

Asymptotic properties of monitoring procedure for parameter change in heteroscedastic time series models

Soo Taek Kim^a · Hae June Oh^{a,1}

^aDepartment of Information and Statistics, Gyeongsang National University

(Received July 9, 2020; Revised July 14, 2020; Accepted July 15, 2020)

Abstract

We investigate a monitoring procedure for the early detection of parameter changes in location-scale time series models. We introduce a detector for monitoring procedure based on modified residual cumulative sum (CUSUM). The asymptotic properties of the monitoring procedure are established under the null and alternative hypotheses. Simulation results and data analysis are also provided for illustration.

Keywords: monitoring procedure, parameter change, sequential procedures, location-scale time series, modified residual CUSUM

1. 서론

통계 모형에서 모수 변화를 탐지하는 문제는 Page (1955) 이후로 많은 연구자들에게 관심의 대상이었다. 이에 대한 관심은 원래 품질 관리에서 시작되었지만 시계열 자료에서 통화 정책 및 중요한 사회적 이슈의 영향으로 인하여 통계 모형의 구조적 변화를 자주 경험하게 되면서 시계열 모형에서 변화를 탐지하는 문제로 빠르게 확장되었다. Lee 등 (2003)은 시계열 모형에서 모수와 자기공분산함수의 변화를 검정하는 방법에 대하여, Berkes 등 (2004b), Gombay (2008)와 Kirch와 Kamgaing (2012)은 각각 GARCH 모형, AR 모형과 비선형 AR 모형에서 모수의 변화를 검정하는 연구를 진행하였고, Lee와 Song (2008), Oh와 Lee (2018)와 Song과 Kang (2018)은 ARMA-GARCH 모형에서 모수의 변화를 검정하는 연구를 진행하였다. 그런데 이러한 연구들은 이미 관측된 자료만을 이용하여 고정된 기간 동안의 변화를 탐지하는 문제를 다루고 있지만 구축된 시계열 모형에서 실시간으로 관찰되는 자료로부터 예상치 못한 변화를 감지하기 위하여 모니터링 절차의 적용을 시도하였다. 예컨대, 금융(위험 관리, 환율 모니터링), 계량 경제학, 의학(집중 치료 환자 모니터링, 축차적 임상 실험) 및 기상학(지구 온난화 문제, 기상 경보 시스템)에서는 현재 상황을 주시하여 불안정성을 즉시 탐지하고 대응하는 것이 중요하기 때문에 모니터링 절차가 필요하다. 방법론적으로 Chu 등 (1996)은 새로운 자료가 관측될 때마다 기존의 방법대로 소급 적용하여 검정을 반복하게 되면 제1종 오류가 발생할 가능성이 높기 때문에 축차 검정 절차를 제안하였으며, 그 이후로 여러 연구자들이 구조 및 모수의 변화에 대한 모니터링 절차에 대하여

This work was supported by the National Research Foundation of Korea (NRF) grant funded by the Korea government (MSIT) (NRF-2020R1G1A1A01014362).

¹Corresponding author: Department of Information and Statistics, Gyeongsang National University, 501 Jinju-daero, Jinju, South Gyeongsang Province 52828, Republic of Korea. E-mail: haejune.oh@gmail.com

지속적으로 연구하였다. Leisch 등 (2000), Horváth 등 (2004)과 Zeileis 등 (2005)은 회귀모형에서 모수의 변화를 모니터링하는 연구를 진행하였으며, Berkes 등 (2004a)은 GARCH 모형에서 모수의 변화를 모니터링하는 연구로 확장하였고, Na 등 (2011)은 시계열 모형에서 모수와 자기공분산함수의 변화에 대한 모니터링 절차를 제안하였다. 또한, Gombay와 Serban (2009)은 AR 모형에서, Dienes와 Aue (2014)과 Aue 등 (2015)은 ARMA 모형에서, 모니터링 연구를 진행하였다.

잔차 기반의 누적합을 이용하여 관측된 자료에서 모수의 변화를 검정하는 방법은 GARCH 모형 등 조건부 이분산성을 설명하는 모형에서 뛰어난 성능을 보였다 (Kim 등, 2000; Lee 등, 2004). 하지만 Oh와 Lee (2018)와 Oh와 Lee (2019a)에 의하여 ARMA-GARCH 모형 등과 같이 위치(location) 모수와 척도(scale) 모수를 모두 가지는 모형에서 이 검정법은 위치 모수의 변화를 탐지하지 못한다는 치명적인 단점이 드러났다. 이에 대한 대안으로 Oh와 Lee (2018)와 Song과 Kang (2018)은 ARMA-GARCH 모형에서 스코어 벡터를 이용한 검정법을, Oh와 Lee (2019a)에서는 2차원의 검정통계량을 제안하였다. Oh와 Lee (2019a)에서는 기존에 사용되던 잔차 제곱의 누적합을 이용하여 척도 모수의 변화를 감지하고 위치 모수의 변화를 감지할 수 있는 새로운 통계량을 검정통계량에 추가함으로써 이 문제를 해결하고자 하였고, 수정된 잔차를 기반으로 하는 검정법이 스코어 벡터를 기반으로 하는 검정법에 비하여 여러 함수의 도함수를 계산하는 과정이 생략되는 등 구현하기가 훨씬 간단하고, 모수의 갯수가 많은 다소 복잡한 모형에서 오차항이 정규분포를 크게 벗어날 때 성능이 좀더 우수함을 보였다.

Bardet과 Kengne (2014), Kengne (2015)과 Li 등 (2015)은 각각 일반적인 시계열 모형, 포아송 AR모형과 RCA 모형에서 추정량을 이용하여 모수의 변화를 모니터링하는 방법을 제안하였으나 GARCH 모형 등과 같이 이분산성을 설명하는 모형에서는 준최대가능도 추정량(Quasi-MLE) 등이 실제 모수로 수렴하는 속도가 느리기 때문에 표본의 크기가 아주 크지 않으면 이 방법을 이용하는 것이 바람직하지 않다 (Oh와 Lee, 2019b). 또한, Berkes 등 (2004a)과 Song과 Kang (2020)은 각각 GARCH 모형과 ARMA-GARCH 모형에서 스코어 벡터를 이용하여 모수의 변화를 모니터링하는 방법을 제안하였으나 여전히 더 복잡한 모형에서 이 방법을 적용하는 데에는 한계가 있다. 따라서 본 연구에서는 Oh와 Lee (2019a)가 제안한 수정된 잔차 기반의 누적합을 이용한 검정법을 모니터링 절차에 적용하고자 한다. 이 분산성의 위치-척도 모형에서 모수의 변화를 모니터링하는데 필요한 탐지 통계량을 제안하고 모수 변화가 없다는 귀무가설과 특정 시점에 모수 변화가 일어났다는 대립가설 하에서 이 모니터링 절차의 점근성질들을 규명하고자 한다. 또한, 제안한 탐지 통계량을 이용한 모니터링 절차가 잘 구현되는지 모의실험을 통하여 확인하고자 한다.

본 논문은 총 4장으로 구성되어 있으며 2장에서는 시계열 모형에서 일반적인 모니터링 절차를 소개하고 이분산성의 위치-척도 모형에 모니터링 절차를 적용하고 점근 성질을 규명한다. 3장 및 4장에서는 제안한 모니터링 절차의 성능을 확인하기 위해 모의실험과 사례 분석을 진행하고 5장에서는 결론을 맺는다.

2. 모니터링 절차

Berkes 등 (2004a)과 Na 등 (2011)은 모수가 $\theta_0 = (\theta_{0,1}, \dots, \theta_{0,p})^T$ 인 시계열 모형에서 생성된 $\{y_t, t = 1, 2, \dots\}$ 에서 모수의 변화를 모니터링하는 절차를 제안하였다. 여기서 y_1, \dots, y_n 은 관측된 과거의 시계열 자료들이고 이 동안은 모수 θ_0 가 변하지 않았다고 가정하고 새롭게 관측되는 자료들을 통하여 시계열 모형에서 모수들의 변화가 일어났는지 탐지하였다. 여기서 귀무가설은

$$H_0 : \theta_0 \text{가 모든 시점 } t > n \text{에서 변하지 않는다.}$$

이고 이에 대한 대립가설은

$$H_1 : \theta_0 \text{가 특정 시점 } t > n \text{에서 변한다.}$$

이다. 이때, 모니터링 절차는 다음과 같이 정지 시간(stopping time) k_n 을 정의함으로써 진행한다.

$$k_n := \min \left\{ k \geq 1 : D_n(k) > \sqrt{n} \left(1 + \frac{k}{n} \right) b \left(\frac{k}{n} \right) \right\},$$

여기서 $D_n(k)$ 는 y_1, \dots, y_{n+k} 에 기반한 탐지기(detector)라 부르는 탐지 통계량이고 $b(\cdot)$ 는 경계함수(boundary function)이다. 만약 k_n 이 유한하다면 모니터링 절차에서 귀무가설을 기각하여 모수의 변화가 일어난 것으로 탐지한다. 따라서 모니터링 절차에서

$$D_n(k) > \sqrt{n} \left(1 + \frac{k}{n} \right) b \left(\frac{k}{n} \right)$$

이면 모니터링을 멈추고 귀무가설을 기각하게 되고 그렇지 않다면 모니터링 절차가 계속 진행하게 된다. 이러한 모니터링 절차를 시행하기 위해서는 탐지 통계량이 적절히 정의되고, 주어진 $\alpha \in (0, 1)$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(k_n < \infty | H_0) = \alpha \quad (2.1)$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(k_n < \infty | H_1) = 1$$

인 경계함수를 선택해야 한다.

2.1. 이분산 위치-척도 시계열 모형에서의 모니터링 절차

본 연구에서는 일반적인 ARMA-GARCH 모형 등 다양한 시계열 모형을 포함하는 다음과 같은 이분산성의 위치-척도 시계열 모형에서 모니터링 절차를 제안한다.

$$y_t = g_t(\boldsymbol{\mu}_0) + \sqrt{h_t(\boldsymbol{\theta}_0)}\eta_t, \quad t \in Z, \quad (2.2)$$

여기서 $\{\eta_t\}$ 는 평균이 0이고 분산이 1인 i.i.d. 확률변수열이며 콤팩트 부분집합 $\Theta_1(\subset \mathbf{R}^{m_1})$ 과 $\Theta_2(\subset \mathbf{R}^{m_2})$ 에 대하여

$$\boldsymbol{\mu} \in \Theta_1, \quad \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)^T \in \Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 (\subset \mathbf{R}^m)$$

이다. 그리고

$$\begin{aligned} g : \mathbf{R}^\infty \times \Theta_1 &\rightarrow \mathbf{R}, \\ h : \mathbf{R}^\infty \times \Theta &\rightarrow \mathbf{R} \end{aligned}$$

는 가측함수(measurable function)이며

$$\begin{aligned} g_t(\boldsymbol{\mu}) &= g(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots; \boldsymbol{\mu}), \\ h_t(\boldsymbol{\theta}) &= h(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots; \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

이다. 또한, 실제 모수 $\boldsymbol{\theta}_0 = (\boldsymbol{\mu}_0^T, \boldsymbol{\lambda}_0^T)^T$ 는 모수 공간 Θ 의 내부에 위치한다.

우선, 탐지 통계량을 적절히 정의하기 위해서 $g_t(\boldsymbol{\mu})$ 와 η_t 를 관측되지 않는 y_0, y_{-1}, \dots 대신 초기값을 대입하여 각각 계산가능한 $\tilde{g}_t(\boldsymbol{\mu})$ 와

$$\tilde{\eta}_t(\boldsymbol{\theta}) = \frac{y_t - \tilde{g}_t(\boldsymbol{\mu})}{\sqrt{\tilde{h}_t(\boldsymbol{\theta})}}, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

으로 대체해야 한다. 예컨대,

$$\begin{aligned}\tilde{g}_t(\boldsymbol{\mu}) &= g(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, 0, 0, \dots; \boldsymbol{\mu}), \\ \tilde{h}_t(\boldsymbol{\theta}) &= h(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, 0, 0, \dots; \boldsymbol{\theta})\end{aligned}$$

와 같이 초기값으로 0들을 사용할 수 있다. 그리고 $\{(\tilde{g}_t(\boldsymbol{\mu}_0)\tilde{\eta}_t(\boldsymbol{\theta}_0), \tilde{\eta}_t^2(\boldsymbol{\theta}_0))\}$ 에서 $\boldsymbol{\theta}_0$ 대신 그 추정량인 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ 을 대입하여 다음과 같은 탐지 통계량을 정의한다.

$$D_n(k) := \left\| \hat{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{t=1}^{n+k} \tilde{U}_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{U}_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \right) \right\|.$$

단, $\|\cdot\|$ 은 벡터와 행렬의 최대 노름(maximum norm)이고

$$\tilde{U}_t(\boldsymbol{\theta}) = (\tilde{g}_t(\boldsymbol{\mu})\tilde{\eta}_t(\boldsymbol{\theta}), \tilde{\eta}_t^2(\boldsymbol{\theta}))^T,$$

$\hat{\Sigma}_n$ 은

$$\Sigma_0 = \text{Var}(U_1(\boldsymbol{\theta}_0)) = \text{Var}\left((g_1(\boldsymbol{\mu}_0)\eta_1, \eta_1^2)^T\right)$$

의 일치추정량이다. Oh와 Lee (2019a)의 Lemma 3에서

$$\hat{\Sigma}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{g}_t^2(\hat{\boldsymbol{\mu}}_n) \tilde{\eta}_t^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{g}_t(\hat{\boldsymbol{\mu}}_n) \tilde{\eta}_t^3(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{g}_t(\hat{\boldsymbol{\mu}}_n) \tilde{\eta}_t^3(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{\eta}_t^4(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

이 Σ_0 의 일치추정량임을 보였고, 3장에서 진행한 모의실험에서 이를 Σ_0 의 추정량으로 사용하였다.

먼저, 모니터링 절차의 점진 성질을 구하기 위하여 $\{\eta_s : s \leq t\}$ 에 의하여 생성되는 σ -필드 $\mathcal{F}_t = \sigma(\eta_s : s \leq t)$ 에 대하여, 아래와 같이 성립함을 가정한다.

(M1) $\{y_t\}$ 은 평균이 0이고 $\{\mathcal{F}_t\}$ -순응되고(adapted), 엄격한 정상(strictly stationary)이며 에르고딕(ergodic)하다.

(M2) η_t 은 $\mathcal{F}_s(s < t)$ 와 독립이고 $\mathbb{E}\eta_t^4 < \infty$.

그리고 $L^2(\mathbf{R}^p)$, $p \geq 1$ 와 $L^2(\mathbf{R}^\infty)$ 는 각각 $\sup_i \mathbb{E}X_i^2 < \infty$ 인 확률벡터들 $X = (X_1, \dots, X_p)$ 과 확률변수열들 $X = (X_1, X_2, \dots)$ 의 모임이고 $0 < \rho < 1$ 는 일반적인 상수라고 하면,

(A1) 임의의 고정된 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^\infty$ 에 대하여, $h(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ 은 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 에서 연속이다. 임의의 $X, X' \in L^2(\mathbf{R}^\infty)$, $Y \in L^2(\mathbf{R}^{l-1})$ 와 적분가능한 확률변수 $V_h(\cdot)$ 에 대하여,

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} |h(Y, X; \boldsymbol{\theta}) - h(Y, X'; \boldsymbol{\theta})| \leq V_h(Y, X, X') \cdot \rho^l \quad a.s..$$

(A2) 임의의 고정된 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^\infty$ 에 대하여, $g(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu})$ 은 $\boldsymbol{\mu} \in \Theta_1$ 에서 연속이다. 임의의 $X, X' \in L^2(\mathbf{R}^\infty)$, $Y \in L^2(\mathbf{R}^{l-1})$ 와 적분가능한 확률변수 $V_g(\cdot)$ 에 대하여,

$$\sup_{\boldsymbol{\mu} \in \Theta} |g(Y, X; \boldsymbol{\mu}) - g(Y, X'; \boldsymbol{\mu})| \leq V_g(Y, X, X') \cdot \rho^l \quad a.s..$$

(A3) 함수 $h \geq \underline{h} = \inf_{(X, \theta) \in \mathbf{R}^\infty \times \Theta} h(X; \theta) > 0$.

(A4) 임의의 고정된 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^\infty$ 에 대하여, $h(\mathbf{x}; \theta)$ 은 $\theta \in \Theta$ 에 대하여 연속적으로 미분가능하다. 임의의 $X, X' \in L^2(\mathbf{R}^\infty)$, $Y \in L^2(\mathbf{R}^{l-1})$ 와 적분가능한 확률변수 $V_{dh}(\cdot)$ 에 대하여,

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left\| \frac{\partial h(Y, X; \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial h(Y, X'; \theta)}{\partial \theta} \right\| \leq V_{dh}(Y, X, X') \cdot \rho^l \quad a.s..$$

(A5) 임의의 고정된 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^\infty$, $g(\mathbf{x}; \mu)$ 은 $\mu \in \Theta_1$ 에 대하여 연속적으로 미분가능하다; 임의의 $X, X' \in L^2(\mathbf{R}^\infty)$, $Y \in L^2(\mathbf{R}^{l-1})$ 와 적분가능한 확률변수 $V_{dg}(\cdot)$ 에 대하여,

$$\sup_{\mu \in \Theta} \left\| \frac{\partial g(Y, X; \mu)}{\partial \mu} - \frac{\partial g(Y, X'; \mu)}{\partial \mu} \right\| \leq V_{dg}(Y, X, X') \cdot \rho^l \quad a.s..$$

(A6) 다음의 적률 조건을 만족한다.

$$(i) \mathbb{E}(\sup_{\theta \in \Theta} |g_t(\mu)|)^4 < \infty, \quad \mathbb{E}\left(\sup_{\theta \in \Theta} \left\| \frac{\partial g_t(\mu)}{\partial \mu} \right\| \right)^4 < \infty,$$

$$(ii) \mathbb{E}(\log^+ \sup_{\theta \in \Theta} |h_t(\theta)|) < \infty, \quad \mathbb{E}\left(\sup_{\theta \in \Theta} \frac{1}{h_t(\theta)} \left\| \frac{\partial h_t(\theta)}{\partial \theta} \right\| \right)^2 < \infty.$$

(A7) $\theta_0 = (\mu_0^T, \lambda_0^T)^T$ 에 대한 추정량 $\hat{\theta}_n = (\hat{\mu}_n^T, \hat{\lambda}_n^T)^T$ 은 다음을 만족한다.

$$(i) \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu_0) = O_P(1),$$

$$(ii) \sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda_0) = O_P(1).$$

예를 들어, 다음과 같은 AR(1)-GARCH(1, 1) 모형에서 위의 조건들이 성립함을 확인해보자.

$$\begin{aligned} y_t &= \phi y_{t-1} + \epsilon_t, \\ \epsilon_t &= \sqrt{h_t} \eta_t, \quad h_t = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

단, $\{\eta_t\}$ 는 $\mathbb{E}\eta_t = 0$, $\mathbb{E}\eta_t^2 = 1$ 이고 $\mathbb{E}\eta_t^4 < \infty$ 인 i.i.d. 확률변수열이다. $|\phi| < 1$, $\phi \neq 0$, $0 < \alpha, \beta < 1$, 그리고

$$\alpha^2 \mathbb{E}\eta_t^4 + 2\alpha\beta + \beta^2 < 1$$

이면 $\{y_t\}$ 는 엄격한 정상성을 만족하고 에르고딕하며 $\mathbb{E}y_t^4 < \infty$ 이다 (Francq와 Zakoian, 2019). 따라서 이때 (M1)과 (M2)를 만족한다. 그리고 여기서

$$\begin{aligned} \mu &= \phi, \quad \lambda = (\omega, \alpha, \beta)^T, \quad \theta = (\phi, \omega, \alpha, \beta)^T, \\ g_t(\mu) &= \phi y_{t-1} \end{aligned}$$

이고

$$h_t(\theta) = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (y_{t-k} - \phi y_{t-k-1})^2$$

이다. 어떤 양의 상수들 $\underline{\omega}, \bar{\omega}, \underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \underline{\beta}, \bar{\beta}$ 에 대하여, $\underline{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}$, $\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$, $\underline{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta}$ 와 $\alpha + \beta \leq \rho_0$, $0 < \rho_0 < 1$ 를 가정하자. 그러면 모수공간 Θ 는 \mathbf{R}^4 의 콤팩트 부분집합이며 쉽게 (A1)–(A6)을 만족함을 확인할 수 있으며 (Oh와 Lee, 2019a) AR(1)-GARCH(1, 1) 모형의 가우스 준최대가능도 추정량 $\hat{\theta}_n$ 는 강일치성과 점근적 정규성을 만족하므로 조건 (A7)을 만족한다 (Francq와 Zakoian, 2019).

위의 조건들이 성립하면 다음과 같이 귀무가설 하에서 모니터링 절차의 점근 성질을 얻을 수 있다.

정리 2.1 조건 (M1), (M2)와 (A1)–(A7)을 만족하고 $b(\cdot)$ 은 $(0, \infty)$ 에서 연속이고 $\inf_{0 < t < \infty} b(t) > 0$ 이면, H_0 하에서 다음이 성립한다. $n \rightarrow \infty$ 일 때,

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{D_n(k)}{\sqrt{n}(1 + \frac{k}{n})b(\frac{k}{n})} \xrightarrow{d} \sup_{0 < s < 1} \frac{\|W_2(s)\|}{b(s/(1-s))}, \quad (2.5)$$

단, $W_2(\cdot)$ 은 2차 표준 위너과정(standard wiener process)이다. 그러므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(k_n < \infty | H_0) = P\left(\sup_{0 < s < 1} \frac{\|W_2(s)\|}{b(s/(1-s))} > 1\right).$$

증명: 아래의 Lemma 2.1과 Lemma 2.2에 의하여 다음이 성립함을 확인할 수 있다. $n \rightarrow \infty$ 일 때,

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left\| \hat{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{t=1}^{n+k} \tilde{U}_t(\hat{\theta}_n) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{U}_t(\hat{\theta}_n) \right) \right\|}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) b\left(\frac{k}{n}\right)} \xrightarrow{d} \sup_{0 < \tau < \infty} \frac{\|W_2(1+\tau) - (1+\tau)W_2(1)\|}{(1+\tau)b(\tau)}.$$

이때, $\{W_2(1+\tau) - (1+\tau)W_2(1) | 0 < \tau < \infty\}$ 와 $\{(1+\tau)W_2(\tau/(1+\tau)) | 0 < \tau < \infty\}$ 은 같은 분포를 따르므로 식 (2.5)가 성립한다. \square

Lemma 2.1 정리 2.1의 가정들을 만족하면 다음이 성립한다.

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \left\| \sum_{t=1}^{n+k} \left(\tilde{U}_t(\hat{\theta}_n) - U_t(\theta_0) \right) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n \left(\tilde{U}_t(\hat{\theta}_n) - U_t(\theta_0) \right) \right\| / \left(\sqrt{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) b\left(\frac{k}{n}\right) \right) = o_P(1)$$

이 성립한다.

증명: Oh와 Lee (2019a)의 Lemma 1과 Lemma 2에 의하여 각각

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{t=1}^{n+k} \left((\tilde{g}_t \tilde{\eta}_t)(\hat{\theta}_n) - (g_t \eta_t)(\theta_0) \right) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n \left((\tilde{g}_t \tilde{\eta}_t)(\hat{\theta}_n) - (g_t \eta_t)(\theta_0) \right) \right\| = o_P(1)$$

과

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{t=1}^{n+k} \left(\tilde{\eta}_t^2(\hat{\theta}_n) - \eta_t^2 \right) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n \left(\tilde{\eta}_t^2(\hat{\theta}_n) - \eta_t^2 \right) \right\| = o_P(1)$$

을 얻을 수 있다. 따라서 이 사실들과 함께 $b(\cdot)$ 은 $(0, \infty)$ 에서 연속이고 $\inf_{0 < t < \infty} b(t) > 0$ 이므로 이 lemma가 증명된다. \square

Lemma 2.2 정리 2.1의 가정들을 만족하면 다음이 성립한다.

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{\left\| \sum_{t=1}^{n+k} U_t(\theta_0) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n U_t(\theta_0) \right\|}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) b\left(\frac{k}{n}\right)} \xrightarrow{d} \sup_{0 < \tau < \infty} \frac{\left\| \Sigma_0^{\frac{1}{2}} (W_2(1+\tau) - (1+\tau)W_2(1)) \right\|}{(1+\tau)b(\tau)}$$

이 성립한다.

증명: Oh와 Lee (2019a)에서 보인 바와 같이 $\{U_t(\theta_0) - \mathbb{E}U_t(\theta_0)\}$ 은 엄격한 정상이며 에르고딕한 마팅게일 차이(martingale difference)이고

$$\sum_{t=1}^{n+k} U_t(\theta_0) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n U_t(\theta_0) = \sum_{t=1}^{n+k} (U_t(\theta_0) - \mathbb{E}U_t(\theta_0)) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n (U_t(\theta_0) - \mathbb{E}U_t(\theta_0))$$

이다. 그러면 Berkes 등 (2004a)의 Lemma 6.6과 같은 논거에 의하여 이 lemma가 성립함을 보일 수 있다. \square

한편, 경계함수로 상수함수($b(\cdot) = b$)를 선택하면, 널리 알려진 $\sup_s |W(s)|$ 의 분포함수에 대한 공식을 이용하여 다음이 성립함을 알 수 있다 (Csörgo와 Révész, 2014).

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(k_n < \infty | H_0) &= 1 - \left[P \left(\sup_{0 < s < 1} |W(s)| \leq b \right) \right]^2 \\ &= 1 - \left[\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp \left(-\frac{\pi^2(2k+1)^2}{8b^2} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

이 경우에는 b 가 식 (2.1)에서 주어진 유의수준 α 에 대한 기각값이 된다.

2.2. 대립가설 하에서 모니터링 절차

모수의 변화가 일어났다는 대립가설 하에서 모니터링 절차의 접근 성질을 확인하기 위하여, 모형 (2.2)에서 각각 실제 모수가 $\theta_0 = (\mu_0^T, \lambda_0^T)^T$ 와 $\theta_1 = (\mu_1^T, \lambda_1^T)^T$ ($\neq \theta_0$)인 두 시계열 $\{y_{0,t}\}$ 과 $\{y_{1,t}\}$ 을 고려하자. 모수의 변화를 모니터링 하는 과정에서 y_1, \dots, y_{n+k} 을 관측하였고 시점 $n+k^*$ ($< n+k$)에서 모수의 변화가 일어났다면 대립가설은 다음과 같다.

$$H_A : y_t = \begin{cases} y_{0,t}, & t \leq n+k^*, \\ y_{1,t}, & t > n+k^*. \end{cases}$$

대립가설 H_A 하에서 모니터링 절차의 접근 성질을 보이기 위해 (M3)과 (M4)가 성립한다고 가정하자.

(M3) $\{y_{0,t}\}$ 와 $\{y_{1,t}\}$ 는 평균이 0이고 $\{\mathcal{F}_t\}$ -순응되고, 엄격한 정상이며 에르고딕하다.

(M4) $k^* = k^*(n)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (k^*/n) < \infty$.

또한, $g(y_{i,t-1}, y_{i,t-2}, \dots; \mu)$ 을 $g_{i,t}(\mu)$ 으로

$$\frac{y_{i,t} - g(y_{i,t-1}, y_{i,t-2}, \dots; \mu)}{\sqrt{h(y_{i,t-1}, y_{i,t-2}, \dots; \theta)}}$$

을 $\eta_{i,t}(\theta)$, $i = 1, 2$ 로 간략하게 표현하고 다음이 성립함을 가정하자.

(C1) (i) 임의의 $\lambda \in \Theta_2$ 에 대하여, $\mathbb{E}g_{0,0}(\mu_0)\eta_{0,0}(\mu_0, \lambda) \neq \mathbb{E}g_{1,0}(\mu_0)\eta_{1,0}(\mu_0, \lambda)$.

(ii) 임의의 $\mu \in \Theta_1$ 에 대하여, $\mathbb{E}\eta_{0,0}^2(\mu, \lambda_0) \neq \mathbb{E}\eta_{1,0}^2(\mu, \lambda_0)$.

예를 들어, AR(1)-GARCH(1, 1) 모형에서 위치 모수(ϕ_0)만 변하고 척도 모수($\omega_0, \alpha_0, \beta_0$)는 변하지 않는다면

$$\mathbb{E}g_{0,0}(\phi_0)\eta_{0,0}(\theta_0) = \phi_0 \mathbb{E}y_{0,-1} \mathbb{E}\eta_0 = 0$$

이고 많은 경우

$$\mathbb{E}g_{1,0}(\phi_0)\eta_{1,0}(\theta_0) = \phi_0 \mathbb{E}y_{1,-1} \eta_{1,0}(\theta_0) \neq 0$$

이므로 이 경우에는 (C1)(i)을 만족한다. 반면, 척도 모수가 변하고 위치 모수가 변하지 않는다면

$$\mathbb{E}\eta_{0,0}^2(\theta_0) = \mathbb{E}\eta_0^2 = 1$$

이고 많은 경우

$$\mathbb{E}\eta_{1,0}^2(\theta_0) \neq 1$$

이므로 이 경우에는 (C1)(ii)을 만족한다.

위의 조건들을 만족하면 대립가설 H_A 하에서 다음의 결과를 얻을 수 있다.

정리 2.2 조건 (M2)–(M4), (A1)–(A7)와 (C1) (i) 또는 (ii)을 만족하고 $b(\cdot)$ 은 $(0, \infty)$ 에서 연속이고 $\inf_{0 < t < \infty} b(t) > 0$, $\sup_{0 < t < \infty} b(t) < \infty$ 이면, 대립가설 H_A 하에서 다음이 성립한다. $n \rightarrow \infty$ 일 때,

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{D_n(k)}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) b\left(\frac{k}{n}\right)} \xrightarrow{P} \infty$$

이다. 그러므로,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(k_n < \infty | H_A) = 1.$$

증명: $\hat{\Sigma}_n = \Sigma_0(< \infty) + o_P(1)$ 이므로 증명을 위하여 다음이 성립함을 보이면 충분하다. $n \rightarrow \infty$ 일 때,

$$\sup_{1 \leq k < \infty} \frac{1}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) b\left(\frac{k}{n}\right)} \left\| \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{t=1}^{n+k} \tilde{U}_t(\hat{\theta}_n) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{U}_t(\hat{\theta}_n) \right) \right\| \xrightarrow{P} \infty.$$

그런데 정리 2.1에 의하여

$$\sup_{1 \leq k \leq k^*} \frac{1}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) b\left(\frac{k}{n}\right)} \left\| \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{t=1}^{n+k} \tilde{U}_t(\hat{\theta}_n) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{U}_t(\hat{\theta}_n) \right) \right\| = O_P(1)$$

이 성립함을 알 수 있다. 따라서

$$\sup_{k^* < k < \infty} \frac{1}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) b\left(\frac{k}{n}\right)} \left\| \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{t=1}^{n+k} \tilde{U}_t(\hat{\theta}_n) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{U}_t(\hat{\theta}_n) \right) \right\| \xrightarrow{P} \infty \quad (2.6)$$

이 성립함을 보이자. 이를 위해서는

$$\sup_{k^* < k < \infty} \frac{\left| \sum_{t=1}^{n+k} (\tilde{g}_t \tilde{\eta}_t)(\hat{\theta}_n) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n (\tilde{g}_t \tilde{\eta}_t)(\hat{\theta}_n) \right|}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) b\left(\frac{k}{n}\right)} \xrightarrow{P} \infty \quad (2.7)$$

또는

$$\sup_{k^* < k < \infty} \frac{\left| \sum_{t=1}^{n+k} \tilde{\eta}_t^2(\hat{\theta}_n) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{\eta}_t^2(\hat{\theta}_n) \right|}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) b\left(\frac{k}{n}\right)} \xrightarrow{P} \infty \quad (2.8)$$

이 성립함을 보이면 된다. 조건 (C1)의 (i)과 (ii)가 만족되면 각각 식 (2.7)과 (2.8)이 성립한다. 먼저 (C1)(i)가 만족할 때, 식 (2.7)이 성립함을 보이자. $k > k^*$ 일 때,

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^{n+k} (\tilde{g}_t \tilde{\eta}_t)(\hat{\theta}_n) - \frac{n+k}{n} \sum_{t=1}^n (\tilde{g}_t \tilde{\eta}_t)(\hat{\theta}_n) \\ &= \sum_{t=n+1}^{n+k} \left\{ (\tilde{g}_t \tilde{\eta}_t)(\hat{\theta}_n) - (g_{0,t} \eta_{0,t})(\theta_0) \right\} - \frac{k}{n} \sum_{t=1}^n \left\{ (\tilde{g}_t \tilde{\eta}_t)(\hat{\theta}_n) - (g_{0,t} \eta_{0,t})(\theta_0) \right\} \\ &= k^* \cdot G_1 + (k - k^*) \cdot (G_2 + G_3) - k \cdot G_4. \end{aligned}$$

단,

$$G_1 = \frac{1}{k^*} \sum_{t=n+1}^{n+k^*} \left\{ (\tilde{g}_t \tilde{\eta}_t)(\hat{\theta}_n) - (g_{0,t} \eta_{0,t})(\theta_0) \right\}, \quad G_2 = \frac{1}{k - k^*} \sum_{t=n+k^*+1}^{n+k} \left\{ (\tilde{g}_t \tilde{\eta}_t)(\hat{\theta}_n) - (g_{1,t} \eta_{1,t})(\theta_0) \right\},$$

$$G_3 = \frac{1}{k - k^*} \sum_{t=n+k^*+1}^{n+k} \left\{ (g_{1,t} \eta_{1,t})(\theta_0) - (g_{0,t} \eta_{0,t})(\theta_0) \right\}, \quad G_4 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left\{ (\tilde{g}_t \tilde{\eta}_t)(\hat{\theta}_n) - (g_{0,t} \eta_{0,t})(\theta_0) \right\}.$$

이때, Oh와 Lee (2019a)의 Lemma 4에 의하여

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\tilde{g}_t(\boldsymbol{\mu}) - g_{1,t}(\boldsymbol{\mu})| \leq V_g(y_{1,k-1}, \dots) \cdot \rho^{k-k^*} \text{ a.s.} \quad (2.9)$$

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\tilde{h}_t(\boldsymbol{\mu}) - h_{1,t}(\boldsymbol{\mu})| \leq V_h(y_{1,k-1}, \dots) \cdot \rho^{k-k^*} \text{ a.s.} \quad (2.10)$$

임을 알 수 있고 이와 더불어 (M4)와 Oh와 Lee (2019a)의 Lemma 1의 증명에 따라 $\sup_{k^* < k < \infty} |(k - k^*) \cdot G_2| / \{\sqrt{n}(1 + k/n)\} = o_P(1)$ 임을 쉽게 알 수 있다. 또한 $\sup_{k^* < k < \infty} |k^* \cdot G_1| / \{\sqrt{n}(1 + k/n)\} = o_P(1)$ 이고 $\sup_{k^* < k < \infty} |k \cdot G_4| / \{\sqrt{n}(1 + k/n)\} = o_P(1)$ 임을 알 수 있다. 그리고 (M4)가 만족되므로 $(\tilde{k}_n - k^*) / \sqrt{n} \rightarrow \infty$ 와 $\tilde{k}_n = O(n)$ 을 만족하는 수열 $\{\tilde{k}_n\}$ 을 충분히 선택할 수 있고, (C1)(i)에 의하여 $|\mathbb{E}(g_{1,0} \eta_{1,0})(\theta_0) - \mathbb{E}(g_{0,0} \eta_{0,0})(\theta_0)| \neq 0$ 이므로 이 사실과 에르고딕 정리에 의하여

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{k}_n - k^*}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{\tilde{k}_n}{n}\right)} \left| \frac{1}{\tilde{k}_n - k^*} \sum_{t=n+k^*+1}^{n+\tilde{k}_n} \left\{ (g_{1,t} \eta_{1,t})(\theta_0) - (g_{0,t} \eta_{0,t})(\theta_0) \right\} \right| \\ &= \frac{\tilde{k}_n - k^*}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{\tilde{k}_n}{n}\right)} \left| \mathbb{E}(g_{1,0} \eta_{1,0})(\theta_0) - \mathbb{E}(g_{0,0} \eta_{0,0})(\theta_0) + o_P(1) \right| \xrightarrow{P} \infty. \end{aligned}$$

따라서 $\sup_{0 < t < \infty} b(t) < \infty$ 이므로 이 사실들에 의하여 식 (2.7)이 성립한다. 그리고 유사하게 (C1)(ii)가 만족되면 식 (2.8)이 성립함을 보일 수 있다. 그러므로 식 (2.6)이 성립한다. \square

3. 모의실험

본 연구에서 제안한 모니터링 방법의 성능을 알아보기 위하여 식 (2.4)와 같은 AR(1)-GARCH(1,1) 모형에서 모의실험을 수행한다. 위치 모수에 해당하는 AR 모수(ϕ)와 척도 모수에 해당하는 GARCH 모수(ω, α, β)의 변화를 모니터링 하기 위하여 우리는 경계함수로 상수함수를 사용한다. 따라서 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에 대응되는 기각값으로 Song과 Kang (2020)의 Table 1에서 제공하는 값 $b = 2.493$ 를 사용한다. 그리고 각 모의실험에서 반복횟수는 2,000번이고 시계열 자료들을 생성하기 위하여 사용한 모수는 $(\phi_0, \omega_0, \alpha_0, \beta_0) = (-0.2, 0.5, 0.1, 0.3)$ 이며, $\{\eta_t\}$ 는 표준정규분포를 따르는 난수들을 사용한다. 모니터링 절차를 종료한 시점 K 는 관측된 자료의 크기 n 에 비례하도록 설정한다($K = m \cdot n, m = 4, 6, 8$). 2장에서 제안한 모니터링 절차는 정해진 종료 시점 없이 탐지 통계량이 기각값을 넘지 않는한 계속 진행되어야 하지만 모의실험에서는 경험적 유의확률과 검정력을 측정하기 위하여 종료 시점을 정하는 것이 필요하다.

Figure 3.1에서 보이는 바와 같이 각각 일정한 K/n 에 대하여 n 의 크기가 증가할수록 경험적 유의확률은 감소하면서 일정한 값으로 수렴함을 확인할 수 있다. 또한 K/n 가 증가할수록 그 수렴하는 값은 커진다. 따라서 경험적 유의확률은 K/n 과 n 이 커질수록 유의수준 0.05에 가까워짐을 확인할 수 있다. 즉, 귀무가설 하에서 제안한 모니터링 절차가 잘 작동함을 확인한다.

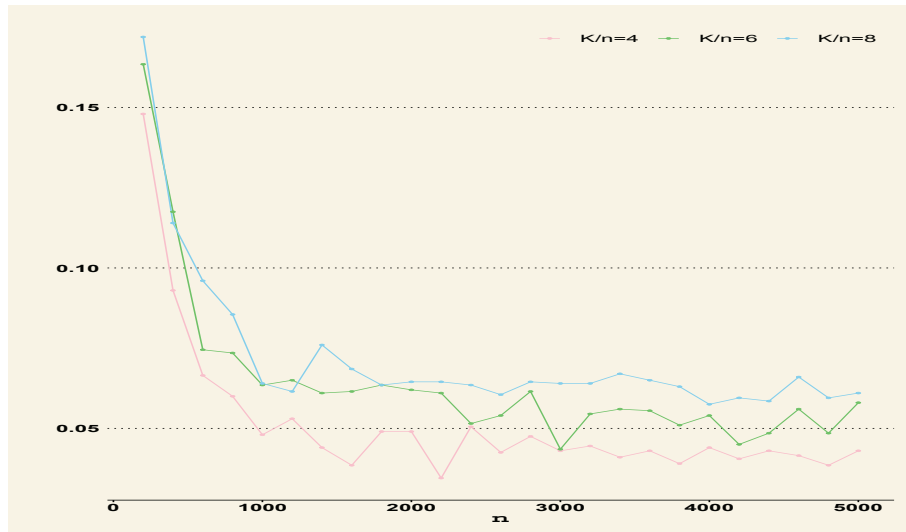


Figure 3.1. The plot of empirical sizes of monitoring procedure at 5% significance level when n increase from 200 to 5000 for each cases $K/n = 4, 6,$ and 8 .

다음으로 모니터링 절차에 대한 경험적 검정력을 측정한다. 이를 위해서 다음과 같이 각각 ϕ, ω, α 와 β 의 변화를 고려한다.

- (i) $(\phi_0, \omega_0, \alpha_0, \beta_0) = (-0.2, 0.5, 0.1, 0.3) \rightarrow (\phi_1, \omega_1, \alpha_1, \beta_1) = (0.2, 0.5, 0.1, 0.3)$
- (ii) $(\phi_0, \omega_0, \alpha_0, \beta_0) = (-0.2, 0.5, 0.1, 0.3) \rightarrow (\phi_1, \omega_1, \alpha_1, \beta_1) = (-0.2, 0.1, 0.1, 0.3)$
- (iii) $(\phi_0, \omega_0, \alpha_0, \beta_0) = (-0.2, 0.5, 0.1, 0.3) \rightarrow (\phi_1, \omega_1, \alpha_1, \beta_1) = (-0.2, 0.5, 0.5, 0.3)$
- (iv) $(\phi_0, \omega_0, \alpha_0, \beta_0) = (-0.2, 0.5, 0.1, 0.3) \rightarrow (\phi_1, \omega_1, \alpha_1, \beta_1) = (-0.2, 0.5, 0.1, 0.7)$

Figure 3.2는 $k^* = 0.5n$ 에서 모수 ϕ, ω, α 와 β 가 각각 변화했을 때 얻어진 경험적 검정력이다. 일정한 K/n 에 대하여 n 이 증가할수록 경험적 검정력이 증가하여 1에 가까워짐을 확인할 수 있다. 즉, 대립가설 하에서도 모니터링 절차가 잘 작동함을 확인한다. 특히 n 이 대략 500일 때 이미 검정력이 거의 1에 가깝다는 사실을 확인할 수 있다. 이는 실제 자료 분석에서 수집되는 시계열 자료의 크기를 고려할 때 제안한 모니터링 절차가 충분히 큰 검정력을 가짐을 알 수 있다. Figure 3.3은 각각 (i), (ii), (iii)과 (iv)의 경우, $k^*/n = 0.5$ 일 때 정지 시간(k_n/n)의 상자그림이다. (i)의 경우, n 이 600, 800과 1000일 때 지연 시간($k_n/n - k^*/n$)의 (중앙값, 평균값)은 각각 (0.5515, 0.5100), (0.4350, 0.4564)와 (0.3680, 0.3875)이고 (ii)의 경우, 각각 (0.3417, 0.3597), (0.2887, 0.2946)와 (0.2500, 0.2539)이고 (iii)의 경우, 각각 (0.2750, 0.3562), (0.2194, 0.2565)와 (0.1900, 0.2184)이고 (iv)의 경우, 각각 (0.1733, 0.2374), (0.1400, 0.1793)와 (0.1225, 0.1384)이다. 여기서 n 이 600, 800과 1000으로 증가할수록 정지 시간이 대체로 빨라짐을 확인할 수 있다. 즉, 예상한 바와 같이 충분히 큰 규모의 자료를 이용하여 모니터링 절차를 수행할 때, 모수의 변화를 그 만큼 빨리 탐지할 수 있음을 알 수 있다.

4. 사례 분석

이 절에서는 2012년 12월 6일부터 2017년 3월 23일까지 수집된 다우30 자료를 이용하여 사례 분석을

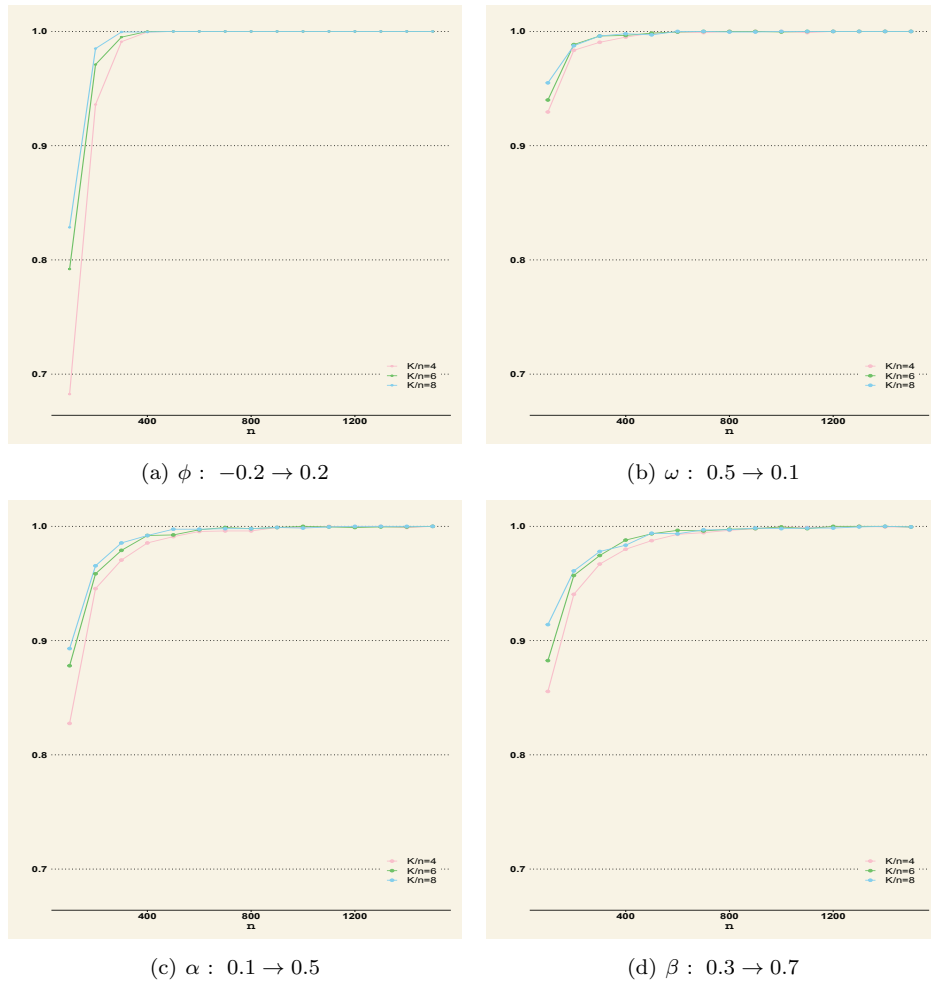


Figure 3.2. The plots of empirical powers of monitoring procedure with $k^*/n = 0.5$ when n increase from 100 to 1500 for each cases $K/n = 4, 6$ and 8 in set-ups (i), (ii), (iii), and (iv).

실시하였다 (Figure 4.1). 이 기간 동안 수집된 다우30의 일별 자료는 총 1,081개이며 로그 수익률 자료에 앞서 제안한 모니터링 절차를 수행하였다. Oh와 Lee (2019a)에서는 2014년 12월 15일부터 2017년 3월 17일까지 다우30의 로그 수익률 자료에 AR(1)-GARCH(1, 1) 모형을 적합하고 관측된 자료에서 모수의 변화를 검정하고 탐지하는 연구를 진행하였다. 그 결과 다우30의 로그 수익률 자료에서 2016년 3월 1일에 모수의 변화가 일어났음을 알아냈다.

우선, 모니터링 절차를 진행하기 위하여 2012년 12월 6일부터 2014년 12월 1일까지 500개의 자료를 이용하여 잠정 모형을 구하였다. 표본자기상관함수, 표본부분자기상관함수, 이분산성 검정 등을 통하여 AR(1)-GARCH(1, 1) 모형이 적절히 적합됨을 확인하고 잠정적으로 다음과 같은 모형을 추정하였다.

$$y_t = -0.03087(0.04919)y_{t-1} + \epsilon_t,$$

$$h_t = 6.114 \times 10^{-6}(2.095 \times 10^{-6}) + 0.1981(0.05074)\epsilon_{t-1}^2 + 0.6662(0.07029)h_{t-1}.$$

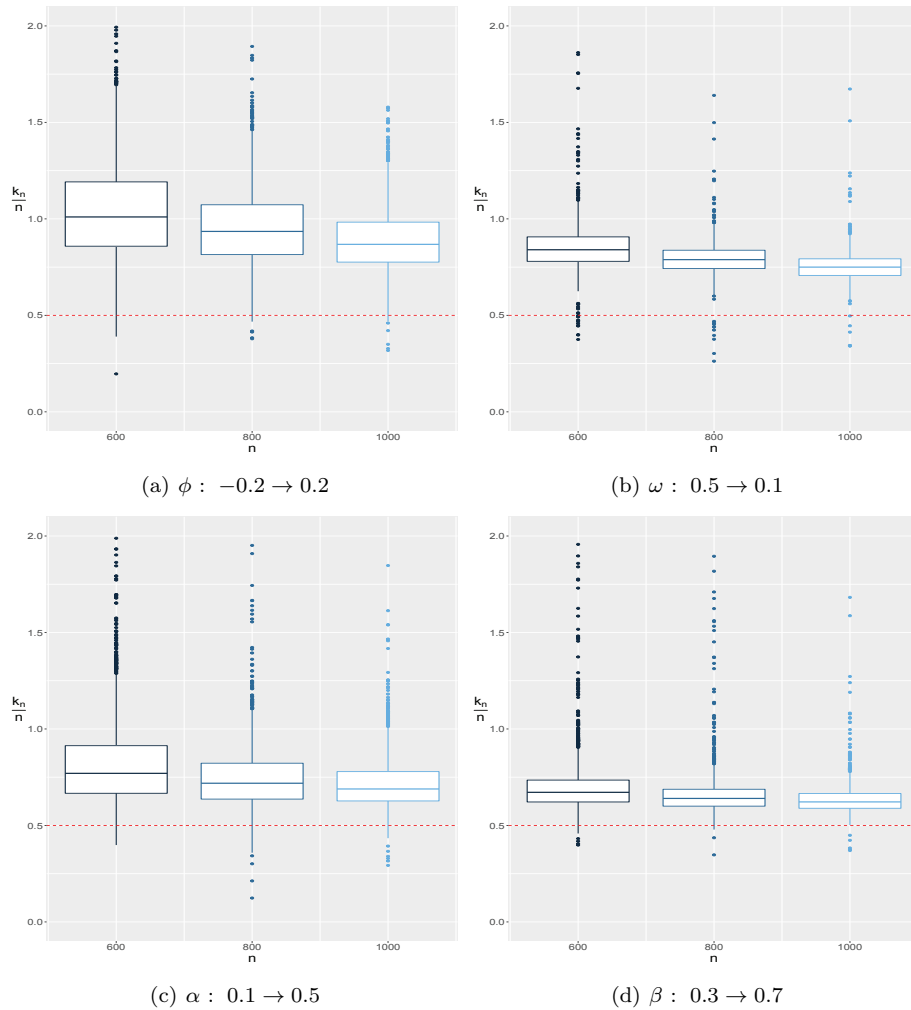


Figure 3.3. The box plots of the stopping times(k_n/n) with $k^*/n = 0.5$ for each cases $n = 600, 800,$ and 1000 in set-up (i), (ii), (iii), and (iv).

단, 괄호 안의 숫자는 추정된 모수에 대한 표준오차이다. Figure 4.2에서 보인 바와 같이 이 잠정 모형을 이용하여 2014년 12월 2일부터 모수의 변화를 탐지하기 위하여 모니터링 절차를 진행하였고 2016년 6월 23일에 모수의 변화가 탐지되었다. Oh와 Lee (2019a)에서 확인된 변화 시점과 모니터링이 정지된 시점을 비교해보면 대략 4개월 정도 지연되어 모수의 변화가 탐지되었음을 알 수 있고 이 기간 동안 관측된 자료의 크기는 80개이다. 이 때, 잠정 모형을 추정하기 위하여 사용된 자료의 크기($n = 500$)를 고려할 때 관측된 지연 시간은 적당하다고 판단되며 제안한 모니터링 방법이 잘 작동함을 확인할 수 있다.

5. 결론

본 연구는 이분산성을 갖는 위치-척도 모형에서 수정된 잔차의 누적합을 기반으로 하는 모니터링 절차

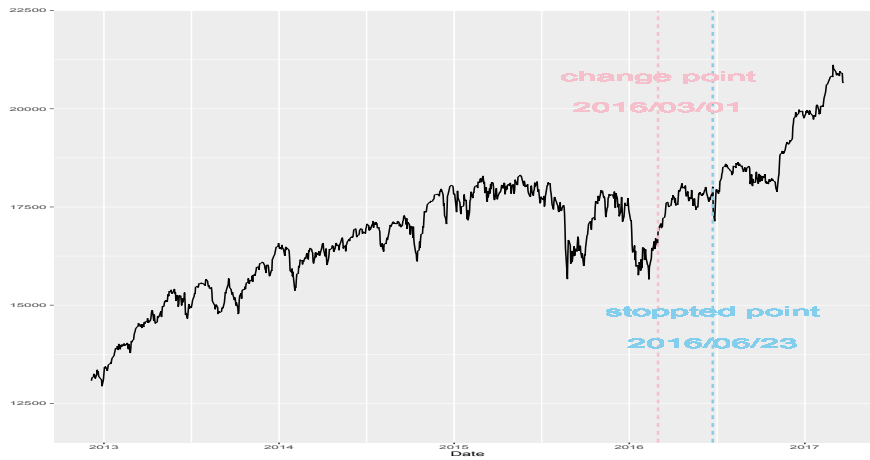


Figure 4.1. Dow30 data from Dec 6, 2012 to Mar 23, 2017.

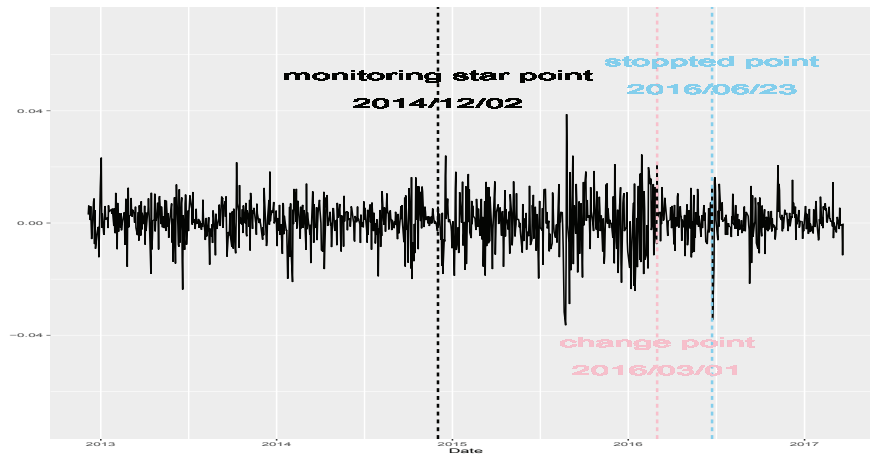


Figure 4.2. Log return of Dow30 data from Dec 6, 2012 to Mar 23, 2017.

를 다루었다. 적절한 조건이 성립할 때, 귀무가설과 대립가설 하에서 각각 모니터링 절차의 점근 성질에 대하여 규명하였다. 또한 모의실험과 사례 분석에서 제안한 모니터링 절차가 잘 작동함을 확인하였다. 다양한 모수를 이용하여 모의실험을 진행하였지만 큰 차이가 발견되지 않아 3장에서는 한 가지 경우의 실험 결과만 제시하였다. 기존의 연구들에서는 모니터링 종료 시점(K)으로 일정한 값을 사용하였으나 본 연구에서 진행한 모의실험에서는 모니터링 종료 시점으로 관측된 자료의 크기(n)에 비례하도록 설정하였다. 그 결과 제안한 모니터링 절차를 실제 수행하는 경우, 종료 시점으로 모형을 확정하기 위하여 관측된 자료의 크기(n)의 대략 4배 정도까지 사용하는 것이 바람직해 보인다. 이 경우, 표본의 크기가 500에서 1,000개 사이일 때, 경험적 유의 확률이 대략 0.05에서 0.07 사이이며 검정력은 거의 1에 근접한 값을 가지므로 제1종의 오류도 적절히 제어하면서 모수의 변화를 잘 모니터링할 수 있으리라 기대된다. 다만 연구를 진행하면서 아쉬운 점은 모수의 변화를 탐지할 때 발생하는 지연 시간을 줄일 수 있는 특별한 방법이 발견되지 않았다는 것이다. 물론 관측된 자료의 크기(n)가 커지면 지연 시간은 상대

적으로 줄어들지만 이는 실제 모니터링 과정에서는 제어할 수 있는 부분이 아니다. 오류가 발생할 수 있는 확률은 유지하면서 방법론적으로 좀 더 지연 시간을 줄일 수 있는 연구를 진행할 예정이다.

References

- Aue, A., Dienes, C., Fremdt, S., and Steinebach, J. (2015). Reaction times of monitoring schemes for ARMA time series, *Bernoulli*, **21**, 1238–1259.
- Bardet, J. M. and Kengne, W. (2014). Monitoring procedure for parameter change in causal time series, *Journal of Multivariate Analysis*, **125**, 204–221.
- Berkes, I., Gombay, E., Horvath, L., and Kokoszka, P. (2004a). Sequential change-point detection in GARCH(p, q) models, *Econometric Theory*, **20**, 1140–1167.
- Berkes, I., Horvath, L., and Kokoszka, P. (2004b). Testing for parameter constancy in GARCH(p, q) models, *Statistics & Probability Letters*, **70**, 263–273.
- Chu, C. S. J., Stinchcombe, M., and White, H. (1996). Monitoring structural change, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1045–1065.
- Csörgö, M. and Révész, P. (2014). *Strong Approximations in Probability and Statistics*, Academic Press, New York.
- Dienes, C. and Aue, A. (2014). On-line monitoring of pollution concentrations with autoregressive moving average time series, *Journal of Time Series Analysis*, **35**, 239–261.
- Francq, C. and Zakoian, J. M. (2019). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications* (2nd ed), John Wiley & Sons, Hoboken.
- Gombay, E. (2008). Change detection in autoregressive time series, *Journal of Multivariate Analysis*, **99**, 451–464.
- Gombay, E. and Serban, D. (2009). Monitoring parameter change in AR(p) time series models, *Journal of Multivariate Analysis*, **100**, 715–725.
- Horváth, L., Hušková, M., Kokoszka, P., and Steinebach, J. (2004). Monitoring changes in linear models, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **126**, 225–251.
- Kengne, W. (2015). Sequential change-point detection in Poisson autoregressive models, *Journal de la Société Française de Statistique*, **156**, 98–112.
- Kim, S., Cho, S., and Lee, S. (2000). On the CUSUM test for parameter changes in GARCH(1, 1) models, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **29**, 445–462.
- Kirch, C. and Kamgaing, J. T. (2012). Testing for parameter stability in nonlinear autoregressive models, *Journal of Time Series Analysis*, **33**, 365–385.
- Lee, S. and Song, J. (2008). Test for parameter change in ARMA models with GARCH innovations, *Statistics & Probability Letters*, **78**, 1990–1998.
- Lee, S., Ha, J., Na, O., and Na, S. (2003). The CUSUM test for parameter change in time series models, *Scandinavian Journal of Statistics*, **30**, 781–796.
- Lee, S., Tokutsu, Y., and Maekawa, K. (2004). The CUSUM test for parameter change in regression models with ARCH errors, *Journal of the Japan Statistical Society*, **34**, 173–188.
- Leisch, F., Hornik, K., and Kuan, C. M. (2000). Monitoring structural changes with the generalized fluctuation test, *Econometric Theory*, **16**, 835–854.
- Li, F., Tian, Z., and Qi, P. (2015). Structural change monitoring for random coefficient autoregressive time series, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **44**, 996–1009.
- Na, O., Lee, Y., and Lee, S. (2011). Monitoring parameter change in time series models, *Statistical Methods & Applications*, **20**, 171–199.
- Oh, H. and Lee, S. (2018). On score vector-and residual-based CUSUM tests in ARMA-GARCH models, *Statistical Methods & Applications*, **27**, 385–406.
- Oh, H. and Lee, S. (2019a). Modified residual CUSUM test for location-scale time series models with heteroscedasticity, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **71**, 1059–1091.
- Oh, H. and Lee, S. (2019b). Parameter change test for location-scale time series models with heteroscedasticity based on bootstrap, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **35**, 1322–1343.

- Page, E. S. (1955). A test for a change in a parameter occurring at an unknown point, *Biometrika*, **42**, 523–527.
- Song, J. and Kang, J. (2018). Parameter change tests for ARMA-GARCH models, *Computational Statistics & Data Analysis*, **121**, 41–56.
- Song, J. and Kang, J. (2020). Sequential change point detection in ARMA-GARCH models, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **90**, 1520–1538.
- Zeileis, A., Leisch, F., Kleiber, C., and Hornik, K. (2005). Monitoring structural change in dynamic econometric models, *Journal of Applied Econometrics*, **20**, 99–121.

이분산 시계열 모형에서 모수의 변화에 대한 모니터링 절차의 접근 성질

김수택^a · 오해준^{a,1}

^a경상대학교 정보통계학과

(2020년 7월 9일 접수, 2020년 7월 14일 수정, 2020년 7월 15일 채택)

요약

본 논문은 이분산성을 갖는 위치-척도 시계열 모형에서 모수의 변화에 대한 모니터링 절차를 연구한다. 모니터링 절차에서 수정된 잔차의 누적합을 이용한 탐지기를 소개하고 귀무가설과 대립가설 하에서 각각 모니터링 절차에 대한 접근적 성질을 규명한다. 그리고 모의실험과 사례 분석을 통하여 제안한 모니터링 방법의 성능이 우수함을 확인한다.

주요용어: 모니터링 절차, 모수 변화, 축차적 절차, 위치-척도 시계열, 수정된 잔차의 누적합

이 성과는 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (NRF-2020R1G1A1A01014362).

¹교신저자: (52828) 경상남도 진주시 진주대로 501, 경상대학교 정보통계학과. E-mail: haejune.oh@gmail.com