韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2020.59.3.237
2020. 8. 제 59권, 제 3호, 237-254.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
August. 2020, Vol. 59, No. 3, 237-254.

수업을 위한 수학적 지식과 수업의 수학적 질 사이의 관계: 고등학교를 중심으로

김연(신라대학교, 교수)

Relationship of mathematical knowledge for teaching and mathematical quality in instruction: Focus on high schools

Kim, Yeon(Silla University, yeonkim10@silla.ac.kr)

초록

본 논문은 수업을 위한 수학적 지식과 수업의 질에 대한 상관관계를 보고하는 연구이다. 선다형 평가 문항 유형의 설문지를 이용하여 교사들의 수업을 위한 수학적 지식을 수집하였고, 촬영된 그 교사들의 수업을 수학 수업 분석 도구를 이용하여 수업의 질을 평가하였다. 두 점수들의 상관관계를 통계적으로 분석하여, 유의미한 양적 상관관계가 있음을 보고한다. 또한, 수집된 수업 영상과 교사들의 인터뷰 자료의 분석을 통해 수업을 위한 수학적 지식이 중재하지 못하는 수업의 질과 관련된 요소를 찾아내었다. 이러한 결과를 기반으로 수학 교사 교육에 대해 논의한다.

Abstract

The current study investigated the relationships between mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality in instruction in order to gain insight about teacher education for secondary teachers in South Korea. We collected and analyzed twelve high school teachers' scores of the multiple-choice assessment for mathematical knowledge for teaching developed by the Measures of Effective Teaching project. Their instruction was video recorded and analyzed with the mathematical quality in instruction developed by the Learning Mathematics for Teaching project. We also interviewed the teachers about how they planned and assessed their instruction by themselves in order to gain information about their intention and interpretation about instruction. There was a statistically significant and positive association between the levels of mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality in instruction. Among three dimensions of the mathematical quality in instruction, mathematical richness seemed most relevant to mathematical knowledge for teaching because subject matter knowledge plays an important role in mathematical knowledge for teaching. Furthermore, working with students and mathematics as well as students participation were critical to decide the quality of instruction. Based on these findings, the current study discussed offering opportunities to learn mathematical knowledge for teaching and philosophy about how teachers need to consider students in high schools particularly in terms of constructivism.

* 주요어: 수업을 위한 수학적 지식, 수업의 수학적 질, 고등학교, 한국, 수학교사
* **Key words**: mathematical knowledge for teaching, mathematical quality in instruction, high schools, South Korea, mathematics teachers
* **Address**: Department of Mathematics Education, Silla University, Sasang-gu, Busan, Korea
* **ZDM Classification**: D73
* **2000 Mathematics Subject Classification**: 97D40
* **Received**: July 7, 2020 **Revised**: July 27, 2020 **Accepted**: August 12, 2020

Ⅰ. 서론

교사의 지식과 판단이 수업에서 학생의 학습에 중요한 임무를 수행한다는 관계성은 교사 교육과 교육 정책에 중요한 함의를 제공한다. 교사의 지식 수준이 수업뿐만 아니라 학생의 학업 성취도와 관련이 없다면, 고단한 교사 교육과 엄격한 교사 정책의 필요성에 대해 의심할 필요가 있다. 역으로 그 관련성이 명확하다면, 교사 교육에서 교사들에게 제공해야 할 지식이 명확해지고, 교사와 관련된 정책에서 기준으로 고려해야 할 바가 분명해진다. 수학 교사로서 기대되는 수학 지식에 대한 대표적인 연구는 40여 년 전에 Begle(1979)이 시행한 것으로서, 교사들이 학부에서 수강한 수학 강의의 수와 그 교사들이 가르치는 학생들의 수학학업성취도와 관련이 없다는 보고이다. 여기서 수학 지식이란 전통적으로 대학의 수학과에서 다루는 것으로, 수학 수업만을 위한 것이 아니라 대개의 일반적인 모든 영역에서 사용되는 수학 지식으로 알려져 있다. 즉, 그러한 수학 지식만으로는 교사가 좋은 수업을 실행하는데 충분하지 않다는 것이다(Borko, et al., 1992; Tchoshanov, 2011). 수업을 위한 교사의 지식에 대한 Shulman(1986)의 제안 이후, 교사의 수학 지식에 관한 본격적인 연구가 시작되었다. 교사들을 대상으로 인터뷰나 설문을 하여, 수업을 위한 교사의 수학적 지식에 대한 존재와 특징이 학계에 소개되었다(e.g., Ball, 1990; Even, 1993; Ma, 1999). 수업을 위한 교사의 수학 지식에 대한 다양한 개념화 중에서도 Ball, Thames, and Phelps(2008)가 제안하는 수업을 위한 수학적 지식(mathematical knowledge for teaching, 이하 MKT)은 다양한 문항과 평가도구들이 개발되어 연구에 이용되었다. 교사의 MKT가 수업의 질과 관련이 있고(Baumert et al., 2010; Hill, Umland, Litke, & Kapitula, 2012; Lewis & Blunk, 2012), 학생들의 학업 성취도에 긍정적인 영향을 준다(Hill, Rowan, & Ball, 2005; Rockoff, Jacob, Kane, & Staiger, 2011).

이러한 연구들은 대부분이 미국과 독일을 중심으로 수행되고 있다. 이 두 나라는 교사 수급이 원활하지 않은 상황이고, 이에 따라 교사 임용의 조건들을 느슨하게 하는 정책을 시행하는데, 그중 한 가지가 대학 졸업자의 전공과 상관없이 수학 교사 자격증의 취득을 가능하게 하는 것이다(Hong, 2017; Heim, 2016). 예를 들어, 미국에서는 Teach for America라는 사단법인을 통해 대학에서 음악을 전공한 예비교사가 고등학교에서 수학을 가르치면서 교사 자격증을 획득할 수 있는 프로그램의 운영이 대표적이라 할 수 있다. 따라서, MKT가 수업의 질이나 학생의 학업 성취도와 관련이 있다는 연구는 이 두 나라의 교사 관련 정책에서 교사 교육을 소홀히 해서는 안된다는 근거를 제공한다고 할 수 있다.

반면, 우리나라의 교사 교육은 정부 주도하에 교원교육기관에서 개설해야 할 과목과 시간이 교육법령으로 엄격하게 관리되고 있다. 교원자격검정 실무편람은 2013학년도 입학자를 기준으로 사범대와 비사범대에서 기본이수과목으로 교과내용학 7과목 이상 포함하여 21학점 이상, 교과교육학 3과목 이상 포함하여 7학점 이상을 이수하도록 하며, 교육대학원에서 교과내용학을 5과목 이상 포함하여 14학점 이상, 교과교육학을 2과목 이상 포함하여 6학점 이상을 이수하도록 하고 있다(Ministry of Education, 2018). 이 밖에 교직과목, 교육실습, 교직 적성 및 인성검사 등을 무사히 이수해야만 교원 자격증 취득이 가능하다. 즉, 대학이나 교육대학원에서만 교원 자격증 취득을 위한 교사 교육을 제공하고 있는데, 이는 앞에서 설명한 미국과 독일에 비하면 폐쇄적이지만, 매해 교원임용시험의 높은 경쟁률은 교사 수급이 매우 원만하게 운영되고 있음을 보여준다. 교사가 가지는 높은 사회적 지위와 안정적 직업으로서의 가치로 인하여(OECD, 2013), 우리나라의 사범대는 우수한 인력을 예비교사로서 수급하는 선순환의 구조로 되어 있기 때문이다(Barber & Mourshed, 2007). 즉, 우리나라는 인재의 교사 수급이라는 가장 중요한 교원 교육 기관의 목표는 매우 원활하게 오랫동안 실현되고 있으므로, 예비교사를 위한 교사 교육의 질은 보편적 관심을 받지 못하고 있으며, 더 나아가 우리나라에서 MKT가 수학 교사 교육에서 강조될 현실적이고 정책적인 이유는 미약하다 할 수 있다.

그러나, 우리나라 수학 교사 교육에 대한 현직 교사들의 비평은 냉혹할 정도로 비판적이다. 특히, 앞서 설명한 학점 이수를 통해 교원자격증을 획득하고 높은 경쟁률의 교원임용시험을 합격한 교사들은 우리나라의 교원교육기관 즉, 사범대학 과정을 수학 교사의 역량을 학습하는데 부족하다고 비평한다(Kang, Ko, Kim, Cho, Lee, &

Lee, 2011). 이 연구는 구체적으로 사범대학에서 수학 교사로서 중요한 역량인 '학생들에게 친숙한 용어를 선택하고, 지도 내용을 눈높이에 맞게 설명할 수 있는 능력', '학생들의 오개념을 파악하고 끌어내어 교정하는 능력', '학생들의 사고를 촉진할 수 있는 질문을 제시하는 능력', '학생들의 아이디어를 활용하고 적절한 피드백을 제공하는 능력' 등을 배양하지 못하고 있다고 지적한다. 즉, 현직 교사들이 수학 교사로서 중요한 역량으로 인식하고 있는 것은 Ball et al.(2008)이 주목하는 주요 교사의 업무(tasks of teaching)이며, 특히 MKT의 하위 요소인 specialized content knowledge, knowledge of content and students, 그리고 knowledge of content and teaching와 관련이 있다. 뿐만 아니라 사범대에서 고등수학을 상당히 학습하지만, 적절한 수학적 사고 활동을 경험하지도 못하고, 학교 수학과 관련되어 있지 않다는 비판도 주목할 부분이다. 실제로 대학별로 다소 차이가 있기는 하지만, 개설된 전공강좌로 보면 교과내용학 과목과 교과교육학 과목의 비율이 5:1로서, 예비교사들은 실제 중고등학교의 수학 내용의 의미보다는 높은 수준인 대학 수학의 내용을 중심으로 학습하고 있다고 할 수 있다(Kwon, Kim, & Cho, 2012). 게다가 2014년부터 2017년 교원임용시험에서 교과내용학의 비율은 약 75%이고, 교과교육학은 약 25%이다(Kim & Kim, 2017). 이러한 교과내용학, 즉 예비교사 교육에서 고등수학의 강조는 앞에서 교사들이 비평하는 바와 일맥상통하는 부분이라 할 수 있다.

본 연구는 10명의 미국 초등교사를 대상으로 그들의 MKT와 수업의 질에 관해 분석했던 Hill et al.(2008)의 연구 방식을 이용하여, 12명의 한국 고등학교 수학 교사를 대상으로 그들의 MKT와 수학 수업의 질의 상관관계를 분석한다. 입시를 비롯하여 우리나라 고등학교 수학 수업을 둘러싼 다양한 요인들은 초등학교나 중학교의 수학 수업과 달리 고등학교의 수학 수업이 예외적일 수밖에 없음을 정당화하곤 한다(Kim & Lee, 1998; Lew, 2005). 이러한 연구 대상의 변화뿐만 아니라, 본 연구는 교사의 MKT와 수업의 질과 관련된 국내 연구가 여전히 미진하다는 선행연구를 반영한다(예, Song & Pang, 2013). 앞서 언급된 기존의 연구처럼 본 연구의 결과도 교사의 MKT와 수학 수업의 질 간에 양적 상관관계가 있으리라는 것을 예상하는 것은 어렵지 않다. 그럼에도 불구하고, 본 연구는 MKT가 우리나라의 고등학교 수학 수업에서도 중요한 역할을 하는가에 대한 의심을 해소하고, 앞서 현직 교사들이 수학 수업에 중요하다 여기는 역량에 대한 인식이 타당함을 보이는 것을 목적으로 한다. 이에 본 연구에서 다루는 연구 문제는 다음과 같다. 한국 고등학교 교사들의 MKT와 그들의 수학 수업의 질은 관련이 있는가?

Ⅱ. 이론적 배경

MKT는 수업을 수행하는데 필요한 수학적 지식이다(Ball et al., 2008). Shulman(1986)을 기초로, Ball et al.(2008)은 MKT를 교과 내용 지식(subject matter knowledge)과 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge)으로 나누고, 교과 내용 지식은 horizon content knowledge, common content knowledge, and specialized content knowledge의 세 범주로 나누고, 교수학적 내용 지식은 knowledge of content and students, knowledge of content and teaching, and knowledge of content and curriculum의 세 범주로 분류하였다. 이러한 별도의 하위 범주는 이론적인 분석에 사용될 수 있지만, 수업의 실제에서 필연적으로 얽혀있으면서 연속적이며 동시다발적으로 필요한 지식이다(Kim, 2016; Koellner et al., 2007). 예를 들어, 교사가 수학을 가르칠 때 일상적으로 수행하는 것으로 수학적 아이디어를 표현하기, 특정 수학적 요점을 드러내기 위한 예제 찾기, 교과서의 내용을 평가하고 조정하기, 과제를 좀 더 쉽게 또는 어렵게 수정하기, 수학적 설명을 제공하거나 평가하기, 생산적인 수학 질문하기 등이 그러하다(Ball et al., 2008).

MKT와 수업의 질과 관련된 연구는 다양한 방식으로 이루어져 왔다. Hill et al.(2008)은 MKT와 수업의 수학적 질(Mathematical Quality in Instruction, 이하 MQI)의 상관관계를 밝힌 초기 연구이다. 이 연구는 Learning Mathematics for Teaching(LMT) 프로젝트에서 개발된 설문지를 이용하여 600명 이상의 초등학교 교사의 MKT 점수 수집자료를 이용하여, 이 중 다섯 교사의 수업 촬영자료 및 인터뷰 자료를 이용하여 교사의 MKT와 MQI의 관계를 질적으로 분석하였다. MKT와 MQI 사이에는 강

력한 관련성이 있으며, 그 밖에 자료의 활용, 수학에 대한 신념, 교사 연수의 영향 등이 수업의 질에 긍정적으로 또는 부정적으로 영향을 끼치기도 한다는 점을 발견하였다. 이와 유사한 방식이나 자료의 크기를 좀 더 확대하여, Hill et al.(2012)는 34명의 초등학교와 중학교 교사를 대상으로 LMT 프로젝트가 개발한 설문지와 MQI를 이용하여, 그 상관관계를 연구하였다. MKT 점수와 MQI 점수가 통계적으로 유의미한 상관관계가 있으나, 선형적인 관계가 있는 것이 아님을 교사의 수업 사례로 보고한다. 이러한 연구 결과를 근거로 MKT 점수가 수업의 질이 낮은 교사를 여과할 수 있는 장치가 될 수 있다고 주장하면서, 예비교사를 대상으로 MKT와 같은 교사 자격증이나 임용고시와 그들의 수업의 실제를 대상으로 연구를 확대할 필요가 있다고 제안하였다. Hill and Chin(2018)은 MKT 중에서 학생의 사고에 대한 지식과 교사 판단의 정확성에 집중하여, 284명의 초등교사와 그들의 9636명의 학생을 대상으로 설문과 수업 촬영 등의 자료를 수집하였다. 수집된 수업 영상은 MQI로 분석하여, 교사 판단의 정확성은 학생의 선행지식 등의 파악으로 인하여 교사가 수업에서 적절한 발문을 하거나 학생들의 아이디어를 수업에 적용하는 데 중요한 역할을 한다는 점을 밝혔다. 또한 수업에서 학생들의 오류를 예측하고 이를 해결하는 구체적인 방안을 고려하는데 필요한 지식이기도 하였다. 한편, Baumert et al.(2010)은 독일에서 181명의 중등교사를 대상으로 Professional Competence of Teachers, Cognitively Activating Instruction, and the Development of Students' Mathematical Literacy(COACTIV) 프로젝트에서 개발된 설문지와 수업 촬영자료를 이용하여 교사의 MKT가 수업에서 수학 학습 기회의 구조를 전반적으로 결정한다고 보고한다. 그뿐만 아니라 교사 교육의 각 단계에서 예비 교사들의 MKT 수준의 차이가 있음이 보고되었다(Kleickmann et al., 2013).

소규모 자료를 이용하여 MKT와 수업의 질에 관한 질적 연구도 있다. Charalambous(2010)은 MKT 수준이 상이한 두 초등교사의 각각 아홉 차시 수업과 인터뷰를 분석하여, 그들이 수업에서 사용하는 과제의 구조와 수준이 상이할 뿐만 아니라 수업에서 그 실행에서도 유의미하게 다름을 보고한다. 이 연구는 MKT 수준이 높은 교사는 답을 단순하게 보여주기보다 수학적 과정의 의미를 담은 표상들을 수업에서 이용하고 학생들이 수학적인 의미를 만들 기회를 생산적으로 제공할 뿐만 아니라 학생들의 아이디어를 수업에 적극적으로 이용한다고 밝혔다. Lewis and Blunk(2012)도 마찬가지로 MKT 수준이 상이한 두 교사가 동일한 수학 교과서를 이용하여 실행한 일차함수에 관한 수업을 비교하였다. Charalambous(2010)과 마찬가지로 MKT 수준이 높은 교사가 중요한 개념을 간결하면서도 명확하게 설명하고, 다양한 표상을 이용하면서 그 표상 간의 관계를 파악하며, 학생들에게 수업에서 다루는 수학적 아이디어를 발전시키는 데 중요한 역할을 부여하였다. 교과서가 수업을 지원해 주는 역할을 하기도 하여, MKT가 낮은 교사도 교과서가 안내하는 바를 충실히 따라 함에 따라 수학적인 오류가 적으면서 상당히 타당한 방식으로 개념을 정의할 수 있음을 보고한다.

MKT와 학생들의 학업 성취도의 관련성에 관한 연구들도 있다. Hill et al.(2005)는 LMT 프로젝트에서 개발된 설문지를 이용하여 약 700명의 초등교사 MKT 점수와 약 3,000명 학생의 수학 성취도 점수를 수집하여, 교사의 MKT 점수와 학생들의 수학 학업 성취도는 유의미한 관련성이 있다는 분석 결과를 보고한다. Rockoff et al.(2011)은 뉴욕시의 333명 교사를 대상으로 다양한 설문을 하였고, 학생의 수학 성취도와 교사의 MKT가 관련이 있다고 보고한다. 반면에 교사의 인지적 능력(학위, 대학 입학 점수 등), 개인적 습관과 성향, 신념 등은 관련이 없는 것으로 나타났다. Patricia et al.(2014)는 저경력 교사 약 460명과 그들의 학생들을 대상으로 설문하였고, 교사의 MKT와 학생들의 학업 성취도 사이에 긍정적인 관련이 있음을 보고한다.

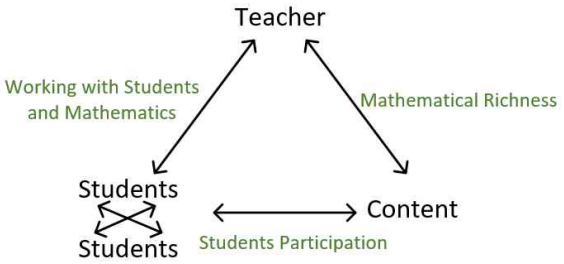
국내에서 이루어진 MKT와 관련한 연구는 연구진에 제공하는 수학 지식과 관련한 문제 상황에 대해 교사들이 드러내는 반응을 수집하고, 이를 MKT 관점으로 분석하여 교사들이 가지고 있거나 가지고 있지 못한 부분을 보고하는 연구들이 주로 수행되었다. 예를 들어, 귀류법(Hwang & Shin, 2016), 도형(Han, 2016), 비율(Kang & Choi, 2015), 함수(Choi, Choi & Kim, 2014), 이차곡선(Yi & Cho, 2013), 분수의 나눗셈(Kang, Cho, & Kim, 2012) 등이다. 그중 교사의 MKT 수준과 수업의 실제와 직접 연결하여 보고하는 연구는 Choi, Choi, and Kim(2014)뿐이다. 더욱이 이 모든 연구는 타당도 있는 평가도구를 이

용하기보다는 사례연구를 하였다.

Ⅲ. 연구방법

본 연구의 자료는 국내의 4개 시도에서 근무 중인 교사 12명의 MKT 점수와 그들의 수학 수업 촬영 비디오 및 인터뷰 오디오 자료이다. 이 교사들은 수업 개선과 관련한 연수에 참여하고자 신청하고 참여한 교사 137명 중 일부로서, 수업 촬영 및 자료 수집의 연구진의 요청에 자발적으로 참여하였다. 교사들의 MKT 수준을 조사하기 위해 본 연구는 Measures of Effective Teaching 프로젝트에서 Phelps, Weren, Croft, and Gitomer(2014)이 개발한 선다형 평가 문항을 이용하였다. 이 평가에 대한 타당도 연구에 따라 37개의 문항 중에 28개의 문항이 MKT 조사에 이용되었다(Kim, 2020).[1] 각 문항을 1점으로 하여, 28점이 만점으로 평가된다. 교사들은 각 연수가 시작할 때 MKT 설문지를 작성하였다.

교사별로 최소 두 번의 수업을 영상 촬영하였다. 수학 수업의 질을 평가하기 위해 Learning Mathematics for Teaching(2010)이 개발한 MQI를 이용하였다. MQI는 수학 수업의 여러 측면에 대해 별도의 점수를 제공하는데, 예를 들어, 수업에서 드러나는 수학적 풍부함(설명, 연결성, 표상, 용어 및 추론), 학생 산출물이나 오류에 대한 교사의 반응, 의미 형성과 추론에 대한 학생의 참여 등이다. 수학적 풍부함(mathematical richness)은 교사의 설명에 대한 질 평가에 관한 요소로서, 학생에게 제공되는 교사의 설명에 대한 수학적 깊이를 파악하는 영역으로, 왜 어떤 아이디어나 단계가 참인가에 대한 설명, 여러 문제에 대한 한 가지 방식의 풀이보다는 한 문제에 대한 다양한 풀이, 다양한 아이디어나 표상들을 연결하는 것이 포함된다. *교사의 반응*(working with students and mathematics)은 교사가 학생의 아이디어에 어떻게 반응하는가에 관한 평가 요소로서, 학생의 아이디어에 대해 생산적으로 반응하거나 개념적으로 교정하는 것을 포함하지만, 학생 설명이나 풀이에 대해 간단히 다루거나 절차적 교정을 지양한다. *학생의 참여*(students participation)는 수학 수업에 학생이 참여에 관한 평가 요소로서, 학생들이 수학적으로 추론하는 과정에 기여하는 정도를 파악하는 것



[Fig. 1] The Mathematical Quality in Instruction(MQI)

으로 주장을 만들거나 수학적으로 동기 부여된 질문을 하는 것이 포함되지만, 단순히 알고리즘적 접근은 지양한다. *수학적 풍부함, 교사의 반응, 학생의 참여*는 [Fig. 1]에서 보이는 바와 같이, Cohen, Raudenbush, and Ball(2003)이 수업을 상호작용으로 정의하면서 제안하는 상호작용의 세 가지 양식과 일치한다.

수업 영상을 7분 간격으로 구분하여 세 요소별(*수학적 깊이, 교사의 반응, 학생의 참여*)로 낮음, 중간, 높음을 각각 1, 2, 3점으로 배점하였다. 수업 별로 세 영역의 평균 점수를 구하였고, 그 점수들의 합을 MQI 총점으로 구하였다. 이를 기초로 교사별로 다시 평균점수를 구한 것을 MQI 점수로 수집하였고, 본 연구는 이 점수를 수학 수업의 질로 간주한다. 이러한 분석은 MQI certificate를 가지고 있는 두 명의 평가자가 각 수업을 채점한 다음 합의하여 조정하였다. 조정 전 평가자간 신뢰도는 .82에서 .92였다.

한편, 촬영된 수업에 대해 교사와 인터뷰를 하였고, 여의치 않은 경우(세 명의 교사)에는 수업반성문을 수집하였다. 인터뷰는 수업 전과 후에 이루어 졌는데, 수업 전에는 교사가 수업과 관련하여 고려하고 있는 바에 대한 내용을 중심으로 이루어 졌고, 수업 후에는 수업에 대한 교사 자신의 반성, 수업의 실행에서 어려웠던 점과 예상과 달랐던 점, 관찰된 학생의 반응과 그에 대한 교사의 대응, 수업에서 교사의 역할 및 수학 교과의 특징 등을 중심으로 진행되었다.

수집된 자료는 두 가지 방식으로 분석되었다. 우선, MKT 점수와 MQI 점수의 상관관계를 조사하여, 수업을 위한 수학적 지식과 수학 수업의 질 사이의 관계를 파악한다. 한편, 그러한 상관관계의 기제를 파악하기 위하여, 수업과 수업에 대한 교사들의 생각을 조사하였다.

[1] 부록에 문항의 일부를 제시함.

Yin(2003)은 유사한 결과를 보고할 수 있는 사례와 반례를 보고할 수 있는 사례를 연구 대상으로 선정하라고 제안하는데, 이에 따라 [Table 1]과 [Table 2]의 MKT 점수와 MQI 총점의 각 교사 자료와 평균 및 표준편차를 고려하여 네 개의 사례를 선정하였다. MKT 점수가 높으면서 MQI 점수도 높은 경우로 교사 Lee를 선정하였는데, MKT 점수는 26점으로 MKT 점수의 평균에서 표준편차만큼 큰 점수이고, MQI 총점이 6.67로 자료 중에서 가장 높다. MKT 점수와 MQI 점수가 모두 낮은 경우로 교사 Han을 선정하였는데, MKT 점수와 MQI 총점이 자료 중에서 각각 가장 낮은 점수인 14점과 3.17이다. MKT 점수가 높으면서 MQI 점수가 매우 낮은 경우는 자료에 없으므로, MKT 점수가 높으면서 MQI 점수는 중간인 경우로 교사 Ahn을 선정하였다. MKT 점수는 25점으로 교사 Lee보다 1점이 낮지만 최상위 점수에 해당된다. 그러나 MQI 총점이 4.17로 수집된 자료의 MQI의 평균에 해당된다. MKT 점수가 중간이면서 MQI 점수는 낮은 경우로 교사 Choi를 선정하였는데, MKT 점수는 22점으로 자료의 MKT 평균과 동일하고, MQI 점수는 3.5로 수집된 자료의 MQI의 평균보다도 낮다. MKT 점수는 낮으나 MQI가 높은 경우는 없었다.

이 네 교사의 수업은 Erickson(1986)의 서술적 분석과 해석적 분석을 실시하였다. 서술적 분석은 시간 순서대로 일어난 일을 중립적으로 드러내어 묘사하여 현상에 대한 기술을 한 것으로서, 수사적이면서 이후의 분석적 기술의 증거적인 성격을 가지게 된다(Erickson, 1986). 이러한 접근 방식으로 각 수업을 소품문(vignette)양식으로 요약하여 설명하였다. 해석적 분석을 위해서 7분 간격으로 점수화한 MQI 분석표를 중심으로 수업 순간에 대한 MQI의 세 가지 요소인 교사 설명의 *수학적 풍부함, 학생의 참여, 교사의 반응*을 수업의 구체적인 장면과 관련하여 기술하였다. 이는 정량화되어 측정된 MQI가 구체적인 수업의 장면에서 어떻게 드러나는 가를 보고한다. MQI 각 요소의 이러한 수업의 특징과 관련하여 교사의 인터뷰에서 이와 관련된 내용을 더불어 보고한다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 수업을 위한 수학적 지식과 수학 수업의 질 사이의 상관관계

[Table 1]은 각 교사의 MKT와 MQI 점수를 보여주고, [Table 2]는 그 점수들의 평균점수와 표준 편차를 보고한다. 교사들의 MKT 점수 최저점은 14점이고 최고점은 27점이며, 평균은 22.25점이고 표준편차는 약 4점이다. MQI 합계 점수의 최저점은 3점이고 최고점은 6.67점이며, 평균은 4.34점이고 표준편차는 1.35점이다.

상관분석은 변수들의 정규성을 전제하는데, 사례수가 50보다 작으므로 Shapiro-Wilk(샤피로-윌크) 정규성 검

[Table 1] Teachers' MKT Scores and MQI Scores

name	MKT scores	MQI mathematical richness	MQI students participation	MQI working with students and math	MQI total scores
Kang	23	1.17	1.17	1.17	3.5
Kwon	25	1.57	2.14	1.86	5.57
Kim	27	1.67	1.33	2.67	5.67
Park	25	2.29	2	2.14	6.43
Bang	17	1	1	1	3
Shin	18	1.5	1.17	1.17	3.83
Ahn	25	1.67	1.17	1.33	4.17
Lee	26	2	2.33	2.33	6.67
Jang	21	1	1	1.17	3.17
Choi	22	1.125	1.13	1.25	3.5
Han	14	1	1	1.17	3.17
Hong	24	1.4	1	1	3.4

[Table 2] Descriptive Statistics

	M	SD
MKT scores	22.25	4.03
MQI mathematical richness	1.45	0.42
MQI students participation	1.37	0.49
MQI working with students and math	1.52	0.57
MQI total scores	4.34	1.35

[Table 3] Shapiro-Wilk Test

	W	*p*-value
MKT scores	0.90	0.18
MQI mathematical richness	0.91	0.23
MQI students participation	0.74	0.00
MQI working with students and math	0.81	0.01
MQI total scores	0.83	0.02

[Table 4] Correlation between MKT scores and MQI scores

	MKT scores	*p*-value
MQI mathematical richness	0.86**	< .001
MQI students participation	0.78**	< .01
MQI working with students and math	0.81**	< .01
MQI total scores	0.86**	< .001

* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$ (two-tailed test)

사를 실시하였고, 그 결과는 [Table 3]과 같다. Schober, Boer, and Schwarte(2018)은 정규분포가 따르지 못하는 경우에는 Spearman Correlation Analysis(스피어만 상관분석)를 이용해야 한다고 설명한다.[2] 이 분석 방법에 따른 MKT 점수와 MQI 각 영역 및 총점의 상관관계는 [Table 4]와 같다. 즉, MKT는 MQI *수학적 풍부함, 학생의 참여, 교사의 반응* 및 총점 모두에서 통계적으로 유의미하게 상관관계가 있으며, 각 관계가 모두 0.7 이상으로 매우 강한 양의 관계가 나타났다.

2. 수업의 질에 대한 서술적 분석 및 해석적 분석

1) 높은 MKT와 높은 MQI의 사례

교사 Lee는 [Table 1]과 [Table 2]에서 보이는 바와 같이, MKT 점수가 26점으로 최상위 수준이며, MQI 세 영역의 점수가 각각 2점 이상으로 전체 평균보다 매우 높다. 이 점수가 의미하는 바는 수업 전반에 걸쳐 교사의 설명이 수학적으로 유의미하고, 학생들과 교사의 상호작용이 자주 존재하면서 그 내용이 수학적으로 알차며, 학생들도 수업에 참여할 수 있는 기회가 많을 뿐만 아니라 그 참여가 생산적임을 보여준다. 그렇다면, 이러한 점수가 수업에서는 어떤 양상으로 드러났는가를 알아보기 위해, 교사 Lee의 수업 중 역함수 수업을 분석하고자 한다. 다음은 그 수업의 스케치이다:

수업은 교사가 지난 시간에 학생들이 풀이하여 제출한 학습지에 대해 평가하고, 역함수를 찾는 방법에 대해 설명한다. 6분 즈음에 교사는 주어진 세 개의 일차함수의 그 역함수를 찾고 좌표평면에 그리는 학습지를 학생들에게 배부하고, 학생들은 개별적으로 학습지를 풀이한다. 교사는 순회지도를 하면서, 일차함수를 그리기 어려워하는 학생들과 역함수 찾는 것을 어려워하는 학생들을 도왔다. 17분 즈음부터 교사는 모둠별로 각자의 풀이를 공유하고 논의해 보도록 안내하였고, 학생들은 역함수가 존재하는 함수와 그 역함수를 좌표평면에 그리면 그 두 그래프가 y=x에 대칭 한다는 주장과 두 함수의 그래프가 만난다고 주장을 하였다. 각각의 주장에 대해 모둠에서 논의하고 전체 논의를 하는 방식이 두 번 반복되었다. 두 그래프가 y=x에 대해 대칭 한다는 주장에 대해서, 교사는 역함수를 구하는 과정과 관련지어 논의해 보라고 발문하였고, 학생들은 모둠별로 논의를 하였으며 교사는 순회지도를 하면서 학생들의 의견을 수집 후 전체 논의를 하였다. 수업의 32분 즈음에 두 그래프가 만난다는 주장에 대해서 교사가 y=x+2의 그래프와 그 역함수의 그래프를 그려보고 모둠별로 논의를 해보도록 발문하였고, 마찬가지로 모둠 논의와 전체 논의를 하였고 수업이 마무리되었다.

이 수업의 MQI 세부 점수는 [Table 5]와 같다. 우선, *학생들의 참여*와 관련하여, 학생들이 수업의 주제인 역함수에 관하여 탐색하고 논의할 수 있는 기회가 많았다. 앞의 수업 스케치에서 언급한 바와 같이 모둠별로 논의가 시작된 17분부터 마칠 때까지 가정을 세우고 그 이유를 탐색하는 방식으로 수업에 참여하였다. 이 때 자신들이 발견한 것을 주장하거나 그 근거를 설명하는 등 생산적으로 수업에 참여하는 모습이 자주 관찰되었다. 그 동안 교사는 학생들의 논의를 조정하는 역할을 하였다. 이는 *교사의 반응*과 관련이 있다. 학생들의 수학적 아이디어에

[2] p-값이 .05보다 크면 정규성을 가정한다.

[Table 5] Lee's MQI scores in inverse function instruction

min.	1~7	7~14	14~21	21~28	28~35	35~42
Mathematical Richness	1	1	3	1	3	3
Student Participation	1	1	3	3	3	3
Working with Students and Math	1	2	2	3	3	3

대하여 교사가 상호작용하는 장면들이 자주 보였다. 교사는 일차함수를 그리는 것조차 어려워하는 학생들에게는 그리는 것을 직접 도와주어, 좌표평면에 그려진 함수들을 보면서 발견하고 궁리할 기회를 놓치지 않게 하였다. 또한 개별 활동을 먼저 완수한 학생들에게는 좌표평면에 그려진 것을 통해 발견할 수 있는 점을 우선은 혼자 생각해 보라고 하는 등, 전체 학생들의 학습 진행을 조정하였다. 태블릿으로 학생들의 그래프를 촬영하여 미러링하는 방법으로 전체 학생들과 공유하고, 수정해야 할 부분을 다른 학생들과 함께 진행하는 방법으로 학생 오류의 수정에도 적극적인 모습을 볼 수 있었다.

학생의 참여 및 *교사의 반응*과 관련하여 교사는 인터뷰에서 "토론수업을 실시하면 그냥 말만 할 수도 있거든요. … 애들의 대화의 질을 들어보면 모두가 그렇진 않았지만 조금 의외라는 질문? 제가 설명을 하고 알겠다. 넘어가는 것이 아니라. 왜 여기에서 이걸 어떻게 생각할 수 있어? 이런 식으로 이야기를 많이 하거든요. 그럼 좀 더 깊이 생각하고. 그런 것을 이야기 하는 게 좋다고 생각합니다."라고 말하였는데, 교사가 수업에서 학생의 참여 중요성을 이해하고 실천하고 있다고 볼 수 있다. 학생들이 수업의 내용과 관련하여 수업 전 인터뷰에서 "원점대칭, 점대칭이 어려워서…(그래프 그리는 것을 어려워 하는 학생들을 위해) 모눈종이를 제공하려구요. y는 x에 왜 대칭이 될까? 이거에 애들이 의외로 어려워하더라구요…"라고 말하여, 교사가 과제에 대해서도 학생들이 어려워하는 대상이 무엇이 있을 수 있는지에 대해서도 고민하고, 이를 수업에 반영하여 시행하였다.

*수학적 풍부함*과 관련하여 교사는 수업에서 주어진 일차함수와 그 역함수가 좌표평면 상에서 y=x에 대칭으로 나타나는 이유와 이 두 함수가 항상 만나는 것이 아닌 이유를 설명하였는데, 이는 단순히 역함수를 찾는 방법이나 과정에 집중한 설명과는 그 결이 달랐다.

2) 높은 MKT와 중간 MQI의 사례

교사 Ahn은 [Table 1]과 [Table 2]에서 보이는 바와 같이, MKT 점수가 25점으로 최상위수준이고, MQI 총점은 4.17로 수집된 자료의 평균이다. MQI *수학적 풍부함*이 1.5점 이상이므로 교사의 설명이 수학적으로 오류가 있지 않고 간혹 수학적으로 의미 있었다는 것을 보여준다. 그러나, *학생의 참여*가 1점에 가까운 것으로 보아 교사가 학생들이 수업에서 생산적으로 참여할 기회가 자체가 적었다는 것을 의미한다. *교사의 대응*이 1.3이므로, 교사들이 학생들의 아이디어나 발언에 대응하는 순간들이 있었으나, 수학적으로 의미가 있는 대응으로 보기는 어려움을 나타낸다. 그렇다면, 이러한 점수가 수업에서는 어떤 양상으로 드러났는가를 알아보기 위해, 교사 Ahn의 지수로그 수업을 분석하고자 한다. 다음은 그 수업의 스케치이다:

> 교사는 로그와 관련된 영상을 3분 정도 제시하고, 이 수업이 로그의 뜻과 성질에 대해서 학습하게 될 것이라고 안내한다. 이어서 교사는 지수를 이용하여 로그를 등장시키고, 로그의 밑과 진수 조건을 차근차근 설명하고, 여섯 사례를 이용하여 지수식을 로그식으로 표현하는 것을 학생들에게 보여준다. 12분 즈음에 학생들은 교사의 설명을 적용하여 교과서 문제를 개별적으로 풀이하였고, 교사는 교탁에 서서 학생들을 기다렸다. 15분에 교사가 답을 불러주고, 학생들은 정오를 확인하였다. 이어서 학생들이 개별적으로 교과서 문제를 풀이하고, 교사가 답을 확인하는 과정이 한 번 더 반복되었다. 22분 즈음부터 교사는 교과서에 나와 있는 네 가지 로그의 성질이 성립하는 이유를 각각 수학적으로 설명하였다. 이어서 세 문제를 풀이하면서 각 로그의 성질이 작동하는 경우를 보여주었다. 예를 들어, $(\log_2 3)^2$는 더는 계산이 되지 않고, $\log_a M^k$는 진수가 제곱인 경우라는 등의 설명이다. 33분 즈음에 한 학생이 로그 전체가 제곱인 경우에는 그 값을 직접 구하면 가능한가에 대해 질문하자, 교사는 그러하다고 답하였다. 35분 즈음부터 개별 학생들이 교과서 문제들을 풀이하였고, 교사는 순회지도를 하면서 학생들의 풀이에 대해 조언을 하였다. 예를 들어, 학생이 "6번 모르겠

어요."라고 교사의 도움을 청하면, 교사가 그 학생에게 풀이를 제시하였다. 이후, 교사는 전체 학생들을 대상으로 각 문제의 답을 불러주었고, 교사는 각 문제를 풀이를 칠판에 보여주면서 수업이 마무리되었다.

이 수업의 MQI 세부 점수는 [Table 6]와 같다. 교사 설명의 *수학적 풍부함*과 관련하여, 수업의 21분부터 35분까지 교사는 로그의 성질을 수학적으로 오류 없이 논리적이면서 유의미하게 설명했고, 각 설명에서 사용한 사례들도 매우 적절했다. 그러나, *학생의 참여*와 관련하여, 그 참여의 생산성을 판단할 수 없을 정도로 참여의 기회 자체가 부족했다. 모둠에서 또는 학급 전체 학생들이 참여하는 논의는 전혀 관찰되지 않았다.

이 수업에서 교사가 학생들에게 교과서의 문제를 풀어보도록 하는 활동이 총 세 번이 있었는데, 교사는 이러한 활동에서 드러나게 되는 학생들의 아이디어를 수집하지 않았다. 더욱이 교사가 이 세 번의 활동을 학생들의 답의 정오 확인으로 반복적으로 마무리하면서, 이 수업에서 학생들의 아이디어가 의미 만들기나 추론으로 수업에 참여하고 기여하는 장면들이 없었다. 교사의 학생들의 아이디어 수집은 *교사의 반응*에서 중요한 요인이다. 교사가 학생의 말이나 공책에 쓴 내용에 관심을 가져야 학생들의 아이디어를 이해하고 반응을 할 수 있기 때문이다. 그런데, 수업의 12분 즈음에 학생들이 개별적으로 교과서 문제를 풀이하는 시간이 있었으나, 교사는 학생들이 문제를 어떻게 해석하고 접근하는가를 조사하는 모습은 보이지 않았으며, 이후 학생들에게 답을 불러주어서 정오를 확인할 뿐이었다. 교사가 학생들의 아이디어에 관심을 갖는 장면을 촬영된 수업 전반에서 관찰되지 않았다. 그렇다고 교사가 학생에게 도움을 주지 않은 것은 아니다. 예를 들어, 수업의 35분 즈음에 학생들이 교과서의 문제를 개별적으로 풀이하는 시간에서 학생이 교사에게 도움을 청할 때, 교사는 학생의 문제 이해나 풀이에 대한 정도를 파악하는 발문을 하지 않고, 곧바로 문제 풀이의 과정을 학생에게 제공하는 방식으로 학생들과 상호작용을 하였다.

[Table 6] Ahn's MQI scores in inverse function instruction

min.	1~7	7~14	14~21	21~28	28~35	35~42
Mathematical Richness	1	1	1	3	3	1
Student Participation	1	1	1	1	2	1
Working with Students and Math	1	1	1	1	2	2

이와 같은 *수학적 풍부함, 학생의 참여, 교사의 반응*이외에 이 수업에서 교사의 발언과 태도의 두드러진 특징은 수업에서 교사가 학생들에게 문제의 답을 불러주거나, 성질의 설명의 막바지에 학생들에게 "쉽지?"라고 묻거나 "이건 쉬운 거야."라는 발언을 하는 것이었다. 교사가 학생들에게 정답을 불러주는 이 교사의 반복적인 관행과 더불어 본 수업의 수학적 개념에 대한 이와 같은 교사의 선언적 평가는 이 수업의 특징처럼 관찰되었다.

이 수업의 계획에서 교사 Ahn은 진도로 인하여 교과서 문제 선정을 중심으로 수업을 계획하였다. 교과서가 제시한 로그의 정의와 그 성질을 설명하는 내용이나 방식에 대해서 교사가 구체적으로 언급하지는 않았으나, 촬영된 수업에서 교사가 의미를 충실히 설명했던 것으로 보면, 수업 계획 단계에서 교사가 주의 깊게 준비했던 것으로 역으로 판단할 수 있었다. 본 수업에 대한 반성은 인터뷰가 아니라 교사의 글로 수집되었는데, 교사는 "정확한 용어를 사용하여 수업을 진행"하는 것에 본 수업의 가치를 두는 한편, "학생들의 답변 중 오답이 있는 경우 다시 한 번 생각 해 볼 것을 권유, 정답을 알려줌"이라고 하였다. 즉, 교사 Ahn은 *교사의 반응*과 관련하여 교사는 적극적인 학생과의 상호작용을 고려하지 않은 것으로 보인다. 뿐만 아니라 학생들이 개별적으로 문제를 풀이하는 활동을 학생들이 수업에 참여하는 것으로 간주하였으며, "더 심도 있는 추론이 가능하도록 유도하지 못한 점이 아쉬움"이라고 하였다. 수업 설계에서 뿐만 아니라 수업에서도 추론이 고려되거나 관찰되지는 않았으나, 교사가 학생의 수업 참여의 방식으로 이를 반성한 점이 상이하게 보인다고 할 수 있다.

3) 중간 MKT와 중간보다 낮은 MQI의 사례

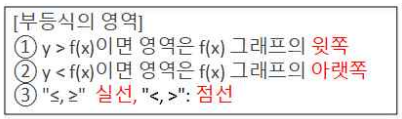
교사 Choi는 [Table 1]과 [Table 2]에서 보이는 바와 같이, MKT 점수가 22점으로 자료의 평균과 동일하지만, MQI는 3.5로 수집된 자료의 평균보다 낮다. MQI 각 영역의 점수가 1점보다 높지만 2점보다 낮다는 것은 수업에서 교사의 설명이 수학적으로 오류가 있는 것은 아니지만 충분히 개념적이지 않다는 것을 의미한다. 또한, 학생들의 질문이 없는 것은 아니지만 수업에 생산적으로

참여할 기회가 적거나 또는 그 기회에 학생들이 아이디어를 수학적으로 설명하거나 질문하지 않고 개념 간의 연결성을 찾지 않았다는 것을 보여준다. 교사의 대응이 피상적이었거나, 학생의 아이디어나 반응이 나타날 기회 자체가 적어서 교사의 대응이 적었을 수도 있다. 그렇다면, 이러한 점수가 수업에서는 어떤 양상으로 드러났는가를 알아보기 위해, 교사 Choi의 부등식의 영역 수업을 분석하고자 한다. 다음은 그 수업의 스케치이다:

수업은 $x^2+3x+2<0$을 인수분해하여 영역을 수직선에 표시해 보는 것을 복습하면서 시작한다. 6분 즈음에 교사는 학습지를 배부하고, 좌표평면에 y=x를 그리고 나서 y가 x보다 큰 임의의 순서쌍 다섯 개를 찾는 조별 활동을 제시하지만, 학생들은 개별적으로 학습지를 풀이하며, 교사도 순회지도에서 개별 학생들을 대상으로 좌표평면에 점을 찍는 것과 관련하여 피드백을 제공한다. 교사는 10분 즈음에 Geogebra를 교실의 큰 스크린에 띄우고 문제의 답을 제시한다. 12분 즈음에 교사는 y가 x보다 큰 영역을 표시해 보는 두 번째 활동을 제시하고, 곧 이어서 Geogebra에 답을 보여주면서, 영역을 표시할 때 y=x가 점선이 되는 경우와 실선이 되는 경우를 Geogebra에 입력하면 어떻게 표현되는 가를 보여주는 방식으로 설명한다. 이 설명에 이어서 다음은 수업의 17분 즈음의 장면이다.

교사 Choi: 이제 할 게 뭐냐면 아까 전에 만약에 부등호가 이런 식("$y \geq x$"를 가리킴)으로 되거나 포함되어 있는 경우에는 경계를 무슨 선으로 그리게?
학생 1: 실선
교사 Choi: 그치 실선. 반대로 는(=)이 안들어있는 경우, 요런 경우($y=x$) 이건 뭘로 표현하라고?
학생 1: 점선
교사 Choi: 요것만 하면 끝이야. 자 그런데 잘 보면 하나만 더 해보고. 왜 하필 위쪽에 찍혔을까. 자 요게 $y=x$라는 그래프야 그런데 아까 전에 선생님이 y가 x보다 큰 경우를 다 위쪽에 찍혔었지.

그러고 나서, [Fig. 2]와 같이 칠판에 판서하였다. 이어서, [Fig. 2]와 관련하여, 19분 즈음에 교사는 "그래프를 볼 때는 항상 함수는 무슨 값에 따라 y값이 결정돼? x값에 따라 y값이 결정되지. … 그래서 항상 요 x축을 기준으로 점을 봐야 되는거야, 알겠지?"라고 설명하면서, 부등식의 영역을 찾을 때 주의할 점을 설명한다.



[Fig. 2] Writing on the board 1

이후 15분 동안 교과서에 있는 기본문제를 학생들이 개별적으로 풀어보고, 교사는 순회지도를 하면서 개별 학생들에게 피드백을 아래와 같이 제공하였다.

교사 Choi: y가 x보다 큰 영역은 $fy=f(x)$그래프의 몇 부분?
학생 2: 위에
교사 Choi: 자, 작을 때는 무슨 부분?
학생 2: 아래
…
교사 Choi: y값이 더 작아야 되지. 작다랑 같아야되니까 여기 실선이 돼야 돼, 점선이 돼야 돼?
학생 3: 점선
교사 Choi: 작거나 같아야 돼.
학생 3: 실선
교사 Choi: 그렇지.

즉, [Fig. 2]의 내용을 반복적으로 언급하는 장면과, 실선과 점선의 결정과 관련하여 언급하는 장면들이 자주 관찰되었다. 수업의 마지막 십여 분 동안 교사는 학습지의 문제를 칠판에 풀이하였다.

이 수업의 MQI 세부 점수는 [Table 7]과 같다. 수학적 풍부함과 관련하여 교사의 설명에는 수학적인 오류가 없었으나, 그 설명이 문제 풀이를 위한 절차에 중심을 두고 있다. 위 수업 장면처럼, $y>f(x)$이면 $f(x)$그래프의 위쪽에 해당하는 영역을 좌표평면에 표시해야 하는 이유에 대한 설명은 수업의 17분 즈음의 장면이 유일하다. [Fig. 2]에서 제시하는 부등식 영역을 좌표평면에 표시할 때 주의점을 설명하기도 하였다.

[Table 7] Choi's MQI scores in inequality domain instruction

min.	1~7	7~14	14~21	21~28	28~35	35~42	42~49
Mathematical Richness	1	1	2	1	1	1	1
Student Participation	1	1	1	1	1	1	1
Working with Students and Math	1	1	1	1	1	2	2

*학생의 참여*와 관련하여, 학생들은 모둠으로 앉아 있었고, 교사가 간혹 모둠별로 논의를 해보라고 독려하기도 하였으나, 학생들의 모둠별 논의가 관찰되지는 않았다. 게다가 모든 학생들이 함께 논의하는 장면이 없었다. 교사의 반응과 관련하여 교사가 순회하는 장면이 자주 관찰되었는데, 위의 수업 스케치에서 학생 2와 학생 3과 나누는 대화처럼, 절차적 접근 또는 암기된 내용을 확인하는 것 같은 방식으로 교사가 반응한다. 교사 Ahn처럼 교사가 학생들의 아이디어에 관심을 갖는 장면을 촬영된 수업 전반에서 관찰하기 어려웠다.

이와 같은 *수학적 풍부함, 학생의 참여, 교사의 반응*이외에 이 수업에서 교사의 발언과 태도의 두드러진 특징은 수업 처음부터 막바지까지, 교사가 "(선생님 설명 또는 공식이) 기억나?" 또는 "기억안나?"라며 질문하는 것이었다. 교사가 학생들에게 답을 제시하고 확인하는 반복적인 관행과 더불어 이 수업의 내용을 기억의 대상으로 간주하는 교사의 이러한 발언은 특징적이였다.

수업 후 인터뷰에서 교사는 학생들의 참여와 관련하여 "애들이 참여를 많이 하는 거 같으면서도 많이 참여하지 않는 느낌? 애들이 묻긴 묻는데, 자유적인 의사를 얻기보다는 제가 원하는 대답을 들으려고 하는 느낌? … 저는 하나의 대답을 듣고 싶어 하는 거 같아요. 다양한 대답보다는 제가 원하는 답을 듣기 위해서 질문을 하는 거 같아서.."라고 반성하였으나, 학생들이 어떠한 추론으로 오답에 도달하는가 또는 어떤 부분에서 어려워하는가 등 학생들의 수학적 아이디어와 관련하여 수업을 준비하고 실행하는 것에 대한 관심이나 언급은 적었다. 이와 관련하여 교사 Choi는 "수업에 있어서 중요한 건 설명이고, 설명은 학생들에게 수업 내용을 전달해야 하는 건데 무조건 전달하기보다는 학생들이 한 번 더 생각해보고 전달 받을 수 있는 게 중요하다고 생각(합니다.) … 같이 호흡을 맞추는 거기 때문에 한 명이라도 어긋나버리면 전달이 안된다고 생각하거든요. … 전달하는 사람의 입장에서는 받아들이는 학생들 입장에서는 어떤지 모르겠네요. 제가 평가하기에는 좀 학생들 의견도 받아보고 종합적으로 잘 몰라서. 어쨌든 전달하는 거에 대해서는 제가 생각하는 거에 대해서는 했다고 생각하거든요. 그 결과가 어떻게 받아들인 건 모르겠습니다."이라고 말하였다. 교사의 주된 역할로서 내용 전달로 규정하고 있으며, 학생들이 자신의 설명에 대한 이해의 여부에 대해서는 명확히 파악하지 못하는 것을 알 수 있다. 교사 Choi가 수학 수업에서 학생들과 상호작용의 기본적 양식을 전달에 두고 있음이 명확해 보이고, 이는 수업에서 MQI의 *학생의 참여*나 *교사의 반응*이 낮을 수밖에 없는 이유를 설명하기도 한다. 전달해야하는 수학 내용에 대해서는 인터뷰에서 교사가 명확하게 그 성격을 규정하지는 않았으나, "(학교 수학이) 무조건 (모든 학생들이) 따라올 수 있는 수학보다는, (수업에서) 수학을 같이 하는데 따라 올 사람은 따라오는데 모든 사람을 위해서 쉽게 가는 건 아니라고 생각을 하고 있습니다."라고 말하면서, 교사가 전달하는 수학 내용의 수준이 용이한 것은 아니라고 규정하였다.

4) 낮은 MKT와 낮은 MQI의 사례

교사 Han은 [Table 1]과 [Table 2]에서 보이는 바와 같이, MKT 점수가 14점으로 자료의 최저점이며, MQI 총점이 3.17로 자료의 최저점이다. MQI 세 영역의 점수가 약 1점으로, 이는 수업 전반에 걸쳐 교사의 설명이 수학적으로 유의미하지 않았고, 학생들의 수업에 대한 참여가 제한적이고, 교사의 대응이 있으나 개념적이지 않음을 나타낸다. 그렇다면, 이러한 점수가 수업에서는 어떤 양상으로 드러났는가를 알아보기 위해, 교사 Han의 확률변수 수업을 분석하고자 한다. 다음은 그 수업의 스케치이다.

교사는 "애들아, … 통계 처음 할 차례잖아. … 통계 단원의 특징은 확률 단원보다 훨씬 쉬운 단원이야. 그리고 통계는 문제를 어렵게 낼 수 없기 때문에 학생들이 쉬워서 좋다 이렇게 선호하는 단원이고. 단 한 가지는 앞에서 배운 독립시행의 확률 이 공식을 기억하면 되고 통계 단원 전체에서 외워야 하는 공식은 한 개밖에 없어요. 분산 구하는 거. 분산 공식도 중학교 때 좀 배웠어. 도수분포표 할 때. 애들아, 첫 시간이라서 이번 시간에 새로운 용어가 많이 나오는데 이번 시간 마칠 때쯤에 이 용어의 뜻을 다 말할 수 있을 정도로 되어야 하겠지?" 라고 말하면서 수업을 시작한다. 이후 교사는 문제를 이용하여, 확률변수와 확률질량함수를 다음처럼 설명한다. 수업의 7분 즈음의 장면이다.

교사 Han: … 각각의 표본공간의 각 원소에 실숫값을 대응시켰지. 표본공간의 각 원소에 실숫값을 대응시키는 이런 함수를 확률변수라고 불러요. 방금 선생

님 뭐라고 얘기했어?

학생들: (제창) 확률변수.

교사 Han: 뭐를 확률변수라고 한다고? 표본공간의 각 원소에 실숫값을 대응시키는 것을 확률변수라고 해.

교사 Han: ([Fig. 3]을 가리키며) 확률변수는 여기에서 이쪽으로 가는 함수라고 할 수 있는 거지. 확률변수는 또 하나의 함수인 거야, 함수. 그러면 교과서에 한 번 줄 쳐볼까? … 각각의 X값에 확률을 대응시키는 함수를 무엇이라고 부를까? 확률 질량 함수. 이게 확률 질량 함수인 거예요. … 얘들아, 확률변수를 왜 만들었을까? (학생들이 답을 못하고, 순간 교실이 정적.) 애들아, (졸고 있는 학생을 발견하고, 그 학생에게) 야, 뒤로 나가라니까. 나갔다 들어왔어? 이제 한 번 더 졸면 여기다 다 체크한다 … 세수하고 올래? 그러면 이산확률변수는 뭐겠어? 94쪽 펴봐라. 이산확률변수 네모 하세요. 이산확률변수는 뭘까요? 애들아, 확률변수 중에 어떤 거를 이산확률변수라고 해?

민재: 셀 수 있는 거.

교사 Han: 셀 수 있는 거. 유한개거나 셀 수 있을 때 이산확률변수라고 한다. 이산확률변수하고 대비되는 것이 연속확률변수. 연속확률변수는 뒤에서 설명하겠습니다. … 확률 질량 함수는 뭐라고? 이번 시간에 용어를 자기가 자기 입으로 읽고 귀로 들으면 오래 기억이 된대. 입 꾹 다물고 있지 말고 한 번 다 같이 읽어보자. 확률 질량 함수는 뭐와 뭐와의 관계?

학생들: (제창) A X와 P 사이의 대응 관계.

교사 Han: X와 P 사이의 대응 관계를 확률질량함수. 쉽게 말하면 확률질량함수는 그냥 확률이야. … 확률 질량 함수는 이거다라고 기억하면 된다고 했잖아. 확률 질량 함수는 뭐다? 재민, 확률 질량 함수는 뭐다?

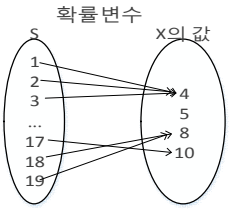
재석: 함수.

교사 Han: 함수? 확률 질량 함수는 맞기는 맞아. 틀린 답은 아닌데. 확률 질량 함수는 뭐라고 생각하면 앞으로 이해하기가 쉽다?

수영: 확률.

교사 Han: 그렇지. 확률이라고 생각하면 돼.

이후 28분까지 교사가 교과서의 예제 문제의 풀이를 설명하였고, 35분 즈음까지 학생들이 문제 3개를 개별적으로 풀어보고, 이때 교사는 순회지도를 하면서, 학생들의 문제 풀이에 대해 도움을 주었다. 예를 들어, “표본공간 S는 (1, 1)부터 (4, 4)까지 16개 다 적어야지. 맞지? 왜냐하면 2번 던지니까. 그냥 주사위를 2번 던지면 (1, 1) 부터 (6, 6)까지 36가지 다 적잖아. 그럼 이거는 4까지 밖에 없으니까. (1, 1), (1, 2), (1, 3)… 이렇게 16개 다 적어야지.”라고 말하며 풀이를 도왔다. 수업 마지막 10분 정도는 학생들의 과제 노트를 검사하였고, 수업이 마무리되었다.



[Fig. 3] Writing on the board 2

이 수업의 MQI 세부 점수는 [Table 8]과 같다. 교사의 강의 이후에 학생들이 교사가 제시한 문제들을 풀이 연습을 하는 유형의 수업이었다. 수학적 풍부함과 관련하여 위에서 제시된 7분 즈음의 수업 장면처럼 교사는 과제의 표본공간으로부터 확률변수와 확률질량함수를 소개하였으나, 그 설명이 개념적이라 보기는 어렵다. 이후 교사는 확률변수는 함수이고, 확률질량함수는 확률이라는 정리하였다.

*학생의 참여*와 관련하여, 학생들이 대여섯 명이 한 모둠으로 앉아있었으나, 이 수업에서 모둠 활동은 없었다. 학생들은 개별적으로 수업에 참여하였고, 옆 학생과 문제 풀이에 관해 이야기하는 장면들이 있었으나, 수업 전체의 운영에 생산적으로 참여하는 모습은 찾기 힘들었다. 인터뷰에서 교사는 “애들이 하는 동안 많이 힘들어하더라고요. 확률변수 X를 설정하라고 하니까 뭐 주사위 두 개의 눈의 합 그랬는데.. (1, 1) 부터 (4, 4)까지 다 16개를 적어야 하는데 일부만 적어놓고 확률변수 설정도 잘 못하고

[Table 8] Han’s MQI scores in inverse function instruction

min.	1~7	7~14	14~21	21~28	28~35	35~42
Mathematical Richness	1	1	1	1	1	1
Student Participation	1	1	1	1	1	1
Working with Students and Math	1	1	1	1	2	1

확률도 잘 못 구하고. … 표본공간이라는 말이 고등학교 확률에서 처음 나오는 말이니까. 제가 수업시간에 표본공간을 쓰는 데도 애들은 표본공간이라고 하면 말할 때마다 처음 듣는 말처럼 반응하더라고요."라고 말하면서, 학생들이 수업에서 표본공간에 대한 개념이나 확률변수 설정 등을 이해하지 못한 상황을 명확하게 인지하고 이에 대해 언급하였다. 그러한 학생 이해에 대해 심각하게 고려하거나, 그러한 학생들에게 어떻게 반응할 것인가에 대해서는 언급하지는 않았다. 수업에서 학생들의 논의가 없었던 것처럼, 인터뷰에서 교사는 학생들의 모둠 활동과 같이 학생들의 상호작용을 어떻게 끌어낼 것인가에 대해서는 고려하지 않는 듯, 이에 대한 언급은 거의 없었다.

*교사의 반응*으로 간주할 수 있는 부분은 위에서 제시된 순회지도의 사례처럼 학생들에게 문제를 풀이를 안내해 주는 것이 주로 관찰되었다. 이와 같은 수학적 풍부함, 학생의 참여, 교사의 반응이외에 이 수업에서 교사의 발언과 태도의 두드러진 특징은 교사 Choi처럼 교사 Han도 설명을 할 때 "기억"이라는 용어를 수업에서 반복적으로 사용하였다. 예를 들어, 수업의 초반에 교사가 통계 단원에 대해 소개할 때 "독립시행의 확률, 이 공식을 기억하면 되고, 통계 단원 전체에서 외워야 하는 공식은 한 개밖에 없어요"라고 말하거나, "확률 질량 함수는 뭐다라고 기억하라 했어?"라고 질문하기도 한다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 수집된 12명의 고등학교 교사의 MKT와 MQI가 강한 상관관계가 있음을 보고하고 있다. 즉, 교사가 무엇을 알고 있다는 것과 교사가 수업에서 무엇을 실행할 수 있는가 에는 강력한 관계가 있음을 시사한다. 한편, 본 연구는 네 교사의 수업과 인터뷰 분석을 통해 MQI의 *수학적 풍부함, 학생 참여, 교사의 반응*의 구체적인 내용을 보고하였다. MKT와 MQI가 모두 높은 사례와 MKT와 MQI가 모두 낮은 사례를 비교해 보면, *교사 설명의 수학적 풍부함, 학생의 참여 및 교사의 반응*의 질의 차이가 명확하다. MKT와 MQI가 모두 높은 사례와 MKT는 높지만 MQI가 중간인 경우를 비교해 보면, 두 사례 모두 교사 설명의 질인 *수학적 풍부함*은 모두 우수하지만, *학생의 참여*와 *교사의 반응*에서 차이가 있음을 알 수 있다. 또한, MKT와 MQI가 모두 낮은 사례와 MKT는 중간이면서 MQI가 낮은 사례에서 절차적 지식 중심의 교사 설명이 두드러졌는데, 이 두 사례는 MKT는 높지만 MQI가 중간인 사례와 비교하면 교사 설명의 질인 수학적 풍부함이 두드러지게 차이가 있다는 점에 주목할 필요가 있다. 즉, 네 개의 사례에서 MKT가 MQI의 요소 중에서 교사의 설명에 대한 수학적 질과 가장 관련이 있음을 가정할 수 있다. MKT의 여섯 요소들 중에서 교과 내용 지식(subject matter knowledge)이 중요한 역할을 하고 있으므로, MKT의 수준이 MQI의 교사 설명에 대한 수학적 풍부함과 중요한 관련성이 있다는 점을 수업의 장면에서 확인된 것이라고 볼 수 있다.

*학생의 참여*와 *교사의 반응*과 관련하여 MKT와 MQI가 모두 높은 사례는 수업의 설계, 실행 및 반성에서 교사가 학생들의 아이디어를 파악하고 그에 대응하기 위한 기회를 수업에서 구체적으로 마련하는 것에 대한 인식을 분명히 하고 있음이 수업 영상과 인터뷰에서 분명히 드러났다. 그에 반하여 다른 세 사례에서는 교사들이 학생들이 문제에 어떻게 접근하는가에 대해 이해하고자 하는 시도가 관찰되지 않았으며, 학생이 수업에 생산적으로 참여할 수 있는 기회의 결여, 답 찾기에 집중한 교사의 대응이 공통적으로 발견된다. 그럼에도 이 세 가지 사례만 비교하면 미약하기는 하지만, MKT수준이 높은 만큼 *학생의 참여*와 *교사의 반응*의 수준도 높았다. 이러한 네 교사의 사례는 MKT가 MQI와 통계적으로 유의미하게 상관관계가 매우 강하게 나타난 이면의 수업의 장면들과 수업의 설계 및 반성에서 고려되는 요소들의 구체적 내용을 보여준다고 할 수 있다. 이러한 연구 결과를 통해 교사 교육에 대한 두 가지 시사점을 도출할 수 있다.

MKT와 MQI에 관한 본 연구의 분석 결과는 교사들에게 MKT를 학습할 기회를 제공할 필요성이 있음을 보여준다. 교사의 경험이 쌓인다고 하여, 수업에서 필요한 수학적, 교수학적 판단에 필요한 지식이나 판단이 향상되는 것이 아니다(Kim, 2013). 따라서 교사 경력이 학생들의 수학 성취도와 관련성이 없다는 연구 결과와 관련지어 볼 수 있는 여지를 준다(Rockoff, 2004). 그렇다고 모든 교사 교육이 효과적인 것은 아니며(e.g., Argentin, Pennisi, Vidoni, Abbiati, & Caputo, 2014; Santagata, Kersting, Givvin, & Stigler, 2010), MKT가 부족한 교사

들에게 새로운 수업 방법을 실행해보도록 하는 것은 문제가 많다(Hill et al., 2008; Hill & Charalambous, 2012). Derry, Wilsman, and Hackbarth(2007)은 학생들의 대수적 추론을 분석, 비교 평가하는 교사 교육이 교사들의 MKT 증진에 효과적이며, Bell, Wilson, Higgins, and McCoach(2010)은 교사들의 일상적인 수학 수업을 교사 교육에 적극적으로 이용하는 것이 교사들의 MKT 증진에 도움이 된다고 보고한다. 이 연구들은 모두 현직 교사들을 대상으로 하는 MKT 교육으로서, Ball and Cohen(1999)이 주장하는 실제-기반 교사 교육(practice-based professional development)을 이론적으로 기반하고 있으며, 교사의 학습이 수업의 실제를 연수의 대상이면서 자료로 이용한다. 즉, 교사의 지식과 수업 실제를 명확하게 연결 짓는 교사 교육이 좀 더 효과적일 수 있다. 예를 들어, 리허설, 수업 분석 또는 안내된 수업 반성을 담은 연수가 교사들의 지식과 교수학적 실제의 연결을 강화하는 데 도움이 된다(Kazemi, Franke, & Lampert, 2009).

수업에 대한 서술적 분석 및 해석적 분석 결과는 수학 수업에서 교사가 학생들을 어떻게 철학적으로 규정해야 하며, 교사는 학생들을 어떻게 대해야 하는 가에 대하여 교사 교육은 구체적이며 실제적으로 접근할 필요가 있다. MKT의 주요 영역인 knowledge of content and students와 knowledge of content and teaching은 학생이 과제에 대해서 어떻게 생각할 것이며 무엇을 어려워할 것인가에 대해서 교사가 예측하고 학생들의 불완전한 아이디어에 대해 관심을 가지고 분석하고, 어떤 과제가 학생들의 추론을 심화시킬 수 있는지에 대한 결정과 이를 수업에서 어떻게 운영할 것인가에 대한 판단을 포함한다(Ball et al., 2008). 이는 수업이 학생의 아이디어를 끊임없이 파악하고 이를 반영하는 시공간이어야 한다는 것과 함께 MKT가 학습과 학생을 구성주의적이어야 한다는 것을 전제한다(Ball & Bass, 2000; Cohen et al., 2003). 수학 수업에서 구성주의를 학습을 설명하는 철학적 기조이므로, 그러한 관점에서 수학 수업을 설계하고 운영할 수 있도록 하는 교사 교육이 강조될 필요가 있다. 이는 Yackel and Cobb(1996)와 Steffe and Cobb(1988)가 구성주의적으로 학습을 다루고, Lakatos(1976)이 수학 교과가 준경험주의적인 성격을 주장한 바를 강조했던 바와 일맥상통한다고 볼 수 있다. 이에 대해 Hong(2012)는 “수학을 가르치는 것(teaching)이 단순한 훈련(training)으로 대치될 수 없다는 점은 수학교육학의 기본적인 출발점(p. 459)”이라고 규정한다. 수학 수업에서 학생들이 가져야 할 “자유와 권한”(Yim & Hong, 1998, p. 310)은 교사들의 “수업에 대한 다양한 사고실험과 교과에 대한 깊은 전문지식”(Park & Shin, 2019, p. 1011)을 전제로 한다. 이러한 철학적 기저가 암묵적으로 다루어지기보다, 교사들의 실제와 관련하여 명확히 평가되고 구현하도록 지원하는 교사 교육을 제공할 필요가 있다. 이는 앞서 제시한 실제-기반 교사 교육(practice-based professional development)과 그 결을 함께 한다.

본 연구는 교사의 MKT는 고등학교 수학 수업에서 중요한 역할을 한다는 것을 보고한다. 따라서, Baumert et al.(2010), Hill et al.(2012), Rockoff et al.(2011)이 주장한 바와 같이, MKT는 수학 교사 교육에서 강조되어야할 필요가 있다.

참 고 문 헌

Argentin, G., Pennisi, A., Vidoni, D., Abbiati, G., & Caputo, A. (2014). Trying to raise (low) math achievement and to promote (rigorous) policy evaluation in Italy: Evidence from a large-scale randomized trial. *Evaluation Review, 38*(2), 99-132.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal of Research in Mathematics Education, 21*(2), 132-144.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. Phillips (Ed.), *Yearbook of the National Society for the Study of Education: Constructivism in education* (pp. 193-224). Chicago: University of Chicago Press.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco: Jossey-Bass.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barber, M., & Mourshed, M. (2007). *How the best performing school systems come out on top.* New York, NY: McKinsey & Company.

Baumert, J., Kunter, M., Werner, B., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., …, Tsai, Y. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133-180.

Begle, E. G. (1979). *Critical variables in mathematics education: Findings from a survey of the empirical literature.* Washington, DC: Mathematical Association of America and National Council of Teachers of Mathematics.

Bell, C. A., Wilson, S. M., Higgins, T., & McCoach, D. B. (2010). Measuring the effects of professional development on teacher knowledge: The case of developing mathematical ideas. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(5), 479-512.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C., Underbill, R., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(3), 194-222.

Charalambous, C. (2010). Mathematical Knowledge for Teaching and Task Unfolding: An Exploratory Study. *The Elementary School Journal, 110*(3), 247-278.

Choi, Y., Choi, S., & Kim, D. (2014). An investigation of beginning and experienced teachers' PCK and teaching practices: middle school functions. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 17*(2), 251-274.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 25*(2), 119-142.

Derry, S. J., Wilsman, M. J., & Hackbarth, A. J. (2007). Using contrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 305-329.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3 ed., pp. 119-161). New York: Macmillan.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 94-116.

Han, H. (2016). A study on preservice mathematics teachers' MKT. *Communications of Mathematical Education, 30*(1), 101-120.

Heim, J. (2016). *America has a teacher shortage, and a new study says it's getting worse.* Retrieved Jun. 1, 2020, from https://www.washingtonpost.com/local/education/ america-has-a-teacher-shortage-and-a-new-study-says-its-getting-worse/2016/09/14/d5de1cee-79e8-11e6-beac-57a4a412e93a_story.html

Hill, H. C., & Charalambous, C. Y. (2012). Teacher knowledge, curriculum use, and quality of instruction: Lessons learned and open issues. *Journal of Curriculum Studies, 44*(4), 559-576.

Hill, H. C., & Chin, M. (2018). Connections between teachers' knowledge of students, instruction, and achievement outcomes. *American Educational Research Journal, 55*(5), 1076-1112.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Hill, H. C., Umland, K., Litke, E., & Kapitula, L. R. (2012). Teacher quality and quality teaching: Examining the relationship of a teacher assessment to practice. *American Journal of Education, 118*(4), 489-519.

Hong, H. (2017). Germany's teacher education and teacher supply and demand situation, *Monthly Education, October*, 100-106.

Hong, J. (2012). Subject, structure, discourse, and the learning of mathematics. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 22*(4), 459-475.

Hwang, J. & Shin, B. (2016). An analysis of teacher's knowledge about reduction ad absurdum: Focused on subject matter knowledge and knowledge of students' understanding. *The Mathematical Education, 55*(1), 91-106.

Kang, H., & Choi, E. (2015). Teacher knowledge necessary to address student errors and difficulties about ratio and rate. *School Mathematics, 17*(4), 613-632.

Kang, H., Ko, E., Kim, T., Cho, W., Lee, K., & Lee, D. (2011). Mathematics Teachers' Perspectives on Competencies for Good Teaching and Perspective Teacher Education, *School Mathematics, 13*(4), 633-649.

Kang, Y., Cho, C., & Kim, J. (2012). Analysis of elementary teachers' specialized content knowledge for the word problems of fraction division. *Communications of Mathematical Education, 26*(3), 301-316.

Kazemi, E., Franke, M., & Lampert, M. (2009). Developing pedagogies in teacher education to support novice teachers' ability to enact ambitious teaching. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides, Proceedings of the 32nd Annual Conference of The Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 11-29). Palmerston North, New Zealand: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Kim, D. & Lee, B. (1998). The impacts of college entrance examination on the curriculum implementation and classroom teaching-learning activities in Korea's high schools. *The Journal of Curriculum Evaluation, 1*(1), 1-15.

Kim, R., & Kim, E. (2017). An Analysis of the Expected Content Knowledge for Teaching in Teacher Education Programs and Teacher Employment Tests for Secondary Mathematics. *Journal of Research in Curriculum & Instruction, 21*(5), 610-623.

Kim, Y. (2013). Mathematical knowledge for teaching and teachers' backgrounds: A study of U.S. teachers. *School Mathematics, 15*(3), 533-550.

Kim, Y. (2016). Interview prompts to uncover mathematical knowledge for teaching: focus on providing written feedback. *The Mathematics Enthusiast, 13*(1), 71-92.

Kim, Y. (2020). Korean teachers' mathematical knowledge for teaching in algebraic reasoning, *Journal of Educational Research in Mathematics,* special issue, 185-198.

Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2013). Teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge: The role of structural differences in teacher education. *Journal of Teacher Education, 64*(1), 90-106.

Koellner, K., Jacobs, J., Borko, H., Schneider, C., Pittman, M. E., Eiteljorg, E., . . . Frykholm, J. (2007). The problem-solving cycle: A model to support the development of teachers' professional knowledge. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 273-303.

Kwon, O., Kim, A., & Cho, H. (2012). An analysis on the curriculum and teaching methods of Korean mathematics education departments. *The Mathematical Education, 51*(3), 281-300.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

Learning Mathematics for Teaching. (2010). *Mathematical quality of instruction (MQI).*

Lew, B. (2005). High school equalization and the curriculum policy. *Asian Journal of Education, 6*(4), 1-19.

Lewis, J., & Blunk, M. (2012). Reading between the lines: Teaching linear algebra. *Journal of Curriculum Studies, 44*(4), 515-536.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahawah. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ministry of Education (2018). *2018 Teacher Qualification Manual*. Seoul: Author.

OECD. (2013). *Education at a glance 2013: OECD indicators*. Paris, France: OECD Publishing.

Park, J., & Shin, J. (2019). Discussion on pedagogical aspects of Paul Ernest's mathematical knowledge construction process. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction, 19*(2), 993-1016.

Patricia, F. C., Masako, N., Toni, M. S., Lawrence, M. C., Darcy, L. C., Amber, H. R., . . . Youyoung, C. (2014). The Relationship Between Teachers' Mathematical Content and Pedagogical Knowledge, Teachers' Perceptions, and Student Achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(4), 419-459.

Phelps, G., Weren, B., Croft, A., & Gitomer, D. (2014). *Developing content knowledge for teaching assessments for the Measures of Effective Teaching study.* Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Rockoff, J. E. (2004). The impact of individual teachers on student achievement: Evidence from panel data. *The American Economic Review, 94*(2), 247-252.

Rockoff, J. E., Jacob, B. A., Kane, T. J., & Staiger, D. O. (2011). Can you recognize an effective teacher when you recruit one? *Education Finance and Policy, 6*(1), 43-74.

Santagata, R., Kersting, N., Givvin, K. B., & Stigler, J. W. (2010). Problem implementation as a lever for change: An experimental study of the effects of a professional development program on students' mathematics learning. *Journal of Research on Educational Effectiveness, 4*, 1-24.

Schober, P., Boer, C., & Schwarte, L. A. (2018). Correlation coefficients: Appropriate use and interpretation. *Anesthesia and Analgesia, 126*(5), 1763-1768.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3 ed., pp. 3-36). New York: Macmillan.

Song, K., & Pang, J. (2013). Domestic Research Trends of Teacher Knowledge in Mathematics. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 16*(1), 265-287.

Steffe, L. P., & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies.* New York: Springer-Verlag.

Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 141-164.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Yi, S., & Cho, W. (2013). Analysis of mathematics teachers' mathematical content knowledge about quadratic curves. *School Mathematics, 15*(4), 995-1013.

Yim, J., & Hong, J. (1998). The meaning and mechanism of the 'construction' in the operational constructivism and the social constructivism. The *Journal of Educational Research in Mathematics, 8*(1), 299-312.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

<부 록>

Items 9 and 10 in the MET algebra I assessment (Phelps et al., 2014, p.80)

Item number 9	**Item number 10**
Having taught her students to factor quadratics with integer coefficients, integer roots, and a leading coefficient of 1, Ms. Quezada explained that she was going to give them a harder problem. She then asked them to solve the following. $3x^2 - 3x - 6 = 0$ After a few minutes of work, the class discussed their solutions. Letitia said that x was -1 or 2 and explained, "I added 3x to both sides and divided by 3." $3x^2 - 6 = 3x$ $x^2 - 2 = x$ She then continued "The parabola's just down a little and the line's at 45 degrees, so it's just below zero and about 2 to the right. x can be -1 and 2, and those are the only possible ones." Of the following, which best characterizes Letitia's approach to this problem? ⓐ Letitia's method is wrong because she should have first divided by 3 and then factored the left side of the equation. ⓑ Letitia's method is wrong because this is a parabola and you could graph it, but you would have to graph the original equation and look for the roots. ⓒ Letitia's reasoning is correct, but her method often leads to points of intersection that might be hard to determine visually. ⓓ Letitia's reasoning is correct, but her method requires knowledge of calculus.	Ms. Lang's class had been studying the concept of slopes of lines, so she asked them to consider all of the lines passing through one point and how the slops of those lines vary. The students had used geoboards in some earlier work, so they started talking about the slopes of lines on an "infinitely extended" geoboard. (Geoboards are flat blocks of wood, roughly one foot square, with pegs laid out on a grid where rubber bands can be hooked to make lines or polygons.) The students decided that the pegs of the infinite geoboard could be thought of as the set of points with integer coordinates in the Cartesian plane. During the discussion, students had the following exchange. Yonah: On the geoboard, you can't get all of the slopes, because the geoboard points are too spread out—there are a whole bundh of lines between the ones you can make. Andy: I disagree. I think we can make any slope. Starting at one point, by choosing another geoboard point far enough away, we can tilt the line as much or as little as we like Becky: What I was thinking was if you run a line through one geoboard point, it will always hit another one far enough out. Of the following concepts, which is most directly related to the mathematics underlying this discussion? ⓐ Interpretation of the derivative—the derivative is the slope of the tangent line. ⓑ Density of numbers on the real line—the rational numbers are dense, but not every real number is rational. ⓒ The parallel postulate—given a point and a line, there is a unique line through the given point parallel to the given line. ⓓ Each of these concepts is equally related to the underlying mathematics.