한국초등수학교육학회지 *24*(1) 89-108. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* *24*(1) 89-108.
2020. 2. 28 *February 28. 2020.*

초등학교 5학년의 산술적 사고 수준 분석

임미인[1)]

산술은 학교수학의 기초가 되기 때문에 학생들의 계산 숙달의 측면을 넘어서 산술적 사고 수준을 신장시키는 방향으로 의미 있게 지도되어야 한다. 이에, 본 연구에서는 임미인, 장혜원(2017b)에서 개발한 산술적 사고 수준 검사 도구를 활용하여 초등학교 5학년 100명을 대상으로 산술적 사고 수준을 분석하였다. 분석 결과, 100명 중 82명이 산술적 사고의 1수준, 15명이 2수준에 해당하고, 0수준, 3수준, 4수준에 해당하는 학생이 각 1명인 것으로 나타났다. 이는 초등학교 고학년에 해당하는 5학년 학생들의 산술적 사고 수준이 일반적인 예상보다 낮음을 보여 주는 결과이다. 따라서, 높은 비율을 보인 1수준, 2수준 학생들이 지니는 산술적 사고의 특징, 오류 유형 등을 분석하고, 그에 대한 논의로부터 초등 수학에서 학생들의 산술적 사고 수준을 신장시키는 것에 관한 유의미한 시사점을 도출하였다.

주제어: 초등 수학, 산술, 산술적 사고 수준

Ⅰ. 서 론

사회가 급속도로 변화함에 따라 수학교육의 내용과 방법 측면에서 다양한 변화가 이루어지고 있음에도 불구하고, 여전히 초등 수학에서 수와 연산, 즉 산술은 가장 기본이고 핵심적인 영역이라 할 수 있다. 이는 ‘산술이 수학의 ABC이다’라는 일상적 비유까지 가능하게 한다. 산술의 중요성과 가치는 Dewey, Pestalozzi, Piaget 등을 통해 널리 알려졌을 뿐만 아니라, 여러 선행 연구(강흥규, 1997; Fatwasari & Ernawati, 2019; NCTM, 2000; Vergnaud, 1979 등)를 통해서도 확인된다. 따라서 초등 수학에서 산술의 유의미한 지도 방법은 무엇인지에 대해 지속적이고 체계적인 연구가 이루어져야 한다.

국립국어원(2020)에 따르면, ‘산술’은 ‘일상생활에서 실제로 응용할 수 있는, 수와 양의 간단한 성질 및 셈을 다루는 수학적 계산 방법’으로 정의된다. 이를 통해 산술이 일반적으로 ‘계산 방법’의 의미로 통용된다고 볼 수 있다. 즉, 산술이라는 용어 자체는 기능적, 방법적 측면의 느낌을 제공하는 것이다.

그렇다면 산술을 기능적 측면, 즉 계산 기능의 숙달만을 강조해서 지도해야 할까? 산술을 계산 기능이나 방법에만 초점을 두고 지도하는 것은 적절하지 않다는 여러 주장이 있어 왔다. Vergnaud(1979)는 학생들이 겪는 계산 관련 어려움은 대부분 계산 기능에 관한 능력 부족 때문이 아니라 관련 개념에 대한 이해 부족 때문이라고 주장하였다. 초등 수학에서 산술을 지도할 때 지나치게 계산 기능의 숙달만을 강조할 경우, 부정적인 수학적 성

1) 서울개명초등학교, 교사

향의 초래로 이어질 수 있다. 실제로 임미인, 장혜원(2016)은 별도의 과외 학습을 통해서 계산 기능의 숙달을 위한 보충 지도를 받고 있음에도 불구하고, 유독 수와 연산 영역에서만 부진을 겪고 부정적 태도를 지니고 있는 6학년 학생 사례를 제시한 바 있다. 학교 현장에서 이처럼 산술 관련 학습에서 특히 어려움을 겪고 있는 학생들을 쉽게 찾아볼 수 있다. 따라서 산술은 계산 기능을 강조하는 것을 넘어서 의미 있게 지도되어야 한다.

산술을 의미 있게 지도하기 위해서는 계산 기능뿐만 아니라 학생들이 지니는 개념적 이해와 절차적 이해, 학습한 것을 적용하는 능력, 학생들의 수학적 사고 등에 관심을 기울여야 한다는 다양한 주장들이 있어 왔다. 예컨대, Baroody & Dowker(2003)는 산술 지도 시 학생들이 학습한 것을 다른 상황에 적용할 수 있는 능력을 길러주어야 하고, 이를 위해 교사는 학생들의 개념적 이해와 절차적 지식에 주의를 기울일 필요가 있다고 하였다.

또한 산술 지도 시 학생들의 사고 작용에 관심을 기울이는 것이 중요하다고 주장한 연구도 다수 찾아볼 수 있다(김남희, 1994; 김성준, 2002; 도종훈, 최영기, 2003; 이종학, 2014; 이화영, 2011; Brownell, 1947; Buswell, 1950; Dooren et al., 2002; Filloy & Rojano, 1989; Guberman, 2016; Steffe & Cobb, 1988 등). Brownell(1947)은 산술을 수 개념의 이해, 사칙연산에 대한 이해, 산술에서의 법칙·관계·일반화에 대한 이해, 십진법 수 체계의 이해의 4가지로 범주화하였다. 또한 산술을 양적 사고를 개발하는 방식으로 의미 있게 지도해야 한다고 주장하였다. Buswell(1950)은 연산에 대한 개념적 이해 없이 반복 연습으로 계산 기능을 숙달하는 데 집중하는 산술 교육을 비판하고, 학생들의 사고 수준을 고려한 산술 지도가 필요하다고 하였다. 이를 통해 계산 기능의 강조가 일반적이었던 과거에도 산술적 사고 측면의 중요성을 인지하고 있었음을 알 수 있고, 이러한 생각은 오늘날에도 다수의 수학교육자들에게 지지받고 있는 견해이다. Dooren et al.(2002)은 산술 지도 시 양 사이의 관계 찾기, 미지수를 구하기 위한 연산 선택하기, 연산을 능숙하고 정확하게 수행하기뿐만 아니라 부분-전체 관계, 등호의 대칭성, 교환법칙과 결합법칙의 이해 등을 신장할 수 있도록 해야 한다고 주장하였다. 이종학(2014)은 산술은 양 사이의 관계 분석, 구조 파악, 모델링, 수학적 문제 해결, 정당화, 반성 등의 수학적 사고를 개발하는 방식으로 지도되어야 한다고 하였다. 이와 같은 선행 연구의 주장에 기초할 때, 산술을 의미 있게 지도한다는 것은 학생들의 사고에 주의를 기울이고 그러한 사고를 개발하고 신장시키는 것을 함의함을 알 수 있다.

학생들이 산술에 대해 의미 있게 이해하기 위해서는 산술적 사고가 수반되어야 하며(Guberman, 2016), 산술적 사고에 대한 이해로부터 수학적 안목을 키우는 방향으로 산술 교육이 이루어져야 한다. 즉, 학생들이 산술을 풍부히 이해하도록 돕기 위해서 산술적 사고에 기초한 교수·학습이 이루어질 필요가 있다.

이때 산술적 사고 자체뿐만 아니라, 학생들의 산술적 사고 수준에 대해 이해할 필요가 있다. 이와 관련하여 임미인, 장혜원(2017b), Guberman(2016), Leontiev(2005), van Hiele(1986) 등은 산술적 사고뿐만 아니라 산술적 사고의 발달에 관한 연구를 수행한 바 있다.

본 연구에서는 산술 교육 시, 산술적 사고 발달의 관점에서 학생들의 산술적 사고의 특징 및 수준을 파악하여 산술적 사고를 신장하는 방향에 적합한 지도를 해야한다는 관점을 취하였다. 이에, 산술적 사고 수준 검사 도구(임미인, 장혜원, 2017b)를 활용하여 초등학교 5학년들의 산술적 사고 수준을 분석함으로써 산술 교육에 관한 유의미한 교수학적 시사점을 도출하는 것을 연구의 목적으로 설정하였다.

Ⅱ. 이론적 고찰

1. 산술적 사고

산술적 사고는 대수적 사고, 함수적 사고 등과 마찬가지로 ‘산술’이라는 내용과 관련된 내용적 사고의 성격을 띤다. 산술적 사고에 관한 선행 연구(임미인, 장혜원, 2017a)에 따르면, 산술적 사고는 ‘산술에서의 사고’, ‘산술을 수행할 때의 사고’ 등으로 볼 수 있다. 우정호, 김성준(2007)에서 대수적 사고를 ‘대수 학습에서 요구되는 사고’로 기술하고 있고, Smith(2007)에서는 함수적 사고를 ‘여러 가지 상황을 함수적인 관점에서 파악하여 처리하는 사고’라고 진술하고 있다. 즉, 수학적 사고 중에서 이러한 내용적 사고는 ‘~을 학습할 때 수반되는 사고’ 또는 ‘~적으로 처리하는 사고’와 같이 명제화할 수 있다. 따라서 산술적 사고는 ‘산술을 학습할 때 수반되는 사고’, ‘산술 학습 시 요구되는 사고’, ‘산술적으로 처리하는 사고’와 같이 취급할 수 있다. 이를 산술 개념에 기초하여 재정리하면, 산술적 사고는 ‘수를 조작하여 답을 구하고 수와 연산의 성질 및 관계를 인식하며 이를 통해 문제를 해결할 때 수반되는 사고’라고 정의된다(임미인, 장혜원, 2017a).

또한 임미인, 장혜원(2017a)에서는 산술적 사고를 보다 풍부하게 이해하기 위하여, 산술적 사고, 대수적 사고, 산술적 추론, 수 감각, 연산 감각에 관한 문헌(김성준, 2003; 김윤영, 2016; 이화영, 2011; 최지선, 박교식, 2009; Amerom, 2002; Guberman, 2016; Oliveira & Mestre, 2014; Warren, 2003 등) 분석, 전문가 델파이 조사를 통해 산술적 사고 요소 18가지를 추출하였다. 구체적으로 수 관련 산술적 사고 요소로, 수의 의미 이해하기, 수 세기, 수 표현하기, 자릿값과 십진법, 위치적 기수법 이해하기, 수의 크기 및 수 계열 이해하기의 5가지가 있다. 연산 관련 산술적 사고 요소에는 사칙연산의 의미와 원리 이해하기, 사칙연산 수행하기, 절차에 맞게 순차적으로 계산하기, 효율적인 계산 방법 개발하기, 연산의 성질 이해하기, 식으로 표현하기, 연산 사이의 관계 이해하기, 예상하고 확인하기, 연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기, 상황을 수학적으로 모델링하기, 문제 상황에 적절한 연산 선택하기의 11가지가 포함된다. 공통 요소로는 산술 용어 및 기호 이해하기, 양적 추론하기의 2가지가 해당된다. 임미인, 장혜원(2017b)은 van Hiele이 주장한 사고 수준 이론과 마찬가지로, 산술적 사고에 수준이 존재한다고 하였고, 산술적 사고 요소를 수준별로 범주화하여 제시하였다.

2. 산술적 사고 수준

van Hiele(1986), Guberman(2016)에 따르면, 산술적 사고는 널리 알려진 기하적 사고와 마찬가지로 사고 수준의 차이가 존재하며, 이는 학습을 통해 발달이 가능하다. 예컨대, van Hiele(1986)은 기하 학습 시 교사가 학생들과 다른 사고 수준에 해당하는 언어로 지도하기 때문에 학생들이 이를 이해하지 못함을 지적한 바 있다. 이는 사고 수준의 발달이 언어의 발달과 병행한다는 van Hieles의 주장에 근거한다. van Hiele(1986)은 사고 수준을 고려하지 않아 발생하는 이러한 문제점이 기하적 사고 수준에만 해당하는 것이 아니며, 산술적 사고도 학생들의 수준을 고려한 지도가 필요하다고 주장하였다.

같은 산술 문제를 해결할 때 학생별로 내면에서 작용하는 산술적 사고 과정과 그 수준

은 다를 것이다(Guberman, 2016; van Hiele, 1986). 더욱이 수학 교과는 위계성을 지니기 때문에, 성공적인 산술 교육을 위해서는 학생들의 산술적 사고 수준을 파악하고 그에 맞는 지도를 실시함으로써 학생들의 산술적 사고를 신장시키는 것이 중요하다.

임미인, 장혜원(2017b)에서는 van Hiele(1986), Guberman(2016) 등 선행 연구 분석 결과를 토대로 산술적 사고 수준을 파악하기 위한 검사 도구를 개발하였다. 검사 도구를 4차에 걸쳐 총 1,987명의 초등학생에게 적용하고 그 결과를 Guttman 척도에 따라 분석함으로써 산술적 사고 수준을 4가지로 범주화하였다(<표 1>).

<표 1> 산술적 사고 수준별 특징(임미인, 장혜원, 2017b)

수준		각 산술적 사고 수준에 해당하는 특징
1수준	행동 수준	· 개수를 세고, 수(자연수) 개념을 이해한다. · 산술 용어 및 기호를 이해한다. · 사칙연산의 의미와 원리를 알고 자연수의 사칙연산을 수행한다.
2수준	표현 수준	· 수(분수, 소수)를 다양하게 표현한다. · 자릿값, 십진법, 위치적 기수법을 이해한다. · 자연수의 크기를 비교하고 수 계열을 이해한다. · 분수, 소수의 사칙연산을 수행한다. · 혼합 계산을 절차에 맞게 순차적으로 계산한다. · 식으로 표현한다.
3수준	관계 수준	· 분수, 소수의 크기를 비교한다. · 효율적인 계산 방법을 개발한다. · 연산의 성질을 이해한다. · 연산 사이의 관계를 이해한다. · 예상하고 확인한다. · 연산 과정 및 결과에서 오류를 인지한다.
4수준	적용 수준	· 양적 추론을 한다. · 주어진 상황을 수학적으로 모델링한다. · 관련 연산이 직관적으로 파악되지 않는 문제 상황에서 적절한 연산을 선택한다.

이와 같은 산술적 사고 수준의 존재는 1수준, 2수준, 3수준, 4수준의 각 수준별 특징을 이해하고 개별 학생의 산술적 사고 수준에 알맞은 지도 방안을 마련하여, 단순히 학생들의 산술 기능 숙달을 넘어서서 산술적 사고를 신장시킬 수 있는 산술 교육을 해야 할 필요를 함의한다. 이때 1수준에 위치한 학생은 2수준으로, 2수준에 위치한 학생은 3수준으로, 3수준에 위치한 학생은 4수준으로 산술적 사고 수준을 신장할 수 있는 적절한 산술 지도가 이루어져야 함이 자연스럽다.

van Hiele(1986)에 따르면, 학생의 산술적 사고 수준을 고려한 적절한 학습이 이루어질 때 상위 수준으로의 발달이 가능하다. 따라서 산술적 사고의 의미나 요소, 각 수준별 특징을 파악하는 것을 넘어서, 학교수학에서 학생들의 산술적 사고 수준을 신장시킬 수 있는 적절한 교수·학습 방안을 모색하고 학생별 산술적 사고 수준을 파악하여 실제로 그에 맞게 지도해야 한다.

이때, 임미인(2017)에 따르면, 3수준에 해당하는 효율적인 계산 방법 개발하기, 연산의 성질 이해하기, 연산 사이의 관계 이해하기의 3가지 요소에 보다 주목할 필요가 있다. 현

행 우리나라 초등학교 교육과정 또는 초등학교 수학 교과서에서는 이에 관한 내용이 1~2학년군부터 등장한다. 실제로, 저학년 수학에서 여러 가지 방법으로 덧셈, 뺄셈을 하거나 덧셈의 교환법칙, 결합법칙에 관한 내용을 다루고 있다. 또한 덧셈과 뺄셈의 관계를 식으로 타나냄으로써 연산 사이의 관계를 이해하는 내용도 다루어진다. 그러나 임미인, 장혜원(2017b)의 연구 결과는 이러한 산술 학습이 3수준 관련 산술적 사고를 요구함을 보여 준다. 따라서, 1수준이나 2수준의 산술적 사고 수준에 해당하는 학생들에게는 이와 같은 학습이 인지적 어려움으로 작용할 가능성이 있다. 다수의 저학년 학생은 아직 산술적 사고의 1수준 또는 2수준에 머물러 있을 수 있고, 기초적인 산술 학습을 완료한 고학년 학생이라도 산술적 사고 수준에 있어서는 1수준이나 2수준에 머물러 있을 가능성이 있다. 1수준이나 2수준에 해당하는 학생으로 하여금 연산의 성질을 이해하거나 연산 사이의 관계를 이해하도록 요구하는 것, 효율적인 계산 방법을 개발하는 것 등은 그 학생의 사고 수준에 맞지 않아 학생의 수학 학습에 부정적 영향을 미칠 수 있다. 따라서 1수준 또는 2수준에 해당하는 학생에게 3수준에 관련된 학습 경험을 효과적으로 제공하는 지도 방안을 탐색할 필요가 있다. 즉, 상위 수준의 사고를 요구하는 내용을 다룰 때에는 아직 그 수준에 도달하지 못한 학생을 고려하여 더욱 세심하게 교수ㆍ학습을 설계하여 적용해야 한다.

이와 같은 선행 연구 결과를 종합해 볼 때, 개별 학생의 산술적 사고 수준을 판별한 후 산술적 사고의 관점에서 보충이 필요한 부분을 파악하고, 현재의 수준에서 보다 상위 수준으로 산술적 사고 수준을 신장시킬 수 있도록 알맞은 과제를 제공하고 적절한 언어 수준으로 지도해야 함을 알 수 있다. 즉 학생별로 산술적 사고 수준에 맞는 산술 지도를 실시함으로써 학생들의 산술적 사고의 신장을 도모할 수 있다.

이러한 이론적 고찰을 통해, 본 연구와 관련하여 우리나라 초등학생들의 산술적 사고 수준을 발달시키기 위해서 일차적으로 학생들의 산술적 사고 수준을 분석하고 그로부터 사고 수준의 신장을 위한 지도 방안을 모색하는 연구가 이어져야 할 필요를 파악하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 S시 A초등학교 5학년 학생 100명을 연구 대상으로 한다. S시 내에서 A초등학교는 교육 여건이 중하 수준에 해당하며, 수학 성취도가 상, 중, 하에 해당하는 학생들이 한 학급에서 함께 학습한다. 연구 대상은 A초등학교에서 개인 사정 상 검사 참여가 불가능했던 2명을 제외한 5학년 전체 학생이다. 즉, 연구 대상에는 수학 성취도가 상, 중, 하인 학생이 고루 포함되어 있으며, 이 중에서 언어적 장벽으로 인해 평소 수학 문제 해결 시 특별한 어려움을 겪고 있는 학생은 없다. 연구 대상을 5학년 학생으로 설정한 것은 아직 초등 수학 학습을 완료한 것은 아니지만, 5년 간 초등 수학을 학습한 이후에 학생들이 어느 정도의 산술적 사고 수준에 위치해 있는지 파악하기 위함이다. 학생들의 산술적 사고 수준을 분석하여 산술 학습에 관한 유의미한 시사점을 도출하고, 연구 대상으로 참여한 학생들에게도 추후 개별적인 보충 학습의 기회를 제공하여 산술적 사고의 신장을 도모하고자 하였다.

2. 검사 도구 및 판별 방법

검사 도구는 임미인, 장혜원(2017b)에서 산술적 사고 수준을 판별하기 위해 개발한 검사 도구('산술적 사고 수준 검사 도구')를 활용하였다. 이 검사 도구는 객관식 총 20문항으로 구성되어 있고, Guttman 척도를 따라 개발되었다. 1~5번 문항은 가장 하위 수준인 1수준에 해당하고, 6~10번은 2수준에, 11~15번은 3수준에, 16~20번은 가장 상위 수준인 4수준에 해당한다. 각 문항들은 각 수준 관련 산술적 사고를 통해 해결이 가능하도록 구성되어 있다. 검사 도구의 구체적인 문항 구성은 <표 2>와 같다.

<표 2> 산술적 사고 수준 검사 도구의 문항 구성(임미인, 2017)

수준	문항 번호	관련 산술적 사고 요소	문항 수
1수준	1	수의 의미 이해하기, 수 세기, 수 표현하기	5
	2	사칙연산의 의미와 원리 이해하기, 산술 용어 및 기호 이해하기	
	3	수의 의미 이해하기, 사칙연산의 의미와 원리 이해하기, 사칙연산 수행하기, 산술 용어 및 기호 이해하기	
	4	사칙연산의 의미와 원리 이해하기, 사칙연산 수행하기	
	5	사칙연산 수행하기	
2수준	6	자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기, 수의 크기 및 수 계열 이해하기	5
	7	절차에 맞게 순차적으로 계산하기	
	8	식으로 표현하기	
	9	수 표현하기	
	10	사칙연산 수행하기, 절차에 맞게 순차적으로 계산하기	
3수준	11	수의 크기 및 수 계열 이해하기	5
	12	효율적인 계산 방법 개발하기, 연산의 성질 이해하기	
	13	연산 사이의 관계 이해하기	
	14	수의 크기 및 수 계열 이해하기, 예상하고 확인하기	
	15	연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기	
4수준	16	양적 추론하기	5
	17	양적 추론하기	
	18	문제 상황에 적절한 연산 선택하기	
	19	상황을 수학적으로 모델링하기	
	20	상황을 수학적으로 모델링하기	
합계			20

이 검사 도구를 학생들에게 적용한 후 산술적 사고 수준의 판별은 임미인, 장혜원(2017b)에서 제시한 판별 방법을 그대로 따라 실시하였다. 임미인, 장혜원(2017b)은 Guberman(2016), Usiskin(1982)의 연구에 기초하여, <표 3>과 같이 각 수준별 5개 문항 중에서 4개 이상을 옳게 응답하고 이전 수준의 문항을 모두 맞히면 그 수준에 해당한다고 판단한다. 한편 Guberman(2016)과 마찬가지로 1수준에 해당하는 1~5번 문항 중에서 4개 미만을 옳게 해결할 경우에는 아직 산술적 사고의 1수준에도 도달하지 못한 것으로 판별하고, 이를 0수준으로 칭하기로 하였다. 한편, 검사 도구에는 응답자의 산술적 사고를 보다 면밀히 파악하기 위한 장치로, 왜 그렇게 생각하는지 이유를 기록하는 공간이 포함되어 있다. 학생들의 산술적 사고 수준은 객관화된 판별 도구라는 이 검사 도구의 기본 원리에 따라 정/오답 여부를 통해 판별하고, 학생들이 기록한 설명은 학생들의 구체적인 산술적 사고의 특징이나 정/오답의 근거를 파악하기 위한 보조 수단으로 활용하였다.

<표 3> 산술적 사고 수준 검사 도구에 의한 수준 판별 기준(임미인, 장혜원, 2017b)

<table>
<tr><td colspan="2">문항 번호</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr>
<tr><td rowspan="4">수준 판별</td><td>1수준</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td><td colspan="5"></td><td colspan="5"></td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>2수준</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td><td colspan="5"></td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>3수준</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>4수준</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td></tr>
</table>

3. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구의 검사는 2019년 11월~12월에 연구 대상 100명을 대상으로 이루어졌다. 연구 대상과 담임교사들의 동의 하에 A초등학교 5학년 각 학급별로 검사지를 배부하고 학급별로 1시간씩 검사 시간을 확보하여 검사를 실시하였다. 학급별 검사가 종료된 후, 연구자는 검사지를 회수하여 학생들의 산술적 사고 수준을 판별하였다. 또한 학생들이 기술한 풀이 과정이나 이유을 토대로 학생들이 보인 산술적 사고 수준의 특징은 어떠한지, 어떠한 어려움 때문에 상위 수준으로 이동이 이루어지지 않고 있는지 등을 분석하였다. 추가적으로 학생들의 의도나 보다 구체적인 사고 과정의 파악이 요구되는 경우, 해당 학생과의 개별 인터뷰를 실시하여 연구 대상들의 산술적 사고의 특징을 파악하였다. 이때, 학생들의 산술적 사고의 구체적인 양상은 학생들이 기술한 내용과 학생들의 설명을 통해서 파악할 수밖에 없다는 연구 상 제약을 고려하여 학생들의 반응과 설명을 최대한 밀도 있게 분석하고자 하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 5학년의 산술적 사고 수준

본 연구의 연구 대상인 5학년 100명의 산술적 사고 수준 분석 결과는 〈표 4〉와 같다.

<표 4> 5학년의 산술적 사고 수준

수준	0수준	1수준	2수준	3수준	4수준	합계
비율(%)	1	82	15	1	1	100

100명 중 82%가 1수준으로 나타났고, 15%가 2수준에 해당하였다. 3수준과 4수준이 각각 1%로 나타났으며, 1수준에도 미치지 못하는 5학년이 1% 있었다. 산술적 사고가 내용적 사고의 특성을 지니고 연구 대상이 아직 6학년 교육과정을 이수하기 이전이어서, 학습하지 않은 내용이 포함된 문제 해결 시에는 기대되는 사고 작용이 이루어지지 않을 수 있다. 그러나 이러한 점을 감안하더라도, 82%에 해당하는 학생이 1수준에 머물러 있음은 다소 놀라운 결과가 아닐 수 없다. 이에, 학생들의 반응을 분석하여 1수준에 해당하는 학생들이 2수준으로 이동하도록 돕기 위해 어떤 요소에 관한 지도가 필요한지, 마찬가지로 2수준에 해당하는 학생들이 3수준으로 이동하기 위해서는 어떤 요소 관련 지도가 필요한지 파악하고자 하였다.

2. 1수준 학생들의 오답 분석 결과

산술적 사고의 1수준에 해당하는 학생들은 1수준 관련 1~5번 문항을 모두 맞히고 2수준 관련 6~10번 문항 중 2개 이상을 틀리거나, 1~5번 문항 중 1개를 틀리고 6~10번 문항도 1개 이상 틀린 경우이다. 1수준에 해당하는 학생 82명의 1수준과 2수준 관련 각 문항별 오답자 수와 비율은 <표 5>와 같다.

<표 5> 1수준 학생들(82명)의 오답 결과

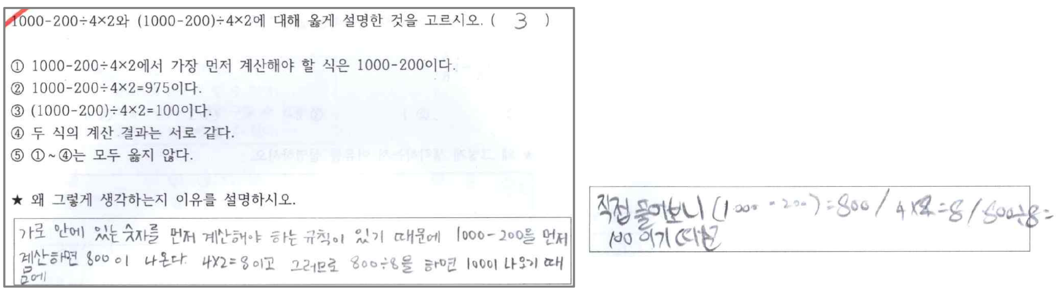
문항	1수준					2수준				
	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번
오답자 수(명) (비율)	7 (9%)	4 (5%)	6 (7%)	5 (6%)	7 (9%)	38 (46%)	60 (73%)	49 (60%)	47 (57%)	45 (55%)

1수준에 해당하는 학생이 전체 연구 대상의 82%로 가장 많기 때문에 이 학생들이 틀린 문항에 대해 면밀히 분석하여 산술적 사고를 신장시킬 수 있는 학습의 기회를 제공하는 것은 매우 중요한 문제이다. 특히, 1수준에 해당하는 학생들이 2수준 관련 문제 해결 시 어떠한 어려움을 보이는지 파악할 필요가 있다. 2수준에 해당하는 산술적 사고가 원활히 이루어진다면 1수준에 해당하는 이 학생들이 2수준으로 이동할 수 있기 때문이다. 따라서 이 절에서는 2수준 관련 6~10번 문항별 학생들이 보인 오답 반응을 가장 오답률이 높은 문항부터 분석하고자 한다.

가. 절차에 맞게 계산하기(7번) 분석 결과

1수준 학생 82명 중 60명(약 73%)이 절차에 맞게 계산하는 것에 어려움을 겪는 것으로 나타났다. 교육과정이 개정됨에 따라 연구 대상 학생들이 다소 최근인 5학년 때 자연수의 혼합 계산에 대해 학습했음을 고려할 때, 이는 놀라운 결과가 아닐 수 없다. 이는 혼합 계산을 순서에 맞게 수행하는 일이 학생들에게는 결코 간단한 사고를 요구하는 문제가 아님을 추측하게 한다. 오답자들이 보인 오류 유형은 다음과 같다.

첫째, ( )가 있으면 ( ) 먼저 계산해야 함은 알지만, ×와 ÷ 중에서는 제시 순서에 상관 없이 ×를 먼저 계산해야 한다고 생각하는 오류이다. 이러한 오개념을 가진 학생들은 (1000-200)÷4×2에서 1000-200을 먼저 계산해서 800을 구한 뒤, 800÷4×2를 순차적으로 수행하는 것이 아니라, 4×2의 결과로 8을 구하여 800÷8=100이라고 계산하는 것으로 나타났다([그림 1]).


1000-200÷4×2와 (1000-200)÷4×2에 대해 옳게 설명한 것을 고르시오. (3)

① 1000-200÷4×2에서 가장 먼저 계산해야 할 식은 1000-200이다.
② 1000-200÷4×2=975이다.
③ (1000-200)÷4×2=100이다.
④ 두 식의 계산 결과는 서로 같다.
⑤ ①~④는 모두 옳지 않다.

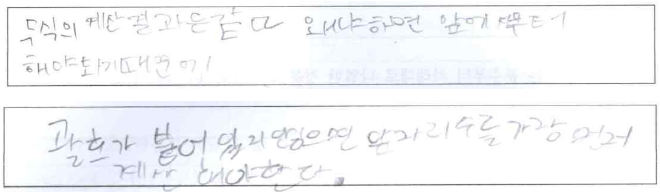
★ 왜 그렇게 생각하는지 이유를 설명하시오.

가로 안에 있는 숫자를 먼저 계산해야 하는 규칙이 있기 때문에 1000-200을 먼저 계산하면 800이 나온다. 4X2=8이고 그러므로 800÷8을 하면 100이 나오기 때문에

직접 풀어보니 (1000-200)=800 / 4X2=8 / 800÷8=100이기 때문

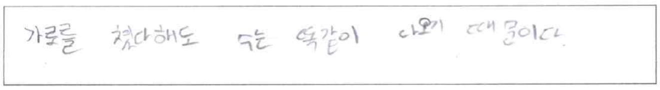
[그림 1] 계산 순서에 대한 오개념 사례 1

둘째, 혼합 계산식에 ( )가 없으면 연산 기호에 상관 없이 무조건 앞에서부터 계산해야 한다고 생각하는 오류이다. 이러한 반응을 보인 학생들은 (1000-200)÷4×2는 ( )가 있기 때문에 ( ) 안의 식부터 계산하게 되는 것이고, 1000-200÷4×2는 ( )가 없으므로 앞에서부터 차례대로 계산해야 한다고 생각하는 것으로 나타났다. 결과적으로 이들은 두 식의 계산 결과가 같다고 생각하였다([그림 2]).



[그림 2] 계산 순서에 대한 오개념 사례 2

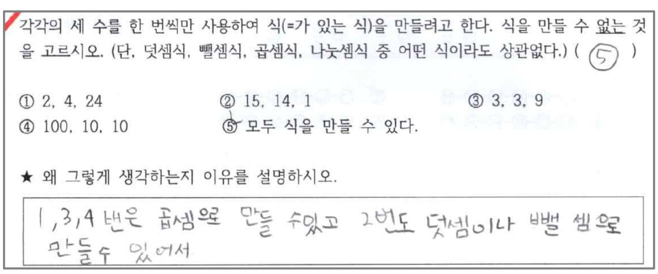
셋째, 혼합 계산식에서 ( )의 기능을 전혀 인지하지 못하여 ( )의 유무에 따라 계산 결과가 달라짐을 알지 못하는 오류이다. 이러한 반응을 보인 학생들은 ( )의 유무와 상관 없이 제시된 수, 연산 기호의 위치가 같으면 결과가 같다고 생각하는 것으로 나타났다([그림 3]).



[그림 3] 계산 순서에 대한 오개념 사례 3

나. 식으로 표현하기(8번) 분석 결과

1수준 학생 82명 중 49명(약 60%)이 주어진 수를 이용하여 등식으로 표현하는 것에 어려움을 겪는 것으로 나타났다. 특히 오답자 중 약 49%가 [그림 4]와 같이 2, 4, 24라는 숫자만 보고 곱셈식을 완성할 수 있다고 생각한 것으로 나타났다. 3, 3, 9는 3×3=9나 9÷3=3으로, 100, 10, 10은 100÷10=10이나 10×10=100으로 표현할 수 있지만, 2, 4, 24는 곱셈식 또는 나눗셈식으로 표현되지 않는다. 검사 종료 후 이와 같은 오류를 보인 학생들을 인터뷰한 결과, “2, 4, 24라는 숫자가 비슷해 보여서 곱셈식으로 만들 수 있을 것 같았다.” 는 유사 반응을 얻을 수 있었다. 또한 오답자 중 약 14%는 “(이러한 유형의 문제를 배운 적이 없어서) 어떻게 해야 할지 모르겠다.” 고 응답하였다. 이는 학생들이 이 산술적 사고 요소에 관한 경험 부족으로 관련 산술적 사고를 하지 못했음을 뒷받침한다.


각각의 세 수를 한 번씩만 사용하여 식(=가 있는 식)을 만들려고 한다. 식을 만들 수 없는 것을 고르시오. (단, 덧셈식, 뺄셈식, 곱셈식, 나눗셈식 중 어떤 식이라도 상관없다.) (5)

① 2, 4, 24 ② 15, 14, 1 ③ 3, 3, 9
④ 100, 10, 10 ⑤ 모두 식을 만들 수 있다.

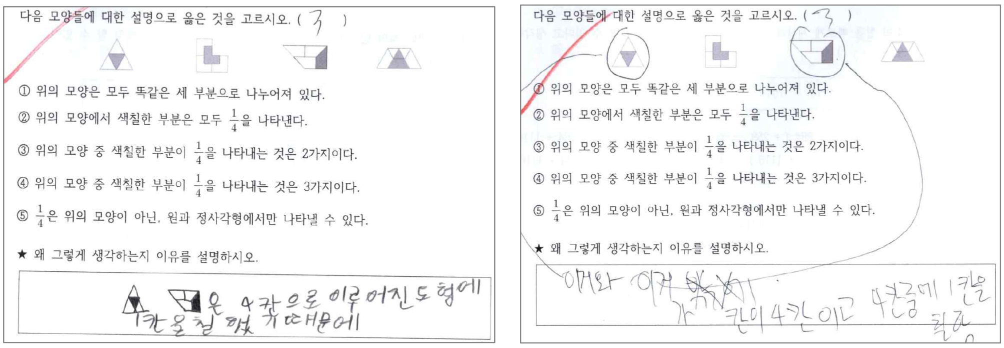
★ 왜 그렇게 생각하는지 이유를 설명하시오.

1,3,4 번은 곱셈으로 만들 수있고 2번도 덧셈이나 뺄셈으로
만들수 있어서

[그림 4] 식으로 표현하기 오류 사례

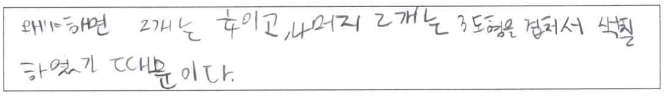
다. 분수 표현하기(9번) 분석 결과

1수준 학생 82명 중 47명(약 57%)이 주어진 그림이 나타내는 분수를 파악하는 데 어려움을 겪는 것으로 나타났다. 연구 대상 학생들이 5학년 학습을 거의 종료했고, 이 문제에 관한 분수의 개념 학습이 3학년 때 이루어짐을 고려할 때, 다소 놀라운 결과가 아닐 수 없다. 특히 오답자 중 약 89%가 첫째, 셋째 그림만 $\frac{1}{4}$을 나타내고 둘째 그림은 $\frac{1}{4}$이 아니라는 공통적 반응을 보인 것에 주목할 수 있다([그림 5]).



[그림 5] 분수 표현에 대한 오개념 사례 1

왜 다수의 학생들이 공통적으로 이와 같이 사고하는지 파악하기 위해 추가적인 인터뷰를 실시하였다. 인터뷰 결과, 학생들은 둘째 그림이 3개의 정사각형 위에 ㄴ 형태의 도형을 겹쳐놓은 것으로 인식한 것으로 나타났다([그림 6]).


[그림 6] 분수 표현에 대한 오개념 사례 2

다른 오답자 중에서 약 6%는 네 그림 모두 $\frac{1}{4}$을 나타낸다고 생각하였고, 약 4%는 네 그림 모두 3등분된 그림으로 인식하는 것으로 나타났다.

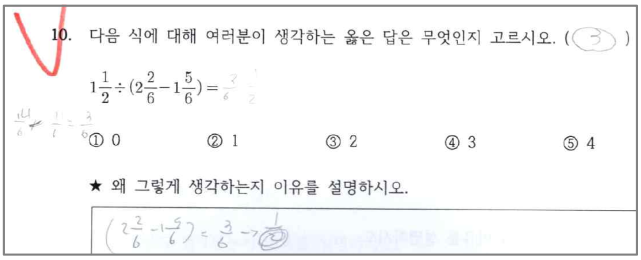
라. 분수의 연산 수행하기(10번) 분석 결과

분수의 나눗셈은 현행 교육과정 상 6학년 1, 2학기 수학 교과서를 통해 다루게 된다. 따라서 연구 대상은 아직 10번 관련 분수의 연산 중 나눗셈에 관한 내용은 명시적으로 학습하지 않았다. 그러나 본 검사 도구는 학생들의 수학 성취도를 파악하기 위함이 아닌, 산술적 사고 수준을 판별하기 위한 것이기 때문에 아직 학습하지 않은 내용이 있더라도 그것의 포함이 불가피하다. 검사 도구의 적용 이전, 대부분의 학생들이 분수의 뺄셈까지는 옳게 시도하고 이후 $1\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$에서 어려움을 겪을 것이라 예상하였다. 산술적 사고가 내용적 사고의 특성을 지니고, 학생들이 아직 분수의 나눗셈을 학습하지 않았기 때문에 관련 산

술적 사고가 불가능하다고 예상한 것이다.

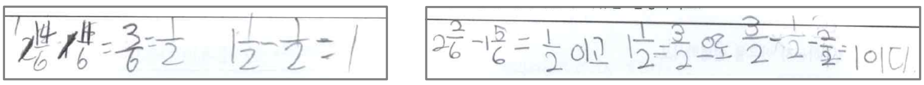
그러나 1수준 학생 82명 중 약 55%만이 이 문제 해결에 실패하였고, 약 45%는 문제를 옳게 해결하였다. 여기서 일차적으로 주목한 것은, 학교에서 아직 학습하지 않았는데 이 문제를 어떻게 해결했느냐이다. 정답 학생 37명을 조사한 결과, 28명은 사교육을 통해 선행 학습으로 관련 내용을 경험한 것으로 나타났다. 나머지 9명은 이에 대해 학습한 적이 없지만, 해결에 성공한 경우이다. 이들은 $2\frac{2}{6}-1\frac{5}{6}$는 $\frac{3}{6}$이라 $\frac{1}{2}$과 같고, $1\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}$은 $\frac{3}{2}\div\frac{1}{2}$이기 때문에 3÷1을 생각해서 문제를 해결한 것으로 나타났다. 특히 학생A는 "$1\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}$인데 $1\frac{1}{2}$이 $\frac{1}{2}$이 3개고 $\frac{1}{2}$은 $\frac{1}{2}$이 1개니까 3÷1을 했어요."라고 응답하여, 주어진 분수가 단위분수 몇 개로 이루어진 것인지 학습하는 경험이 이러한 산술적 사고의 확장으로 이어진 것임을 보여 주었다.

다음으로, 분수의 나눗셈에 대해 명시적으로 학습하지 않았기 때문에 오답을 한 학생들이 보인 오류 유형을 분석하였다. 오답자 45명 중 약 74%가 [그림 7]과 같이 $2\frac{2}{6}-1\frac{5}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$까지는 옳게 계산하였으나 이후 어떻게 처리해야 할지 몰라서 오답을 한 경우이다.

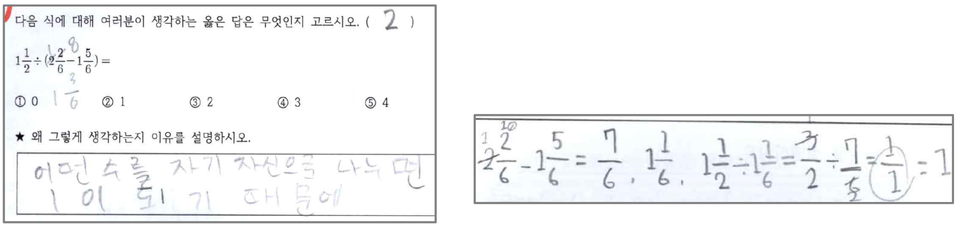


[그림 7] 분수의 연산에 대한 오류 사례 1

오답자 중 약 11%는 [그림 8]과 같이 $2\frac{2}{6}-1\frac{5}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$을 옳게 계산하였으나, $1\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}$을 $1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$로 취급하여 처리하였다. 인터뷰 결과, 이들은 어떻게 해야 할지 방법을 몰라서 $1\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{2}$을 뺀 것으로 나타났다.

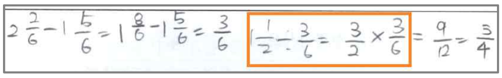

[그림 8] 분수의 연산에 대한 오류 사례 2

그 밖에 $2\frac{2}{6}-1\frac{5}{6}$를 $\frac{3}{6}$이 아닌, $1\frac{3}{6}(=1\frac{1}{2})$이라고 잘못 계산하거나, 대분수의 뺄셈, 분수의 나눗셈을 충분히 이해하지 못하여 전반적인 계산 오류를 보인 학생 사례도 나타났다([그림 9]).



[그림 9] 분수의 연산에 대한 계산 오류 사례

한편, 사교육을 통해 관련 내용을 배웠음에도 불구하고 오답을 한 학생들의 반응을 분석하였다. 그들이 보인 대표적 반응은 분수의 나눗셈을 계산하기 위해서 제수의 역수를 곱한다는 알고리즘을 적용하고자 하였으나 역수가 아닌 원래 수를 곱하는 오류를 보인 경우이다([그림 10]). 인터뷰 결과, 이 학생들은 분수의 나눗셈의 원리를 개념적으로 이해하지 못하고, 심지어 왜 제수의 역수를 곱해야 하는지도 알지 못하는 것으로 나타났다.

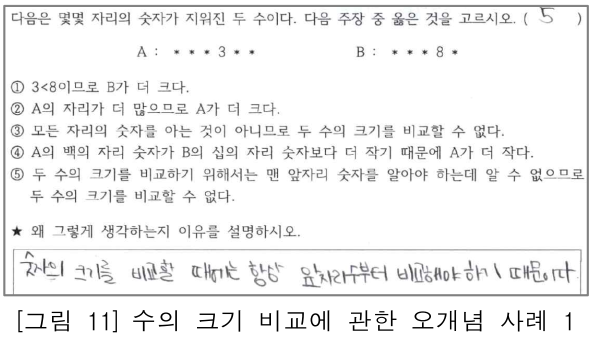


[그림 10] 분수의 연산에 대한 오류 사례 3

마. 자릿값과 위치적 기수법 이해하기, 수의 크기 비교하기(6번) 분석 결과

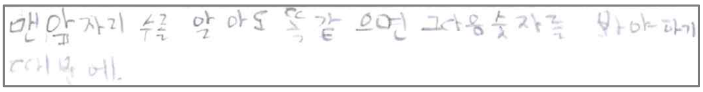
자릿값과 위치적 기수법에 대한 이해를 바탕으로 수의 일부만 보이는 여섯 자리 수와 다섯 자리 수의 크기를 비교하는 6번 문항에서 1수준 학생 82명 중 38명(약 46%)이 오류를 보인 것으로 나타났다. 자연수의 자릿값에 대해 2학년 때 처음 학습을 했고, 4학년 때 큰 수의 자릿값과 크기 비교를 다루었기 때문에 높은 정답률이 예상되었으나, 약 46%가 오개념을 가지고 있는 것으로 나타났다. 오답 반응을 보인 학생들이 가지고 있는 오개념은 크게 다음과 같이 범주화된다.

첫째, 두 수의 크기를 비교할 때에는 가장 큰 자리부터 비교해야 하기 때문에 맨 앞자리 숫자를 모르면 크기 비교가 불가능하다고 생각하는 경우이다([그림 11]). 문제에 제시된 두 수는 A가 여섯 자리 수, B가 다섯 자리 수이기 때문에 모든 자리의 숫자를 알지 않아도 크기 비교가 가능하다. 이와 같은 오답 반응을 보인 학생들과의 인터뷰 결과, 수학 수업 시 교사들이 수의 자릿수에 대한 언급 없이 앞자리 숫자부터 크기를 비교해야 함을 마치 공식처럼, 명시적으로 강조한 것으로 추측되었다.

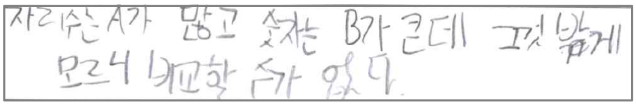


[그림 11] 수의 크기 비교에 관한 오개념 사례 1

둘째, 앞자리 숫자뿐만 아니라, 모든 자리의 숫자를 알아야만 두 수의 크기를 비교할 수 있다고 생각하는 경우이다([그림 12]). 이 학생들 또한, 맨 앞자리 숫자를 비교해 보고 똑같으면 다음 자리 숫자를 비교해 봐야 한다는 다소 공식화된 방법에 따라 두 수의 크기 비교에 접근하여 이와 같은 오개념을 가지게 된 것으로 보인다. 심지어 [그림 13]과 같이, 두 수의 자릿수가 다른 것을 인지하고 있음에도, 모든 자리의 숫자를 알지 못해서 두 수의 크기를 비교할 수 없다고 생각하는 학생 사례도 확인되었다.

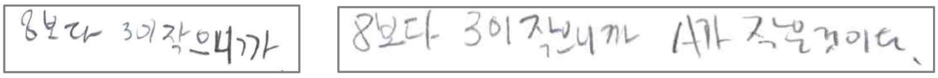


[그림 12] 수의 크기 비교에 관한 오개념 사례 2-1



[그림 13] 수의 크기 비교에 관한 오개념 사례 2-2

셋째, 자릿수나 제시된 숫자가 어떤 자리의 숫자인지와 무관하게, 보이는 숫자가 더 크면 더 큰 수라고 생각하는 경우이다. A는 여섯 자리 수, B는 다섯 자리 수임에도 불구하고, 각각 제시된 숫자가 3과 8이기 때문에 8을 포함하는 B가 더 큰 수라고 생각하는 학생들이 이에 해당한다([그림 14]).



[그림 14] 수의 크기 비교에 관한 오개념 사례 3

3. 2수준 학생들의 오답 분석 결과

산술적 사고의 2수준에 해당하는 학생들은 1수준 관련 1~5번 문항과 2수준 관련 6~10번 문항을 모두 맞히고 3수준 관련 11~15번 문항 중 2개 이상을 틀리거나, 1~5번 문항은 다 맞히고 6~10번 문항 중 1개를 틀린 경우이다. 2수준에 해당하는 학생들은 전체 학생의 15%로 나타났으며, 2수준 학생들의 2수준과 3수준 관련 문항별 오답자 수와 비율은 <표 6>과 같다.

<표 6> 2수준 학생들(15명)의 오답 결과

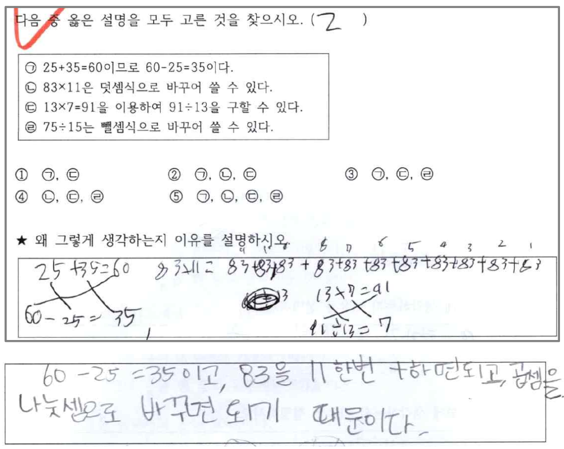
문항	2수준					3수준				
	6번	7번	8번	9번	10번	11번	12번	13번	14번	15번
오답자 수(명) (비율)	1 (7%)	2 (13%)	2 (13%)	2 (13%)	3 (20%)	3 (20%)	8 (53%)	13 (87%)	6 (40%)	13 (87%)

2수준에 해당하는 학생이 1수준에 해당하는 학생에 이어 둘째로 많기 때문에, 이 학생들이 틀린 문항에 대해서도 면밀히 분석하여 산술적 사고를 3수준으로 신장시킬 수 있는

방안을 모색할 필요가 있다. 따라서 이 절에서는 3수준 관련 11~15번 문항 중 오답률이 40% 이상인 12번, 13번, 14번 세 문항에 대한 학생들의 반응을 분석하여 학생들이 보이는 산술적 사고의 특징을 파악하고자 하였다[2].

가. 연산 사이의 관계 이해하기(13번) 분석 결과

13번은 덧셈과 뺄셈, 덧셈과 곱셈, 곱셈과 나눗셈, 나눗셈과 뺄셈 사이의 관계를 이해하는지 확인하는 문항이다. 각각은 현행 초등학교 수학 교과서에서 명시적으로 지도되는 내용이며, 사칙연산의 개념 이해에 기초하여 서로 간의 관계를 파악해야 해결이 가능하다. 13번 문항은 2수준에 해당하는 15명 중 단 2명만 옳게 해결하였고, 오답을 한 87%가 공통된 오개념을 지니는 것으로 나타났다. [그림 15]와 같이, 오답자들은 덧셈식은 뺄셈식으로, 곱셈식은 덧셈식으로, 곱셈식은 나눗셈식으로 나타낼 수 있으나, 나눗셈식은 뺄셈식으로 나타낼 수 없다는 인식을 지니고 있었다. 앞서 Ⅱ장에서도 언급하였듯이, 임미인(2017)의 연구에 따르면, 연산 사이의 관계를 이해하는 것은 연산의 구조에 대한 이해를 기반으로 하기 때문에 결코 쉬운 일이 아니다. 나눗셈과 뺄셈의 관계는 학생들이 특히 더 어려워하는 내용임을 고려하여, 적절한 맥락을 통해 나눗셈을 동수누감으로도 표현할 수도 있음을 의미 있게 다루면서 양자 간의 관계 이해를 도울 필요가 있다.



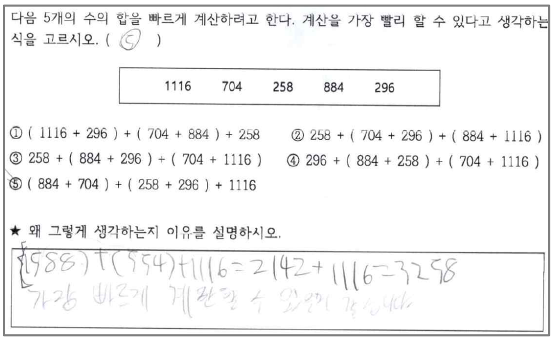
[그림 15] 연산 사이의 관계에 관한 오개념 사례

나. 효율적인 계산 방법 및 연산의 성질 이해하기(12번) 분석 결과

12번 문항은 덧셈의 교환법칙, 결합법칙을 이해하고, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 표준적인 알고리즘 이외에 문제 상황에 따라 여러 가지 효율적인 계산 방법을 찾거나 개발하는 사고와 관련된다. 학생들이 주어진 다섯 수의 덧셈 조합 중에서 258+(704+296)+(884+1116)이 258+1000+2000으로 가장 효율적으로 계산할 수 있음을 파악할 수 있길 기대한 것이다.

2) 15번 문항은 오답률이 87%로 매우 높지만, 이 문제의 전체적인 내용을 현행 우리나라 수학과 교육과정에서 6학년 때 학습하게 되므로, 분석에서 제외하였다. 산술적 사고가 내용적 사고임을 고려할 때, 15번 문항에 관한 산술적 사고 요소는 추후 정규 교육과정 학습을 통해 보완이 가능할 것이다. 다만, 학습이 이루어진 이후에 학생들이 이 문제를 해결하면서 보이는 관련 오류를 파악할 필요가 있다.

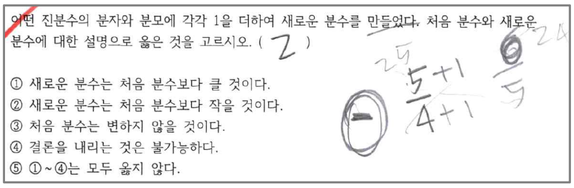
그러나 2수준에 해당하는 15명 중 약 53%가 이러한 계산 방법 찾기에 접근하지 못하였다. 이 학생들은 [그림 16]과 같이 논리적 근거 없이 본인이 느끼기에 빨리 계산할 수 있을 것 같아 보이는 식을 고른 것으로 나타났다.



[그림 16] 효율적인 계산 방법에 관한 이해 부족 사례

다. 예상하고 확인하기, 수의 크기 비교하기(14번) 분석 결과

14번 문항은 예상과 확인, 즉 임의의 수를 취하여 계산해보고 그 결과가 맞는지 확인해 봄으로써 알맞게 조정할 수 있는지를 분수의 크기 비교와 더불어 파악할 수 있는 문항이다. 2수준 15명 중 40%가 이 문제를 옳게 해결하지 못했는데, 이 중 약 50%는 문제를 충분히 이해하지 못한 것으로 나타났고, 나머지는 [그림 17]과 같이 진분수라는 조건을 간과하여 가분수를 취함으로써 오류를 보인 것으로 파악되었다.



[그림 17] 예상하고 확인하기 시 오류 사례

V. 결 론

본 연구에서는 산술적 사고 수준 검사 도구(임미인, 장혜원, 2017b)를 활용하여 초등학교 5학년 학생 100명의 산술적 사고 수준을 분석하였고, 그에 따라 다음과 같이 산술 교육에 관한 결론 및 시사점을 도출하였다.

첫째, 초등학생들의 산술적 사고 수준을 명확히 진단할 필요가 있다. 본 연구에서 확인된 바와 같이, 초등학교 5학년 학습을 거의 완료한 100명 중 82%가 산술적 사고의 가장 낮은 수준인 1수준에 해당한다는 것은 보통의 예상을 크게 벗어난 결과이다. 자칫 산술을 계산 기능 정도로만 취급하다보면, 학생들의 사고에 초점을 기울이지 않고 연습을 통해 기능이 숙달될 것으로 기대하기 쉽다. 또한 그러한 학생들이 높은 수준의 산술적 사고를

할 것으로 기대하기 쉽다. 그러나 초등 수학을 5년 간 배우면서 수없이 계산 연습을 했음에도, 5학년 중 82%가 여전히 1수준에 머물러 있음은 산술을 기능적 측면으로만 접근하는 산술 교육의 한계를 보여 준다. 이와 관련하여, 임미인(2017), van Hiele(1986), Guberman(2016) 등의 주장에서 볼 수 있듯이, 산술은 산술적 사고를 신장시키는 방향으로 의미 있게 지도될 필요가 있다. 이는 대우 관계로서 산술적 사고의 신장이 이루어지지 않으면 산술을 의미 있게 수행할 수 없음을 함의한다. 따라서 일차적으로 학생 개개인의 현재 산술적 사고 수준을 파악할 필요가 있다. 이는 본 연구에서 활용한 산술적 사고 수준 검사 도구를 통해서도 가능하겠으나, 학생들의 사고 과정을 더욱 면밀히 분석할 수 있는 진단 도구의 개발에 관한 지속적인 연구의 필요성으로 이어진다. 또한 현장 교사들이 이러한 진단 도구를 활용하여 학생들의 산술적 사고 수준과 양상을 체계적으로 분석하도록 지원하는 연수의 기회도 제공해야 한다.

둘째, 초등학생들의 산술적 사고 수준을 상위 수준으로 신장시킬 수 있는 산술 지도가 이루어져야 한다. 예컨대, 산술적 사고의 1수준에 해당하는 학생들이 2수준으로, 2수준에 해당하는 학생들이 3수준으로 원만히 이동하기 위해서는, 동일 학년급의 학생일지라도 각 수준에 해당하는 학생별 부족한 산술적 사고 요소에 관한 보충 학습 경험을 의미 있게 제공해야 한다. 실제로 임미인, 장혜원(2018)에서는 수와 연산 영역의 학습에서만 부진을 겪던 학생의 산술적 사고 수준의 신장을 지원하였으며, 결과적으로 그 학생의 산술적 사고 수준이 1수준에서 4수준으로 향상된 연구 결과를 제시하고 있기도 하다.

본 연구 결과, 연구 대상인 5학년 학생들의 82%가 산술적 사고의 1수준에 위치해 있는 것으로 나타났기 때문에, 이 학생들이 2수준으로 이동하도록 돕기 위해서는 2수준에 관한 유의미한 학습 경험을 제공할 필요가 있다. 구체적인 방안을 살펴보면 다음과 같다.

먼저, 혼합 계산의 절차에 대해 학생들이 더욱 잘 이해할 수 있는 지도 방안을 모색해야 한다. 연구 대상 학생들은 교육과정 개정에 따라 학교수학에서 혼합 계산을 다소 최근인 5학년 때 학습했음에도 불구하고 혼합 계산을 절차에 맞게 해결하는 데 여러 오개념을 지니고 있었다. 이들이 보인 오류에 기초할 때, ( )가 있는 혼합 계산의 경우 ( )를 먼저 풀어야 함을 강조하는 것과 더불어, ×와 ÷ 중에서는 먼저 제시되는 것을 먼저 계산해야 함을 보다 명시적으로 지도할 필요가 있다. 또 ( )가 없는 혼합 계산도 다양한 유형으로 제시하여 계산 순서에 대해 더욱 풍부히 이해하도록 도와야 한다. 몇 차시에 걸쳐 학습을 거듭했음에도 불구하고, 제시된 수와 연산 기호가 동일한 경우 ( )의 유무가 계산 결과에 영향을 미치지 않는다고 생각하는 학생들을 위해서는 양자를 비교하는 기회를 더욱 충분히, 명시적으로 제공할 필요가 있다.

주어진 수를 이용하여 등식으로 표현하는 학습 기회를 제공할 필요가 있다. 학교수학을 통해 학생들은 주어진 식을 풀어 답을 구하는 것은 빈번하게 경험하게 된다. 그러나, 주어진 수를 이용해서 등식을 완성하는 경험의 빈도는 낮다. 100, 10, 10을 이용하면 100÷10=10이나 10×10=100으로 표현할 수 있지만 2, 4, 24는 이러한 등식으로 표현할 수 없음은 경험을 통해 쉽게 이해가 가능할 것이다. 다행히, 오늘날 이러한 학습 경험을 제공하는 수학 놀이 교구가 개발되는 등 이 산술적 사고 요소에 관해 학생들이 의미 있게 경험할 가능성이 커지고 있는 것은 매우 고무적이다.

분수의 기초적인 개념 학습 시 다양한 모델을 활용하고 학생들이 전체의 부분으로서 분수를 정확히 이해하고 있는지 체계적으로 확인해야 한다. 본 연구에서 다수의 5학년 학생들이 전체가 ㄴ 형태의 단위로 4등분된 것을 옳게 인식하지 못하는 것으로 나타났다. 이는 하나의 도형을 여러 가지 모양으로 등분할하거나 다양한 모양으로 등분할된 모델을 활

용하여 분수 개념을 학습하는 경험을 통해 지원이 가능할 것이다.

산술적 사고가 내용적 사고의 특성을 지니기 때문에 관련 학습의 경험을 통해 산술적 사고의 신장을 기대할 수 있겠지만, 사교육을 통해 분수의 나눗셈을 미리 배웠음에도 옳게 해결하지 못하는 다수의 사례는 학생들이 해당 내용을 개념적으로 충분히 이해할 수 있도록 산술을 지도할 필요를 뒷받침한다. 또한 산술 지도 시 어떠한 개념은 추후 다른 산술적 사고의 확장으로 의미 있게 활용될 가능성이 큼을 염두할 필요가 있다. 본 연구에서 학생들이 분수의 나눗셈을 배우지 않았음에도, 분수가 단위분수 몇 개로 이루어져 있다는 개념적 이해를 통해 분수의 나눗셈을 옳게 해결하였음은 이러한 가능성을 뒷받침한다.

마지막으로, 수의 일부만 보이는 여섯 자리 수와 다섯 자리 수의 크기를 비교하는 문제에서 학생들이 보인 오류는 수의 크기 비교라는 다소 간단한 활동조차도 산술적 사고를 고려하여 지도될 필요가 있음을 보여 준다. 학생들이 저학년 시기부터 수의 크기 비교에 대해 학습해 왔음에도 불구하고, 약 46%가 수의 자릿값이나 위치적 기수법에 대한 이해 없이, 수의 기본적인 구조를 파악하지 않고 수의 크기 비교에 접근하는 것이 다양한 오개념으로 이어진 것이라 추측된다.

그 밖에 산술적 사고의 2수준에 해당하는 학생들은 연산 사이의 관계, 효율적인 계산 방법, 예상과 확인하기의 경험을 의미 있게 제공함으로써 상위 수준으로의 신장을 지원할 수 있을 것이다. 한편 이와 관련하여, 연산 사이의 관계와 효율적인 계산 방법에 관련한 내용들이 초등 수학에서 학생들의 산술적 사고 수준에 비해 일찍 다루어지고 있지는 않은지 심도 깊은 논의도 요구된다. 현행 초등 수학에서 덧셈과 뺄셈의 역연산 관계는 초등학교 2학년 때 제시되며, 효율적인 계산의 기초가 될 수 있는 덧셈의 교환법칙과 결합법칙은 초등학교 1학년 때 다루어진다. 물론 이러한 학습 내용이 이후 학습의 토대가 되기 때문에 학습 시기를 더 뒤로 미루는 것은 또 다른 부작용을 야기할 수 있다. 그렇다면, 이러한 산술적 사고 요소가 3수준에 해당한다는 점, 그렇기 때문에 저학년 학생들의 낮은 산술적 사고 수준과 일부 괴리가 있다는 점을 고려하여 학생들의 이해를 돕기 위한 방안을 마련할 필요가 있다. 초등학생들의 발달 수준을 고려하여 보다 충분한 지도 시간을 확보하고 구체물을 활용한 조작 활동이나 여러 시각적 보조 자료 등을 활용해서 학생들이 연산 사이의 관계나 교환법칙, 결합법칙 등을 풍부히 이해할 수 있도록 도와야 한다.

산술적 사고의 현 수준에서 보다 상위 수준으로 이동하기 위해서는 수와 연산의 개념이나 표현뿐만 아니라 구조, 관계 등을 이해할 수 있는 사고 작용이 요구된다. 따라서 학생 개개인에게 부족한 산술적 사고 요소에 관한 활동을 체계적으로 제공하면서도, 보다 폭넓은 안목에서 학생들이 산술의 구조와 관계를 파악할 수 있도록 지도하는 방안에 관해 지속적인 연구가 이루어져야 한다. 또한 우리나라 학생들이 어려움을 보이는 산술적 사고 요소에 관한 오류 및 오개념에 대해서 그 근원적 이유를 수학의 계열성을 고려하여, 산술적 사고의 측면에서 더욱 체계적으로 밝히는 연구도 요구된다. 이러한 후속 연구는 학생들의 산술적 사고의 신장과 성공적인 산술 교육의 지원을 보장하는 데 중요한 토대로 작용할 것이다.

참 고 문 헌

강흥규 (1997). Dewey의 지식론과 산술 교육론. **대한수학교육학회 논문집, 7**(1), 415-434.

국립국어원 (2020). '산술(算術)' 의 정의. **표준국어대사전**. https://www.korean.go.kr/front/search/searchAllList.do에서 2020년 1월 인출.

김남희 (1994). 대수적 사고에 관한 고찰 : 산술과의 관련성과 변수개념. **대한수학교육학회 논문집, 4**(2), 189-204.

김성준 (2002). 대수적 사고의 기원에 관한 고찰. **한국수학사학회지, 15**(2), 49-68.

김성준 (2003). '대수적 사고' 와 관련된 선행 연구 고찰. **대한수학교육학회 2003년도 수학교육학연구 발표대회논문집**, 577-598.

김윤영 (2016). **연산 사이의 관계를 기반으로 한 수업의 구현 및 초등학교 학생들의 연산 감각 분석 -나눗셈 도입을 중심으로-**. 한국교원대학교 석사학위논문.

도종훈, 최영기 (2003). 수학적 개념으로서의 등호 분석. **수학교육, 42**(5), 697-706.

우정호, 김성준 (2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색. **수학교육학연구, 17**(4), 453-475.

이종학 (2014). 산술과 대수 영역의 문장제 문제해결 전략에 대한 초등 예비교사의 내용지식 연구. **한국콘텐츠학회논문지, 14**(12), 1083-1099.

이화영 (2011). **초등학생의 대수 추론 능력과 조기 대수(Early Algebra) 지도**. 건국대학교 박사학위논문.

임미인 (2017). **산술적 사고의 요소 및 수준에 관한 연구**. 서울교육대학교 박사학위논문.

임미인, 장혜원 (2016). 수와 연산 영역 부진 학생의 산술적 사고 수준에 관한 사례 연구 -초등학교 6학년 한 학생을 대상으로-. **수학교육학연구, 26**(3), 489-508.

임미인, 장혜원 (2017a). 산술적 사고의 의미와 요소 분석. **수학교육학연구, 27**(4), 765-789.

임미인, 장혜원 (2017b). 산술적 사고 수준의 분석 및 검사 도구 개발. **한국초등수학교육학회지, 21**(4), 575-598.

임미인, 장혜원 (2018). 수와 연산 영역에서 부진을 경험한 중학생의 산술적 사고 수준 변화 및 대수적 사고로의 이행에 관한 사례 연구. **수학교육학연구, 28**(3), 345-365.

최지선, 박교식 (2009). 우리나라 초등학교 1-2학년 수학에서의 수 감각 지도 내용 분석. **수학교육학연구, 19**(4), 513-530.

Amerom, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Utrecht University.

Baroody, A. J., & Dowker, A. (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: constructing adaptive expertise*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Brownell, W. A. (1947). The place of meaning in the teaching of arithmetic. *Elementary School Journal, 47*, 256-265.

Buswell, G. T. (1950). Study pupil's thinking in arithmetic. *The Phi Delta Kappan, 31*(5), 230-233.

Dooren, W. V., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 319-351.

Fatwa sari, A., & Ernawati, A. (2019). Arithmetic thinking: reflect on the order of operation. *Proceeding of the Second Ahmad Dahlan International Conference on Mathematics and Mathematics Education, 2*(1), 13-18.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-26.

Guberman, R. (2016). Development of arithmetical thinking: evaluation of subject matter knowledge of pre-service teachers in order to design the appropriate course. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(4), 739-755.

Leontiev, A. N. (2005). On the development of arithmetical thinking in the child. *Journal of Russian and East European Psychology, 43*(3), 78-95.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematic*. Reston, VA: NCTM.

Oliveira, H., & Mestre, C. (2014). Opportunities to develop algebraic thinking in elementary grades throughout the school year in the context of mathematics. In Li, Y., Silver, E. A., & Li, S. (Eds.), *Transforming mathematics instruction : multiple approaches and practice*, (pp. 173-197). NY: Springer.

Smith, E. (2007). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). NY: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L. P., & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetic meanings and strategies.* NY: Springer.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* CDASSG Project. Chicago: University of Chicago.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education.* Orlando, Fla: Academic Press.

Vergnaud, G. (1979). The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics, 10*(2), 263-274.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122-137.

<Abstract>

An Analysis of the Arithmetical Thinking Levels of the Students in 5th Grade

Lim, Miin[3]

Since arithmetic is the foundation of school mathematics, it needs to be taught meaningfully in the direction of improving arithmetical thinking levels of students beyond the fluency of computing skills. Therefore, in this study, the arithmetical thinking levels of 100 students in 5th grade were analyzed by applying the arithmetical thinking level test. As a result, 82 students were at 1st level and 15 students were at 2nd level of the arithmetical thinking. I analyzed the characteristics of arithmetical thinking and types of errors and misconceptions made by the students, and derived some didactical implications for arithmetic education in elementary school mathematics.

Key words: elementary mathematics, arithmetic, the arithmetical thinking level

논문접수: 2020. 01. 20
논문심사: 2020. 02. 05
게재확정: 2020. 02. 07

3) ssbin22@sen.go.kr