The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC)
Vol. 20, No. 4, pp.171-176, Aug. 31, 2020. pISSN 2289-0238, eISSN 2289-0246

https://doi.org/10.7236/JIIBC.2020.20.4.171
JIIBC 2020-4-24

최대 가중치 독립집합 문제의 최대 가중치 독립정점 쌍 병합 알고리즘

Merge Algorithm of Maximum weighted Independent Vertex Pair at Maximal Weighted Independent Set Problem

이상운*

Sang-Un, Lee*

요 약 본 논문은 NP-난제로 널리 알려진 최대 가중치 독립집합(MWIS) 문제에 대해 다항시간으로 풀 수 있는 알고리즘을 제시하였다. MWIS 문제에 대해 지금까지는 특정 그래프 형태에 특화된 다항시간 알고리즘, 또는 분산형, 클러스터 형성 방법들이 제안되기도 하였으나 모든 그래프 형태에 적합한 단일화된 알고리즘이 제안되지 않고 있다. 따라서 본 논문에서는 어떠한 형태의 그래프에도 적합한 유일한 다항시간 알고리즘을 제안한다. 제안된 알고리즘은 최대 가중치를 갖는 정점 v_i를 v_i와 이웃하지 않은 정점 들 중 최대 가중치를 갖는 v_j 정점과 병합하였다. 제안된 알고리즘을 무방향 그래프와 트리에 적용한 결과, 최적 해를 얻었다. 특히, 일부 데이터에 대해서는 기존에 알려진 해를 개선하는 결과도 얻었다.

Abstract This paper proposes polynomial-time algorithm for maximum weighted independent set(MWIS) problem that is well known as NP-hard. The known algorithms for MWIS problem are polynomial-time to specialized in particular graph type, distributed, or clustering method. But there is no unified algorithm is suitable to all kinds of graph types. Therefore, this paper suggests unique polynomial-time algorithm that is suitable to all kinds of graph types. The proposed algorithm merges the maximum weighted vertex v_i and maximum weighted vertex v_j that is not adjacent to v_i. As a result of apply to undirected graphs and trees, this algorithm can be get the optimal solution. This algorithm improves previously known solution to new optimal solution.

Key Words : Independent set, Minimal weighted independent set, Cluster, Distributed, Centralized

Ⅰ. 서 론

무방향 그래프 $G=(V,E)$에서 독립집합(independent set, $I \subseteq V$)는 I의 원소들이 상호간에 모두 인접하지 않은 독립 정점들로 이루어진 경우를 의미한다.[1] 만약, 각 정점 v_i가 가중치 $w(v_i)$를 갖고 있는 경우, 우리는 최대 가중치를 갖는 독립집합을 찾고자 한다. 이를 최대 가중치 독립잡합 문제(maximal weighted independent

*정회원, 강릉원주대학교 과학기술대학 멀티미디어공학과
접수일자 2020년 1월 30일, 수정완료 2020년 6월 22일
게재확정일자 2020년 8월 7일

Received: 30 January, 2020 / Revised: 22 June, 2020 / Accepted: 7 August, 2020
*Corresponding Author: sulee@gwnu.ac.kr
Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University, Korea

set problem, MWISP)라 한다.[2]

MWISP는 다음의 2가지 특성을 갖고 있는 무선통신망(wireless network)에서 활용되고 있다. 첫 번째 특성은 무선통신망 채널의 어느 한 노드에서 송신된 메시지는 그 노드에 이웃하는 모든 노드들이 수신하는 속성을 가진 동시통신(broadcast)이며, 두 번째는 무선통신망이 이동성(mobility)을 허용하여 모든 노드들이 이동함으로 인해 짧은 통신범위를 갖더라도 중간 중간에 라우터 역할을 하는 많은 노드들이 릴레이 역할을 해주어 송신 노드가 멀리 떨어진 수신 노드와 가상의 링크를 연결하여 정보를 전달하는 다중 홉 이동 망(multi-hop mobile network) 또는 노드들에 의해 자율적으로 구성되는 기반 구조 없는 네트워크인 에드 혹 망(ad hoc network)이라고 부르기도 한다.[2]

무선통신망에서 두 정점 간 간선을 이웃하는 정점 간에 충돌 또는 간섭으로 표현한 충돌 그래프(conflict graph)로 표현하면, 연결되지 않은 정점들의 집합인 독립집합은 데이터를 동시에 전송할 수 있다. 여기서 각 정점이 갖고 있는 가중치는 연결율(link rate)와 큐 길이(queue length)의 곱으로, 큐 길이 변동과 시간 변동 채널로 인해 시간에 따라 변화된다. 따라서 이 경우 어느 한 시점에서 전송할 수 있는 최대의 데이터 통신량을 얻기 위해서는 MWIS를 찾아야만 한다.[3] 즉, 무선통신망에서의 MWIS는 망의 노드(정점)들을 계층적으로 구성하여 통신정보에 대한 저장 용량을 최소화시키고 망의 대역폭 사용을 최적화시키는 분산형 자원 처리를 하는 망을 구성해야만 한다. 또한, 공유채널의 공간적 재사용을 제어하기 위해, 모바일 환경에서의 라우팅과 제어 정보를 유지하기 위해 교환되는 데이터를 최소화 시키며, 클러스터 기반의 가상 망 아키텍쳐를 구축하고 유지하기 위해서는 노드(정점)들을 클러스터 그룹으로 분할하여 효율적으로 사용되어야만 한다. 이 클러스터 그룹이 MWIS이다.[2]

MWIS 문제는 NP-난제(NP-hard)로 알려져 있어 다항시간으로 정확한 해를 구하는 알고리즘이 제안되지 않고 있다.[4,5]

MWIS 문제에 대해 Hifi[6]는 다항시간으로 문제의 해를 찾아가는 규칙을 찾지 못해 부득이 메타휴리스틱의 일종인 유전자 알고리즘을 적용하였으며, Basagni[2], Joo et al.[3]과 Du와 Zhang[7]은 중앙집중형이 아닌 분산형 알고리즘의 휴리스틱 다항시간 규칙을 제안하였다. Warrier et al.[8]은 분기비용(branch-and-Price, BP)법을, Warren과 Hicks[9]는 분기한정(branch-and-bound, BB)법을 제안하기도 하였다. 또한, Afif et al.[10]과 Luby[11]은 병렬 알고리즘을, Li와 Lateki[12]는 클러스터 응집법을 제안하기도 하였다.

다양한 그래프 형태에 모두 적합한 하나의 알고리즘을 제안하지 못하고, 특정 그래프에 적합한 특화된 다항시간 알고리즘에 관한 연구로, Grzesik et al.[13]은 P_6-free 그래프에 대해, Liang et al.[14]은 구간(interval)과 원호(circular-arc) 그래프에 대해, Keil et al.[15]은 Outerstring 그래프에 대해, Köhler와 Mouatadid[16]은 공동비교성(cocomparability) 그래프에 대해, Brandstädt와 Mosca[17]는 $l$crew-free 그래프에 대해, Chen et al.[18]은 트리에 대해, Verhetsel et al.[19]은 간접 6각형 그물(indirect hex-mesh) 그래프에 대해 알고리즘을 제안하였다.

이와 같이 MWIS 문제에 대해 다양한 그래프에 모두 적합한 단일의 다항시간 탐욕 알고리즘이 아직까지는 제안되지 않고 있음을 알 수 있다.

본 논문에서는 MWIS 문제에 분산형이 아닌 중앙집중형 알고리즘으로, 주어진 그래프 망에서 최대 가중치를 갖는 정점(또는 노드) 쌍을 병합하는 방법을 제안한다. 2장에서는 MWIS 문제에 대한 정의와 더불어 탐욕 알고리즘을 널리 알려진 분산형 알고리즘[2]을 고찰하여 본다. 3장에서는 MWIS의 최적 해를 구할 수 있는 휴리스틱 탐욕 알고리즘으로 중앙집중형인 최대 가중치 정점 쌍을 병합하는 알고리즘을 제안하고, 4장에서는 무방향 그래프와 트리의 벤치마킹 데이터들에 대해 제안된 알고리즘을 적용하여 알고리즘 적합성을 검증하여 본다.

Ⅱ. MWIS 문제 정의와 분산형 알고리즘

무선통신망에서 노드(정점)들 간에 송수신되는 메시지가 충돌 또는 간섭되는 경우를 간선으로 표기한 충돌 그래프(conflict graph)로 표현하면, 연결되지 않은 정점들의 집합인 독립집합은 데이터를 동시에 전송할 수 있다. 따라서 이 그래프에서, 어느 한 시점에서 전송할 수 있는 최대의 데이터 통신량을 얻기 위해서는 MWIS인 클러스터를 찾아야만 한다.[3]

정점 $V=\{1,2,\cdots,n\}$,간선 $E=\{1,2,\cdots,m\}$과 가중치 $w_j, j=1,2,\cdots,n$를 갖는 무방향 그래프 $G(V,E,w)$에서의 MWIS는 식 (1)과 같이 정의된다.

$$maximize \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad x_j \in I,\ I \subseteq V$$

Vol. 20, No. 4, pp.171-176, Aug. 31, 2020. pISSN 2289-0238, eISSN 2289-0246

MWIS 문제에 대해 Basagni[2]는 다음과 같은 분산형 알고리즘을 제안하였다.

- 각 노드 v는 보다 큰 가중치를 가진 이웃인지 여부를 결정하기 위해 클러스터 우두머리(clusterhead) 또는 보통의 평범한 노드(ordinary node)인지 여부에 대한 자신의 임무를 가진다.
- 초기에, 근방에서 보다 큰 가중치를 가진 노드만이 자신의 이웃으로 데이터를 동보통신(broadcast) 할 수 있는 clusterhead(독립 노드)로 결정된다.
- clusterhead로부터 메시지를 받은 노드 v는 보다 큰 가중치를 갖고 있는 이웃하는 clusterhead의 클러스터와 결합 여부를 결정한다.
- 보통의 노드인 다른 클러스터와 결합하는 것을 가리키는 메시지를 가진 보다 큰 가중치를 가진 노드가 없으면 v는 clusterhead로 메시지를 보낸다.

Basagni[2]의 MWIS 알고리즘을 그림 1의 8개 노드를 가진 망에 적용하면 MWIS={4,7,3}으로 가중치 합은 9+5+2=16의 결과를 얻는다.

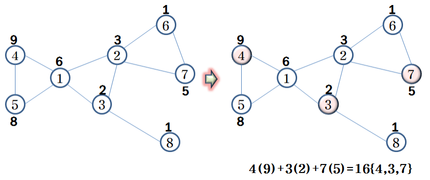


그림 1. 예제 망의 MWIS
Fig. 1. MWIS for example network

Basagni[2]의 MWIS 알고리즘은 Step 1에서 모든 노드들이 인접한 노드들에 가중치를 상호 전송하여 비교하는 초기 절차를 수행하여 4와 7 노드가 자신의 이웃들 중에서 가장 큰 가중치를 갖게 됨을 알아 clusterhead를 선언하는 CH 메시지를 인접한 노드들로 전송한다. 이 결과 Step 2에서는 {1,5}와 {2,6}은 ordinary node로 결정되어 JOIN(5,4), JOIN (1,4), JOIN(2,7)과 JOIN(6,7) 메시지를 전송하여 {4,1,5}, {7,2,6}의 클러스터를 형성한다. 다음으로, 1과 2 노드는 인접하여 있으므로, 인접한 클러스터가 병합되어 {4,7}의 clusterhead 집합이 형성된다. 남아 있는 3과 8 노드는 이후 경쟁하여 3이 clusterhead로 결정되어, 마지막으로 {4,7,3}의 MWIS를 얻는다.

Ⅲ. 최대가중치 정점 쌍 병합 알고리즘

MWIS를 얻기 위해 본 장에서는 주어진 망의 최대 가중치를 갖는 노드(정점) v_i를 결정하고, v_i와 이웃하지 않은 다음으로 최대 가중치를 갖는 v_j 노드에 대해 $\{v_i, v_j\}$로 병합하는 단순한 방법을 적용한다. 이 방법을 최대 가중치 정점 쌍 병합 알고리즘(maximum weight vertex pair merge algorithm, MWVPMA)이라 하며, 다음과 같이 수행된다.

Step 1. 단 노드(terminal node) 들을 대상으로 제노드(sibling) 간에 결합

Step 2. 최대 가중치 정점 v_i를 $v_j = \{\varnothing\}$가 될 때까지, 최대 가중치 정점 $v_j \notin N_G(v_i)$와 결합

Step 3. 최대 가중치 정점 v_i를 MWIS로 결정

제안된 MWVPMA를 그림 1의 예제 망에 적용한 결과는 그림 2와 같다.

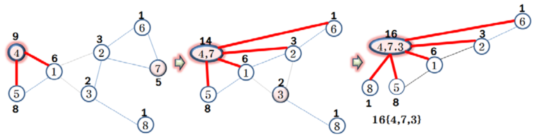


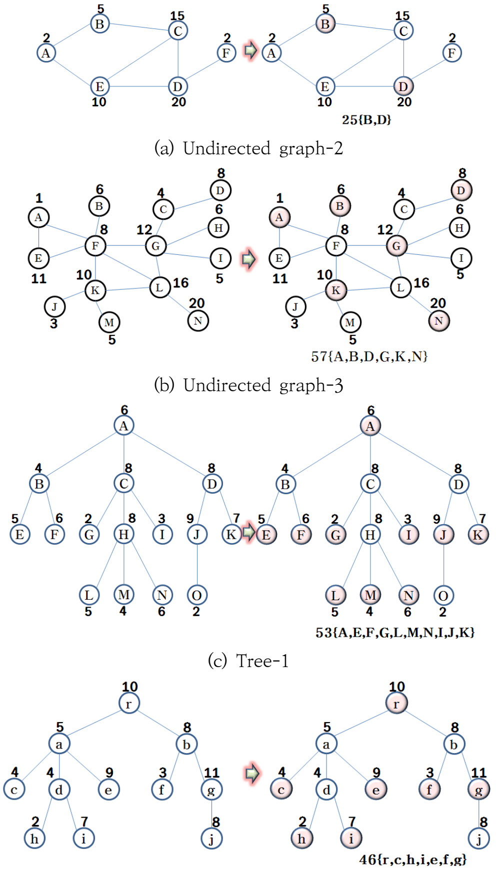
그림 2. 예제 망의 MWVPMA로 구한 MWIS
Fig. 2. MWIS of MWVPMA for example network

MWVPMA로 구하는 방법은 주어진 망에서 최대 가중치를 갖는 4 노드(정점)이 인접하지 않은 최대 가중치를 갖는 7 노드와 병합된다. 다음으로 최대 가중치를 갖는 14{4,7} 노드가 인접하지 않은 최대 가중치를 갖는 3 노드와 병합되어 16{4,7,3}을 얻는다. {4,7,3}과 인접하지 않은 노드(정점)이 더 이상 존재하지 않아 결국 주어진 그래프에서의 MWIS는 16{4,7,3}이 됨을 알 수 있다.

Ⅳ. 알고리즘 적용 및 결과 분석

본 장에서는 그림 3의 4개 데이터에 대해 제안된 MWVPMA의 적합성을 검증하여 본다.

(a)의 무방향 그래프-2는 Sariel[20]에서, (b)의 무방향 그래프-3은 Erciyes et al.[21]에서, (c)의 Tree-1은 Chen et al.[18]에서, (d)의 Tree-2는 Sariel[20]에서 인용되었다.



(a) Undirected graph-2

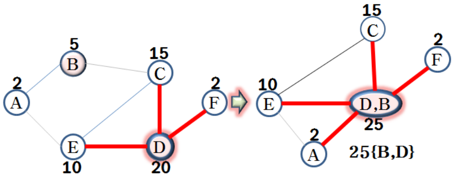
(b) Undirected graph-3

(c) Tree-1

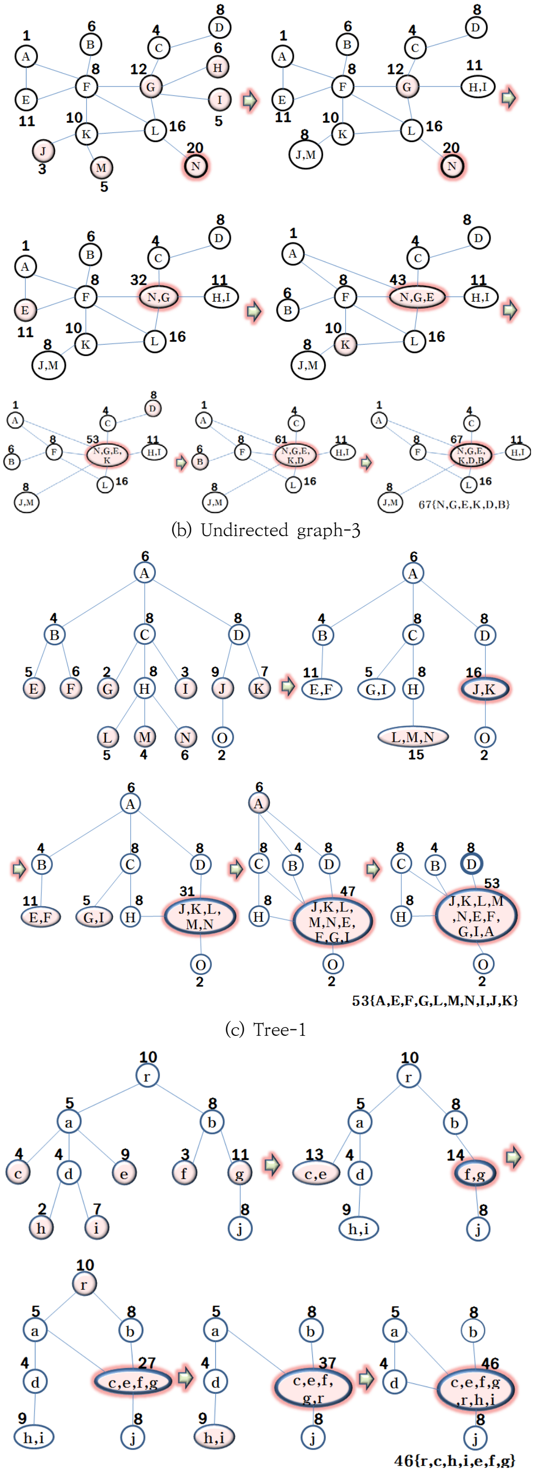
(d) Tree-2

그림 3. 실험 데이터
Fig. 3. Experimental data

그림 3의 데이터들에 대해 MWVPMA로 MWIS를 구한 결과는 그림 4에 제시되어 있다. 여기서는 4개 데이터 모두에서 최적 해를 얻을 수 있음을 보였다. 특히 (b)의 무방향 그래프-3은 원 논문에서는 57을 얻었는데 반해, MWVPMA는 67로 해를 개선하는 결과도 얻었다.



(a) Undirected graph-2



(b) Undirected graph-3

(c) Tree-1

(d) Tree-2

그림 4. 실험데이터의 MWVPMA로 구한 MWIS
Fig. 4. MWIS of MWVPMA for experimental data

Ⅴ. 결론 및 추후 연구과제

본 논문에서는 NP-난제로 알려진 최대 가중치 독립집합 문제의 해를 다항시간으로 빠르게 해를 구하는 규칙을 가진 휴리스틱 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 주어진 그래프에서 최대 가중치를 갖는 정점 v_i를 결정하고, v_i와 이웃하지 않은 최대 가중치를 갖는 $v_j \not\in N_G(v_i)$를 선택하여 $\{v_i, v_j\}$로 병합하는 단순한 방법을 제안하였다.

제안된 알고리즘을 무방향 그래프 3개와 트리 2개의 벤치마킹 실험 데이터에 적용한 결과, 모든 그래프에서 최적 해를 빠르고 정확하게 구할 수 있음을 보였다. 특히 무방향 그래프-3의 경우 원문에서 제시한 57을 67로 개선한 결과를 얻는데 성공하였다.

제안된 알고리즘은 그래프 분야에서 적용된 중앙집중형(전역적, global) 알고리즘으로, 모든 정점(노드)의 통신량(접속 건수)을 알고 있다는 가정 하에 수행되는 방법으로, 자신과 이웃하는 기지국의 통신량만 알 고 있는 일반적인 무선통신망에서는 적용할 수 없다. 따라서 추후 무선통신망에서의 MWIS를 구하는 분산형(지역적, local) 알고리즘을 연구할 계획이다.

References

[1] S. U. Lee, "Independent Set Bin Packing Algorithm for Routing and Wavelength Assignment (RWA) Problem ", Journal of The Korea Society of Computer and Information Vol. 20, No. 1, pp. 111-118, Jan. 2015, DOI:https://doi.org/10.9708/ jksci.2015.20. 1.111

[2] S. Basagni, "Finding a Maximal Weighted Independent Set in Wireless Networks", Telecommunication Systems, Vol. 18, No. 1-3, pp. 155-168, Sep. 2001, DOI:https://doi.org/10.1023/A: 1016747704458

[3] C. H. Joo, X. J. Lin, J. Ryu, and N. B. Shroff, "Distributed Greedy Approximation to Maximum Weighted Independent Set for Scheduling with Fading Channels", IEEE/ACM Transactions on Networking, Vol. 24, No. 3, pp. 1476-1488, Jun. 2016, DOI:https://doi.org/10.1109/TNET.2015.2417861

[4] M. R. Garey and D. S. Johnson, "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness", W. H. Freeman & Co. New York, 1979, ISBN:0716710455

[5] G. Sharma, R. R. Mazumdar, and N. B. Shroff, "On the Complexity of Scheduling in Wireless Networks", Proceedings of the ACM MobiCom '06 12th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking, pp. 227-238, Sep. 2006, DOI:https://doi.org/10.1145/1161089. 1161116

[6] M. Hifi, "A Genetic Algorithm-based Heuristic for Solving the Weighted Maximum Independent Set and Some Equivalent Problems", Journal of the Operational Research Society, Vol. 48, No. 6, pp. 612-622, Jun. 1997, DOI:https://doi.org/ 10.1057/palgrave.jors.2600405

[7] P. Du and Y. Zhang, "A New Distributed Approximation Algorithm for the Maximum Weight Independent Set Problem", Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2016, Article ID:9790629, pp. 1-10, Hindawi Publishing Co., 2016, DOI:https://doi.org/10.1155/2016/9790629

[8] D. Warrier, W. E. Wilhelm, J. S. Warren, and I. V. Hicks, "A Branch-and-Price Approach for the Maximum Weight Independent Set Problem", Networks, Vol. 46, No. 4, pp. 198-209, Dec. 2005, DOI:https://doi.org/10.1002/net.20088

[9] J. S. Warren and I. V. Hicks, "Combinatorial Branch-and-Bound for the Maximum Weight Independent Set Problem", Department of Industrial and Systems Engineering, Texas A&M University College Station, pp. 1-23, Aug. 2006.

[10] M. Afif, M. Likas, and V. Paschos, "A Natural Model and a Parallel Algorithm for Approximately Sloving the Maximum Weighted Independent Set Problem", Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 5, No. 5, pp. 739-746, May 1995, DOI:https://doi. org/10.1016/0960-0779(94)00175-P

[11] M. Luby, "A Simple Parallel Algorithm for the Maximal Independent Set Problem", SIAM Journal on Computing, Vol. 15, No. 4, pp. 1036-1053, Nov. 1986, DOI:https://doi.org/10.1145/ 22145.22146

[12] N. Li and L. J. Latecki, "Clustering Aggregation as Maximum-Weight Independent Set", NIPS'12 Proceedings of the 25th International Conference on Neural Information Processing Systems, Vol. 1, pp. 782-790, Dec. 2012.

[13] A. Grzesik, T. Klimošová, M. Pilipczuk, and M. Pilipezuk, "Polynomial-time Algorithm for Maximum Weight Independent Set on P_6-free Graphs", Cornell University, arXiv.org, Data Structures and Algorithms, arXiv:1707.0549, pp. 1-45, Dec. 2017.

[14] Y. D. Liang, S. K. Dhall, and S. Lakshmivarahan, "On the Problem of Finding All Maximum Weight Independent Sets in Interval and Circular-arc Graphs", IEEE Symposium on Applied Computing, pp. 465-470, Apr. 1991, DOI:https://doi.org/10.1109/SOAC.1991.143921

[15] J. M. Keil, D. Pradhan, and M. Vatshelle, "A Polynomial Time Algorithm for the Maximum Weight Independent Set Problem on Outerstring Graphs", Computational Geometry: Theory and Applications, Vol. 60, No. C, pp. 19-25, Jan. 2017, DOI:https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2016. 05.001

[16] E. Köhler and L. Mouatadid, "A Linear Time Algorithm to Compute a Maximum Weighted Independent Set on Cocomparability Graphs", Information Processing Letters, Vol. 116, No. 6, pp. 391-395, Jun. 2016, DOI:https://doi.org//10. 1016/j.ipl.2015.12.001

[17] A. Brandstädt and R. Mosca, "Maximum Weight Independent Set in lClaw-Free Graphs in Polynomial Time", Cornell University, arXiv.org, Data Structures and Algorithms, arXiv:1602.0583, pp. 1-16, Feb. 2016.

[18] G. H. Chen, M. T. Kuo, and J. P. Sheu, "An Optimal Time Algorithm for Finding a Maximum Weight Independent Set in a Tree", BIT Numerical Mathematics, Vol. 28, No. 2, pp. 353-356, Jun. 1988, DOI:https://doi.org/10.1007/ BF01934098

[19] K. Verhetsel, J. Pellerin, A. Johnen, and J. F. Remacle, "Solving the Maximum Weight Independent Set Problem: Application to Indirect Hex-Mesh Generation", 26th International Meshing Roundtable, pp. 1-69, Sep. 2017.

[20] H. P. Sariel, "CS 473: Fundamental Algorithms, More Dynamic Programming", University of Illinois, Urbana-Champaign, pp. 1-37, Feb. 2011.

[21] K. Erciyes, O. Dagdeviren, D. Cokuslu, O. Yilmaz, and H. Gumus, "Modeling and Simulation of Mobile Ad hoc Networks", Mobile Ad hoc Networks, pp. 134-168, CRC Press, Nov. 2011, DOI:https://doi.org/10.1201/b11447-5

저 자 소 개

이 상 운(정회원)

- 1987년: 한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
- 1997년: 경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
- 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
- 2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과 전임강사
- 2004년 ~ 2007.2 : 국립원주대학 여성교양과 조교수
- 2007.3 ~ 2015.3 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
- 2015.4 ~ 현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 정교수
- 관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 개발 방법론, 분석과 설계 방법론, 시험 및 품질보증, 소프트웨어 신뢰성, 최적화 알고리즘
- e-mail : sulee@gwnu.ac.kr