The Korean Journal of Applied Statistics (2020) DOI: https://doi.org/10.5351/KJAS.2020.33.4.451
33(4), 451–466

Performance of CCC-r charts with bootstrap adjusted control limits

Minji Kim[a] · Jaeheon Lee[a,1]

[a]Department of Applied Statistics, Chung-Ang University

(Received June 23, 2020; Revised July 2, 2020; Accepted July 2, 2020)

Abstract

CCC-r chart is effective for high-quality processes with a very low fraction nonconforming. The values of process parameters should be estimated from the Phase I sample since they are often not known. However, if the Phase I sample size is not sufficiently large, an estimation error may occur when the parameter is estimated and the practitioner may not achieve the desired in-control performance. Therefore, we adjust the control limits of CCC-r charts using the bootstrap algorithm to improve the in-control performance of charts with smaller sample sizes. The simulation results show that the adjustment with the bootstrap algorithm improves the in-control performance of CCC-r charts by controlling the probability that the in-control average number of observations to signal (ANOS) has a value greater than the desired one.

Keywords: average number of observations to signal, Bayes estimator, bootstrap algorithm, CCC-r chart, Phase I

1. 서론

관리도(control chart)는 생산 공정을 모니터링하고 관리하는 통계적 공정관리(statistical process control; SPC) 절차에서 가장 많이 사용되고 있는 도구이다. 대표적인 관리도로는 Shewhart (1931)가 제안한 Shewhart 관리도, Page (1954)가 제안한 누적합(cumulative sum; CUSUM) 관리도, 그리고 Robert (1959)가 제안한 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average; EWMA) 관리도 등이 있다.

관리도를 사용하는 경우 기본적인 가정은 "관리상태일 때의 공정 모수가 알려져 있거나 정확하게 추정되었다"는 것이다. 그러나 대부분의 공정에서 관리상태일 때의 공정 모수값은 알려져 있지 않기 때문에, 제1국면(Phase I)의 표본을 통해 이를 추정하여 관리한계를 설정한다. 설정된 관리한계를 이용하여 제2국면(Phase II)에서 공정이 관리상태(in-control)인지 이상상태(out-of-control)인지를 판단하고, 이상상태인 경우 그 원인이 되는 이상원인(assignable cause)을 찾아 제거함으로써 공정을 효율적으로 유지하고 관리하는 것이다.

This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (2017R1D1A1B03029035).
[1]Corresponding author: Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, 84 Heukseok-ro, Dongjak-gu, Seoul 06974, Korea. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr

관리도의 성능을 평가하기 위해 일반적으로 평균런길이(average run length; ARL)를 사용한다. 이때 런길이는 공정에서 이상신호가 발생할 때까지 추출한 표본의 수를 나타내며, 평균런길이는 공정 모수에 의존하는 값이기 때문에 모수가 알려진 경우에는 일정한 값을 갖게 된다. 그러나 실무자에 따라 제1국면에서 추출한 표본이 다르기 때문에 추정된 모수, 관리한계, 그리고 평균런길이의 값도 달라지게 된다. 따라서 제1국면 표본의 크기는 관리상태에서의 평균런길이의 기댓값(average of the ARL; AARL)이 미리 설정한 값을 만족하면서 평균런길이의 표준편차(standard deviation of the ARL; SDARL)가 작은 값을 갖도록 결정하는 것이 올바른 방법이 될 것이다. Jensen 등 (2006)과 Psarakis 등 (2014)은 제1국면에서 수행하는 모수 추정의 영향에 대한 연구를 하였으며, Zhang 등 (2013, 2014), Lee 등 (2013), 그리고 Saleh 등 (2015)은 AARL과 SDARL을 사용하여 관리상태에서의 관리도 성능을 평가하였다. 특히 Zhang 등 (2013)은 AARL과 SDARL을 사용하여 기하관리도(geometric chart)의 성능을 평가하였고, SDARL이 작은 값을 갖기 위해서는 제1국면에서 아주 많은 수의 표본이 필요하다고 제언하였다. 또한 고품질 공정(high quality process)에서 표본의 수가 적을 때 불량률 추정에서 발생하는 문제를 해결하기 위해 베이지안(Bayesian) 추정 방법을 사용할 것을 제안하였다.

실제 공정에서는 제1국면에서 많은 수의 표본을 사용할 수 없는 경우가 빈번하게 발생한다. Jones와 Steiner (2012)와 Gandy와 Kvaløy (2013)는 이와 같은 상황에서 붓스트랩(bootstrap) 알고리즘을 관리도에 적용하는 방법을 제안하였는데, 관리상태에서의 ARL, 즉 ARL_0가 목표값을 초과할 확률이 사전에 정한 확률 이상을 달성하도록 알고리즘을 적용하였다. 이후 Saleh 등 (2015)은 붓스트랩 알고리즘을 지수가중이동평균 관리도에 적용하여 제1국면 표본이 적은 경우에도 관리상태에서의 관리도 성능이 향상됨을 보였다. 또한 Faraz 등 (2015)은 S^2 관리도, Zhao와 Driscoll (2016)은 c 관리도, 그리고 Faraz 등 (2017)은 np 관리도에 붓스트랩 알고리즘을 적용하여 그 성능을 평가하였다. 최근 Kim과 Lee (2020)는 붓스트랩 알고리즘을 사용하여 기하관리도의 관리한계를 조정하는 절차를 제안하고 그 성능을 평가하였다.

현대의 생산 공정은 불량률이 매우 낮은 고품질 공정이 대부분이며, 이러한 공정에서는 매우 낮은 불량률로 인하여 기존의 계수형 관리도 절차가 적합하지 않은 경우가 많다. 이와 같은 고품질 공정에서는 Xie 등 (1999)이 제안했던 CCC-r 관리도 절차가 효율적인 대안이 된다. CCC-r 관리도는 불량품이 한 개 관측될 때까지 조사한 제품의 개수를 관리통계량으로 사용하는 기하관리도를 확장한 것으로, 불량품이 r개 관측될 때까지 조사한 제품의 누적 개수를 관리통계량으로 사용하는 관리도이다. CCC-r 관리도에 대한 연구로는 Wu 등 (2000), Zhang 등 (2017), Kim 등 (2018), 그리고 Zhang 등 (2019)이 있으며, 특히 Zhang 등 (2019)은 CCC-r 관리도에서 베이지안 방법을 이용하여 모수를 추정하였으며 이에 대한 성능을 평가하기 위해 신호까지의 평균관측개수(average number of observations to signal; ANOS)의 평균(average of the ANOS; AANOS)과 표준편차(standard deviation of the ANOS; SDANOS)를 사용하였다.

고품질 공정의 경우 불량률이 매우 작기 때문에, 일반적으로 사용하는 제1국면 표본보다 훨씬 큰 수의 표본을 사용해야 매우 작은 불량률을 어느 정도 정확하게 추정할 수 있다. 그러나 아주 많은 수의 제1국면 표본을 사용하는 것이 현실적으로 어려운 경우가 많다. 따라서 이 논문에서는 Jones와 Steiner (2012)와 Gandy와 Kvaløy (2013)가 제안한 붓스트랩 알고리즘을 CCC-r 관리도에 적용하는 절차를 제안하고, 이 절차에 대한 관리상태와 이상상태에서의 성능을 평가하여 그 효율을 살펴보고자 한다.

2. CCC-r 관리도

제조 환경과 기술이 지속적으로 발전함에 따라 대부분의 공정에서 불량률이 매우 작아지고 있다. 이러

한 고품질 공정에서 불량률을 모니터링하기 위해 np 관리도와 같은 기존의 계수형 관리도를 사용하는 경우 불량품의 수를 관측하기 위해 많은 표본을 추출해야 한다는 어려움이 있으며, 결정된 표본의 수를 조사할 때까지 관리도 절차를 적용할 수 없기 때문에 공정 상태의 판단이 늦어질 수 있다. 이에 대한 대안으로 Xie 등 (1999)은 사전에 정한 불량품의 개수가 관측될 때까지 조사한 제품의 누적 개수를 모니터링하는 CCC-r 관리도를 제안하였다. 사전에 정한 불량품의 개수를 r이라고 할 때, 일반적으로 r은 1에서 5 사이의 값을 사용한다. $r = 1$인 경우에는 불량품이 한 개 관측될 때까지 조사한 제품의 개수이므로, 기하관리도와 동일한 절차가 된다. CCC-r 관리도는 불량률의 증가와 감소를 모두 탐지할 수 있지만, 일반적으로 공정에서 불량률의 감소보다 증가에 더 관심이 많기 때문에, 이 논문에서는 불량률의 증가를 탐지하기 위한 단측(one-sided) CCC-r 관리도를 고려하기로 한다.

CCC-r 관리도의 관리통계량 $Y_{r,i}$를 $r \times (i-1)$번째 불량품을 관측한 이후 r개의 불량품, 즉 $r \times i$번째 불량품을 관측할 때까지 조사한 제품의 누적 개수로 정의하자. 이때 불량률을 p라고 한다면, $Y_{r,i}$는 모수가 r과 p인 음이항분포(negative binomial distribution)를 따르며 확률질량함수와 누적분포함수는 다음과 같다.

$$\Pr(Y_{r,i} = n \,|\, r, p) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, \ldots,$$

$$F(n \,|\, r, p) = \sum_{j=r}^{n} \binom{j-1}{r-1} p^r (1-p)^{j-r}.$$

2.1. p_0가 알려진 경우 CCC-r 관리도

관리도 절차를 수행하기 위해서는 관리한계를 설정해야 하는데, 일반적으로 사용하는 관리한계는 3σ한계(3σ limit)이다. 그러나 3σ한계는 관리통계량이 대칭인 분포를 따르는 경우에는 유용하게 사용될 수 있지만, CCC-r 관리도와 같이 관리통계량이 비대칭인 분포를 따르는 경우 확률한계(probability limit)를 사용하는 것이 더 유용하다. 확률한계는 공정이 관리상태, 즉 $p = p_0$일 때 관리통계량이 관리한계를 벗어날 확률인 제1종 오류가 α값이 되도록 설정한다. 즉, CCC-r 관리도에서 오른쪽 꼬리 확률이 $\alpha/2$가 되는 지점을 관리상한(upper control limit; UCL) UCL_r, 왼쪽 꼬리 확률이 $\alpha/2$가 되는 지점을 관리하한(lower control limit; LCL) LCL_r로 설정한다. 그러나 CCC-r 관리도의 관리통계량 $Y_{r,i}$는 이산형 확률변수이므로, 정수 UCL_r과 LCL_r에 대하여 $Y_{r,i} \geq \mathrm{UCL}_r$ 또는 $Y_{r,i} \leq \mathrm{LCL}_r$인 경우 이상상태의 신호를 준다고 할 때 다음의 관계를 만족하도록 UCL_r과 LCL_r을 설정할 수 있다.

$$1 - F(\mathrm{UCL}_r - 1 \,|\, r, p_0) = 1 - \sum_{j=r}^{\mathrm{UCL}_r - 1} \binom{j-1}{r-1} p_0^r (1-p_0)^{j-r} \leq \frac{\alpha}{2}, \tag{2.1}$$

$$F(\mathrm{LCL}_r \,|\, r, p_0) = \sum_{j=r}^{\mathrm{LCL}_r} \binom{j-1}{r-1} p_0^r (1-p_0)^{j-r} \leq \frac{\alpha}{2}. \tag{2.2}$$

이때 UCL_r은 식 (2.1)을 만족하는 가장 작은 정수이고, LCL_r은 식 (2.2)를 만족하는 가장 큰 정수를 나타낸다. 이 논문에서는 불량률의 증가를 탐지하는 단측 CCC-r 관리도를 사용하기 때문에, 관리통계량 $Y_{r,i}$가 작아지는 경우, 즉 $Y_{r,i} \leq \mathrm{LCL}_r$인 경우 이상신호를 주게 된다. 따라서 관리하한 LCL_r은 다음의 식을 만족하는 가장 큰 정수가 된다.

$$F(\mathrm{LCL}_r \,|\, r, p_0) \leq \alpha. \tag{2.3}$$

2.2. p_0가 알려져 있지 않은 경우 CCC-r 관리도

불량률 p_0가 알려져 있는 경우 식 (2.3)을 이용하여 단측 CCC-r 관리도를 작성할 수 있지만, 일반적으로 관리상태에서의 불량률인 p_0는 알려져 있지 않은 경우가 대부분이다. 따라서 제1국면에서 추출한 표본을 통해 이를 추정하여 관리한계를 설정해야 한다. p_0의 추정량을 $\hat{p}_0$이라고 할 경우, 이를 사용하여 설정하는 관리하한 $\widehat{\mathrm{LCL}}_r$은 식 (2.3)과 유사하게 다음의 식을 만족하는 가장 큰 정수가 된다.

$$F\left(\widehat{\mathrm{LCL}}_r \,|\, r, \hat{p}_0\right) = \sum_{j=r}^{\widehat{\mathrm{LCL}}_r} \binom{j-1}{r-1} \hat{p}_0^r (1-\hat{p}_0)^{j-r} \le \alpha, \tag{2.4}$$

여기서 구한 $\widehat{\mathrm{LCL}}_r$을 사용하는 단측 CCC-r 관리도에서, 실제 공정의 불량률이 p인 경우 이상신호를 줄 확률인 경보율(alarm rate; AR) $\gamma(\hat{p}_0 \,|\, p)$는

$$\gamma(\hat{p}_0 \,|\, p) = F\left(\widehat{\mathrm{LCL}}_r \,|\, r, p\right) = \sum_{j=r}^{\widehat{\mathrm{LCL}}_r} \binom{j-1}{r-1} p^r (1-p)^{j-r} \tag{2.5}$$

이 된다. 이때 $\gamma(\hat{p}_0 \,|\, p)$의 기호에서 $\hat{p}_0$은 $\widehat{\mathrm{LCL}}_r$을 구할 때 추정량 $\hat{p}_0$을 사용했다는 것이고, p는 실제 공정의 불량률을 나타내는 것이다. 만일 $p = p_0$인 경우 $\gamma(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$는 오경보율(false alarm rate; FAR)이 된다.

일반적으로 관리도의 성능을 평가할 때 평균런길이인 ARL을 많이 사용하지만, CCC-r 관리도의 성능을 평가하기 위해 신호까지의 평균관측개수인 ANOS을 그 측도로 사용하고자 한다. 이는 r값이 서로 다른 경우 ARL을 비교하는 것은 공정하지 않기 때문에 ANOS를 사용하는 것이다. CCC-r 관리도의 ANOS는

$$\mathrm{ANOS} = \mathrm{ARL} \times E(Y_{r,i})$$

의 관계를 만족한다. 따라서 추정량 $\hat{p}_0$을 사용하여 $\widehat{\mathrm{LCL}}_r$을 구했고 실제 공정의 불량률이 p인 경우의 ANOS인 $\mathrm{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p)$는

$$\mathrm{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p) = \frac{1}{\gamma(\hat{p}_0 \,|\, p)} \times \frac{r}{p} \tag{2.6}$$

이 된다. 이때 $\gamma(\hat{p}_0 \,|\, p)$는 식 (2.5)를 사용하여 계산할 수 있다.

서론에서 언급한 바와 같이 실무자에 따라 제1국면에서 추출한 표본은 서로 다르기 때문에, 추정된 모수 $\hat{p}_0$과 $\widehat{\mathrm{LCL}}_r$은 서로 다르며 이때 계산된 관리상태에서의 $\mathrm{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$ 또한 서로 다르게 된다. 따라서 추정된 관리한계를 사용하는 관리도의 관리상태 성능은 ANOS의 평균인 AANOS와 표준편차인 SDANOS를 사용하여 평가하고자 한다.

제1국면에서 추출한 표본의 크기는 m이고 이 중에서 관측된 불량품의 개수는 N이라 할 경우, N은 모수가 m과 p_0인 이항분포(binomial distribution) $B(m, p_0)$를 따르며 $\hat{p}_0$은 이에 의존하는 추정량이다. 따라서 $\mathrm{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$의 평균인 $\mathrm{AANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$는

$$\mathrm{AANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0) = E_N[\mathrm{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)] = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0) \binom{m}{k} p_0^k (1-p_0)^{m-k} \tag{2.7}$$

가 된다. 이때 $\mathrm{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$는 식 (2.6)을 사용하여 계산할 수 있다.

또한 ANOS의 표준편차 SDANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)는

$$\text{SDANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0) = \sqrt{E_N[\text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)^2] - E_N^2[\text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)]} \tag{2.8}$$

로 계산할 수 있으며, 여기서 $E_N[\text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)^2]$은 다음과 같다.

$$E_N[\text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)^2] = \sum_{k=0}^{m} \text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)^2 \binom{m}{k} p_0^k (1-p_0)^{m-k}.$$

3. p_0의 추정량

불량률 p_0가 알려져 있지 않은 경우 제1국면의 표본을 통해 p_0를 추정하여 관리한계를 설정한다. 제1국면에서 추출한 표본의 크기는 m이고 이 중에서 관측된 불량품의 개수는 N이라 하자. 일반적으로 p_0의 추정량으로 다음과 같은 최대우도추정량(maximum likelihood estimator; MLE)을 사용한다.

$$\hat{p}_0 = \frac{N}{m}.$$

Zhang 등 (2013)과 Lee 등 (2013)은 $N = 0$일 때, 즉 추출한 표본에서 불량품이 하나도 관측되지 않은 경우 발생하는 문제점에 대해 언급하였다. 고품질 공정에서는 이와 같은 경우가 많이 발생할 수 있기 때문에, Zhang 등 (2013)은 p_0의 추정량으로 베이즈추정량을 사용할 것을 제안하였다. 이외에 Hong과 Lee (2015), Zhang 등 (2017), Han 등 (2018), Zhang 등 (2019), 그리고 Kim과 Lee (2020)는 베이즈추정량을 사용하여 불량률을 추정하고 이를 관리도에 사용하는 절차에 대해 연구하였다.

이 논문에서도 고품질 공정을 고려하고 있으며, 특히 $N = 0$이 될 경우 이 논문에서 제안하고자 하는 붓스트랩 알고리즘을 수행하지 못하게 된다. 따라서 이 논문에서는 p_0의 추정량으로 최대우도추정량 대신 베이즈추정량을 사용한다. 이에 대해서는 4.2절에서 다시 설명할 것이다.

베이즈추정량은 모수의 사전분포를 가정해야 한다는 어려움은 있지만, 실무자의 경험에 기초한 사전분포를 통해 불량률에 대한 사전 정보를 추정량에 반영할 수 있다는 장점이 있다. 일반적으로 관리상태에서의 불량률 p_0에 대한 사전분포는 모수가 a와 b인 베타분포(beta distribution) Beta(a, b)를 가정한다. p_0의 사전분포로 Beta(a, b)를 가정할 경우, N개의 불량품을 관측한 후 사후분포는 Beta$(a+N, b+m-N)$이 됨이 잘 알려져 있다. 따라서 사전분포의 평균인 $\hat{p}_{0,p}$는

$$\hat{p}_{0,p} = \frac{a}{a+b} \tag{3.1}$$

이고, 이 논문에서 사용하고자 하는 p_0의 베이즈추정량은 다음과 같은 사후분포의 평균인 $\hat{p}_{0,B}$로 정의된다.

$$\hat{p}_{0,B} = \frac{N+a}{m+a+b}. \tag{3.2}$$

베타분포는 모수 a와 b에 따라 다양한 형태를 가진다. $a \leq 1$이고 $b > 1$인 경우 강한 단조(strictly decreasing) 형태, $a < 1$이고 $b < 1$인 경우 U자 형태(U-shaped), 그리고 $a > 1$이고 $b > 1$인 경우 단봉(unimodal) 형태가 된다. 고품질 공정에서의 불량률 p_0는 매우 작은 값이기 때문에, 사전분포의 평균 $\hat{p}_{0,p}$가 작은 값을 갖도록 이 논문에서는 a값으로 1을 사용하였다.

4. 관리한계의 조정

4.1. 추정된 관리한계를 사용한 CCC-r 관리도의 성능

Zhang 등 (2019)은 추정된 관리한계를 사용할 경우 r에 따른 CCC-r 관리도의 관리상태에서의 성능을 평가하고, r이 큰 경우 모수 추정의 영향에 더 민감하다는 연구 결과를 발표하였다. 그들은 p_0가 0.001보다 큰 경우에 대해 평가를 수행하였다. Kim 등 (2018)은 최대우도추정량으로 p_0를 추정할 경우 ARL의 평균과 표준편차인 AARL과 SDARL을 사용하여 CCC-r 관리도의 관리상태에서의 성능을 조사하였다. 이 논문에서는 p_0가 아주 작은 경우 식 (2.4)로 계산된 관리한계를 사용하는 CCC-r 관리도의 관리상태에서의 성능을 AANOS와 SDANOS라는 측도를 사용하여 평가하고, 이에 대한 문제점을 살펴보고자 한다.

Table 4.1은 공정이 관리상태일 때 추출한 표본의 크기 m과 실제 공정의 불량률 p_0값에 대한 CCC-r 관리도의 AANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)와 SDANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)의 값을 나타낸다. 이때 r은 1부터 5까지로 설정하였고, p_0는 0.001, 0.0005, 0.0001을 사용하였다. AANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)와 SDANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)의 값은 식 (2.7)과 (2.8)을 사용하여 계산하였고, 각 칸의 첫 번째 행은 AANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)의 값이고 두 번째 행은 SDANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)값이다. 이때 달성하고자 하는 ANOS_0는 100,000으로 설정하였고, 불량률 p_0는 식 (3.2)로 주어진 베이즈추정량으로 추정하였다. 설정한 p_0의 값에 따른 사전분포의 모수 a는 1로 고정하였고, 이에 따른 모수 b는 식 (3.1)의 사전분포의 평균 $\hat{p}_{0,p}$이 p_0와 같도록 각각 999, 1999, 9999로 설정하였다. Table 4.1의 마지막 행인 $m = \infty$는 공정의 불량률 p_0가 알려진 경우의 AANOS와 SDANOS값을 나타내는데, CCC-r 관리도의 관리한계는 식 (2.3)을 만족하는 가장 큰 정수를 사용하기 때문에 각 p_0에 대한 AANOS_0값이 100,000보다 조금 큰 값을 갖게 된다.

Table 4.1의 결과를 살펴보면, 예상했던 바와 같이 m의 값이 증가함에 따라 실제 AANOS값과 가까워지는 경향을 보인다. 또한 SDANOS값은 m의 값이 증가함에 따라 감소하는 경향을 보인다. Zhang 등 (2014)은 SDARL_0값이 목표하는 ARL_0값의 10% 이내가 되도록 제1국면 표본의 크기를 선택할 것을 제안하였다. 따라서 이 논문에서 사용하는 측도인 AANOS와 SDANOS에도 Zhang 등 (2014)의 조건을 적용시켜 보면, p_0값이 감소하거나 r값이 증가할수록 더 큰 표본의 크기가 필요함을 알 수 있다. 즉, $r = 1, 2, 3, 4, 5$에 따른 필요한 최소한의 표본 크기는 $p_0 = 0.001$인 경우에는 각각 200,000개, 500,000개, 1,000,000개, 1,000,000개, 2,000,000개이며, $p_0 = 0.0005$인 경우에는 각각 200,000개, 1,000,000개, 2,000,000개, 2,000,000개, 2,000,000개, 그리고 $p_0 = 0.0001$인 경우에는 $r = 1$일 때 1,000,000개이고, 나머지 r에 대해 5,000,000개이다. 이 결과는 허용할 수 있는 SDANOS값을 얻기 위해서 우리가 예상했던 것보다 훨씬 큰 수의 표본을 사용해야 한다는 것을 시사하지만, 실제 공정에서 이렇게 큰 제1국면 표본을 사용하기에는 시간과 비용적인 측면에서 현실적이지 못한 경우가 대부분이다.

Table 4.1로부터 p_0를 추정하여 사용할 경우 m의 값이 증가함에 따라 AANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)는 목표하는 ANOS_0값에 접근해 가지만, 산포인 SDANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)값은 급격하게 감소하지는 않는다는 사실을 알 수 있었다. 이제 ANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)값이 목표값보다 작은 값을 갖는 비율을 조사하여 p_0를 추정하여 사용하는 CCC-r 관리도의 문제점에 대해 살펴보고자 한다.

Table 4.2는 표본 크기 m과 불량률 p_0에 대해 모의실험을 10,000번 반복하여 얻어진 ANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)의 값들 중 목표하는 ANOS_0값보다 작은 경우의 비율을 나타낸다. 이때 실제 목표값은 불량률을 알고 있는 경우의 ANOS_0값으로, $p_0 = 0.001, 0.0005, 0.0001$에 대해 각각 100046, 100074, 100001이 된다. Zhang 등 (2019)은 CCC-4 관리도의 사용을 권장하였으므로, $r = 4$인 경우에 대해 모의실험을 진행하였다.

Table 4.2의 결과를 살펴보면, $p_0 = 0.0001$, $m = 10{,}000$일 때를 제외한 모든 경우에 ANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_0$)값

Table 4.1. Values of AANOS($\hat{p}_0 \mid p_0$) (upper entry) and SDANOS($\hat{p}_0 \mid p_0$) (lower entry) when $\text{ANOS}_0 = 100{,}000$

	m	CCC-1	CCC-2	CCC-3	CCC-4	CCC-5
$p_0 = 0.001$ $(a = 1, b = 999)$	50,000	105463	102161	104324	107067	109914
		15670	26370	36586	45755	54268
	100,000	105349	101316	102306	103633	105037
		11583	18665	25565	31403	36465
	200,000	105454	100934	101258	101896	102560
		8394	13229	17965	21841	25114
	500,000	105322	100610	100621	100828	101066
		6052	8370	11325	13682	15625
	1,000,000	105329	100510	100401	100472	100566
		5562	5917	7994	9644	10986
	2,000,000	105053	100478	100299	100290	100313
		5472	4196	5651	6808	7752
	5,000,000	104608	100451	100229	100194	100186
		5374	2657	3577	4301	4890
	∞	100451	100080	100179	100046	100029
		0	0	0	0	0
$p_0 = 0.0005$ $(a = 1, b = 1999)$	50,000	101295	103190	107254	111727	116241
		19620	35500	49274	61885	73941
	100,000	101352	101720	103793	106026	108243
		14031	25294	34238	41723	48273
	200,000	101319	100941	101940	103064	104168
		10060	17960	23969	28736	32674
	500,000	101272	100479	100831	101265	101696
		6451	11373	15070	17872	20102
	1,000,000	101309	100306	100450	100654	100863
		4589	8049	10630	12564	14079
	2,000,000	101258	100223	100258	100346	100446
		3295	5689	7513	8857	9907
	5,000,000	101244	100176	100143	100166	100193
		2161	3602	4746	5595	6252
	∞	100978	100140	100065	100074	100062
		0	0	0	0	0
$p_0 = 0.0001$ $(a = 1, b = 9999)$	50,000	99903	108250	116826	123975	129218
		35711	60450	79747	95048	106058
	100,000	100072	104986	109943	113887	116628
		27290	44875	56176	63292	66731
	200,000	100063	102735	105395	107439	108804
		20220	32541	39323	42674	43351
	500,000	100046	101163	102272	103102	103640
		13167	20880	24606	26007	25745
	1,000,000	100035	100598	101157	101573	101840
		9396	14835	17322	18132	17784
	2,000,000	100048	100306	100586	100794	100926
		6680	10513	12219	12727	12423
	5,000,000	100046	100129	100238	100320	100373
		4237	6658	7716	8012	7798
	∞	100050	100018	100007	100001	100003
		0	0	0	0	0

AANOS = average of the ANOS; SDANOS = standard deviation of the ANOS; ANOS = average number of observations to signal.

Table 4.2. The percentage of CCC-4 chart with in-control ANOS values below the targeted $\text{ANOS}_0 = 100{,}000$

m	p_0		
	0.001 ($a = 1, b = 999$)	0.0005 ($a = 1, b = 1999$)	0.0001 ($a = 1, b = 9999$)
10,000	45.68	43.99	36.86
20,000	47.02	44.35	40.93
50,000	48.61	45.76	44.21
100,000	48.26	48.62	46.32
150,000	49.01	48.48	46.83
200,000	49.21	49.04	47.41
250,000	49.78	48.31	47.55
300,000	49.00	48.80	47.20

ANOS = average number of observations to signal.

이 주어진 목표값보다 작은 비율이 40% 이상이 됨을 알 수 있다. 이것은 실무자의 40% 이상이 목표한 ANOS_0값보다 작은 ANOS값을 갖도록 관리도를 설계한다는 것을 의미하는 것으로, 미리 설정한 오경보율보다 실제로는 더 큰 오경보율을 사용한다는 것이다. 이와 같은 문제는 m이 큰 경우에도 발생함을 알 수 있다. 따라서 Tables 4.1과 4.2에서 발견된 문제점을 해결하기 위해 이 논문에서는 붓스트랩 방법을 사용하여 CCC-r 관리도의 관리한계를 조정하는 절차를 제안하고자 한다.

4.2. 붓스트랩 방법

CCC-r 관리도에서 추정된 모수를 사용할 때 ANOS의 목표값보다 작은 ANOS값을 갖는 비율이 너무 큰 문제를 개선하기 위해, Jones와 Steiner (2012)와 Gandy와 Kvaløy (2013)가 제안한 붓스트랩 알고리즘을 적용해 보자. 붓스트랩은 실제 조사한 결과를 바탕으로 가상의 샘플링을 수행하여 결과의 정확성을 평가하거나 분포를 추정하는 방법이다. 이 논문에서는 $\text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$값이 목표값 A_0보다 클 확률이 $1-\rho$ 이상이 되도록, 즉 다음의 관계식을 만족하도록 CCC-r 관리도의 관리한계를 조정하기 위해 붓스트랩 알고리즘을 사용하고자 한다.

$$\Pr\{\text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0) > A_0\} \geq 1 - \rho. \tag{4.1}$$

이 논문에서는 $\rho = 0.1$로 설정하여 목표값 A_0보다 큰 $\text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$값이 90% 이상이 되도록 설정하였다. 붓스트랩 알고리즘을 관리도에 적용한 연구들은 Saleh 등 (2015), Faraz 등 (2015), Zhao와 Driscoll (2016), Faraz 등 (2017), 그리고 Kim과 Lee (2020)가 있다. 특히 Kim과 Lee (2020)는 기하 관리도, 즉 $r = 1$인 CCC-r 관리도에 붓스트랩 알고리즘을 적용하는 절차에 대해 연구하였고, 이 논문에서는 $r \geq 1$인 경우의 CCC-r 관리도로 확장하여 붓스트랩 알고리즘을 적용하였다.

CCC-r 관리도의 관리한계에 대해 붓스트랩 알고리즘을 적용하는 절차는 다음과 같다.

1. p_0의 사전분포를 $\text{Beta}(a, b)$로 설정하고, 제1국면에서 m개의 표본을 추출하여 불량률 p_0의 추정량 $\hat{p}_{0,B}$를 식 (3.2)를 사용하여 계산한다.
2. $B(m, \hat{p}_{0,B})$에서 B개의 붓스트랩 표본 $N_1^*, N_2^*, \ldots, N_B^*$를 생성하여 $(1-\rho)\%$에 해당하는 분위수를 $N_{1-\rho}^*$라고 정의한다. 이때 B는 어느 정도 큰 값을 사용한다.
3. $N_{1-\rho}^*$를 사용하여 $\hat{p}_0^*$를 다음과 같이 추정한다.

$$\hat{p}_0^* = \frac{N_{1-\rho}^* + a}{m + a + b}.$$

4. 다음을 만족하는 가장 큰 정수 $\widehat{\mathrm{LCL}}_r^*$를 계산한다.

$$F\left(\widehat{\mathrm{LCL}}_r^* \,|\, r, \hat{p}_0^*\right) = \sum_{j=r}^{\widehat{\mathrm{LCL}}_r^*} \binom{j-1}{r-1} (\hat{p}_0^*)^r (1-\hat{p}_0^*)^{j-r} \le \alpha.$$

따라서, 관리상태에서의 경보율 $\gamma(\hat{p}_0^* \,|\, p_0)$와 신호까지의 평균관측개수 $\mathrm{ANOS}(\hat{p}_0^* \,|\, p_0)$는 각각 다음과 같다.

$$\gamma(\hat{p}_0^* \,|\, p_0) = \sum_{j=r}^{\widehat{\mathrm{LCL}}_r^*} \binom{j-1}{r-1} p_0^r (1-p_0)^{j-r}, \quad \mathrm{ANOS}(\hat{p}_0^* \,|\, p_0) = \frac{1}{\gamma(\hat{p}_0^* \,|\, p_0)} \times \frac{r}{p_0}.$$

이때 붓스트랩 알고리즘의 1단계에서 m개의 표본 중 불량품이 관측되지 않았을 때, 즉 $N = 0$일 때, 최대우도추정량을 사용할 경우 $\hat{p}_0 = 0$이 되어 다음 단계에서 붓스트랩 표본을 생성할 수 없는 문제가 발생한다. 따라서 이러한 문제를 방지하고 또한 실무자들의 사전정보를 반영하기 위해, 이 논문에서는 베이즈추정량을 사용하였다.

4.3. 붓스트랩 방법의 성능 평가

CCC-r 관리도에서 제안된 붓스트랩 알고리즘 절차의 성능을 알아보기 위해, 붓스트랩 알고리즘을 사용하여 관리한계를 조정한 경우의 성능을 모의실험을 통하여 평가하였다.

먼저 관리상태일 때의 성능을 평가하기 위해, 관리한계를 조정하지 않은 경우와 붓스트랩 알고리즘을 사용하여 조정한 경우의 $\mathrm{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$값이 ANOS_0의 목표값보다 작은 비율을 조사하여 Table 4.3에 수록하였다. 각 칸의 첫 번째 행은 관리한계를 조정하지 않은 경우(unadjusted)의 비율이고, 두 번째 행은 관리한계를 조정한 경우(adjusted)의 비율을 나타낸다. 이때 r은 1부터 5까지 사용하였고, m은 Table 4.1을 참고하여 각 $p_0 = 0.001, 0.0005, 0.0001$에서 적절하게 설정하였다. 모의실험의 결과는 10,000번 반복한 수치이고, 붓스트랩 표본의 수 B는 1,000으로 설정하였다. 목표값인 ANOS_0는 100,000으로 설정하였지만, 정수의 관리한계를 사용하므로 실제 p_0에 대한 ANOS_0값은 설정한 값과 조금 다른 값을 가질 수 있다. 각 p_0와 r에 대한 ANOS_0의 목표값은 Table 4.1의 $m = \infty$일 때의 값을 참고할 수 있다.

Table 4.2의 결과에서도 설명했지만, Table 4.3에서 관리한계를 조정하지 않은 경우 ANOS_0의 목표값보다 작은 $\mathrm{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$값을 갖는 비율이 모든 경우 40%를 초과하는 반면, 붓스트랩 방법으로 CCC-r의 관리한계를 조정한 경우 본래 의도했던 바와 같이 그 비율이 10%에 근접함을 보여준다. CCC-r 관리도에서 정수의 관리한계를 사용하기 때문에 식 (4.1)을 정확하게 만족하진 않지만, 본래 의도했던 성능을 잘 만족한다고 할 수 있다.

또한, 붓스트랩 절차는 제1국면의 표본 크기 m이 크지 않은 경우에도 유용하게 사용할 수 있다는 장점이 있다. 이를 확인하기 위해 Table 4.3에서 m은 아주 크지 않은 값을 사용했고, 작은 m을 사용할 경우에도 그 성능이 나쁘지 않음을 알 수 있다.

공정이 관리상태일 때 조정하지 않은 관리한계와 조정한 관리한계의 성능을 시각적으로 비교하기 위해, CCC-4 관리도에서 Table 4.3과 같이 모의실험을 통하여 계산된 10,000개의 $\mathrm{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$에 대한 상자그림(boxplot)을 Figure 4.1에 나타냈다. 이때 표본 크기는 $m = 100{,}000$으로 설정하였고, 사전분포 $\mathrm{Beta}(a, b)$의 모수 a는 1이고, 모수 b는 사전분포의 평균이 p_0와 같도록 설정하였다. 또한, ANOS_0의 목표값은 100,000으로 각 $p_0 = 0.001, 0.0005, 0.0001$에 대한 ANOS_0 목표값 100046, 100074, 100001을

Table 4.3. Comparison of the percentage of CCC-r charts with in-control ANOS values below the targeted $\text{ANOS}_0 = 100{,}000$ for charts with unadjusted (upper entry) and adjusted (lower entry) control limits

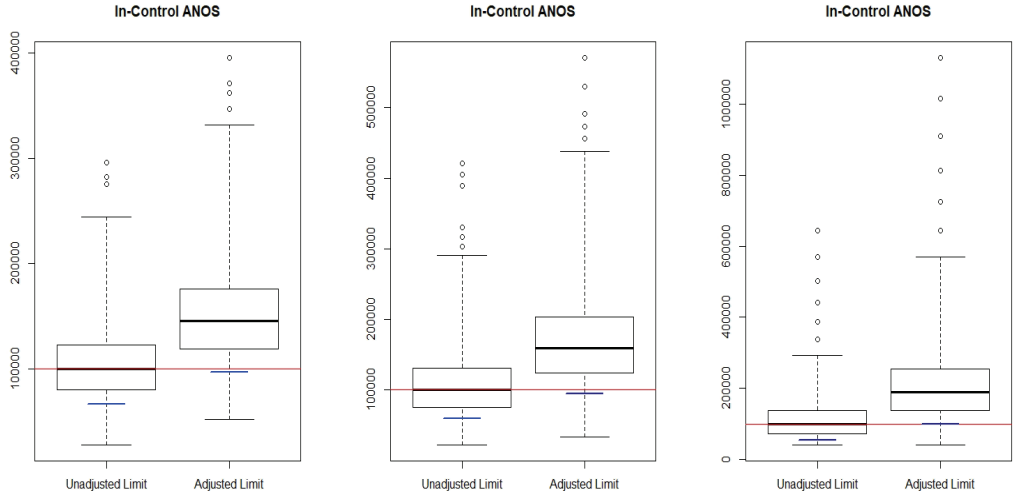
	m	CCC-1	CCC-2	CCC-3	CCC-4	CCC-5
$p_0 = 0.001$ $(a = 1, b = 999)$	10,000	45.99	45.70	45.79	45.68	45.46
		7.45	7.13	7.27	7.97	7.61
	20,000	38.23	46.64	46.43	47.02	45.78
		6.17	10.00	10.17	9.36	9.77
	50,000	46.54	47.79	48.74	48.61	48.49
		3.09	10.25	10.32	10.05	10.24
	100,000	19.99	49.10	48.58	48.26	48.55
		2.04	10.17	10.19	10.09	9.86
$p_0 = 0.0005$ $(a = 1, b = 1999)$	20,000	46.13	45.79	45.52	44.35	45.68
		7.67	7.26	7.27	7.30	7.75
	50,000	47.50	46.25	47.72	45.76	46.36
		9.48	9.02	9.68	9.40	8.79
	100,000	47.78	48.47	47.95	48.62	47.59
		10.15	10.51	10.35	10.06	10.35
	150,000	43.49	48.01	48.76	48.48	48.41
		8.07	9.31	10.27	10.23	10.10
$p_0 = 0.0001$ $(a = 1, b = 9999)$	100,000	46.08	45.30	46.02	46.32	44.98
		7.20	7.73	7.47	7.83	7.77
	150,000	46.29	46.29	46.42	46.83	46.19
		9.16	9.58	9.21	9.25	9.53
	200,000	47.26	47.07	46.92	47.41	46.56
		9.97	9.96	10.06	10.12	9.91
	250,000	48.29	48.01	47.14	47.55	47.05
		9.44	9.74	8.86	9.03	8.86

ANOS = average number of observations to signal.

빨간색 선으로 표시하였고, 관리한계를 조정하지 않은 경우(unadjusted limit)와 조정한 경우(adjusted limit)에 대한 $\text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$의 10분위수는 파란색 선으로 표시하였다.

Figure 4.1의 결과에서 붓스트랩 알고리즘을 사용하여 관리한계를 조정한 경우 $\text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$의 10분위수값(파란색 선)은 ANOS_0의 목표값(빨간색 선)에 근접하게 나타난 반면, 관리한계를 조정하지 않은 경우의 10분위수값은 목표값보다 많이 작은 것을 시각적으로 확인할 수 있다. 그러나, Figure 4.1의 $\text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$의 분포에서 조정된 관리한계의 경우의 분포가 조정하지 않은 경우의 분포보다 더 큰 변동성(variability)을 보이는데, 관리도에 붓스트랩 알고리즘을 적용하여 관리도를 조정할 경우 발생하는 문제로서 이전의 연구에서도 이와 같은 문제에 대해 언급한 바가 있다 (Saleh 등, 2015; Faraz 등, 2015, 2017; Zhao와 Driscoll, 2016; Kim과 Lee, 2020). 특히 Saleh 등 (2015)은 조정한 관리한계를 사용하는 절차가 조정하지 않는 절차에 비해 이상상태의 탐지 성능이 크게 나쁘지 않은 한 관리상태일 때의 $\text{ANOS}(\hat{p}_0 \,|\, p_0)$의 변동성을 감수하면서 조정한 절차를 사용하는 것이 더 바람직하며, 붓스트랩 알고리즘의 사용하는 목적은 관리상태일 때의 성능을 향상시키는 것임을 강조하였다.

다음으로 공정이 이상상태일 때 조정한 관리한계를 사용한 CCC-r 관리도의 성능을 평가하기 위해 모의실험을 수행하였다. 공정이 관리상태일 때와 유사하게 모의실험은 10,000번 반복하였고, ANOS_0의 목표값은 100,000이고 $p_0 = 0.0005$인 경우 CCC-4 관리도의 성능을 조사하였다. 이때 사전분포는 $\text{Beta}(1, 1999)$로 설정하였고, 붓스트랩 표본의 수는 $B = 1{,}000$으로 설정하였다. 이와 같은 설정하에



(a) $p_0 = 0.001$, $a = 1$, $b = 999$ (b) $p_0 = 0.0005$, $a = 1$, $b = 1999$ (c) $p_0 = 0.0001$, $a = 1$, $b = 9999$

Figure 4.1. Boxplots of the in-control ANOS with unadjusted and adjusted control limits when $r = 4$, $\text{ANOS}_0 =$ 100,000, $m =$ 100,000, and (a), (b), (c).

Table 4.4. The out-of-control ANOS performance of CCC-4 charts with unadjusted (upper entry) and adjusted (lower entry) control limits when $\text{ANOS}_0 =$ 100,000 and $p_0 = 0.0005$

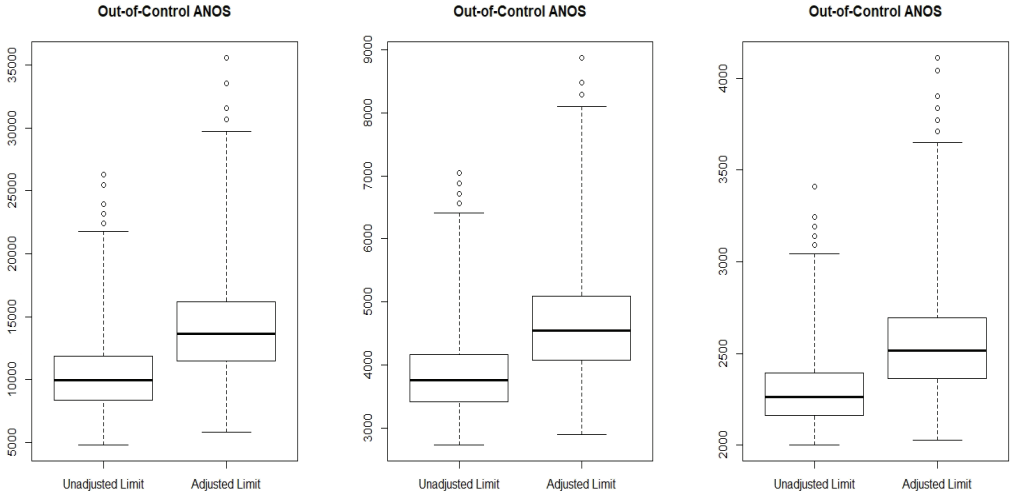
m	p_1			
	0.001	0.0015	0.002	0.0025
20,000	11404.26	4080.01	2378.24	1722.00
	21125.10	6159.52	3056.49	1984.81
50,000	10543.54	3897.47	2313.75	1692.85
	16342.15	5110.54	2702.55	1842.70
100,000	10259.74	3819.81	2289.50	1680.67
	14110.26	4656.13	2547.65	1778.36
150,000	10151.73	3809.91	2285.34	1676.89
	13138.17	4446.47	2488.07	1750.57

ANOS = average number of observations to signal.

서 실제 공정의 불량률이 $p_0 = 0.0005$에서 $p_1 = 0.001, 0.0015, 0.002, 0.0025$로 증가하였을 때 각 m에 대한 $\text{AANOS}(\hat{p}_0 \mid p_1)$값을 Table 4.4에 수록하였다.

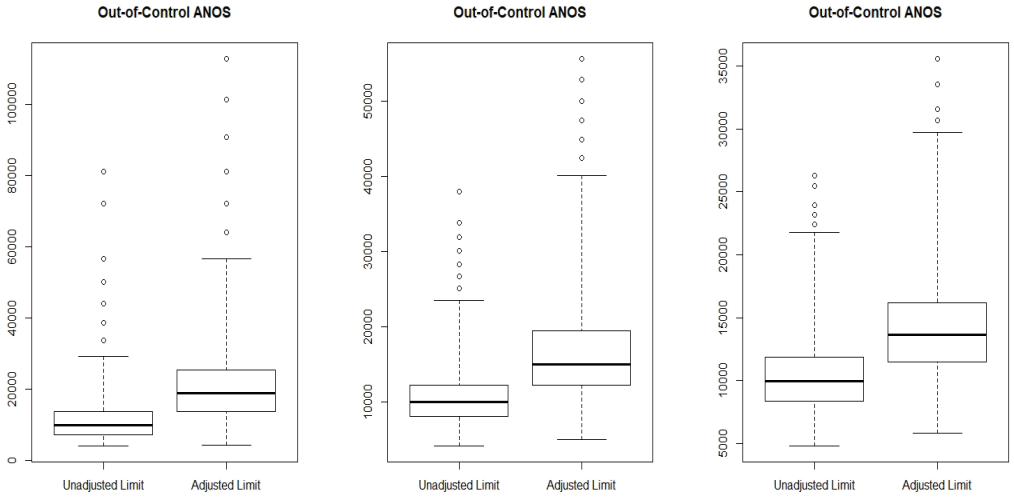
Table 4.4의 결과를 살펴보면, 모든 m값에 대해 불량률의 변화 크기가 증가함에 따라 조정한 관리한계와 조정하지 않은 관리한계 모두 $\text{AANOS}(\hat{p}_0 \mid p_1)$값이 감소함을 보였으며, 각 p_1에 대해 표본 크기 m이 클수록 $\text{AANOS}(\hat{p}_0 \mid p_1)$값이 감소하는 경향을 나타냈다. 즉, 예상할 수 있었던 바와 같이 이상상태에서 불량률의 변화가 클수록, 또는 제1국면의 표본 크기가 클수록 이상상태를 더 빠르게 탐지할 수 있으며, 이 경우 관리한계를 조정한 경우와 조정하지 않은 경우의 성능은 크게 차이가 나지 않음을 알 수 있다.

Figures 4.2와 4.3은 Table 4.4에 나타낸 이상상태일 때 CCC-4 관리도의 ANOS 성능을 시각적으로 확인하기 위해, 모의실험에서 계산된 10,000개의 $\text{ANOS}(\hat{p}_0 \mid p_1)$값에 대해 상자그림을 작성하였다. Figure 4.2는 불량률 변화의 크기에 대한 ANOS 성능을 확인하기 위해 $m =$ 100,000일 때 $p_0 = 0.0005$에



(a) $p_1 = 0.001$ (b) $p_1 = 0.0015$ (c) $p_1 = 0.002$

Figure 4.2. Boxplots of the out-of-control ANOS with unadjusted and adjusted control limits when $r = 4$, $\text{ANOS}_0 = 100{,}000$, $m = 100,000$, $p_0 = 0.0005$, and (a), (b), (c).



(a) $m = 20{,}000$ (b) $m = 50{,}000$ (c) $m = 100{,}000$

Figure 4.3. Boxplots of the out-of-control ANOS with unadjusted and adjusted control limits when $r = 4$, $\text{ANOS}_0 = 100{,}000$, $p_0 = 0.0005$, $p_1 = 0.001$, and (a), (b), (c).

서 $p_1 = 0.001$, 0.0015, 0.002로 변화한 경우의 ANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_1$) 상자그림이다. 모든 p_1에 대해 관리한계를 조정하지 않은 경우의 ANOS($\hat{p}_0 \,|\, p_1$)값이 조정한 경우에 비해 전반적으로 작은 값을 갖으며, 분포의 변동성 또한 작은 것으로 나타났다. 그러나 관리상태에서의 ANOS에 대한 Figure 4.2의 상자그림과 비교해 볼 때, 이상상태에서의 변동성 차이는 많이 줄어들었으며 특히 불량률의 변화가 클수록 그 차이는

Table 4.5. The adjusted control limits to guarantee that $P\{\text{ANOS}(\hat{p}_0 \mid p_0) > 100{,}000\} \geq 0.9$ for CCC-4 charts

p_0	m	Mode of $\widehat{\text{LCL}}^*$	Mean of $\widehat{\text{LCL}}^*$
0.001 ($a = 1, b = 999$)	10,000	997(12.39)	982.0
	20,000	952(8.34)	1027.7
	50,000	1061(5.36)	1093.6
	100,000	1124(4.07)	1135.9
0.0005 ($a = 1, b = 1999$)	20,000	2528(12.49)	2473.7
	50,000	2535(7.11)	2648.9
	100,000	2829(5.50)	2777.9
	150,000	2779(4.45)	2938.8
0.0001 ($a = 1, b = 9999$)	100,000	23549(12.70)	24843.8
	150,000	24467(9.96)	25524.3
	200,000	24976(8.32)	26164.8
	250,000	26933(7.20)	26513.4

ANOS = average number of observations to signal; LCL = lower control limit.

더 작아짐을 알 수 있다.

Figure 4.3은 표본 크기 m에 대한 ANOS 성능을 확인하기 위해 $p_0 = 0.0005$, $p_1 = 0.001$일 때 $m =$ 20,000, 50,000, 100,000인 경우의 ANOS($\hat{p}_0 \mid p_1$) 상자그림이다. 이 상자그림으로부터 m이 증가할수록 조정하지 않은 경우와 조정한 경우의 변동성 차이는 계속 줄어든다는 사실을 알 수 있다.

결론적으로, 관리상태와 이상상태에서의 모의실험 결과로부터 CCC-r 관리도에서 붓스트랩 알고리즘을 사용하여 관리한계를 조정하는 절차는 실제 관리상태의 ANOS값이 목표값보다 작게 되어 오경보율이 더 커지는 문제를 해결함으로써 관리상태에서의 성능을 향상시키지만 이상상태에서의 성능은 크게 나빠지지 않기 때문에, 매우 큰 제1국면 표본을 사용할 수 없는 경우 유용한 절차임을 확인할 수 있었다.

마지막으로 Table 4.5는 CCC-4 관리도에 붓스트랩 알고리즘을 적용하여 10,000번의 모의실험을 반복하여 얻은 관리한계의 최빈값과 평균값을 수록하였다. 이때 관리하한의 최빈값에서 괄호 안의 값은 10,000개의 $\widehat{\text{LCL}}^*$ 중 최빈값의 비율을 나타낸다. Table 4.5에 제시된 관리한계는 실무자들이 사전분포를 설정한 후 제1국면의 표본 크기 m과 관리하한을 결정할 때 참고할 수 있을 것이라 생각된다.

5. 결론

불량률이 매우 낮은 고품질 공정에 적합한 CCC-r 관리도는 r개의 불량품이 관측될 때까지 조사한 제품의 누적 개수를 모니터링하여 불량률의 변화를 탐지하는 도구이다. 대부분의 공정에서 공정 모수인 불량률 p_0는 알려져 있지 않기 때문에, 제1국면의 표본을 사용하여 추정해야 한다. 이때 모수 추정에서 추정 오차의 영향을 줄이기 위해 표본 크기는 충분히 커야 하는데, 실제 공정에서 시간과 비용적인 제한으로 인해 충분한 수의 표본을 사용하기는 쉽지 않다. 또한, 표본 크기가 충분히 큰 경우에도 실무자가 원하는 관리상태에서의 성능을 달성하지 못하는 경우가 발생할 수 있다. 이 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해 Jones와 Steiner (2012)와 Gandy와 Kvaløy (2013)가 제안한 붓스트랩 알고리즘을 CCC-r 관리도에 적용하여 관리한계를 조정하는 절차를 제안하였다.

기존의 많은 연구에서 불량률 p_0의 추정량으로 최대우도추정량을 사용했지만, Zhang 등 (2013)과 Lee 등 (2013)은 제1국면에서 추출한 표본에서 불량품이 관측되지 않을 때 관리한계가 정의되지 않는 문제점을 언급했고, 이 논문에서 고려하고 있는 고품질 공정의 경우 이러한 문제가 빈번하게 발생할 수 있기 때문에 p_0의 추정량으로 Zhang 등 (2013)에서 제안한 베이즈추정량을 사용하였다.

CCC-r 관리도에서 붓스트랩 알고리즘을 사용하여 조정한 관리한계 절차의 성능을 평가하기 위해 모의실험을 진행한 결과, 제안된 절차는 의도했던 관리상태 성능을 잘 만족한다는 것을 확인하였다. 반면에 제안된 절차는 관리상태에서의 성능에 초점을 맞춘 방법이기 때문에, 관리상태와 이상상태에서의 ANOS값과 변동성이 커진다는 단점이 있다. 그러나 이와 같은 단점은 제안된 절차가 주어진 오경보율을 잘 만족하기 위해 관리하한이 더 작아졌기 때문에 발생하는 문제이며, 주어진 관리상태의 성능을 잘 만족하는 것은 다른 어떠한 기준보다 더 중요하다고 생각된다.

향후 공정의 불량률이 커지는 경우뿐만 아니라 작아지는 경우도 탐지할 수 있는 양측(two-sided) CCC-r 관리도에 붓스트랩 알고리즘을 적용하여 관리한계를 수정하는 절차에 대한 연구를 진행할 예정이다.

References

Faraz, A., Heuchenne, C., and Saniga, E. (2017). The *np* chart with guaranteed in-control average run lengths, *Quality and Reliability Engineering International*, **33**, 1057–1066.

Faraz, A., Woodall, W. H., and Heuchenne, C. (2015). Guaranteed conditional performance of the S^2 control chart with estimated parameters, *International Journal of Production Research*, **53**, 4405–4413.

Gandy, A. and Kvaløy, J. T. (2013). Guaranteed conditional performance of control charts via bootstrap methods, *Scandinavian Journal of Statistics*, **40**, 647–668.

Han, S. W., Lee, J., and Park, J. (2018). A Bernoulli GLR chart based on Bayes estimator, *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **29**, 37–47.

Hong, H. and Lee, J. (2015). Comparisons of the performance with Bayes estimator and MLE for control charts based on geometric distribution, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **28**, 907–920.

Jensen, W. A., Jones-Farmer, L. A., Champ, C. W., and Woodall, W. H. (2006). Effects of parameter estimation on control chart properties: a literature review, *Journal of Quality Technology*, **38**, 349–364.

Jones, M. A. and Steiner, S. H. (2012). Assessing the effect of estimation error on the risk-adjusted CUSUM chart performance, *International Journal for Quality in Health Care*, **24**, 176–181.

Kim, J., Kim, M., and Lee, J. (2018). The in-control performance of the CCC-r chart with estimated parameters, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **31**, 485–495.

Kim, M. and Lee, J. (2020). Geometric chart with bootstrap-based control limits using the Bayes estimator, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **27**, 65–77.

Lee, J., Wang, N., Xu, L., Schuh, A., and Woodall, W. H. (2013). The effect of parameter estimation on upper-sided Bernoulli cumulative sum charts, *Quality and Reliability Engineering International*, **29**, 639–651.

Page, E. S. (1954) Continuous inspection schemes. *Boimetrica*, **41**, 100–115.

Psarakis, S., Vyniou, A. K., and Castagliola, P. (2014). Some recent developments on the effects of parameter estimation on control charts, *Quality and Reliability Engineering International*, **30**, 1113–1129.

Roberts, S. W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages, *Technometrics*, **1**, 239–250.

Saleh, N. A., Mahmoud, M. A., Jones-Farmer, L. A., Zwetsloot, I. M., and Woodall, W. H. (2015). Another look at the EWMA control chart with estimated parameters, *Journal of Quality Technology*, **47**, 363–382.

Shewhart, W. A. (1931) *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, Van Nostrand, New York, NY.

Wu, Z., Yeo, S. H., and Fan, H. (2000). A comparative study of the CRL-type control charts, *Quality and Reliability Engineering International*, **16**, 269–279.

Xie, M., Lu, X. S., Goh, T. N., and Chan, L. Y. (1999). A quality monitoring and decision-making scheme for automated production processes, *International Journal of Quality & Reliability Management*, **16**, 148–157.

Zhang, M., Hou, X., Chen, H., and He, S. (2019). CCC-r charts' performance with estimated parameter for high-quality process, *Quality and Reliability Engineering International*, **35**, 946–958.

Zhang, M., Hou, X., He, Z., and Xu, Y. (2017). Performance comparison for the CRL control charts with

estimated parameters for high-quality processes, *Quality Technology & Quantitative Management*, **14**, 31–43.

Zhang, M., Megahed, F. M., and Woodall, W. H. (2014). Exponential CUSUM charts with estimated control limits, *Quality and Reliability Engineering International*, **30**, 275–286.

Zhang, M., Peng, Y., Schuh, A., Megahed, F. M., and Woodall, W. H. (2013). Geometric charts with estimated control limits, *Quality and Reliability Engineering International*, **29**, 209–223.

Zhao, M. J. and Driscoll, A. R. (2016). The c-chart with bootstrap adjusted control limits to improve conditional performance, *Quality and Reliability Engineering International*, **32**, 2871–2881.

붓스트랩에 기초하여 조정한 관리한계를 사용하는 CCC-r 관리도의 성능

김민지[a] · 이재헌[a,1]

[a]중앙대학교 응용통계학과

(2020년 6월 23일 접수, 2020년 7월 2일 수정, 2020년 7월 2일 채택)

요 약

CCC-r 관리도는 불량률이 매우 낮은 고품질 공정을 관리하는 데 효율적이라고 알려져 있다. 대부분의 공정에서 공정 모수의 값은 알려져 있지 않기 때문에 제1국면에서 이를 추정해야 하는데, 표본의 크기가 충분히 크지 않은 경우 추정 오차가 발생하여 원하는 관리상태에서의 성능을 만족하지 못하는 경우가 발생한다. 뿐만 아니라 제1국면에서 추출하는 표본에 따른 산포로 인하여 관리상태일 때의 성능의 산포 또한 커지게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 이 논문에서는 관리상태일 때 신호까지의 평균관측개수가 사전에 정한 확률로 목표하는 값보다 큰 값을 갖도록, 붓스트랩 알고리즘을 사용하여 CCC-r 관리도의 관리한계를 조정하는 절차를 제안하였다. 이때 고품질 공정에 적용하기 위하여 최대우도추정량 대신 베이즈추정량을 사용하여 불량률을 추정하였다. 다양한 상황에 대해 모의실험을 수행한 결과, 제안된 절차는 CCC-r 관리도의 관리상태 성능을 크게 향상시킴을 알 수 있었다.

주요용어: 신호까지의 평균관측개수, 베이즈추정량, 붓스트랩, CCC-r 관리도, 제1국면

이 논문은 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No. 2017R1D1A1B03029035).

[1]교신저자: (06974) 서울특별시 동작구 흑석로 84, 중앙대학교 응용통계학과. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr