Journal of Convergence for Information Technology
Vol. 10. No. 7, pp. 131-137, 2020
e-ISSN 2586-4440
DOI : https://doi.org/10.22156/CS4SMB.2020.10.07.131

정현파로 가진한 강제진동 해석과 응답특성

김종도[1], 윤문철[2*]
[1]중원대학교 산학협력단 조교수, [2]부경대학교 기계설계공학과 교수

Response Characteristics of Forced Vibration Model with Sinusoidal Exciting Force

Jong-Do Kim[1], Moon-Chul Yoon[2*]
[1] Assistant Professor, Industry Academic Cooperation Foundation, Jungwon University
[2]Professor, Department of Mechanical Design Engineering, Pukyung National University

요 약 가진 정현파 강제력에 의한 강제 진동의 특성이 연구되었고 또한, 주파수 영역에서 FRF의 수치 분석을 자세히 수행하였다. 이와 관련하여 강제 진동 모델에서 변위, 속도 및 가속도의 응답을 구하였다. 고유 주파수 주변의 실수부와 허수부의 FRF 특성도 각 경우에 따라 구하였다. 시간 영역에서의 강제 진동의 응답분석은 정현파 강제 진동의 특성을 식별할 수 있다. 변위, 속도 및 가속도 등의 응답을 얻기 위해 Runge-Kutta-Gill 방법의 수치해석 기법을 수행하여 강제력 주파수에 따른 응답을 얻었고 이 주파수는 응답에 큰 영향을 미치지 않았다. 또한, FRF는 강제 진동의 고유 특성을 나타내고 있으며 이러한 강제 진동 모델의 각 감쇠 조건에서 이러한 응답분석을 성공적으로 자세하게 얻을 수 있었다. 상이한 질량, 감쇠 및 강성에 대한 수치 분석 후, 정현파 강제력에 의한 강제 진동 응답 특성을 강제력의 진폭 및 주파수를 동시에 고려하여 분석되었다.

주제어 : 가진력, 강제진동, 주파수응답함수, 고유주파수, 나이키스트선도

Abstract The characteristics of forced vibration with excited sinusoidal force was introduced. Also, numerical analyses and *FRF* in frequency domain were performed in detail. In this regard, the responses of displacement, velocity and acceleration were investigated in a forced vibration model. The FRF characteristics in real and imaginary part around natural frequency are also discussed. This response approach of forced vibration in time domain is used for the identification and monitoring of sinusoidal forced vibration. For acquiring a displacement, velocity and acceleration, a numerical technique of Runge-Kutta-Gill method was performed. For the *FRF*(frequency response function), These responses are used. Also, the *FRF* can represent the intrinsic characteristics of the forced vibration. These performed results and analysis are successful in each damped condition for the forced vibration model. After numerical analysis of the different mass, damping and stiffness, the forced vibration response characteristics with sinusoidal force was discriminated considering its amplitude and frequency simultaneously.

Key Words : Excited force, Forced vibration, FRF, Natural frequency, Nyquist chart

*Corresponding Author : Moon-Chul Yoon(mcyoon@pknu.ac.kr)

Received May 19, 2020
Revised June 23, 2020
Accepted July 20, 2020
Published July 28, 2020

1. 서론

본 연구는 1 자유도 시스템에서 일반적으로 사용되는 감쇠 정도에 외부에서 동적인 정현파 강제력이 가해질 때 그 진동시스템의 거동 특성을 알아보기 위한 기초 연구로 시작되었다. 본 연구에서는 보다 구체적인 결과를 비교 분석하여 감쇠에 따른 시스템 특성을 좀 더 구체적으로 밝히고자 하였다[1,2]. 기계 구조물이나 자동차 시스템에서 감쇠원의 종류도 중요하지만 주어진 시스템에서 여러 가지 외부의 동적인 힘을 고려한 그 시스템 응답 특성을 알 수 있다면 그 시스템에서 고유 특성을 보다 자세히 알아 볼 수 있다. 따라서 모든 동적인 힘은 그 크기와 주파수를 갖고 있으므로 가진될 때 그 동적 힘의 진폭과 주파수 등에 따라 시스템의 응답 거동이 자유진동의 경우와 달리 어떻게 나타나는가를 알아볼 필요가 있다[4-7]. 예를 들어 자동차의 경우에 임의의 등가 점성 감쇠 계수가 차체에 주어질 수 있고 경우에 따라 다른 거동이 나타나게 되어 운전자는 다른 승차감을 갖게 된다. 또한, 바닥에서 차체에 주어지게 되는 힘에 따라 그 자동차 전체에서 일어나는 응답 특성은 자유진동과 달리 불안정한 강제진동특성이라고 할 수 있다. 따라서 이러한 강제진동 연구에 필요한 가장 선행 기본 연구[8,9]로서 정현파 강제 진동을 우선적으로 연구하게 되었다. 현재까지 이러한 내용에 대한 구체적인 결과는 여러가지 서적[3,10]에서 간단하게 소개되고 있으며 자세한 결과물은 매우 드물다고 할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 이 강제진동의 경우 발생되는 응답 특성을 시스템 질량, 감쇠계수 및 스프링 강성에 따라 어떤 결과가 나타나는지 알아보고자 하였다. 자동차 강제진동의 사전 연구로 외부의 힘을 진폭과 주파수를 갖는 동적인 외부 가진력으로 가정하여 그 응답 특성을 알아보았고, 우선 자유진동인 경우의 시스템 특성을 나타내는 결과를 얻고 이를 기반으로 외부 가진력에 의하여 나타나는 변위, 속도, 가속도의 응답 특성을 자세히 분석하고자 하였다. 또한, 감쇠 효과에 대한 기본 개념을 이해하기 위하여 감쇠비와 주파수에 대한 그 응답 특성, 시간 응답, 파워 스펙트럼 및 나이키스트 선도 등을 분석하여 1 자유도 진동시스템을 자세하게 전체에 걸쳐 체계적으로 분석하고자 하였다. 연구를 위하여 시스템을 2차 진동모델로 하여, 시스템의 강제진동의 특성을 분석하고 동적인 외부의 힘에 따라 나타나는 진동 응답 특성을 구하였다. 차후에는 자동차에 가해지는 외부 힘을 다른 가진력으로 가정하여 실제 자동차 모델의 거동을 연구하고자 하며, 주어진 외부의 힘이 있는 강제진동 모델에서 변위, 속도 및 가속도 응답을 수치해석으로 구하였고 감쇠에 따른 시스템의 진동특성을 분석하였다. 본 연구에서는 주파수 영역 분석을 통하여 실수부와 허수부, 파워 스펙트럼 등의 FRF, 나이키스트 선도 등도 동시에 구하여 감쇠에 따른 진동 시스템을 이해하기 쉽도록 그 분석을 구체적으로 비교 분석하여 특성을 판단하고자 하였다.

2. 2차 진동모델

강제 진동 시스템의 지배방정식으로 식 (1)과 같이 정의하였다. 강제 진동모델은 Fig. 1과 같이 표현할 수 있고 진동 시스템의 출력 $x(t)$는 각각 고유진동수의 특성을 갖고 있다. 진동모델의 상당 질량이 m, 감쇠계수 c, 강성이 k인 2차 강제 진동시스템을 나타내는 SDOF 시스템의 운동 방정식은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k\,x(t) = f(t) \tag{1}$$

식 (1)의 해는 시스템의 변위, 속도 및 가속도를 나타내게 되며 Runge-Kutta-Gill[3] 방법을 이용하여 구할 수 있고 시스템의 속도 $\dot{x}(t)$에 비례하는 힘 $f(t)$는 식 (2)와 같다.

$$f(t) = c\,\dot{x}(t) \tag{2}$$

식 (1)의 해는 다음과 같이 나타내며,

$$x(t) = x_o e^{st} \tag{3}$$

라플라스 연산자 s를 사용하여 식(1)의 특성 방정식은 Eq. (4)와 같다.

$$m s^2 + c\,s + k = 0 \tag{4}$$

시스템의 임계 감쇠 계수 $c_{cr} = 2\sqrt{m\,k}$ 이고, c/c_{cr}를 감쇠비 ζ로 나타내고 식 (5)와 같다.

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} \tag{5}$$

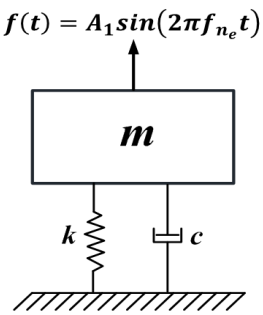


Fig. 1. Single degree-of-freedom vibration model

시스템의 상태를 확인할 수 있는 감쇠비는 임계 감쇠 (ζ=1), 댐핑 (ζ〈1) 또는 오버 댐핑 (ζ〉1)으로 나눌 수 있다. 식 (4)의 두 개의 s 근은[11],

$$s_{1,2} = -\omega_n \zeta \pm i\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{6}$$

이다. 초기 변위에 대한 감쇠가 큰 시스템은 다른 시스템보다 빠르게 0으로 수렴하고 감쇠가 있는 시스템은 시스템의 고유 주파수보다 낮은 주파수로 감쇠되어 그 고유주파수 ω_d는 식 (7)과 같이 된다.

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{7}$$

주어진 가진력 $f(t)$가 고조파인 경우 식 (8)과 같이 정의될 수 있다.

$$f(t) = A_i \sin(2\pi f_{n_e} t), \ (i = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

또한 정현파로 가진된 감쇠 시스템의 FRF는 Eq. (9)로 주어지고, 일반적인 FRF는 보드 선도(Bode plot)라고 하고 그 크기와 위상 각 ϕ는 식(9), 식(10)으로 나타낼 수 있다.

$$h(\omega) = \frac{1}{k + i\omega c - \omega^2 m} \tag{9}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{Imginary(h(\omega))}{Real(h(\omega))}\right) \tag{10}$$

3. 시간 및 주파수 영역 분석

강제진동의 기본 특성은 주파수 영역에서 자유진동의 기본 특성과 거의 일치하는 특성을 나타낸다. 그러나 시간 영역에서는 강제진동인 경우 강제력에 따라 그 응답 특성이 많이 다르게 된다. 자유진동과 같이 가장 유사한 경우가 정현파 가진된 경우로 이 경우 가진력이 0을 중심으로 양과 음으로 반복되고 마치 백색잡음과 같이 평균 0 인 자유진동의 특성을 나타낸다. Fig. 2는 진동모델에서 얻게 되는 변위 신호를 이용하여 주파수 영역에서 그 모델의 특성을 나타내는 FRF(frequency response function)을 구한 것으로 각 그림에서 진동 시스템의 고유진동수 영역에서의 각각의 특성을 알 수 있다. (a)는 실수부를 구한 것이고 (b)는 허수부, (c)는 파워 스펙트럼을 보여주고 있고, (d)는 시스템의 위상 변화를 보여주고 있다. 각 FRF에서 시스템 고유진동수의 위치를 알 수 있고 그 크기는 $f_n = 15.92\,Hz$으로 한 경우이고 주파수 영역에서 각 FRF에서 그 위치를 알 수 있다.

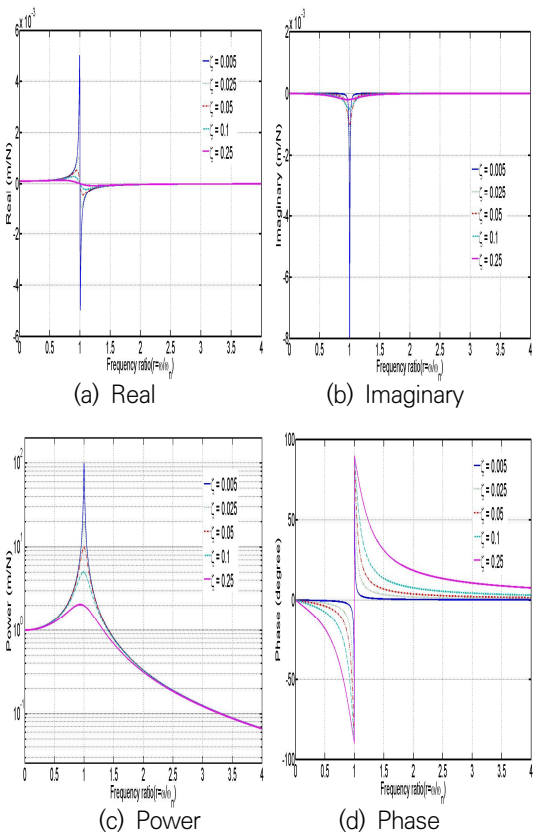


Fig. 2. Amplitude and phase of the FRF of a viscously damped SDOF system for ζ. m = 1 kg, k = 10000 N/m.

속도와 가속도의 신호를 이용하여 구할 수 있고 그 결과는 변위를 이용하여 구한 FRF의 결과들과 같은 특성을 얻었고, 이후부터는 가장 특이한 특성을 나타내는 변위로만 그 거동을 분석하고자 하였다. 시스템의 점성 감쇠 효과는 Fig. 2와 같이 얻어지며 감쇠가 안 된 시스템의 경우는 $\zeta = 0$ 이고, 실수부, 허수부, 파워 등을 나타내는 식 (9)의 절대 값은 $\omega = \omega_n$ 일 때 가장 큰 값을 갖게 된다. 보통은 작은 감쇠라도 실제로 항상 있다고 볼 수 있고 이 경우 감쇠비를 갖게 되어 Fig. 2와 같이 각 그림에서 고유 주파수 부근에서 큰 진폭을 나타내어 불안정한 상태를 발생할 수가 있다. 점성에 의한 감쇠 효과는 공진점에서 잘 나타나고 시스템 감쇠가 크면 그 피크 값이 줄어드는 것을 Fig. 2에서 볼 수 있다. 변위의 최대 진폭은 고유진동수 ω_n이 아니라 ω_d에서 발생하게 되고 응답의 위상 변동이 90 에서 -90 까지 나타나 감쇠가 있는 공진점에서 180 의 위상차가 있게 된다. 각각의 FRF 를 분석하면 감쇠 특성을 알 수 있고 로그를 취한 보드선도로 그 시스템 안정성을 알 수 있다.

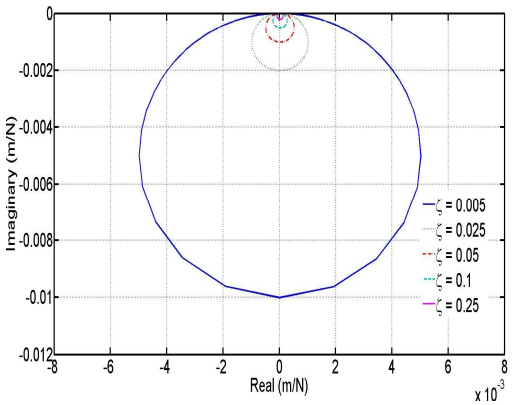


Fig. 3. Nyquist plot of a viscously damped SDOF system for different values of ζ, $m = 1\,kg$ and $k = 10000\,N/m$

Fig. 3은 나이키스트 선도를 나타내며 시스템의 감쇠 특성을 알 수 있고 복소평면에서 공진점에 가까운 주파수를 알 수 있고 이 곡선의 크기가 감쇠비의 정도를 나타내고 있다.

4. 정현파 가진력에 따른 응답 특성

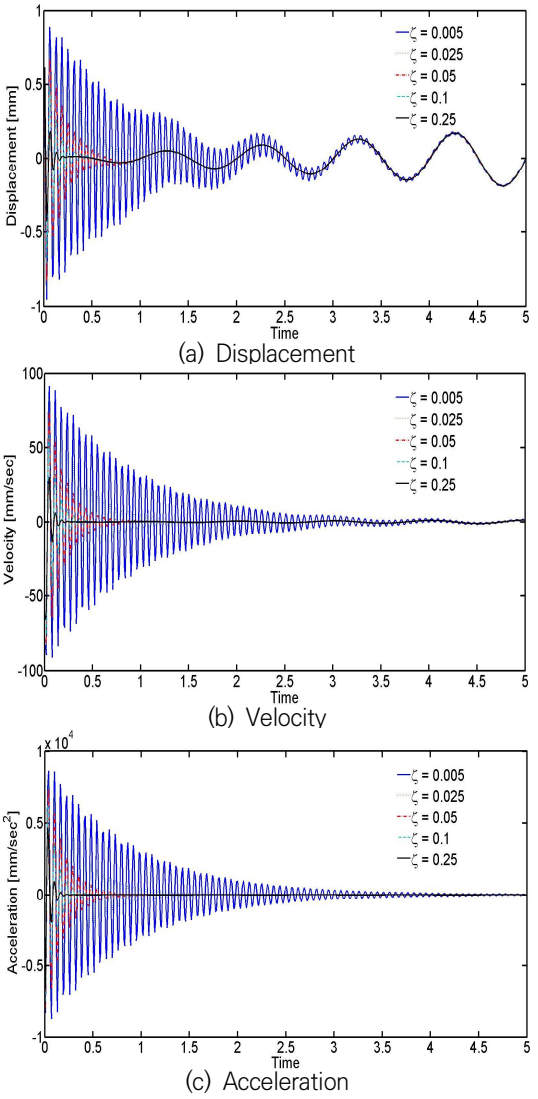


Fig. 4. Free vibration time response for an initial unitary displacement with different values of ζ and $\omega_{n_i} = 10\,rad/s$

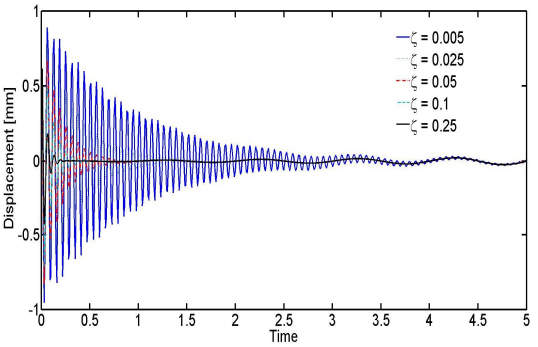
주어진 강제진동 모델에 가해지는 가진력 $f(t)$가 정현파인 경우로 다음과 같이 정의한다.

$$f(t) = \sum_{i}^{n} A_i \sin(2\pi f_{n_i} t),\ (i = 1, \ldots, n) \qquad (11)$$

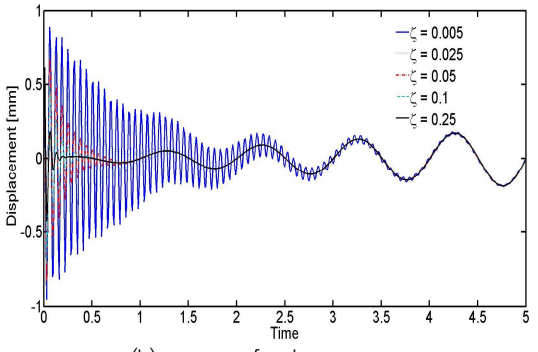
Fig. 4는 $m = 1\,kg$, $k = 10000\,N/m$, $\omega_n = 100\,rad/s$ 인 경우이고 감쇠계수 c를 1 ~ 50으로 하여 구한 결과이다. 감쇠가 없는 시스템 (ζ= 0)에서는 무한히 진동하게 된다. 감쇠가 있는 강제진동의 경우 그 응

답이 점차 줄어들어 강제외력 $f(t)$의 주파수 특성은 응답에 그대로 나타나게 되며 그 진동은 2차 적인 진동으로 중첩하여 나타난다. Fig. 4(a)에는 가진 외력의 주파수가 정현파로서, 가진 주파수 ω_{n_i}가 10 rad/s(1.592 Hz)인 경우이다. 변위 응답 거동에 주파수가 중첩되어 나타나고 있다. 속도나 가속도에서도 그 중첩 성분은 있으나 변위보다는 약하며 시간이 지남에 따라 초기 응답 크기보다 매우 작게 나타나고 그 섭동 특성은 Fig. 4(b),(c)에는 잘 나타나지 않으나 주파수 특성을 그대로 가지고 있다. 속도의 경우 시간이 변함에 따라 진폭이 커지고 있으나 변위의 거동보다는 안정적인 속도 응답을 나타내고 섭동이 빨리 수렴하는 것을 알 수 있다. 가진 주파수는 $f_{n_i}=1.592\,Hz$ 인 경우로 속도에서도 가진 주파수가 중첩되는 것을 알 수 있고 진동에 있어서 큰 영향력이 없다. 가진력의 크기는 변위와 같이 속도 응답에 상대적으로 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 가속도의 거동에서는 Fig. 4(c)와 같이 가해지는 가진력 $f(t)$의 진폭을 달리하여 가했을 때 시간이 변함에 따라 진폭이 커지고 있고 변위 및 속도의 거동보다도 더욱 안정적인 응답으로 나타났다. 이러한 결과를 이용하면 가장 약한 가속도 신호를 이용하여 진동의 시스템을 분석하면 불안정한 상태가 더욱 변위 거동에서는 뚜렷하게 나타나게 되는 것을 알 수 있다. 즉, 가속도계를 이용하여 진동특성을 분석하는 것이 상대적으로 진동 신호 분석에 수월하다는 것을 알 수 있다.

Fig. 5는 $m=1\,kg$, $k=10000\,N/m$인 진동모델에서 식 (11)의 가진력 진폭 크기를 다르게 가하였을 때 변위 특성을 나타낸다. 강제력 $f(t)$가 외력으로 다르게 작용하는 경우, 변위의 거동을 나타낸 것이다. 응답 거동은 식 (11)의 i 가 한 개만 있는 경우로 진폭을 크게 하였을 때 큰 진동을 나타내고 시간이 변함에 따라 점차 변위가 크게 나타나고 있는 것을 알 수 있다. 이는 강제진동의 모델에 가해지는 힘에 의한 변위 응답을 나타낸다고 할 수 있다. 강제력의 진폭이 증가함에 따라 시간이 지날수록 점차 불안정해지는 것을 알 수 있다. 시스템의 고유진동수가 $\omega_n=100\ \ rad/s$ $(f_n=15.92\,Hz)$ 인 경우, 가진주파수 $\omega_{n_i}=10\,rad/s$ $(f_{n_i}=1.592\,Hz)$인 주파수가 중첩되어 있게 되는 것을 알 수 있다. 가진 주파수에 의한 거동은 가진력이 클 때 나타나고, 특히 가진력이 크게 될 때 시스템이 매우 불안정해지는 것을 알 수 있다. 가진력의 진폭을 작게 고정시키고 가진 주파수를 $f_{n_i}=1.592\,Hz$, $3.184\,Hz$, $4.776\,Hz$, $15.92\,Hz$ 등으로 하여 변위 특성을 구한 결과 각각의 경우 모두 차이가 없이 같게 나왔다. 이는 안정성에 있어서 가진 주파수는 진동시스템의 응답 특성에 큰 영향력이 없는 것으로 판단된다. 진동시스템의 고유진동수가 고정된다 하더라도 시스템에 나타나는 응답의 안정성도 강제력의 크기가 가장 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다.



(a) $A_1=50$ for small amp.

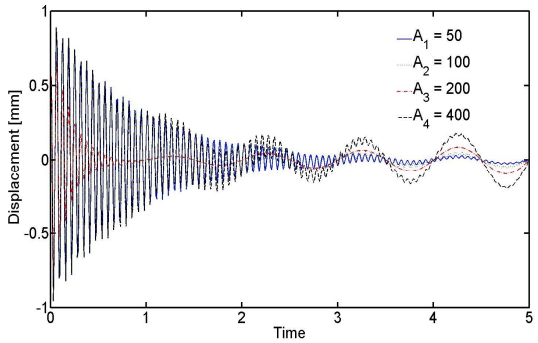


(b) $A_1=400$ for large amp.

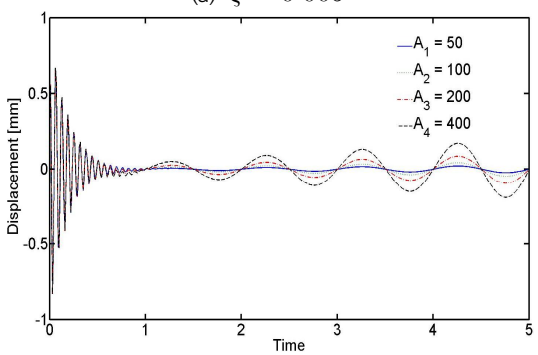
Fig. 5. Displacement for the system of $\omega_n=100\,rad/s$

Fig. 6은 감쇠 계수를 달리하여 가진력 진폭에 따른 변위의 거동을 구한 결과이다. 가해지는 $f(t)$의 진폭을 점차 크게 하면 변위의 응답이 시간이 변함에 따라 진폭이 커지고 불안정해 지고 있으며 감쇠비가 커지면 초기의 변위 거동이 안정적인 응답으로 나타났다. 그러나 시간이 점차 지남에 따라 자유진동과 달리 강제진동의 경우는 변위의 진폭 거동은 점차 커질 수 있음을 알 수 있다. 따라서 외력의 크기가 어느 정도 있게 되면 진동시스템의 감쇠계수를 높이지 않으면 시간이 지남에 따라 시스템이 불안정해질 수 있음을 보여 주고

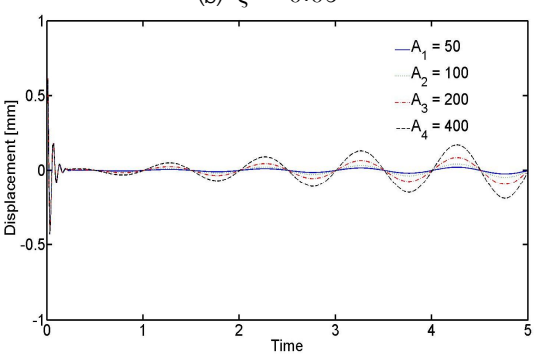
있다. 즉 감쇠가 어느 정도 이상으로 시스템에서 부가되어야 변위 응답이 안정하게 될 수 있음을 알 수 있다. 또한, 가진 주파수에 의한 거동은 시스템의 안정성에 영향이 없다.



(a) $\zeta = 0.005$



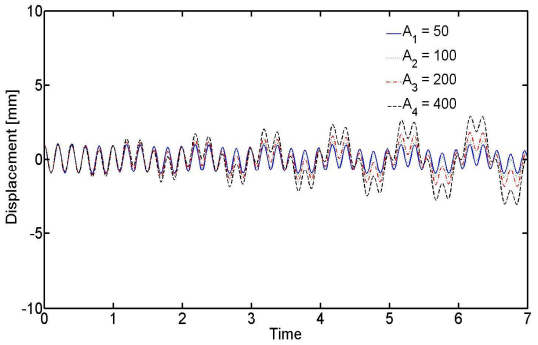
(b) $\zeta = 0.05$



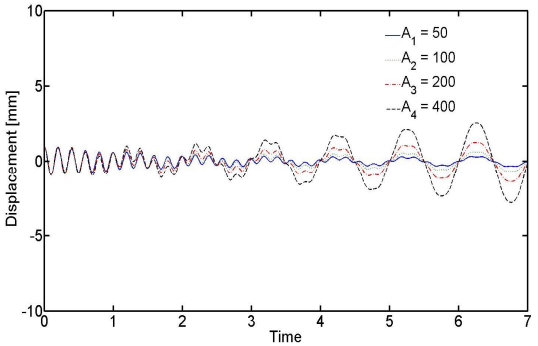
(c) $\zeta = 0.25$

Fig. 6. Displacement response for $m = 1, k = 10000$

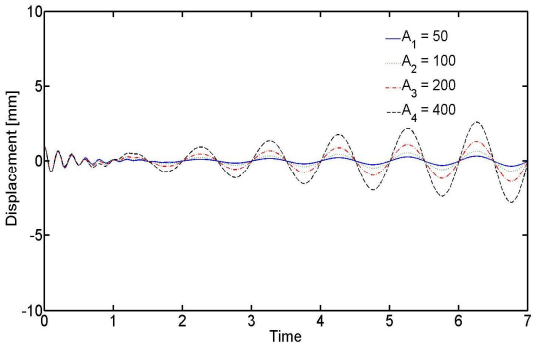
Fig. 7은 질량이 상대적으로 큰 $m = 50$, $k = 10000$인 모델의 경우로 감쇠비를 달리하여 가진력 진폭에 따른 변위의 거동을 나타낸다. 강제력 $f(t)$의 진폭을 점차 크게 하면 변위의 응답이 시간이 변함에 따라 진폭이 커지고 있으며 감쇠비가 커지면 변위의 거동이 초기에 안정적인 응답으로 나타나며 이후 시간이 점차 지남에 따라 변위 진폭이 커져 불안정해 짐을 알 수 있다.



(a) $\zeta = 0.005$



(b) $\zeta = 0.05$



(c) $\zeta = 0.25$

Fig. 7 Displacement response for $m = 50, k = 10000$

시스템이 주어질 때 감쇠비를 높이면 시스템의 진동 진폭은 줄일 수 있지만 가진력 주파수의 크기가 크게 되면 시스템의 변위 거동은 시간이 지남에 따라 중첩된 가진 주파수의 진동이 그 변위에 중첩되어 나타나고 시간이 지남에 따라 시스템이 불안정해질 수 있음을 보여 주고 있다. 따라서 감쇠가 어느 정도

이상으로 크게 시스템에서 주어지거나 강성이 큰 시스템으로 설계되어야 외부의 가진력에 의한 변위가 충분히 작게 되어 안정하게 되는 것을 알 수 있다. 그리고 이 경우 변위의 증가 정도는 감쇠비에 따라서는 영향을 받지 않는다는 것을 보여 주고 있다.

5. 결 론

본 연구는 외부에서 동적인 가진력이 가해진 진동모델의 응답과 특성을 연구하였고 그 연구결과는 다음과 같다.

(1) 정현파 가진력으로 강제 진동모델의 변위 응답을 구하였고 그 특성을 연구하였다. 연구결과 가진력의 크기와 주파수에 따른 시스템의 응답 거동과 각 조건에 따른 진동특성을 예측할 수 있었다.

(2) 외부에서 가해지는 가진력의 진폭이 커질수록 진동시스템을 불안정하게 만드는 것을 알 수 있고 특히 질량, 감쇠 및 강성은 주어진 시스템의 기본적인 감쇠하는 정도를 나타낼 뿐이고, 가진력의 크기와 주파수에 따라 응답에 중첩되어 다르게 나타난다.

(3) 강제진동모델에서 시스템을 불안정하게 하기 위해서는 동적인 가진력이 어느 정도 큰 진폭으로 가해져야 시스템을 불안정하게 할 수 있다. 그 크기는 시스템 변수 질량, 감쇠비와 강성에 의하여 결정된다. 따라서 감쇠가 어느 정도 이상으로 크게 시스템에서 주어지고 외부의 가진력의 크기가 시스템이 견딜 만큼 충분히 작아야 시스템이 안정하게 되는 것을 알 수 있다.

REFERENCES

[1] J. D. Kim, M. C. Yoon, S. J. Kim & B. S. Yang. (2010). Mode Analysis of Uncoupled System. *Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers, 9(3),* 35-41.

[2] J. D. Kim & M. C. Yoon. (2010). Mode Analysis of Coupled System. *Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers, 9(3),* 28-34.

[3] C. Steven Chapra. (2010). Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists : McGraw-Hill.

[4] M. C. Yoon, J. D. Kim & K. H. Kim. (2006). Parametric modelling of uncoupled system. *Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers, 5(3),* 36-42.

[5] M. C. Yoon, J. D. Kim & B. T. Kim. (2006). Parametric modelling of coupled system. *Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers, 5(3),* 43-50.

[6] K. Kanazawa & K. Hirata. (2005). Parametric estimation of the cross-power spectral density. *Journal of Sound and Vibration, 282,* 1-35. DOI : 10.1016/j.jsv.2004.02.009

[7] S. M. Kay. (1990). Modern spectral estimation: theory and application : Prentice-Hill.

[8] L. Gaul. (1999). The influence of damping on waves and vibrations. *Mechanical Systems and Signal Processing, 13(1),* 1-30. DOI : 10.1006/mssp.1997.0185

[9] L. Ljung & T. Glad. (1999). *Modeling of Dynamic Systems : Prentice-Hill.*

[10] Y. Altintas. (2000). *Manufacturing Automation : Cambridge University.*

[11] S. S. Rao. (2011). *Mechanical Vibrations(5th edition) : Prentice-Hill.*

[12] M. Prandina. (2010). *Spatial Damping Identification,* PhD thesis, University of Liverpool.

[13] S. Nakamura. (1995). *Applied Numerical Methods in C : Prentice Hall.*

김 종 도(Jong-Do Kim) [정회원]

· 2006년 8월 : 부경대학교 기계공학부(공학석사)
· 2012년 2월 : 부경대학교 기계공학부(공학박사)
· 2015년 9월 ~ 현재 : 중원대학교 산학협력단 조교수
· 관심분야 : 기계가공, 생산자동화
· E-Mail : jdkim@jwu.ac.kr

윤 문 철(Moon-Chul Yoon) [정회원]

· 1989년 8월 : 서울대학교 기계설계공학과(공학박사)
· 1990년 9월 ~ 현재 : 부경대학교 기계설계공학과 교수
· 관심분야 : 정밀가공
· E-Mail : mcyoon@pknu.ac.kr