며 각 경로에 따라 학습할 때의 내용 체계를 밝혔다. [그림 Ⅱ-2]의 왼쪽 경로는 사인과 코사인을 처음 좌표평면에 나타냈을 때 비 정의를 사용한 뒤 대칭에 대한 결과를 학습한 뒤 단위원 정의 방법을 학습하는 방법이다. 오른쪽 경로는 처음에 단위원 정의를 사용한 뒤 대칭에 대한 결과를 학습하고 임의의 반지름에 대한 회전은 마지막에 다룬다. 여기서 대칭에 대한 결과란 참조각 θ를 x축이나 y축에 대하여 대칭시키면, θ에 대한 끝점의 좌표와 $180^\circ-\theta$, $180^\circ+\theta$, $360^\circ-\theta$에 대한 끝점의 좌표가 부호만 달라진다는 것을 말한다.



[그림 Ⅱ-2] 삼각비에서 삼각함수까지의 두 경로(Brown, 2005, p.89)

직각삼각형 방법과 단위원 방법의 통합을 위해 Brown(2005)이 제안한 왼쪽 경로에 따른 내용 체계는 다섯 단계로 나뉜다. 각 단계는 직각삼각형 삼각법(1단계), 0° 이상 360° 미만에서의 각의 회전(2단계), 단위원으로의 변환(3단계), 0° 이상 360° 미만에서 함수로의 사인과 코사인(4단계), 임의의 각으로의 확장(5단계)으로 구성된

다. 삼각비가 비 방법으로 정의되는 2단계에서는 기존의 직각삼각형을 좌표평면 위에서 생각한다. 변의 길이의 비로 정의했던 코사인과 사인에 대해 θ를 원점으로부터 거리가 r이고 끝점의 좌표가 (x,y)인 각으로 볼 때, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$로 다시 정하여 사인과 코사인의 부호를 판단한다. 여기서는 참조각 θ에 대해 $180°-\theta$, $180°+\theta$, $360°-\theta$에 대한 사인과 코사인의 값이 부호가 달라진다는 내용이 포함된다. 이 단계에서는 반지름과 각이 주어졌을 때 좌표를 구하거나 삼각비의 값을 구하는 것, 좌표가 주어졌을 때 반지름과 각을 구하거나 삼각비의 값을 구하는 것이 주로 등장한다. 단위원으로의 변환(shift)인 3단계에서는 앞서 정한 삼각비의 정의 즉, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$를 $r=1$인 경우로 변환하여 단위원 위에서 삼각비의 정의를 재공식화한다. 따라서 코사인과 사인을 $\cos\theta=x$, $\sin\theta=y$로 정하여 좌표평면에 적용한다. 이 단계에서 삼각비의 값은 더이상 변의 길이의 비를 구하는 것이 아니라 한 점의 좌표를 읽는 것으로 바뀐다. 4단계에서는 단위원 위에서의 한 점이 회전함에 따라 각도, x좌표, y좌표가 함께 바뀌고, x좌표와 y좌표의 변화를 나타낸 것이 각각 코사인함수와 사인함수의 그래프 모양이 됨을 서술한다. 한편 이와 달리 단위원 정의를 바로 도입하는 오른쪽 경로의 내용 체계는 2단계와 3단계가 표준위치에서의 각(angles in standard position)과 단위원에서 $0°$ 이상 $360°$ 미만의 회전으로 확장(3단계)으로 바뀐다. 점 $(1,0)$에서 시작하여 단위원을 따라 그려지는 호를 표준위치에서의 호라고 하며 호가 표준위치에 있을 때 양의 x축과 호의 끝점과 원점을 이은 선은 각을 이루는데 이러한 각을 표준위치에서의 각이라고 한다. 표준위치에서의 각 내용은 제 1사분면 위에서의 단위원에서 사인과 코사인의 정의를 다루는 것으로 한정된다. 각의 회전을 다루긴 하지만 예각으로 한정되어 있으며 다만 단위원 위에서 사인과 코사인을 정의하므로 변의 길이의 비 대신 x좌표와 y좌표가 삼각비의 값을 나타낸다. 3단계에서는 사분원에서 정의했던 사인과 코사인의 정의를 단위원에서 적용한다. 각의 회전 범위가 $90°$에서 $360°$까지 확장되는 것이다. 각의 범위가 확장되면서 사분면에 따른 사인과 코사인의 부호를 결정하는 내용도 포함된다. 4단계와 5단계는 왼쪽 경로를 따른 내용 체계와 동일하다. Demir(2012)는 Brown(2005)이 제시한 내용 체계를 삼각함수 그래프까지 포함하여 살펴볼 필요가 있음을 주장하며 내용 체계와 학생 이해 모델을 서술했다. 여기서는 삼각법의 학습 방법을 삼각형 삼각법(Triangle Trigonometry, TT), 단위원 삼각법(Unit Circle Trigonometry, UCT), 삼각함수 그래프(Trigonometric Function Graphs, TFG)로 제시하며 세 방법의 일관된 연결을 강조한 이해 모델을 제시했다. 삼각형 삼각법에서는 직각삼각형에서 사인과 코사인을 변의 길이의 비로 정의하고 활용하는 점을 특징으로 갖고 있으며 단위원 삼각법에서는 단위원 위의 한 점의 좌표를 이용하여 사인과 코사인을 정의하고 이를 적용하여 특정한 각도에 대해 사인과 코사인값을 계산할 수 있다. 그래프 방법에서는 사인함수와 코사인함수가 함수인 이유를 이해하고 함수의 성질을 이용하여 삼각함수 그래프를 해석할 수 있다. 또한, 삼각함수의 주기성을 이해하고 그래프에서 $\cos x=\cos(-x)$와 같은 삼각함수 관계를 설명할 수 있다. 삼각형-단위원 연결(connections between triangle and unit circle, 이하 TT-UCT)에서는 참조삼각형을 이용한 비 방법과 단위원 방법의 통합으로 90도보다 큰 각에 대한 삼각비의 값을 구할 수 있고, 단위원-그래프 연결(connections between unit circle and graph, 이하 UCT-TFG)에서는 단위원 위의 한 점의 변화에 따른 삼각함수 그래프 모양을 이해하고 함수의 성질을 설명할 수 있다.

Brown(2005)과 Demir(2012)가 제시한 내용 체계와 이해 모델을 비교하면 <표 Ⅱ-1>과 같다. 직각삼각형 삼각법과 삼각형 삼각법은 모두 직각삼각형에서의 변의 길이의 비로 삼각비를 정의하는 내용을 포함한다. Demir(2012)가 제안한 단위원 삼각법(UCT)은 Brown(2005)이 제시한 왼쪽 경로에 따르면 단위원으로의 변환 단계(3단계)와 연결되며, 오른쪽 경로에 따른 내용 체계에서는 표준위치에서의 각과 $360°$로의 확장 단계(3단계)에 해당한다. 또한 TT-UCT 연결 내용은 각의 회전과 단위원으로의 변환 두 내용을 모두 포함하는데, 이는 사인과 코사인의 부호를 판단하고 참조각 θ에 대해 $360°-\theta$에 대한 사인값을 결정할 수 있다는 각의 회전 단계

의 내용을 이해했다는 점이 유사하기 때문이다. 또한, 학생들의 이해가 삼각형에서 그치지 않고 단위원 위의 어떤 각에 대해서도 삼각비가 정의되는 것으로 확장되었다는 점에서 단위원으로의 변환 내용도 포함하고 있다. 단위원 위에서 각의 회전에 따라 바뀌는 x좌표, y좌표의 값을 통해 함수의 그래프 모양을 알 수 있다는 4단계와 임의의 각으로 확장되어 그래프 모양의 주기성까지 이해하는 5단계 내용은 UCT-TFG 연결과 TFG 맥락과 유사하다.

<표 Ⅱ-1> Brown(2005)과 Demir(2012) 방법 비교

<table>
<tr><th>Brown([그림 Ⅱ-2] 왼쪽 경로)</th><th colspan="3">Demir 이해 모델</th><th>Brown([그림 Ⅱ-2] 오른쪽 경로)</th></tr>
<tr><td>직각삼각형 삼각법
(1단계)</td><td colspan="3">삼각형 삼각법(TT)</td><td>직각삼각형 삼각법
(1단계)</td></tr>
<tr><td>각의 회전(2단계)</td><td rowspan="2">단위원
삼각법
(UCT)</td><td rowspan="2">삼각형-
단위원 연결
(TT-UCT)</td><td rowspan="2">단위원
삼각법
(UCT)</td><td>표준위치에서의 각</td></tr>
<tr><td>단위원으로의 변환
(3단계)</td><td>360° 로 확장(3단계)</td></tr>
<tr><td>$0° \le \theta < 360°$ 에서 함수로의 사인과 코사인(4단계)</td><td colspan="3" rowspan="2">단위원-그래프 연결
(UCT-TFG)
삼각함수 그래프
(TFG)</td><td>$0° \le \theta < 360°$ 에서 함수로의 사인과 코사인(4단계)</td></tr>
<tr><td>임의의 각으로의 확장
(5단계)</td><td>임의의 각으로의 확장
(5단계)</td></tr>
</table>

지금까지의 논의를 종합해보면 삼각법 학습에 대한 연구에서는 학생들이 직각삼각형에서 정의한 삼각비와 삼각함수 내용 간 연계를 어려워하는데, 이러한 문제점을 해결하기 위해 통합적인 이해를 위한 개념 체계나 이해 모델을 제시하고 있다(Brown, 2005; Demir, 2012). 따라서 살펴본 개념 체계나 이해 모델을 바탕으로 교과서의 삼각법 영역을 비교하는 것은 학생들이 삼각함수를 학습하기에 통합적으로 이해하기에 적절한지 판단할 수 있는 요인을 탐색하고 이를 바탕으로 시사점을 끌어낼 수 있다.

3. 문제의 맥락

교과서에서 실생활과의 연결성이 가장 두드러지게 나타나는 것 중 하나가 교과서에 포함된 과제이다. 맥락을 포함하는 과제는 학생들이 일상 경험을 수학을 통해 해석하는 과정을 거치도록 한다. 맥락 문제를 해결하는 것은 수학 학습을 의미 있게 하는 것뿐만 아니라 수학적 도구를 사용한 것의 장점과 한계를 느낄 수 있다는 점에서 중요하다(Jurdak, 2006). Treffers(1987)는 학생들이 경험하는 수학에 맥락이 기반이 되도록 현실의 문제를 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 하는 수평적 수학화와 더 높은 수준에서의 수학적 처리가 가능하도록 한 수직적 수학화가 교대로 이뤄져야 한다고 주장했으며, De Lange(1995)는 현실 세계의 문제 상황을 수학적 문제로 전환하는 것을 수평적 수학과, 수학적으로 처리하는 과정으로의 수직적 수학화를 구분했다. Treffers(1987)는 맥락 문제가 수직적 수학화와 수평적 수학화 둘 다에 역할을 하는데 즉, 단순히 문장제 문제가 아니라 수학이 실제 문제를 해결할 때 부수되는 역할을 하는 문제이며 현실 세계 속의 수학적 현상의 다양성이 제대로 포함되어 있어야 한다고 보았다. 이러한 맥락 문제는 학생들에게 수학에 대한 동기를 부여하고, 응용 영역으로서의 현실을 보여주거나 응용 상황에서 특정한 산술 능력을 익힐 수 있다. Stinner(1995)는 맥락 문제가 실제적 상황을 반영하여 학생들이 흥미를 느끼고 자신의 지식과 경험을 적용하여 해결할 수 있어야 한다고 보았다. 또한, Jurdak(2006)은 맥락 문제를 이용할 수 있는 수학적 도구에 따라 결정을 내리는 실제 상황의 실제 경험이 포함되어야 한다고 말한다. 정리해보면 맥락 문제는 현실의 상황과 학습자의 실제 경험이 과제에 녹아들어 수학적으로 문제를 해결하는 경험을 통해 학생들이 현실에서 만나는 다양한 상황을 이해하고 문제를 해결할 수 있어야

한다는 것이다. De Lange(1995)도 맥락문제에서 가장 핵심적인 요인이 문제가 학생들의 일상과 관련된 것이어야 한다고 강조하며 실제적인 문제로 경험되어져야 함을 언급했다.

삼각법은 현실 세계와 높은 연결성을 갖고 있으므로 문제가 실생활 맥락을 반영하여 학습자에게 수평적 수학화를 유도하는지를 분석할 필요가 있다. 문제를 보는 이러한 관점은 De Lange(1995)가 ‘관련있고 필수적인 맥락(relevant and essential context)’이라고 부른 것과 일치한다(Wijaya 외, 2015). De Lange(1995)는 맥락의 기능성을 기준으로 ‘맥락 없음(no context)’, ‘위장맥락(camouflage context)’, ‘관련있고 필수적인 맥락’에 대해 예를 들어 설명했다. 맥락 없음은 식이나 도형으로만 제시하여 수학적 대상, 기호 등으로만 구성된 경우를, 위장맥락이란 과제에 맥락은 포함되어 있으나 과제를 해결하기 위해 주어진 조건만을 이용하므로 식을 세우기 위해 일상 경험이나 상식이 필요하지 않은 문제 맥락을, 관련있고 필수적인 맥락은 문제를 해결할 때 개인의 경험이나 기호가 역할을 하며 문제에서 직접적으로 수학적 조건을 제시하지 않아 수학화하는 과정이 필요한 경우이다. De Lange(1995)는 실제적(real)과 인위적(artificial) 관점에서도 맥락을 설명하는데 관련있고 필수적인 맥락이라도 학생들에게 현실 세계 맥락으로 와 닿지 않는 문제가 있으며 그러한 문제는 부자연스럽게 느껴진다는 것이다. 한편 교과서에서 문제의 맥락을 분석한 연구로는 노지화(2016), Wijaya 외(2015) 등이 있다. 노지화(2016)는 맥락이 있는 문제와 없는 문제를 분류한 후, 맥락이 있는 문제는 인물이 등장하는지, 등장한 인물의 이름이 있는지, 현실에서 필요한 상황인지 등의 준거를 통해 미국의 Precalculus 교과서 과제를 분석했다. Wijaya 외(2015)는 De Lange(1995)의 맥락의 기능성에 따른 기준과 맥락기반과제의 목적에 대해 인도네시아 교과서 3종의 문제 맥락을 분석했다. 종합해보면 문제를 해결할 때 상식이나 경험에서 얻은 추론이 필요한지와 문제에 드러난 상황이 사실적인 소재를 바탕으로 하거나 실제로 일어날 법한 문제가 현실 세계의 맥락을 반영한 문제로 분석되었다고 할 수 있다. 그러나 국제적으로 교과서의 삼각법 문제 맥락을 비교하거나 단원의 특성을 고려하여 문제의 맥락을 분석한 연구는 찾아보기 힘들다. 따라서 본 연구에서는 삼각법 영역의 내용을 고려하여 문제 맥락을 분석하고 국제 비교를 통해 시사점을 얻고자 한다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 대상

연구 대상은 세 가지 기준을 참고하여 선정하였다. 첫 번째로 우리나라의 삼각법 지도 내용과 교육과정이 다르게 서술되는 국가를 위주로 선정하였다. 호주와 핀란드 두 국가 모두 삼각비의 성질, 삼각비의 활용을 풍부하게 다루는 점을 고려하여 이후의 삼각함수 학습까지의 연결에 시사점을 줄 수 있을 것으로 판단하여 선정하였다. 두 번째로 과학 기술 연구 수준이 높거나 국제적으로 교육과정에서 긍정적인 평가를 받는 국가로 선정하였다. 호주는 지금까지 과학 분야에서 10명이 넘는 노벨상을 배출했으며 경제협력개발기구(Organization for Economic Cooperation and Development)에서 발표한 국제학업성취도평가(Programme for International Student Assessment; 이하 PISA) 2018 자료에 따르면 수학 성취 수준을 국제적으로 평균 이상을 유지하고 있다. 또한 핀란드는 PISA에서 꾸준히 높은 성적을 보이며 국제적으로 학교 간 성적 편차 최저, 학습효율화지수 1위 등 교육을 통한 인재 양성이 돋보이는 국가이다. 또한, 우리나라와 같이 역량을 강조하며 최근 교육과정을 개정한 국가를 선정했다. 호주와 핀란드는 비교적 최근에 역량을 기르는 교육을 강조하며 교육과정을 개정했는데, 따라서 2015 개정 교육과정에 따른 우리나라 교과서와 비교하기 적절한 대상이라고 할 수 있다.

삼각법 내용을 분석하기 위해 먼저 각국의 중학교와 고등학교 교과서를 선정하였다. 우리나라는 2015 개정 교육과정에 따른 교과서 중 학교 현장에서 채택률이 높은 2종을 선정하였다. 본 연구의 목적이 국내의 교과서

간 비교가 아니라 삼각법 내용 요소에 대한 국제 비교이고, 삼각비의 정의나 단원에서 학습하는 내용은 교과서별로 큰 차이가 없으므로 2종을 대표로 살펴보아도 분석하기에 적절하다고 판단하였다. 고등학교 교과서는 같은 출판사의 교과서를 분석하였다. 선정된 2종의 중학교 교과서는 김원경 외(2020), 류희찬 외(2020)이며 고등학교 교과서는 김원경 외(2018), 류희찬 외(2018)의 교과서이다. 본 연구는 교과서 별로 우위를 비교하는 것이 목적이 아니므로 우리나라 교과서를 출판사에 따라 임의로 A, B로 지칭하였다. 호주 교과서는 Cambridge University Press 발행 ICE-EM Mathematics(Peter et al., 2011, 2017)를 선정했다. 핀란드의 중학교 수학 교과서는 WSOY의 2010년에 출판된 9학년 교과서(Laurinolli et al., 2009)가 우리나라에서 2014년에 번역되어 출간되어 있으므로 연구의 편의성을 위해 이를 분석했다. 고등학교 수학 교과서는 2014년 교육과정 개정 이후 출판한 Otava의 교과서(Hähkiöniemi et al., 2016)를 참고하였다. 이는 WSOY에서 2014년 개정 이후 기하 교과서를 출판하지 않았으며, 출판사 간 서술하는 내용의 차이가 크지 않으므로 Otava의 교과서를 참고하는 것이 연구 결과에 영향을 미치지 않을 것으로 판단했다. 호주와 핀란드의 경우 교과서를 지칭할 때는 각각의 국가 명과 학년 또는 교과목을 표시하였다.

내용 요소를 선정하기 위해 우리나라의 각 교과서에서 질문을 기준으로 하는 단위를 하나의 내용 단위로 보았으며, 내용 요소는 상단에 서술된 내용으로 정하였다. 호주의 경우 하나의 단원에 대해 하위 소단원은 알파벳으로 구분하였으며 소단원 옆에 단원의 제목이 함께 표시되는데 소단원을 내용 요소 단위로 정하였다. 핀란드는 한 단원에 대해 소단원을 번호로 구분하고 있으며 번호 옆에 다루는 내용을 제시하므로 각 소단원을 본 논문에서 정하는 내용 요소 단위로 정하였다.

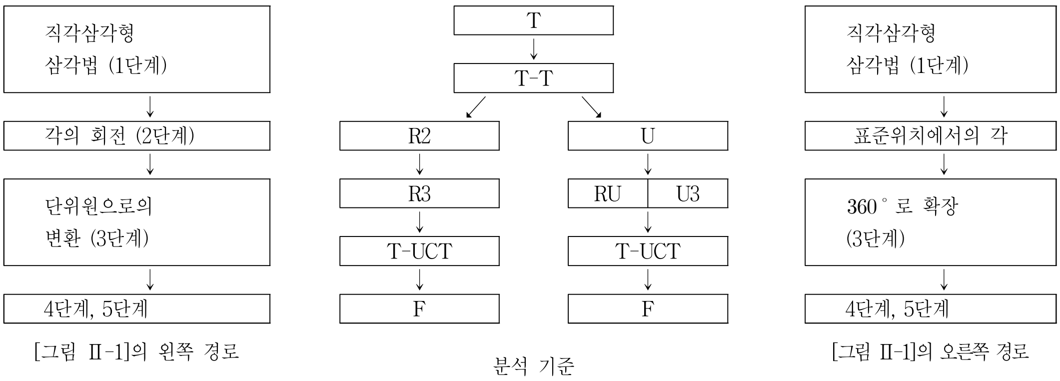
2. 분석 기준

본 연구에서는 수평적 분석으로 교육과정의 목표, 내용 체계, 성취기준을 살펴본 뒤 수직적 분석으로 삼각법의 학습 시기, 삼각함수를 학습하기까지의 학습경로 분석, 과제의 실생활 활용 맥락을 분석했다. 여기서는 수직적 분석에 해당하는 학습경로와 과제의 실생활 활용 맥락을 분석한 기준에 대해 살펴보고자 한다. 삼각법을 학습하는 데 있어 삼각비의 값은 직각삼각형을 이용하는 방법, 단위원을 이용하는 방법, 함숫값으로 정의하는 방법 등 다양한 방법이 존재한다. 앞서 살펴본 것과 같이 학생들은 직각삼각형에서 변의 길이의 비로 삼각비를 처음 접한 뒤 해석적 삼각법에서 정의하는 것과 같이 함숫값, 즉 하나의 실수로 삼각비의 값을 구하는 데에까지 이른다. 이러한 과정을 설명하고자 했던 Brown(2005)의 내용 체계와 Demir(2012)의 이해 모델을 모두 참고하여 교과서에 서술된 내용 요소가 어떠한 삼각비 정의 아래서 서술되었는지 분석했다. 분석 기준은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 삼각비 정의 방법에 대한 분석 기준

유형	단계	특징
T	삼각형 정의	삼각비를 직각삼각형 변 길이의 비로 정의
T-T	T 활용	T를 바탕으로 예각의 삼각비의 값 활용
R2	회전각 +참조삼각형	회전각의 정의 및 참조삼각형의 이용
R3	R2 + 단위원	R2를 바탕으로 삼각비를 단위원에서의 좌표로 정의
U	사분원 방법	삼각비를 단위원의 사분원 위의 한 점의 좌표로 정의
U3	U + 단위원	U를 바탕으로 단위원으로 확장하여 좌표로 삼각비의 값 구하기
RU	U + 참조각	U를 바탕으로 참조각을 이용하여 90° 보다 큰 각에 대한 삼각비의 값 구하기
F	함수 정의	함수의 정의를 이용하여 삼각함수 값을 정의
T-UCT	둔각 삼각비	도형에 포함된 90° 보다 큰 각에 대한 삼각비의 값 활용

T 유형은 두 연구 모두에서 언급된 것으로 직각삼각형에서 변들의 길이의 비로 삼각비를 정의하고, 이를 이용하여 삼각비의 값을 구하거나 적용하는 것이다. R2와 R3 유형은 Brown(2005)이 지지한 비 방법과 단위원 방법의 통합 내용 체계 중 각의 회전(2단계)와 단위원으로의 변환(3단계)울 바탕으로 정하였으며 U와 U3 유형은 단위원 방법을 먼저 도입하는 방식에 따른 내용 체계 중 각각 표준위치에서의 각, 360˚으로의 확장 단계를 참고했다. 표준위치에서의 각에서는 단위원의 사분원에서의 삼각비 정의가 서술되므로 U 유형은 사분원에서의 삼각비의 좌표 정의로 특징을 정했다. 다만 Brown(2005)의 연구에서는 둔각에 대한 삼각비의 값을 구하는 내용이 단위원 위에서의 좌표 정의를 다루기 전에 참조삼각형으로 다뤄지거나, 단위원 위의 좌표를 이용하여 구하게 되지만, 교과서를 사전 검토한 결과 사분원 위에서 좌표로 삼각비의 값을 정의하되, 삼각비의 값을 구하는 것은 참조삼각형을 이용하는 내용이 있어 360˚으로의 확장 단계 중 일부분까지만 다룬다고 판단하여 RU 유형을 추가하였다. T-UCT 유형은 Demir(2012)의 TT-UCT 단계와 거의 유사하지만 앞서 정의한 R3 또는 U3를 학습한 뒤 90˚보다 큰 삼각비의 값을 이용한다는 것을 특징으로 삼았다. 이는 교과서에서 내용 요소를 사전에 검토한 결과 90˚보다 큰 삼각비의 값이 사인법칙이나 코사인법칙 등에서 등장하지만 이 과정에서 R3나 U3 내용은 드러나지 않으므로 R3나 U3에서 삼각비의 값을 구하는 내용과 구분하기 위해 따로 분석하였다. Brown(2005)가 제시한 개념 체계 단계를 바탕으로 분석 기준이 나타내는 학습경로를 고려해보면 [그림 Ⅲ- 1]과 같다.



[그림 Ⅲ-1] 분석 기준으로 나타낸 학습경로

한편, 실생활 활용 측면에서 문제의 맥락을 분석하기 위해 De Lange(1995)가 설명한 맥락과 Wijaya 외(2015)의 문제 분석틀을 참고하였다. 위장맥락 문제는 맥락이 반영된 문제이지만 문제를 해결하기 위해 필요한 수학적 조건이 명시되어 학생의 일상 경험이나 상식이 필요하지 않은 문제이다. 문제 해결에 필요한 단순화한 그림이나 식이 함께 제시된 문제가 대표적인 예다. 관련있고 필수적인 맥락은 위에서 언급한 도형, 그림, 수학적 용어 등이 제시되지 않아 학습자가 직접 현실 상황을 도형화, 수식화 등의 수학화를 거쳐야 하는 문제로 보았다. 예를 들어 실제 지명과 위치를 반영하거나 북쪽, 남동쪽과 같은 방위를 이용해야 하는 문제나 학생이 직접 상황을 이용하여 수학적 처리를 한 도형을 고려해야 풀 수 있는 문제를 말한다. 또한 실제적과 인위적인 맥락에 대해서는 현실 세계에서 각의 측정 결과가 30˚, 45˚, 60˚와 같은 특수각인 경우가 자연스럽게 나타나지 않으므로 특수각을 활용하는지에 따라 실제적 및 인위적 맥락을 구분했다. 즉, 실제적인 맥락은 특수각이 아닌 각도를 문제에서 이용하는 경우, 인위적인 맥락은 특수각을 이용하여 정확한 값을 구하는 문제로 맥락을 분석한다. 이렇게 구성된 분석 기준은 <표 Ⅲ-2>와 같다.

<표 III-2> 맥락 문제의 분석 기준

맥락	특징
맥락 없음	수학적 대상, 기호, 구조에 대해서만 언급
위장 맥락	- 문제를 풀기 위해 일상 경험이나 상식이 필요하지 않음 - 문제의 조건을 반영한 도형 및 그림, 수학적 용어 제시
관련있고 필수적인 맥락	- 문제를 풀 때 일상 경험이나 상식이 필요 - 문제의 조건을 반영한 도형 및 그림, 수학적 용어가 제시되지 않음
실제적 맥락	문제에서 사용되는 각이 30°, 45°, 60° 외의 각으로 제시
인위적 맥락	문제에서 사용되는 각이 30°, 45°, 60° 로 제시

3. 분석 절차

각국의 삼각법 영역이 속한 교육과정을 분석하기 위해 수학과 교육과정의 목표와 내용 체계, 성취기준을 살펴보았다. 본 연구는 삼각비를 학습한 이후 삼각함수를 배우기까지 삼각법 내용이 어떻게 서술되는지 분석하고자 하므로 먼저 삼각함수 및 호도법 도입을 기준으로 그 이전의 내용 요소를 국가별로 추출하였다. 1차로 우리나라 교육과정과 교과서에서 삼각법 내용 요소를 추출한 뒤 핀란드와 호주의 교육과정 및 교과서에서 우리나라에서 다루지 않는 삼각법 내용이 있는 경우 추가로 추출하였다. 우리나라에서 다루지 않는 삼각법 내용을 추가로 분석하면 삼각법 단원에서 어떤 학습경험을 제공하는 것이 적절한지 논의의 계기를 마련할 수 있기 때문이다. 우리나라에서 1차로 추출된 내용 요소는 삼각비의 뜻, 특수각에서의 삼각비, 예각에서의 삼각비, 높이와 거리 구하기, 삼각형의 넓이 구하기이다. 핀란드와 호주에서 추가로 추출한 내용 요소는 둔각에서의 삼각비, 사인법칙, 코사인법칙이다. 이때 사인법칙, 코사인법칙과 같이 2차로 추출된 삼각법 내용 요소는 우리나라의 경우 삼각함수 단원 뒤에 서술되므로 삼각법을 학습하는 방법과 순서를 비교하기 위해 각국의 교육과정 및 교과서에서도 호도법, 삼각함수 정의 및 그래프, 삼각방정식 및 부등식을 학습하는 시기도 함께 조사했다. 이후 추출된 내용 요소들이 어떤 삼각비 정의를 기반으로 서술되는지 분석하기 위해 공통적으로 서술되는 내용을 재선정하여 삼각비 정의 방법을 분석하였다. 공통적으로 서술되는 내용은 삼각비의 뜻, 특수각의 삼각비, 예각의 삼각비, 삼각비를 이용하여 높이와 거리 구하기, 삼각비를 이용하여 삼각형의 넓이 구하기, 사인법칙, 코사인법칙이다. 또한 삼각비 정의를 다시 정하며 각의 확장이 가능하므로 호주와 핀란드에서의 둔각의 삼각비 내용과 우리나라의 일반각, 삼각함수 내용 요소도 선정하였다. 우리나라에서 함수로 정의하는 내용이 포함되므로 비교를 위해 호주와 핀란드의 경우 삼각함수 내용은 학습시기를 파악하는 정도로 조사하였다.

또한 삼각법 영역에서 제시되는 문제들에서 실생활 활용 맥락이 어떻게 나타나는지를 분석하기 위해 교과서에서 맥락 문제를 선정하였다. 이때 실생활과의 연결을 분석하고자 하므로 활용이 언급된 소단원의 문제를 선정했다. 우리나라의 경우 삼각비의 활용 단원이 존재하는데, 이 단원에서는 삼각비를 이용하여 높이나 거리 구하기, 삼각형의 넓이 구하기 내용이 제시된다. 이를 바탕으로 호주와 핀란드에서도 높이나 거리 구하기, 삼각형의 넓이 구하기 내용이 서술된 단원의 문제를 선정하였다. 호주는 9학년에서 삼각법을 이용한 문제 해결하기 단원에서, 핀란드의 경우 삼각형 연습 단원에서 주어진 상황에서 삼각비 값을 이용해 각도를 구하는 문제가 포함되는데 이는 거리 구하기, 넓이 구하기와 같이 활용 맥락이 포함되어 있으므로 분석 대상에 추가했다. 또한 사인법칙, 코사인법칙 단원에서는 변의 길이를 구하거나 각의 크기를 구하는 내용이 주로 제시되므로 이 단원의 문제도 맥락 문제 분석 대상으로 추출하였다. 본문에 설명과 함께 제시되는 예제 및 문제는 제외하였으며 소단원과 단원의 뒷부분에 서술된 연습 문제를 분석했다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 교육과정 분석

세 국가 모두 변화하는 세계에 대응하기 위해 역량을 강조하는 교육과정을 표방하고 있었다. 또한, 세 국가 모두 공학적 도구의 활용이 언급되어 있는데, 우리나라와 호주는 개정 방향에 드러난 반면 핀란드는 일반역량으로 교육과정 문서에 ICT역량을 명시하고 있다. 또한, 호주와 핀란드의 경우 개정 방향이나 기본 토대에서 평등을 언급하여 평등을 추구하는 교육과정을 우리나라에 비해 명시적으로 드러낸다. 핀란드 교육과정에서 사회 구성원으로서의 성장, 생활 관리, 직업 생활 역량이나 호주 교육과정에서 수학으로 세계를 해석하고 활동적인 시민으로서의 역할을 강조한 것은 시민으로서 수학을 생활에 활용한다는 점을 우리나라에 비해 내세우고 있음을 알 수 있다. 우리나라 교육과정의 내용 영역은 학교급과 선택 과목에 따라 달라진다. 고등학교 교육과정은 선택 중심 교육과정으로 공통 과목, 일반 선택 과목, 진로 선택 과목이 있다. 중학교 교육과정과 고등학교의 공통 과목인 수학은 수와 연산, 문자와 식, 함수, 기하, 확률과 통계 영역으로 이루어져 있다. <수학Ⅰ>은 해석과 대수로, <수학Ⅱ>와 <미적분>은 해석 영역이며 <확률과 통계>, <기하> 과목은 내용 영역과 과목명이 같다. <실용 수학>에서는 해석, 기하, 통계 영역을, <경제 수학>에서는 대수와 해석 영역을 다룬다. <수학과제 탐구>는 과목의 특성상 학교마다 내용 영역이 달라질 수 있으므로 <수학과제 탐구> 과목은 교육과정 검토에서 논외로 하기로 한다. 이 중 <수학Ⅰ>과 <수학Ⅱ>는 일반 선택 과목이며 나머지는 진로 선택 과목이다.

호주의 수학과 교육과정의 내용 영역은 수와 대수, 측정과 기하, 통계와 확률의 3가지 내용 영역을 포함하고 있다(Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority, 2013). 중학교 교육과정은 위의 대영역을 기준으로 내용 체계가 제시되지만 고등학교 교육과정은 <필수수학>, <일반수학>, <수학적 방법>, <전문수학>의 교과목별로 성취기준이 제시된다. <필수수학>은 금융수학을 포함하여 실생활 관련 내용을, <일반수학>은 화폐와 금융수학, 대수와 행렬, 도형과 측정, 함수, 수열, 이산수학, 자료 분석 등 대수, 함수, 기하, 통계의 기초적인 내용을 포함하고 있다. <수학적 방법>은 미적분과 통계적 분석의 사용능력을 강조하여 해석과 통계 영역의 비중이 크며 <전문수학>은 수학적 방법을 기초로 다양한 영역에서의 응용을 중점으로 두었다. 핀란드 교육과정은 초등학교부터 중학교 교육과정까지 서술된 기본 교육과정과 고등학교 교육과정으로 나뉘어 있다. 기본 교육과정에서 내용 영역은 6개로 이루어져 있으며 자세한 영역명은 사고 기능과 방법(C1), 수와 연산(C2), 대수(C3) 함수(C4), 기하(C5), 자료 처리, 통계, 확률(C6)과 같다(The Finnish National Board of Education [FNBE], 2016a). 고등학교 교육과정에서 수학은 심화요목(MAA)과 기본요목(MAB)로 구분되어 있고 심화요목에서 기본요목으로 변경할 때 각 과목을 조정하는 방법을 안내한다. 과목은 필수과목과 전문과목으로 분류되어 있으며 모든 학생들은 반드시 필수과목들을 이수해야만 한다. 필수 과목 중 삼각법이 포함된 과목은 <기하>와 <삼각함수> 과목으로 <삼각함수> 과목에서는 삼각함수의 미분까지 다루고 있다(FNBE, 2016b).

각국의 교육과정에서 삼각법이 포함된 영역과 성취기준은 <표 Ⅳ-1>와 같다. 한편 우리나라의 9학년 교수·학습 방법 및 유의 사항으로는 삼각비 사이의 관계는 다루지 않고 삼각비의 값은 $0°$에서 $90°$까지의 각도에 대한 것만 다룬다는 점, 삼각비를 활용하여 직접 측정하기 어려운 거리나 높이 등을 구해보는 활동을 통해 그 유용성을 인식하게 한다는 점이 포함된다. 이후 고등학교 선택과목 <수학Ⅰ>의 해석 영역 중 삼각함수 단원에서 호도법, 삼각함수의 뜻과 성질이 다뤄진다. 교수·학습 방법 및 유의 사항에서는 삼각함수의 개념은 중학교에서 학습한 삼각비와 연계하여 이해하게 한다는 점, 삼각함수의 그래프를 그리거나 문제를 해결할 때 공학적 도구의 이용 가능성, 삼각함수의 성질과 방정식 및 부식은 간단한 경우만 다루고 여러 가지 문제 해결을 통해 삼각함수의 유용성을 인식하도록 한다는 점 등이 포함된다. 호주는 측정과 기하 영역 중 피타고라스 정리와 삼각

법이라는 하위 영역에서 삼각비를 다루며 9-10학년에서 학습한다. 호주 교육과정에서 삼각법이 포함된 단원을 살펴보면 9학년 측정과 기하 영역에서 삼각비, 삼각비의 활용을 학습한 뒤 10학년에 측정과 기하 영역에서 삼각비, 올려본 각, 내려본 각, 방향을 통한 직각삼각형의 문제 풀이, 피타고라스 정리와 삼각법, 사인법칙, 코사인법칙을 학습한다. 핀란드는 7-9학년에서 피타고라스 정리, 피타고라스 정리의 역, 삼각함수를 사용하는 것을 학습한다. 고등학교 기하과목에서는 사인과 코사인 정리 및 평면도형과 입체도형의 길이, 각도, 넓이, 부피 등의 계산이 포함된다. 삼각함수는 삼각함수 과목에서 다뤄지는데 본격적으로 단위원에서의 대칭성을 이용하여 삼각함수 탐구, 삼각방정식의 해결, 삼각함수 간의 관계 학습, 미분 등을 학습한다.

<표 Ⅳ-1> 각국의 교육과정에서 삼각법이 포함된 영역과 성취기준

<table>
<tr><th>학년
국가</th><th>9</th><th>10</th><th colspan="2">11</th></tr>
<tr><td>한국</td><td><기하>
· 삼각비의 뜻을 알고, 간단한 삼각비의 값을 구할 수 있다.
· 삼각비를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.</td><td></td><td colspan="2"><해석>
· 일반각과 호도법의 뜻을 안다.
· 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
· 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>호주</td><td><측정과 기하>
· 닮음을 이용하여 직각삼각형의 주어진 한 각에 대해 사인, 코사인, 탄젠트 값의 일정함을 이해한다.
· 직각삼각형 문제를 해결하기 위해 삼각비를 이용한다.</td><td><측정과 기하>
· 증가, 감소하는 각과 방향을 포함하는 직각삼각형 문제를 해결한다.
· 임의의 삼각형에 대한 사인, 코사인, 넓이 법칙을 정립하고 관련된 문제를 해결한다.(A)
· 디지털 기술을 사용/미사용하며 삼각함수를 정의하고 그래프로 나타내기 위해 단위원을 사용한다.(A)
· 간단한 삼각방정식을 해결한다.(A)
· 직각삼각형에서 3차원 문제를 해결하기 위해 피타고라스 정리와 삼각법을 이용한다.(A)</td><td colspan="2"><일반수학 - 삼각법의 응용>
· 직각삼각형에서 길이와 각도를 찾기 위해 삼각비를 사용하는 것을 복습한다.
· 두변과 끼인 각이 주어졌을 때 $\frac{1}{2}ab\sin C$ 공식을 이용하거나 세 변의 길이가 주어졌을 때 헤론의 법칙을 이용하여 넓이를 구하고 관련된 활용 문제를 해결한다.
· 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형 문제를 해결한다.
· 올려본 각, 내려본 각, 항해술에서의 방위 사용을 포함한 모든 삼각형에 대한 삼각법을 포함하는 활용 문제를 해결한다.<hr><수학적 방법 - 삼각함수>
· 직각삼각형에서 변의 길이의 비로서의 삼각비를 복습한다.
· $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 단위원 정의와 도(degree)를 이용한 주기성을 이해한다.
· 경사각과 기울기 관계를 검토한다.
· 넓이=$\frac{1}{2}ab\sin C$, 사인법칙과 코사인법칙을 학습하고 사용한다.
· 호도법과 삼각함수 그래프의 여러 성질을 이해한다.</td></tr>
<tr><th>학년
국가</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th></tr>
<tr><td>핀란드</td><td><기하>
· 직각삼각형과 원과 관련된 성질을 이해하고 사용한다.</td><td colspan="2"><기하>
· 평면도형과 입체도형의 성질과 닮음, 피타고라스 정리, 직각삼각형과 둔각삼각형에서의 삼각법을 사용하여 기하학적 문제를 해결하는 것을 배운다.</td><td><삼각함수>
· 단위원에서 대칭성을 이용하여 삼각함수를 안다.
· 삼각방정식과 삼각함수 관계를 학습한다.</td></tr>
</table>

이를 정리해보면 세 국가 모두 중학교 기하 영역에서 삼각법을 학습하고 있으며 문제 해결을 언급하고 있다. 디지털 기술 활용에 대한 유의사항은 세 국가 모두 서술되어 있지만 우리나라와 핀란드의 경우 고등학교에서, 호주의 경우 중학교 교육과정에서 언급하고 있다. 삼각법과 해석적 삼각법과의 연계를 교육과정에서 강조하며, 삼각법에서 다루는 각도의 범위나 난이도 등을 언급한 것은 우리나라가 유일하다.

2. 삼각법 학습 시기

각국의 교과서의 삼각법 영역에서 제시하는 내용과 순서는 <표 Ⅳ-2>와 같다. 학년으로 구분되지 않고 학교급 안에서 과목으로 분류된 경우 점선으로 구분하였다. 분석 결과 세 국가 모두 삼각비를 처음 학습하는 것은 9학년으로 나타났다. 이때 한국과 호주는 피타고라스 정리를 학습한 이후에 삼각비를 학습하므로 삼각비의 뜻을 학습하고 변의 길이를 구하는 예제나 문제에서 피타고라스 정리를 활용하는 것과 달리 핀란드는 삼각비를 학습한 이후에 피타고라스 정리가 도입되므로 피타고라스 정리 단원에서 삼각비를 활용하도록 서술했다. 삼각비를 처음 학습하는 9학년에서 세 국가 모두 높이와 거리 구하기 내용이 따로 소단원으로 나뉘어 서술되므로 삼각법 학습에서 활용이 중요시됨을 확인할 수 있다. 특히 호주의 경우 11학년에서는 삼각법의 응용으로 구성된 단원이 있으며 10학년에서 학습하는 사인법칙이나 코사인법칙 또한 넓이를 구하거나 길이를 구하는데 이용된다는 점을 감안하면 실생활 활용 내용이 지속적으로 강조되고 있다고 할 수 있다.

<표 Ⅳ-2> 각국의 교과서의 삼각법 영역에서 제시하는 내용과 순서

학년 국가	9	10	11	12
한국	· 삼각비의 뜻 · 특수한 각의 삼각비 · 예각에 대한 삼각비 · 높이와 거리 구하기 · 삼각형 넓이		· 호도법 · 삼각함수와 그래프 · 삼각방정식·부등식 · 사인법칙 · 코사인법칙 · 삼각형 넓이	
호주	· 참조각, 삼각형 변 이름 · 삼각비의 뜻 · 각도 구하기 · 특수한 각의 삼각비 · 높이와 거리 구하기 · 진방위(True Bearings)	· 삼각비 복습 · 특수한 각의 삼각비 · 3차원에서의 삼각법 · 사인법칙 · 둔각에 대한 삼각비 · 코사인법칙 · 각도 구하기 · 삼각형 넓이	· 삼각비 활용 · 삼각형 넓이 · 사인법칙과 코사인법칙의 활용 · 실생활 활용 · 호도법 · 삼각함수와 그래프 · 삼각방정식	
핀란드	· 참조각, 삼각형 변 이름 · 삼각비의 뜻 · 예각에 대한 삼각비 · 각도 구하기 · 높이와 거리 구하기	· 삼각비 복습 · 특수한 각의 삼각비 · 둔각에 대한 삼각비 · 삼각형 넓이 · 사인법칙 · 코사인법칙		· 호도법 · 삼각함수와 그래프 · 삼각방정식

도입 시기에 차이를 보이는 내용 요소는 삼각형의 넓이와 사인법칙, 코사인법칙이 있다. 우리나라는 삼각형의 넓이를 9학년에서 학습하는데, 호주와 핀란드는 모두 둔각에 대한 삼각비까지 학습한 이후에 등장한다. 우리나라는 9학년에서 예각에 대한 삼각비만을 이용한 삼각형의 넓이를 학습하므로 11학년에서 호도법과 삼각함수를 학습하여 삼각비에서 다루는 각의 범위가 넓어진 이후에 삼각형의 넓이를 다시 서술하고 있다. 사인법칙과 코사인법칙의 도입 시기 또한 비슷한 특징을 보인다. 우리나라는 일반각에 대한 삼각비를 구하는 것을 학습한 이후에 사인법칙과 코사인법칙 내용을 서술하는 반면에 호주와 핀란드는 10학년에서 학습한다. 이는 10학년에서 둔각에 대한 삼각비의 값을 학습하므로 사인법칙과 코사인법칙을 둔각삼각형에 적용하더라도 활용할 수 있기 때문이며 특히 호주는 둔각에 대한 삼각비를 학습하기 전에 사인법칙을 도입하고, 둔각에 대한 삼각비를 학습한 뒤 둔각에 대한 사인값이 필요한 예를 통해 사인법칙을 다시 언급한다.

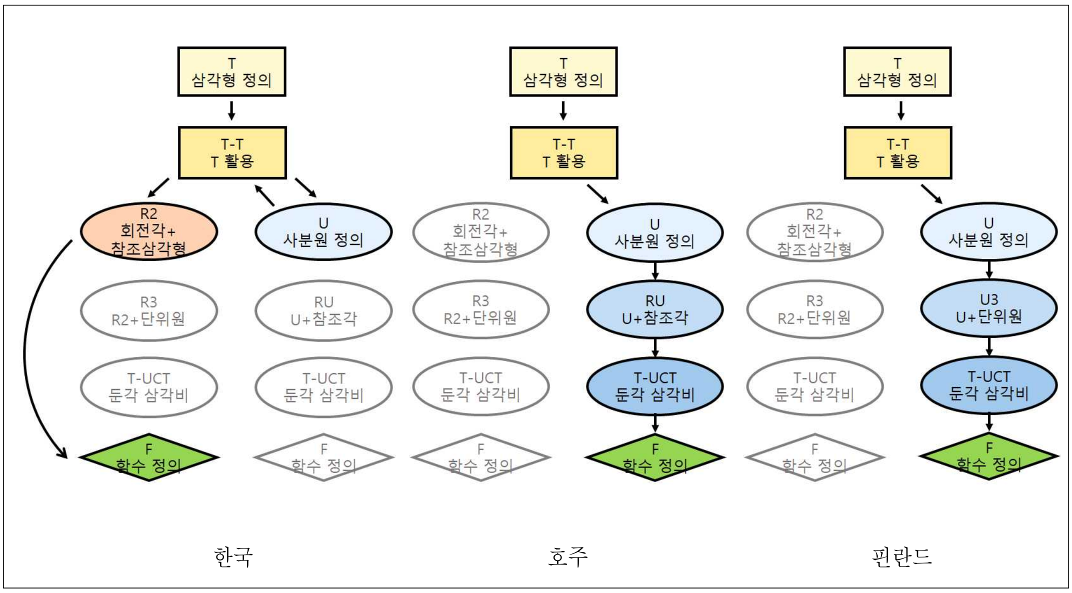
이를 종합해보면, 세 국가는 사인법칙과 코사인법칙, 삼각형의 넓이를 다루기 전에 삼각비에서 다루는 각이 확장된다는 공통점을 갖는다. 이는 사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이를 배울 때 다루는 수학적 대상은 삼각형으로 둔각삼각형까지 모두 포함되기 때문이다. 다른 제약 없이 삼각형에서 사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이를 다루기 위해서는 $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$에서의 삼각비의 값이 필요하기 때문이다. 특히 호주와 핀란드의 교과서에서 둔각에서의 삼각비를 학습하면서 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 범위에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$ 만을 정의했다는 점에서 이를 확인할 수 있다. 사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이를 활용하기 위해서는 사인과 코사인값으로도 충분하기 때문이다. 차이점으로는 삼각함수의 도입 시기 및 삼각법 내용의 연속성이 있다. 우리나라는 호도법, 삼각함수와 그래프, 삼각방정식 등의 내용이 사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이 등을 다루기 전에 나타났다. 이에 반해 호주와 핀란드는 사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이가 호도법이나 삼각함수가 제시되기 전에 서술되었다. 다만 우리나라에서 사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이를 학습할 때 함수 정의를 사용한 이후이므로 사인값과 코사인값 대신 사인함숫값, 코사인함숫값 또는 사인함수, 코사인함수라는 용어를 사용하여 설명하지만 앞서 학습한 호도법을 사용하지 않고 육십분법을 사용한 각도가 다시 등장했다는 점에서 학습 내용은 세 국가가 크게 다르지 않다고 할 수 있다. 한편 우리나라는 삼각법을 다루는 시기가 9학년과 11학년으로 10학년에서는 다루지 않고 있었다. 호주의 경우 9, 10. 11학년 모두에서 다루고 있으며 핀란드는 9학년에서 학습한 이후 고등학교에서 필수 과목으로 <기하>를 학습하므로 연속하여 다룰 수 있다.

3. 삼각비 정의 방법에 따른 교과서 학습경로

여기에서는 <표 Ⅲ-1>에 제시한 분석틀을 바탕으로 교과서에 서술된 내용을 분석한 결과를 다룬다. 교과서 내용이 어떤 삼각비 정의 방법을 바탕으로 서술되었는지에 대한 자세한 설명은 부록에 서술하였다. 각국의 삼각법 학습경로에 나타난 공통점과 차이점을 살펴보자. 세 국가는 공통적으로 삼각형 방법으로 삼각비 뜻을 학습한 뒤에 단위원 맥락을 거쳐서 삼각함수로 발전하는 방식으로 교과서가 서술되었다. 이렇게 단위원을 이용하여 삼각법을 다루는 것은 $\sin\theta$와 $\cos\theta$를 $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$에서 θ에 대한 함수로 볼 수 있도록 하기 위함이다(송은영, 2008). 삼각형 방법으로는 예각에 대한 삼각비만 정의할 수 있고, 삼각함수에서 다루는 각의 범위는 실수 전체이다. 따라서 이 과정의 연결이 필요하므로 세 국가 모두 단위원이 등장하는 것으로 보인다.

차이점으로는 첫 번째로 우리나라에서 임의의 예각의 삼각비의 값에서 U 유형의 설명이 나타났다는 점이다. 그러나 우리나라에서 U 유형의 설명에서는 0°, 90°까지만 각을 확장하고 둔각의 삼각비 값으로 발전하지 않았는데, 같은 U 유형의 설명이 나타나는 호주와 핀란드 교과서와 비교해보면 U 유형의 설명에서는 예각에 대해서만 나타나고 뒤이어 서술되는 RU나 U3 유형의 설명에서 180°까지 각을 확장했다. 따라서 우리나라에서 U 유형의 설명은 둔각까지 각을 확장하고자 하는 호주나 핀란드와 달리 삼각비의 값을 구하는 원리를 이해하게 하고 0°, 90°에서의 삼각비의 값을 학습하기 위해 제시한 것으로 보인다. 실제로 우리나라 교과서에서는 U

유형으로 설명할 때 호주나 핀란드 교과서에서 설명하지 않는 탄젠트값도 단위원 위의 한 점 대신 x축으로 위에 길이가 1인 밑변을 갖는 직각삼각형을 고려하여 구하도록 설명한다. 이후 삼각비의 표를 이용하는 것을 학습하므로 학생들은 삼각비의 표에 나타난 근삿값들이 어떤 원리에 의해 구할 수 있는 값인지를 인식한 상태에서 삼각비의 표를 이용할 수 있다. 또한 $\sin 60^\circ \times \tan 0^\circ + \sin 45^\circ \times \cos 90^\circ$, $\cos 90^\circ + \sin 0^\circ$와 같은 방식의 문제가 서술된 것으로 보아 0°, 90°에서의 삼각비의 값을 학생들이 이해하는 것이 목적이었을 것이다. 실제로 교육과정 상에는 '삼각비의 뜻을 알고, 간단한 삼각비의 값을 구할 수 있다.'고 제시되어 있으므로 간단한 삼각비의 값과 관련된 내용이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅳ-1] 한국, 호주, 핀란드 교과서의 삼각법 학습경로

삼각함수를 학습하기 전 각국의 학생들이 학습하는 삼각법 내용을 고려했을 때 우리나라의 경우 내용 체계에서 생략되는 단계가 있었다. 일반각으로 회전각과 관련된 내용을 학습한 뒤 바로 삼각함수를 도입하는 방식은 기존 연구에서 제안했던 내용 체계나 이해 모델과는 다른 양상이다. 여러 연구자들은 삼각함수와 직각삼각형에서의 삼각비, 비 방법으로 정의된 삼각비, 단위원 방법으로 정의된 삼각비 등의 내용이 통합되어야 함을 강조했는데 따라서 우리나라에서 삼각법이 서술된 방식은 학생이 삼각함수와 기존에 배운 삼각비 영역을 통합하여 이해하기 어려울 수 있다.

4. 삼각법 문제의 맥락 분석

수학과 현실과의 연결은 학생들의 수학적 개념 이해를 돕고, 수학 학습에 대한 동기를 부여할 수 있으며 실제 문제에 수학을 적용하는 것을 돕는 등 많은 이점이 있다(Gainsburg, 2008). 이 절에서는 삼각법 영역에 제시된 문제들의 맥락이 실생활 활용 측면에서 어떻게 나타나는지 분석했다. 분석 결과는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ- 3> 맥락 문제 분석 결과

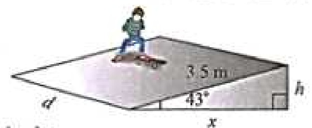
맥락의 기능성 \ 실제vs 인위 \ 국가	우리나라		호주		핀란드	
	실제적	인위적	실제적	인위적	실제적	인위적
맥락 없음	0(0%)	45(67.2%)	44(56.4%)	3(3.8%)	59(61.5%)	6(6.3%)
위장 맥락	10(14.9%)	12(17.9%)	8(10.3%)	0(0%)	16(16.7%)	0(0%)
관련·필수 맥락	0(0%)	0(0%)	23(29.5%)	0(0%)	15(15.6%)	0(0%)

분석 결과 우리나라는 실제적 맥락을 가진 문제가 14.9%로 나타나 호주가 96.2%, 핀란드는 93.7%라는 것과 비교해볼 때 매우 적었다. 호주와 핀란드의 경우 [그림 Ⅳ- 2]와 같이 30°, 45°, 60°가 아닌 각을 문제 상황에서 제시하여 실제적인 맥락을 반영하고 있는 것과 달리 우리나라 교과서에서는 특수각을 조건으로 제시하여 삼각비의 표나 계산기 없이 풀 수 있는 문제들이 주를 이루었다. 호주와 핀란드는 계산기 사용이 교과서에서 자연스럽게 등장하는데 호주는 계산기를 이용하여 삼각비 값을 근삿값으로 구할 수 있음을 설명하였으며 이후 삼각비 내용과 관련된 문제는 대부분 계산기를 이용하여 삼각비의 값을 구하는 과정이 포함된다. 핀란드는 계산기와 표의 사용 단원에서 함수계산기에서 각의 단위를 어떻게 설정해야 하는지, 어떤 단추를 눌러야 하는지의 방법이 사례를 통해 나온다. 관련된 예제에서는 같은 각에 대한 삼각비의 값을 표와 계산기를 이용하여 찾도록 하거나, $\tan\alpha$의 값이 주어진 경우 각 α의 크기를 표와 계산기 모두에서 찾도록 한다.

2. 1000m 고도에 있는 경찰 헬리콥터가 직선 고속도로를 따라 주행하는 자동차를 관찰한다. 그 순간, 헬리콥터에서 자동차를 내려다 본 각도는 27°이다. 5초 후, 헬리콥터에서 자동차를 내려다 본 각도는 26°이다.
a. 처음 자동차를 봤을 때, 헬리콥터와 자동차의 수평거리는 얼마인가? 소수점 첫째자리까지 나타내어라.

호주 9학년 교과서(Peter Brown 외, 2011, p.127)

048 아래 스케이트보드대의 다음을 계산하시오.



a) 높이 h
b) 가로 길이 x
c) 세로 길이 $d=3h$

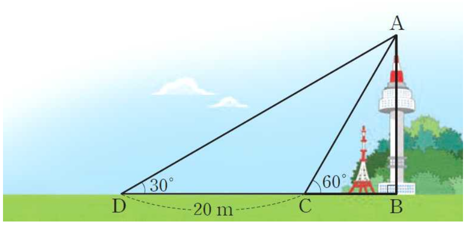
핀란드 9학년 교과서(이지영 역, 2014, p.19)

[그림 Ⅳ- 2] 호주와 핀란드의 실제적 맥락 문제

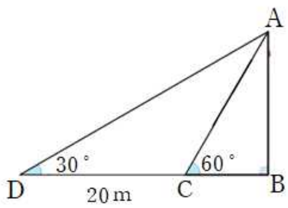
한편 실제적 맥락과 인위적 맥락이 맥락의 기능성에 따라 어떻게 나타나는지 분석해보면, 호주와 핀란드는 맥락의 기능성에 상관없이 실제적 맥락의 문제가 많았다. 그중에서도 위장 맥락 문제나 관련있고 필수적인 맥락 문제에서는 특수각을 사용한 문제를 다루지 않고 있다. 우리나라는 위장 맥락 문제에서 5:6의 비율로 실제적 문제와 인위적 문제가 거의 비슷하게 나타나기는 했지만 맥락 없는 문제에서 압도적으로 특수각을 사용하도록 하는 문제가 나타났다. 국가별로 맥락의 기능성에 대한 문제의 맥락을 비교해보면, 세 국가 모두 맥락 없는 문제가 가장 많이 나타났다. 위장 맥락 문제는 우리나라에서 33.8%를 차지했는데, 호주는 10.3%, 핀란드는 16.7%라는 점에서 2배가량 높았다. 특히 관련있고 필수적인 맥락 문제는 우리나라에서는 나타나지 않았으며 핀란드는 15.6%로 위장 맥락 문제와 비슷한 비율로 나타났다. 호주는 관련있고 필수적인 맥락 문제가 29.5%에 달해 다른 두 국가와 비교했을 때 가장 높은 비율을 보였다. 특히 위장 맥락 문제보다 많이 나타났다는 점은 특징적이다. 학년별로 살펴보면 호주는 10학년에서 특수각을 활용하여 정확한 값을 구하도록 요구하는 문제가 제시되며 핀

란드도 중학교보다 고등학교의 기하 과목에서 특수각을 활용한 문제가 더 많이 나타났다. 호주는 학년에 상관없이 9, 10학년 모두에서 관련있고 필수적인 맥락이 위장 맥락보다 많았다. 핀란드는 9학년에서는 위장 맥락 문제가 더 많았으나 고등학교 기하 과목에서는 관련있고 필수적인 맥락 문제가 더 많이 나타났다. 우리나라는 학년에 상관없이 위장 맥락 문제가 더 많았다.

맥락 없는 문제는 단순히 도형이나 수학적인 값을 제시하고 문제를 해결하는 유형이다. 세 국가 모두 맥락 없는 문제 유형이 가장 많았으며 60% 이상 차지하고 있었다. 위장 맥락 문제는 현실 상황을 문제에 서술하고는 있으나 문제 해결에 필요한 단순화한 그림이나 식이 함께 제시되어 학생들이 문제를 풀 때 자신의 일상 경험이나 상식을 이용한 추론을 할 필요가 없었다. [그림 Ⅳ- 3]은 $20\,\mathrm{m}$ 떨어진 지점 C와 지점 D에서 타워의 꼭대기 지점 A를 올려본 각의 크기가 각각 60°, 30°일 때 타워의 높이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 구하는 문제이다. 쉽게 높이를 측정할 수 없을 정도로 높은 건물의 경우 삼각비를 이용하여 높이를 구할 수 있다는 맥락이 있긴 하지만 여기서는 함께 제시된 삼각형 ADB이 직각삼각형이며 높이 또한 $\overline{\mathrm{AB}}$로 명시되어있으므로 학생들은 이 문제를 해결할 때 실생활에서의 활용 맥락 대신 오른쪽과 같은 수학적인 대상이 제시된 문제로 인식한 뒤 절차에 따라 문제를 해결하게 된다. 이러한 유형은 핀란드와 호주에서도 유사하게 나타났지만 차지하는 비율은 우리나라가 32.8%로 호주와 핀란드가 각각 10.3%, 16.7%인 것에 비해 높게 나타났다.


7 다음 그림과 같이 20 m 떨어진 지점 C와 지점 D에서 타워의 꼭대기 지점 A를 올려본 각의 크기가 각각 60°, 30°일 때, 타워의 높이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 구하시오.

A 9학년 교과서(김원경 외, 2020, p.152)



단순화한 도형

[그림 Ⅳ- 3] 위장 맥락 문제와 단순화한 도형

관련있고 필수적인 맥락 문제가 서술되어 있던 호주와 핀란드 교과서에서 살펴보면[2] 문제 상황을 반영한 그림을 제시하지 않아 학생이 문제를 풀 때 직접 수학적 처리를 해야 하는 문제였으며 방위와 같이 평소 알고 있던 방위를 이용하여 밑면과 높이를 설정한 입체도형을 구상하는 등의 문제가 있었다. 또한 핀란드 교과서의 관련있고 필수적인 맥락 문제 중에는 핀란드의 실제 지명과 위치를 반영한 문제도 있었다. 여기서는 각도를 표시하는 대신 북쪽, 남동쪽과 같은 방위를 이용하여 나타냈다. 이 문제를 해결할 때 학생들은 방위와 같은 상식 및 핀란드 위치에 대한 일상 경험을 바탕으로 접근할 수 있으며 현실 상황을 삼각형으로 바꾸는 수학적 처리가 가능하게 한다.

2) 맥락 문제에 대한 자세한 분석은 주저자의 2020년 석사학위논문을 참고

Ⅴ. 결론 및 논의

삼각법이 학교 수학에서 다뤄지는 데에는 삼각함수에의 연계성을 위한 학습과 실생활 활용을 통한 수학의 유용성을 인식한다는 의의가 있다. 따라서 이러한 두 가지 측면을 전체적으로 조망하는 연구가 필요했으며 특히 교과서 국제 비교를 통해 우리나라 삼각법 학습에서 학생들에게 주어지는 학습 기회를 살펴보고자 했다. 먼저 삼각법에 대한 수학적 지식을 소개하고 선행연구 분석을 통해 삼각법 학습경로를 설정하고자 삼각법 학습에 대한 Brown(2005)과 Demir(2012)의 연구를 참고하였다. 또한 문제가 실생활 활용 맥락을 가졌는지 분석하기 위해 De Lange(1995)가 서술한 맥락 없는 문제, 위장 맥락, 관련있고 필수적인 맥락, 실제적 맥락, 인위적 맥락 등을 살펴보았다. 이러한 연구 결과를 토대로 각국의 삼각법 학습 내용 서술의 특징과 공통점 및 차이점이 나타나는 이유에 대한 논의와 함의점을 밝히고, 우리나라의 삼각법 학습에 대해 시사하고자 한다.

우리나라 교육과정에 서술된 삼각법 내용의 특징은 연속해서 다루지 않는다는 점이다. 호주와 핀란드는 삼각법 내용이 9학년에서부터 고등학교까지 매 학년 심화 및 반복되어 제시되는데 이는 해당 국가들이 나선형 교육과정으로 교과서를 구성하기 때문이다. 이에 반해 우리나라는 중학교 3학년, 고등학교 2학년에서 삼각법을 다루고 있다. 이는 우리나라에서 수학 학습의 어려움에 대한 사회적 이슈가 대두되면서 학습 내용 감축 등의 요구에 의해 선형 교육과정으로 전환되어(정영옥 외, 2016) 온 영향을 배제할 수 없다. 실제로 2007 개정 교육과정까지 고등학교 1학년에서 다루던 삼각함수 내용은 2009 개정 교육과정에서 학습량 감축 및 계산 위주의 학습 지양을 기본 방향으로 선택과목의 내용을 재조직하면서 고등학교 2학년이나 3학년에서 선택하는 <미적분 Ⅱ>로 이동했다(신이섭 외, 2011). 이후 2015 개정 교육과정에서 <수학 Ⅰ>으로 이동하는 과정에서 현재와 같은 학습 시기를 보인다. 한편 삼각법 내용이 교육과정에서 속하는 영역을 살펴보면 중학교에서는 기하, 고등학교에서는 해석 영역에 속한다. 따라서 사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이 구하기와 같은 내용이 해석 영역으로 서술되어 있다. 이는 호주와 핀란드의 경우 호도법이 등장하기 전에 학습하는 사인법칙, 코사인법칙, 둔각에서의 삼각비와 같은 내용이 기하 영역에 속하는 것과 대조적이다. 이러한 차이를 보이는 이유는 우리나라가 호주나 핀란드에 비해 삼각함수 도입이 앞서있기 때문이다. 여기서 앞서있다는 것은 시기적으로 이른 학년에서 도입한다는 것이 아니라 삼각법에서 다루는 내용의 순서를 고려해봤을 때, 앞서있다는 것이다. 삼각함수를 먼저 도입한 뒤에 사인법칙, 코사인법칙 등의 내용을 다루므로 이를 함숫값을 이용하는 해석 영역으로 보는 것이다. 이처럼 우리나라는 두 국가에 비해 삼각법에서 기하적인 면을 강조하지 않는 경향이 있다. 실제로 우리나라는 호주와 핀란드와 달리 중학교에서부터 특수각의 삼각비 값을 강조하며 $\tan 30° + \sin 60° \times \cos 45°$ 와 같은 방식의 문제가 자주 나타났다. 이는 삼각비의 값을 기하적인 맥락 아래에서 이해했는지를 파악한다기보다 특수각의 삼각비의 값을 알고 있는지를 평가한다. 또한 우리나라의 교과서 과제 중에는 인위적인 맥락과 위장 맥락 문제가 많았다. 이러한 차이점은 교육과정 상에서의 강조점에 따른 것이다. 호주는 지속적으로 길러야 할 소양으로 수학적 소양(mathematical literacy)을 강조하고 자신의 생활에서 상황을 탐구하고 해석하는 것을 기본 목적 중 하나로 정하였다. 이러한 교육과정 상의 차이는 호주에서 맥락 문제 중 관련있고 필수적인 맥락이 다른 국가에 비해 많았다는 점, 주로 실제적 맥락을 이용하여 문제를 서술했다는 점으로 추측할 수 있다. 또한 실제적 맥락 문제가 우리나라에 비해 호주와 핀란드에서 비율이 압도적으로 높았는데, 이는 호주와 핀란드에서는 공학적 도구의 활용을 교육과정 전반에 언급한 것과 관련있다.

연구 결과와 논의를 바탕으로 우리나라의 삼각법 학습에 대한 시사점을 제언하자면 다음과 같다.

첫째, 우리나라의 삼각법 학습경로에서 생략되었던 단위원 방법을 활용한다면 삼각법을 통합적으로 이해하는 데 도움이 될 수 있다. 우리나라는 사분원에서의 좌표 정의인 U 유형과 일반각을 학습하는 R2 유형의 설명만 나타난 뒤 바로 함수로 정의한다. 삼각함수와 직각삼각형에서의 삼각비, 단위원 방법으로 정의된 삼각비 등의 내

용이 통합되어야 함을 강조하면서 Brown(2005)과 Demir(2012)가 제시한 개념 체계와 이해 모델을 고려했을 때, 우리나라의 삼각법 학습경로는 사분원에서 단위원으로 확장하거나 일반각을 학습할 때 각의 한 변이 직각삼각형의 한 변이 되도록 하는 설명이 생략된 채 삼각함수를 정의하고 있다. 호주 교과서에서 회전각의 한 변이 직각삼각형의 빗변이 되는 것을 경험하게 해주는 RU 유형의 설명을, 핀란드 교과서에서 사분원에서 단위원으로 확장하는 경험을 할 수 있도록 U3 유형의 설명을 제시하여 둔각에서의 삼각비를 정의한 뒤 함수 정의를 서술한 방식을 참고할 때, 삼각법을 통합적으로 이해할 수 있는 학습경로를 우리나라 교과서에 반영하는 것에 대한 충분한 가능성을 엿볼 수 있다. 참조삼각형은 좌표평면과 직각삼각형에서 삼각비의 정의를 연결해 줄 수 있는 좋은 예로(Brown, 2005) R3 유형의 설명을 제시하기 위해 이를 도입할 수 있다. [그림 Ⅱ-1]에서 θ에 대해 대응되는 $\frac{y}{r}$를 $\sin\theta$로 정의하는 이유는 θ에 대한 참조삼각형을 생각했을 때, $\frac{y}{r}$가 참조각의 $\sin$이기 때문이다. $\cos\theta$도 마찬가지 원리에 의해 설명된다. 이후 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}(x \neq 0)$와 $r=1$인 경우로의 발전을 다뤄 일반각 학습에 그치지 않고 각의 한 변이 직각삼각형의 빗변이 되는 것을 경험하게 할 수 있다. 또는 중학교에서 학습한 U 유형의 사분원을 바탕으로 단위원으로 확장하는 U3 유형이나 참조각을 이용하는 RU 유형의 설명을 추가할 수도 있다. 이처럼 단위원 위에서 삼각법을 고려할 수 있는 학습 기회를 제공하여 삼각비와 삼각함수의 통합적 이해를 도울 수 있다. 학생들이 단위원 위에서 삼각법을 고려하는 것은 삼각함수의 주기성을 명백히 나타내주는 방법이다(Mesa & Goldstein, 2017). 진자의 운동이나 계절의 변화와 같은 반복 현상은 주기성의 관념을 창안했으며 이를 기술할 필요에 따라 삼각비에서 주기성을 갖는 삼각함수로 진보했다는(유재근, 2014) 점에서 삼각함수의 주기성을 학생들이 경험하는 것이 필요하다. 따라서 현재 교과서에서 생략된 설명을 제시하여 삼각법 학습경로 상의 비약을 보완할 수 있다.

둘째, 활용 문제에서 실생활 맥락을 강조하여 학생들이 현실과의 연결성을 인식하도록 할 필요가 있다. 우리나라는 두 국가에 비해 교과서의 문제에서 특수각의 삼각비의 값을 강조하고 있다. 그러나 특수각의 삼각비의 값을 강조하는 것은 학생들이 특수한 각에서만 삼각비의 값이 존재한다고 오해할 수 있으므로 다른 각에 대해서도 삼각비의 값이 어느 정도가 되는지 추론하는 활동을 경험할 필요가 있다(송은영, 2008). 특히 실생활 상황을 함께 제시하는 높이나 거리, 넓이 구하기 등의 문제에서는 다양한 각도를 제시할 필요가 있다. 이를 위해 공학적 도구를 더 적극적으로 활용할 수 있다. 호주와 핀란드는 실제적 맥락 문제를 다룰 때 계산기 사용이 자연스럽게 등장한다. 이는 교육과정 상에서의 강조부터 이어진 것으로 호주는 교육과정 개발 과정에서 고려한 여러 관점 중 한 가지로 디지털 기술의 역할을 제시했으며 핀란드도 일반역량 중 하나로 ICT역량을 들어 공학적 도구의 활용을 강조했다. 우리나라도 2015 개정 교육과정에서 공학적 도구의 활용이 전보다 강조되기는 했으나 유의 사항 정도로 머무는 경우가 많았으며 삼각법 영역에서도 삼각함수 단원에서만 공학적 도구의 활용 가능성을 유의 사항에 포함시킨 정도였다. 따라서 삼각법 영역에서 실제적 맥락 문제 제시를 위해 공학적 도구의 활용을 교육과정 및 교과서에서 더 강조하는 방안을 생각해볼 수 있다. 교육과정에서 어떤 활동에서 계산기를 사용하는 것이 수학적 사고를 돕는지에 대한 정보를 포함한 지침을 마련하여 교사들에게 제공하고 교육과정에서 계산기 활용이라는 주제가 명시적으로 제시될 필요가 있다(박교식, 1998; 최지선, 2018). 특히 삼각법 영역에서 이를 강조하기 위해 교과서의 대단원이나 중단원에서 계산기를 이용하는 법을 다루는 것도 고려해볼 수 있다. 핀란드나 호주의 경우 계산기를 이용하여 삼각비의 값을 계산하는 내용에 대해 어떤 버튼을 어떤 순서에 맞게 눌러야 하는지까지 제시되는 등 자세히 다뤄 실제로 학생들이 계산기를 활용하도록 지도하고 있다. 현재 우리나라의 삼각법을 다루는 교과서에서 계산기 활용이 표시된 과제라 하더라도 삼각비의 값을 계산기로 구하는 것을 요구하기보다는 계산하는 과정을 수월하게 하는 데에 주로 이용하고 있으므로 직접 삼각비의 값을 구하는 것부터 계산기를 활용할 수 있도록 하는 지도가 필요하다. 또한 인터넷을 활용하는 방법을 제공하는 것도 가능하다. 최근 학

생과 교사 모두 인터넷에 대한 접근이 전보다 쉬워졌으므로 인터넷에서 검색이나 계산기 등을 통하여 삼각비의 값을 구하는 방안을 교과서에서 제시할 수 있다.

셋째, 교육과정의 방식 및 영역에 대해 재고해 볼 필요가 있다. 학습량 감축이라는 부분을 고려하여 선형 방식을 택하고 있는 교육과정 아래서 서술된 삼각법 내용은 학년의 단절뿐만 아니라 학습경로 상 비약으로 오히려 학습에 어려움을 줄 수 있다. 현재 우리나라 교과서의 삼각법에서 다루는 각의 범위를 살펴보면 중학교에서 0°에서 90°까지의 각도까지 다루다 고등학교에서 일반각으로 확장하는데 이를 나선형 방식 아래서 다루는 각의 범위를 점진적으로 넓히는 접근도 고려해볼 수 있다. 다른 국가들이 나선형 교육과정으로 여러 학년에 걸쳐 반복하고 확장하고 심화하는 방식이 내용의 심화나 학생들의 인지적 부담을 줄일 수 있는지에 대한 연구가 필요하다(정영옥 외, 2016). 또한 교육과정에 서술된 영역과 내용이 일치하는지 살펴볼 필요가 있다. 사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이 구하기 내용이 속한 영역과 같이 교육과정 내용에 여러 영역이 혼재되어 있을 경우 적절히 명명할 수 있는 영역명이나 주제명에 대해 고려할 필요가 있다(방정숙 외, 2015). 현재 교과서에 서술되는 사인법칙, 코사인법칙, 삼각형의 넓이 구하기 내용도 삼각함숫값을 이용한다고 하기에는 앞서 제시된 함수 내용과 일관되지 않으며 변의 길이나 각의 크기 등을 탐구한다는 점에서 기하 영역에 속하는 것이 더 자연스러우므로 이를 검토해볼 수 있다.

참 고 문 헌

고호경・장경윤・이강천 (2016). 우리나라와 호주 중학교 수학과 교육과정 비교 분석, 수학교육학연구, 26(2), 309-331.

Ko, H., Chang, K., & Lee, G. (2016). A Comparative Analysis of the Middle School Mathematics Curriculum in Korea and Australian, *Journal of Educational Research in Mathematics*, 26(2), 309-331.

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].

Ministry of Education (2015). *Mathematics Curriculum*, Ministry of education notice 2015-74[supplement 8].

김미희・김구연 (2013). 고등학교 교과서의 수학과제 분석, 학교수학, 15(1), 37-59.

Kim, M. & Kim, G. (2013) The analysis of mathematical tasks in the high school mathematics, *School Mathematics*, 15(1), 37-59.

김원경・조민식・방금성・윤종국・신재홍・임석훈・김동화・강순자・김기탁・박희정・심주석・오혜정・이동근・이성재・정재훈 (2018). 고등학교 수학 Ⅰ. 서울: 비상교육.

Kim, W., Cho, M., Bang, G., Yoon, J., Shin, J. H., Im, S., Kim, D., Kang, S., Kim, K., Park, H., Shim, J., Oh, H., Lee, D., Lee, S., J. & Jung, J (2018). *High School Mathematics Ⅰ*. Seoul: Visang

김원경・조민식・방금성・임석훈・김동화・강순자・배수경・지은성・김윤희 (2020). 중학교 수학 3. 서울: 비상교육.

Kim, W, Cho, M., Bang, K., Kim, D., Kang, S., Bae, S., Ji, E., & Kim, Y. (2018). *Middle School Mathematics 3*. Seoul: Visang

김선형 (2016). 중학교 3 학년 학생들의 삼각비에 대한 개념이미지와 이해 및 문제해결 간의 관계, 석사학위논문, 이화여자대학교.

Kim, S. H. (2016). *A study of the relationship between 9th grade students' concept images and their understanding of trigonometric ratios and problem-solving strategies*. Master thesis, Ewha Womans University.

노지화 (2016). 교과서 실생활 문제 분석 -미국 Precalculus 교과서를 중심으로-, 수학교육논문집, 30(3), 295-308.

Noh, J. H. (2016). Analyzing Contexts Used in Textbook Problems -A Case of Precalculus-, *Communications of Mathematical Education*, 30(3), 295-308.

류희찬 · 선우하식 · 신보미 · 조정묵 · 이병만 · 김용식 · 임미선 · 한명주 · 남선주 · 김명수 · 정성윤 (2018). 고등학교 수학 Ⅰ, 서울: 천재교육.

Ryu, H., Sunwoo, H., Shin, B., Cho, J., Lee, B., Kim, Y., Im, M., Han, M., Nam, S., Kim, M., & Jung, S (2018). *Hich School Mathematics Ⅰ*. Seoul: Chunjae

류희찬 · 선우하식 · 신보미 · 정동승 · 설정수 · 장영훈 · 박슬히 (2020). 중학교 수학 3, 서울: 천재교육.

Lew, H., Sunwoo, H., Shin, B., Jeong, D., Sul, J., Jang, Y., & Park, S(2020). *Middle School Mathematics 3*. Seoul: Chunjae

박교식 (1998). 우리나라 초등학교 수학교육에 적용 가능한 계산기 활용 방안 연구. 대한수학교육학회 논문집, 8(1), 237-249.

Park, K. (1998). A Study on How to Use Calculators in Elementary Mathematics Education in Korea, *Journal of Educational Research in Mathematics,* 8(1), 237-249.

방정숙 · 이지영 · 이상미 · 박영은 · 김수경 · 최인영 · 선우진 (2015). 한국 · 중국 · 일본 · 미국의 초등학교 수학과 교육과정 비교· 분석-도형 영역을 중심으로. 한국학교수학회논문집, 18(3), 311-334.

Pang, J., Lee, J., Lee, S. M., Park, Y., Kim, S. K., Choi, I.., & Sun, W. (2015) A comparative analysis of school mathematics curricula in Korea, China, Japan, and USA, *Journal of the Korean School Mathematics Society,* 18(3), 311-334.

송은영 (2008). 삼각함수 개념의 지도에 관한 연구, 석사학위논문. 서울대학교.

Song, E. (2008). *A study on the teaching of the concept of trigonometric function*, Master thesis, Seoul National University.

신이섭 외 (2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 한국과학창의재단 정책연구 2011-11

Shin, Y. et al. (2011). *Research report on the mathematics curriculum according to the 2009 revised curriculum*. Korean Foundation for the Advancement of Science and Creativity Research Report 2011-11.

신준식 (2011). 핀란드 수학과 교육과정 비교 분석. 초등수학교육, 14(3), 225-236.

Shin, J. S. (2011). A Comparative study of mathematics curriculum in Finland, *Education of Primary School Mathematics,* 14(3), 225-236.

유재근 (2014). 삼각함수 개념의 역사적 분석. 수학교육학연구, 24(4), 607-622.

Yoo, J. (2014) A historical analysis on trigonometric functions, *Journal of Education Research in Mathematics*, 24(4), 607-622.

이상원 · 방승진 (2004). 삼각비 단원이 삼각함수 단원에 미치는 영향. 수학교육논문집, 18(2), 187-208.

Lee, S. W., & Bang, S. (2004). The effect of the trigonometric ratio unit on the trigonometric function unit, *Communications of Mathematical Education*, 18(2), 187-208.

정영옥 · 장경윤 · 김구연 · 권나영 · 김진호 · 서동엽 · ... · 탁병주 (2016). 수학 교육과정 국제 비교 분석 연구: 미국, 싱가포르, 영국, 일본, 호주의 중학교와 고등학교 교육과정을 중심으로. 수학교육학연구, 26(3), 371-402.

Chong, Y.., Chang, K.., Kim, G., Kwon, N., Kim, J., Seo, D., ...&.Tak, B. J. (2016). A comparative study of mathematics curriculum among the United States, Singapore, England, Japan, Australia and Korea, *Journal of Educational Research in Mathematics*, 26(3), 371-402.

최영란 · 조민식 (2011). 한국과 핀란드의 고등학교 수학 교과서 비교 연구, 교원교육, 27(1), 61-82.

Choi, Y. & Cho, M. (2011). A study on the content anaytic comparison of Korean and Finnish high school mathe textbooks, *Korean Journal of Teacher Education*, 27(1), 61-82.

최지선 (2018). 수학 수업 중 계산기 사용에 대한 한국과 싱가포르의 교육 비교, 한국학교수학회논문집, 21(3), 227-245.

Choi, J. (2018). A Comparative Study on Calculator in Mathematics Educations Between Korea and Singapore, *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 21(3), 227-245.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2013). *The Australian curriculum : Mathematics Curriculum F-10*. Retrieved from http://www.australiancurriculum.edu.au/ 2020.7.26

Brown, S. A. (2005). *The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine*. Doctoral dissertation. Illinois State University.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical thinking and learning*, 12(2), 117-151.

De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. In Tomas A. Romberg(Eds.), *Reform in school mathematics and authentic assessment*, 87-172. The USA: SUNY Press.

Demir, O. (2012). *Students' concept development and understanding of sine and cosine functions: A new theoretical and educational approach*. Doctoral dissertation. Universite van Amsterdam.

Fi, C. D. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. Doctoral dissertation. Iowa University.

Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(3), 199-219.

Hähkiöniemi, Juhala, Juutinen, Louhikallio-Fomin, Luoma-aho, Raittila, Tikka. (2016). *Juuri 3 – MAA3 : geometria*. Helsingissä : Kustannusosakeyhtiö Otava.

Hong, D. & Choi, K. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: the case of quadratic equations. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 241-263.

Jurdak, M. E. (2006). Contrasting perspectives and performance of high school students on problem solving in real world, situated, and school contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 283-301.

Kendal, M., & Stacey, K. (1996). Trigonometry: Comparing ratio and unit circle methods. In Technology in Mathematics Education. *Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics education Research group of Australasia*, 322-329.

Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-aho, E., Timo sankilampi, Selenius, R., Talvitie, K., & Vähä-Vahe, O. (2009). Laskutaito 9. 이지영 역(2014). 핀란드 중학교 수학교과서 9. 솔빛길.

Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-aho, E., Timo sankilampi, Selenius, R., Talvitie, K., & Vähä-Vahe, O. (2009). Laskutaito 9. Lee, J. Y. translation (2014). *Finnish Middle School Mathematics 9*. Solbitgil.

Mesa, V., & Goldstein, B. (2017). Conceptions of Angles, Trigonometric Functions, and Inverse Trigonometric Functions in College Textbooks. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(2), 338-354.

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 225-245.

Peter Brown, Michael Evans, Garth Gaudry, David Hunt, Robert McLaren, Bill Pender, Brian Woolacott. (2011). *ICE-EM Mathematics Australian Curriculum 2nd Edition Year 9 Book 2.* Cambridge University Press.

Peter Brown, Michael Evans, Garth Gaudry, David Hunt, Robert McLaren, Bill Pender, Brian Woolacott. (2017). *ICE-EM Mathematics Australian Curriculum 3rd Edition Year 10 & 10A.* Cambridge University Press.

Shin, J., & Lee, S. J. (2018). The alignment of student fraction learning with textbooks in Korea and the United States. *The Journal of Mathematical Behavior*, 51, 129-149.

Stein, M. K., Remillard, J. T., & Smith, M. S.(2007) *How curriculum influences student learning. Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* Charlotte, NC: Information Age.

Stinner, A. (1995). Contextual settings, science stories, and large context problems: Toward a more humanistic science education. *Science Education*, 79(5), 555-581.

The Finnish National Board of Education(2016a). *National Core Curriculum for Basic education 2014.* Helsinki: The Finnish National Board of Education.

The Finnish National Board of Education(2016b). *National Core Curriculum for Upper secondary education 2014.* Helsinki: The Finnish National Board of Education.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education. *Proceedings of the annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 31-49.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education.* Netherlands.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational studies in Mathematics*, 89(1), 41-65.

Comparison of Trigonometry in Mathematics Textbooks in Korea, Australia, and Finland

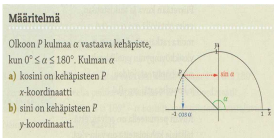
Choi, Eun
Hansol Middle School Teacher
E-mail : eunidat@snu.ac.kr

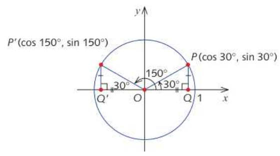
Kwon, Oh Nam†
Seoul National University Professor
E-mail : onkwon@snu.ac.kr

Trigonometry allows us to recognize the usefulness of mathematics through connection with real life and other disciplines, and lays the foundation for the concept of higher mathematics through connection with trigonometric functions. Since international comparisons on the trigonometry area of textbooks can give implications to trigonometry teaching and learning in Korea, this study attempted to compare trigonometry in textbooks in Korea, Australia and Finland. In this study, through the horizontal and vertical analysis presented by Charalambous et al.(2010), the objectives of the curriculum, content system, achievement standards, learning timing of trigonometry content, learning paths, and context of problems were analyzed. The order of learning in which the three countries expanded size of angle was similar, and there was a difference in the introduction of trigonometric functions and the continuity of grades dealing with trigonometry. In the learning path of textbooks on the definition method of trigonometric ratios, the unit circle method was developed from the triangle method to the trigonometric function. However, in Korea, after the explanation using the quadrant in middle school, the general angle and trigonometric functions were studied without expanding the angle. As a result of analyzing the context of the problem, the proportion of problems without context was the highest in all three countries, and the rate of camouflage context problem was twice as high in Korea as in Australia or Finland. Through this, the author suggest to include the unit circle method in the learning path in Korea, to present a problem that can emphasize the real-life context, to utilize technological tools, and to reconsider the ways and areas of the curriculum that deal with trigonometry.

* ZDM Classification : U20, G60
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key words : trigonometry, textbook analysis, comparative study
† corresponding author

<부록>

유형	한국	호주	핀란드
T 삼각형 정의	∘삼각비의 뜻 – 빗변과 밑변, 빗변과 높이, 밑변과 높이의 길이의 비를 고려하여 삼각비를 정의	∘삼각비의 뜻 – 변의 길이의 비는 같다는 점을 서술한 뒤 변의 이름을 학습한 이후에 삼각비를 정의	∘삼각비의 뜻 – 변의 이름을 학습한 뒤 변들의 길이의 비가 일정함을 서술한 이후에 삼각비를 정의
T-T T 활용	∘특수각의 삼각비 – 직각이등변삼각형, 정삼각형의 성질 등을 이용하여 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값 계산 ∘예각의 삼각비 – 삼각비 표와 계산기를 이용하여 삼각비의 값 계산 ∘높이, 거리 계산 – 삼각비 표와 계산기를 이용한 삼각비의 값을 활용하여 높이, 거리 계산 ∘삼각형의 넓이 – 삼각비 표와 계산기를 이용한 예각의 삼각비의 값을 활용하여 넓이 계산	∘예각의 삼각비 – 계산기를 이용하여 삼각비의 값 계산 ∘특수각의 삼각비 – 직각이등변삼각형, 정삼각형의 성질 등을 이용하여 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값 계산 ∘높이, 거리 계산 – 계산기를 이용한 삼각비의 값을 활용하여 높이, 거리 계산 ∘사인법칙 – 예각삼각형에서 계산기를 이용한 삼각비 값을 활용하여 한 변의 길이와 양 끝 각의 크기를 알 때 다른 한 변의 길이 계산	∘예각의 삼각비 – 계산기와 삼각비 표를 이용하여 삼각비의 값 계산 ∘높이, 거리 계산 – 삼각비 표와 계산기를 이용한 삼각비의 값을 활용하여 높이, 거리 계산 ∘특수각의 삼각비 – 직각이등변삼각형, 정삼각형의 성질 등을 이용하여 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값 계산
R2 회전각+ 참조삼각형	∘삼각함수– 양의 방향과 음의 방향의 회전을 모두 고려하여 일반각을 정의		
유형	한국	호주	핀란드
U 사분원 정의	∘예각의 삼각비 – 사인과 코사인의 값은 사분원 위의 한 점에서 x축에 내린 수선의 발까지의 길이를 사인값으로 y축에 내린 수선의 발까지의 길이를 코사인값으로 설명	∘둔각의 삼각비 – 사인과 코사인의 값은 사분원 위의 한 점에서 x좌표가 코사인, y좌표가 사인임을 설명	∘둔각의 삼각비 – 사인과 코사인의 값은 사분원 위의 한 점에서 x좌표가 코사인, y좌표가 사인임을 설명
U3 U+단위원			 Määritelmä Olkoon P kulmaa α vastaava kehäpiste, kun $0° \le \alpha \le 180°$. Kulman α a) kosini on kehäpisteen P x-koordinaatti b) sini on kehäpisteen P y-koordinaatti. 핀란드 <기하>(p.77) ∘둔각의 삼각비 – 단위원 위에서 사인과 코사인의 좌표 정의가 둔각에서도 적용됨을 설명하며 각을 확장한 좌표 정의로 삼각비 계산

유형	한국	호주	핀란드
RU U+참조각		 호주 10학년 교과서(p.362) ◦둔각의 삼각비 - $\sin\theta = \sin(180^{\circ} - \theta)$, $\cos\theta = -\cos(180^{\circ} - \theta)$라는 관계를 바탕으로 참조각을 이용한 둔각에 대한 삼각비의 값 계산	
T-UCT 둔각 삼각비		◦코사인법칙, 사인법칙, 삼각형 넓이 - 확장된 정의를 이용하여 예각, 둔각 모두에 대한 삼각비의 값을 활용하여 설명	◦삼각형 넓이, 사인법칙, 코사인법칙 - 확장된 정의를 이용하여 예각, 둔각 모두에 대한 삼각비의 값을 활용하여 설명
F 함수 정의	◦삼각함수 - 반지름의 길이가 r인 원 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대해 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}(x \neq 0)$ 의 값은 r의 값에 관계없이 θ의 값에 따라 각각 하나씩 정해짐을 설명한 뒤 이러한 대응은 θ에 대한 함수임을 서술	◦삼각함수 - 호도법과 삼각함수	◦삼각함수 - 호도법과 삼각함수