

# 응착 완전 접촉 문제에서 접촉면 미끄럼 현상에 관한 고찰

김형규<sup>†</sup>

한국원자력연구원 첨단3D프린팅기술개발부 책임연구원

## On the Slipping Phenomenon in Adhesive Complete Contact Problem

Hyung-Kyu Kim<sup>†</sup>

Principal Researcher, Advanced 3D Printing Technology Development Division,  
Korea Atomic Energy Research Institute

(Received April 20, 2020 ; Revised June 4, 2020 ; Accepted June 16, 2020)

**Abstract** – This paper is within the framework of an adhered complete contact problem wherein the contact between a half plane and sharp edged indenter, both of which are elastic in character, is constituted. The eigen-solutions of the contact shear and normal stresses,  $\sigma_{tq}$  and  $\sigma_{\bar{q}}$ , respectively, are evaluated via asymptotic analysis. The ratio of  $\sigma_{tq}/\sigma_{\bar{q}}$  is investigated and compared with the coefficient of friction,  $\mu$ , of the contact surface to observe the propensity to slip on the contact surface. Interestingly, there exists a region of  $|\sigma_{\theta}/\sigma_{\theta\theta}| \geq |\mu|$ . Thus, slipping can occur, although the problem is solved under the condition of an adhered contact without slipping. Given that a tribological failure potentially occurs at the slipping region, it is important to determine the size of the slipping region. This aspect is also factored in the paper. A simple example of the adhered contact between two elastically dissimilar squares is considered. Finite element analysis is used to evaluate generalized stress intensity factors. Furthermore, it is repeatedly observed that slipping occurs on the contact surface although the size of it is extremely small compared with that of the contacting squares. Therefore, as a contribution to the field of contact mechanics, this problem must be further explained logically.



© Korean Tribology Society 2020. This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License(CC BY, <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction of the work in any medium, provided the original authors and source are properly cited.

**Keywords** – adhesive complete contact(응착 완전 접촉), slipping behaviour(미끄럼 거동), asymptotic analysis(점근 해석), generalized stress intensity factor(일반 응력확대계수), stress ratio(응력 비)

### Nomenclature

$d_o, G_o$  : Normalization parameters (정규화 변수)  
 $f_{ij}^I(\theta), f_{ij}^{II}(\theta)$  : Angular function (각도 함수)  
 $G$  : Shear modulus (전단강성계수)

$K_I, K_{II}$  : Generalized stress intensity factors (일반 응력확대계수)  
 $\alpha, \beta$  : Dundurs constants (Dundurs 상수)  
 $\varphi$  : Contact angle (접촉 각)  
 $\kappa$  : Kolosov constant (Kolosov 상수)  
 $\lambda, \lambda_I, \lambda_{II}$  : Eigenvalues (고유값)  
 $\mu$  : Coefficient of friction (마찰계수)  
 $\nu$  : Poisson's ratio (프와송 비)  
 $\sigma_{\theta}, \sigma_{\theta\theta}$  : Stress components (응력 성분)  
 $\Phi(r, \theta)$  : Airy stress function (Airy 응력함수)

<sup>†</sup>Corresponding author: Hyung-Kyu Kim  
Tel: +82-42-868-2111, Fax: +82-42-863-0565  
E-mail: [hkkim1@kaeri.re.kr](mailto:hkkim1@kaeri.re.kr)  
<https://orcid.org/0000-0002-2505-2187>

## 1. 서 론

트라이볼로지 손상 중 접촉면에 발생하는 마멸 또는 균열의 성장을 역학적으로 분석하여 손상을 억제할 수 있는 설계를 수행하기 위해서는 접촉면에 발생하는 응력장을 알아야 한다. 이때 접촉 경계의 형상에 따라 접촉부의 응력장을 구하는 방법이 다르다. 즉 접촉 경계에서의 접촉 물체 형상이 부드러운 곡선으로 정의되는 불완전 접촉(*incomplete contact*)과 날카로운 모서리를 갖는 완전 접촉(*complete contact*)으로 분류할 수 있는데, 불완전 접촉의 경우에는 접촉 경계에서의 응력장이 0이 되며(*bounded*) 완전 접촉에서는 무한대(*singular*)의 응력이 되어 수학적으로 서로 반대되는 응력 상태를 보이기 때문이다[1].

대부분의 기계적 접촉 부품은 제조 시 날카로운 모서리를 제거하는 것이 일반적이며, 만일 날카로운 모서리를 갖고 있을 경우에도 부품의 작동 중 마멸에 의해 무디어 지는 것 또한 일반적이므로 불완전 접촉의 경우가 많다. 불완전 접촉의 대표적 예로서 헤르츠 접촉(*Hertzian contact*)이 있으며, 불완전 접촉에서의 접촉 응력은 접촉부 중앙에서 가장 크고 접촉 경계로 가까워지며 반 타원형의 함수 형태로 줄어 들어 접촉 경계에서 0이 되는 특징을 갖고 있다.

그런데, 접촉 부품의 끝단에 처리된 부드러운 곡선의 모서리가 기계 작동 중 마멸에 의해 날카로워지는 경우, 또는 작동 중 균열이 발생하여 균열 개구부의 날카로운 모서리가 상대 부품에 접촉하는 경우에는 완전 접촉 상태가 될 수 있다. 특히 균열 개구부와의 접촉인 경우에는 이를 외부에서 관찰하는 것이 용이하지 않은 경우가 많아 트라이볼로지 손상을 회피하는 설계가 어려우며, 해석적으로 손상의 정도를 예측하여 수명관리를 하는 방법을 사용할 수 밖에 없다. 이러한 예로서 원자력 발전소의 핵연료봉에서 발생하는 *pellet-cladding mechanical interaction (PCMI)* 손상이 있다.

완전 접촉 문제에서 접촉 경계의 응력장이 무한대가 되는 현상을 응력 특이(*stress singularity*)라 하며 파괴 역학에서 논하는 균열 선단에서의 그것과 물리적으로 유사하다. 따라서 파괴역학적 해석 방법과 유사한 방법을 사용하여 이 문제를 다룰 수 있으며, 이때 Williams[2]가 개발한 접근해석 방법을 예로 들 수 있다. 완전 접촉문제의 접근해석은 접촉 경계에서의 응력 특이성 지수(*order of stress singularity*)를 *eigenvalue* 문제를 풀어 구하고 이에 따른 *eigen-vector*(또는 *eigen-function*)로서 접촉 응력을 구하는 것이다. PCMI 문제에 대한 점

근해석 방법과 응력 특이성 거동의 분석은 앞선 연구결과를 참고할 수 있다[3].

한편, 완전 접촉 문제를 접촉면이 응착되어 있는 경우와 접촉면 전체에 미끄럼 마찰을 허용하는 경우로 나눌 수 있다. 이 두 경우의 해석 상 차이는 *eigenvalue* 문제를 구성하는 단계에서 접촉면의 경계 조건을 달리 적용하는 것이다. 즉 응착 접촉에서는 접촉면에서 두 물체의 수직 및 전단 응력, 그리고 수직 및 전단 변위가 연속적이며 동일하다는 조건을 부여하는 반면, 미끄럼 접촉에서는 접촉면에서 두 물체의 수직 응력 및 변위는 연속하며 동일하나 전단 응력은 수직 응력에 마찰계수를 곱한 것과 동일하다는 조건을 사용하게 된다.

그런데, 이때 응착 접촉 문제를 해석하여 구한 접촉면 수직 및 전단 응력으로부터 전단 응력을 수직 응력으로 나눈 비를 구할 수 있고, 이 비의 값이 접촉면의 마찰계수보다 큰 구간에서는 미끄럼이 발생하는 것으로 생각할 수 있다. 이것은 당초 구성한 문제에서의 응착 조건을 위배하는 흥미로운 결과를 보이는 것이다. 이러한 일종의 논리적 모순(*paradox*)에 대해 현재까지 접촉 역학 분야에서 뚜렷한 해석을 내놓고 있지는 않다. 즉, 접촉면 마찰계수가 충분히 클 경우(이때의 충분한 마찰계수의 하한 값으로서 본 논문의 식 (10)을 제시함)에서는 전체 접촉면에 응착이 발생한다고 분석하고 있으며, 그보다 작은 마찰계수 조건에서는 접촉면의 일부에서 미끄럼이 발생할 것이라고 서술하고 있다[4].

그럼에도 불구하고 접촉면이 실제 응착되어 있지 않은 경우의 실험에서 응착 접촉 문제로 해석한 접촉 응력장이 실험에서 관찰된 결과와 거의 일치한다는 것이 발견되었다[5]. 본 연구는 이러한 실험적 관찰을 근거로 완전 접촉 상태에 있는 물체의 트라이볼로지 손상을 예측하기 위한 목적으로 시작하였다. 이를 위해 접근해석 방법을 통해 완전 접촉 문제를 해석하고 접촉면의 미끄럼 조건에 대해 분석하였다. 이어서, 이종 물체 간의 접촉을 고려한 예제를 이용하여 미끄럼 구간의 크기에 대해 계산하고 고찰하였다. 본 논문은 완전 접촉 문제에서의 미끄럼 현상에 대한 하나의 예시로도 사용할 수 있을 것이다.

## 2. 연구방법 및 내용

우선 응착 완전 접촉 문제의 기하학적 모델로 Fig. 1과 같이 반무한 평판에 꼭지 각,  $\phi$ (접촉 각)의 날카로운 모서리를 갖는 쉐기가 접촉하는 형상을 고려한다. 이때 반무한 평판과 쉐기는 서로 다른 탄성적 성질을 갖

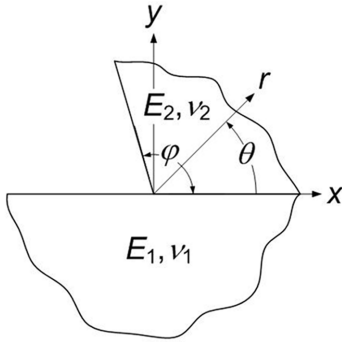


Fig. 1. Geometrical description of an adhesive complete contact problem.

고 있다고 생각하고 각각 물체(또는 탄성체) 1 및 2로 표기한다. 해석을 위한 좌표계로는 날카로운 썸끼의 끝단을 원점으로 하고 접촉면으로부터 반시계 방향으로 각도가 증가하는 극좌표계를 도입한다.

Fig. 1과 같은 형상을 갖는 탄성체의 내부 응력을 구하기 위하여 Williams [2]가 날카로운 노치를 갖는 탄성체의 응력을 구하기 위해 개발한 Airy 응력함수를 이용할 수 있으며 이는 Fig. 1의 경우에 식 (1)과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi(r, \theta) = r^{\lambda+1} \{ a_i \cos(\lambda+1)\theta + b_i \sin(\lambda+1)\theta + c_i \cos(\lambda-1)\theta + d_i \sin(\lambda-1)\theta \}, (i = 1, 2) \quad (1)$$

여기서,  $a_i, -d_i$  ( $i = 1, 2$ )는 문제의 경계조건으로부터 구하게 되는 상수들이다.

Airy 응력함수와 응력성분 및 변위와의 관계는 정의에 의하여 식 (2)의 형태로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta}, \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{2G} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \left( \frac{3-\kappa}{4} \right) \nabla^2 \Phi \right], \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} &= \frac{1}{G} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\sigma_{ij}, u_i$  ( $i, j = r, \theta$ )는 각각 응력 및 변위 성분을 표시하며,  $G$ 는 전단탄성계수, 그리고  $\kappa$ 는 Kolosov 상수로써 평면변형을 조건일 때  $(3 - 4\nu)$ , 평면응력 조건에서  $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ 이고, 이때  $\nu$ 는 프와송 비이다.

Fig. 1과 같은 접촉 문제에서 접촉면이 응착되어 있을 때 경계조건은 식 (3)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma'_{\theta\theta}(r, 0) &= \sigma'_{\theta\theta}, \sigma'_{r,\theta}(r, 0) = \sigma'_{r,\theta}(r, 0), \\ u'_r(r, 0) &= u'_r(r, 0), u'_{,\theta}(r, 0) = u'_{,\theta}(r, 0), \\ \sigma'_{\theta\theta}(r, -\pi) &= 0, \sigma'_{\theta\theta}(r, \varphi) = 0, \\ \sigma'_{r,\theta}(r, -\pi) &= 0, \sigma'_{r,\theta}(r, \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

식 (1)을 식 (2)에 대입하여 각각의 응력 및 변위 성분을 구한 후, 식 (3)의 경계조건을 적용하면 8 개의 동차 연립방정식(homogeneous simultaneous equations)을 구하게 되고, 사소하지 않은 해(non-trivial solutions)를 갖기 위해 연립방정식의 계수로 이루어진 행렬식이 0이 되어야 하는 선형대수 이론을 적용하면  $\lambda$  값을 구할 수 있으며 이것이 주어진 문제의 eigenvalue가 된다.

한편, 식 (2)에서의 응력 성분 식들이, Airy 응력함수  $\Phi(r, \theta)$ 의  $r$ 에 대한 2계 편미분으로 나타나 있으므로,  $r^{\lambda-1}$ 의 항을 포함하게 되는 것을 알 수 있고, 따라서  $0 < \lambda < 1$ 인 경우에 대해  $(\lambda - 1)$ 이 응력의 특이성 강도 또는 지수를 나타내게 된다.

Fig. 1과 같은 접촉 형상에서 접촉면이 응착상태에 있는 경우,  $0 < \lambda < 1$ 에 해당하는  $\lambda$ 가 두 개 나타나므로, 이를 각각  $\lambda_i, \lambda_{ii}$  (구분을 위해  $\lambda_i < \lambda_{ii}$  하자. 따라서  $(\lambda_i - 1)$ 의 지수를 갖는 항이 더 큰 특이성을 갖게 된다)로 표기할 때 응력장은 식 (4)와 같은 형태로 쓸 수 있게 된다.

$$\sigma_{ij} = K_i r^{\lambda_i - 1} f_{ij}^I(\theta) + K_{ii} r^{\lambda_{ii} - 1} f_{ij}^{II}(\theta) + \text{Bounded terms} \quad (4)$$

여기서,  $K_i, K_{ii}$ 는 일반 응력확대계수(generalized stress intensity factors)라 칭하는 것으로 파괴역학에서의 응력 확대계수와 유사하게 접촉 경계(파괴역학에서는 균열 선단)에서의 실제 응력 값을 나타내기 위한 scaling factor의 의미를 갖는다. 또,  $f_{ij}^I(\theta)$  및  $f_{ij}^{II}(\theta)$ 는 각각  $\lambda = \lambda_i, \lambda_{ii}$ 일 때 접촉 물체 내부의 응력장 분포의 형태를 나타내는 것으로  $\theta$ 만의 함수이다.  $K_i, K_{ii}$ 는 다음의 식 (5)를 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} K_i &= \lim_{r \rightarrow 0} [\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) \cdot r^{1-\lambda_i}] \\ K_{ii} &= \lim_{r \rightarrow 0} [\sigma_{r,\theta}(r, \theta_{ii}) \cdot r^{1-\lambda_{ii}}] \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $\theta, \theta_{ii}$ 는 식 (4)에서 다음과 같이 되도록 설정한다.

$$\begin{aligned} f'_{\theta\theta}(\theta) &= 0, f'_{r,\theta}(\theta_{ii}) = 0 \text{ and} \\ f'_{\theta\theta}(\theta) &= 1, f'_{r,\theta}(\theta_{ii}) = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

한편 식 (4)에서 특이 항( $r^{\lambda_i-1}, r^{\lambda_i-1}$ 를 포함하는 항)만을 고려하고 무차원화하게 되면 식 (7)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\sigma_r(r, \theta)}{G_o} = \left(\frac{r}{d_o}\right)^{\lambda_i-1} f_{r,\theta}^I(\theta) + \left(\frac{r}{d_o}\right)^{\lambda_i-1} f_{r,\theta}^{II}(\theta) \quad (7)$$

여기서,  $d_o, G_o$ 는 식 (8)과 같다.

$$d_o = \left(\frac{K_{II}}{K_I}\right)^{\frac{1}{\lambda_i-\lambda_{ii}}}, G_o = (K_I)^{\frac{\lambda_i-1}{\lambda_i-\lambda_i}} \cdot (K_{II})^{\frac{\lambda_i-1}{\lambda_i-\lambda_{ii}}} \quad (8)$$

### 3. 결과 및 고찰

이제 식 (7)을 이용하여 접촉면에서의 전단 응력,  $\sigma_{r\theta}$ 와 수직 응력,  $\sigma_{\theta\theta}$ 를 나타내면 아래의 식 (9)와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r(x, 0)}{G_o} &= \left(\frac{x}{d_o}\right)^{\lambda_i-1} f_{r,\theta}^I(0) + \left(\frac{x}{d_o}\right)^{\lambda_i-1} f_{r,\theta}^{II}(0), \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}(x, 0)}{G_o} &= \left(\frac{x}{d_o}\right)^{\lambda_i-1} f_{\theta\theta}^I(0) + \left(\frac{x}{d_o}\right)^{\lambda_i-1} f_{\theta\theta}^{II}(0) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 접촉면의 좌표를 표기하기 위해 식(7)의  $r, \theta$ 를 각각  $x, 0$ 으로 한 것에 주의한다(Fig. 1 참조).

최종적으로, 접촉면 전단 응력과 수직 응력의 비,  $\sigma_r(x, 0)/\sigma_{\theta\theta}(x, 0)$ 는 식 (10)과 같이 정리하게 된다.

$$\frac{\sigma_r(x, 0)}{\sigma_{\theta\theta}(x, 0)} = \frac{\left(\frac{x}{d_o}\right)^{\lambda_i-1} f_{r,\theta}^I(0) + \left(\frac{x}{d_o}\right)^{\lambda_{ii}-1} f_{r,\theta}^{II}(0)}{\left(\frac{x}{d_o}\right)^{\lambda_i-1} f_{\theta\theta}^I(0) + \left(\frac{x}{d_o}\right)^{\lambda_{ii}-1} f_{\theta\theta}^{II}(0)} \quad (10)$$

Coulomb의 마찰 법칙을 적용할 때,  $\sigma_r(x, 0)/\sigma_{\theta\theta}(x, 0)$  값이 접촉면의 정지 마찰계수( $\mu$ 로 표기한다)보다 큰 점에서 미끄럼이 발생한다고 생각할 수 있다. 응력은 탄성론의 해 중 하나이므로 그 존재성(Existence Theorem)과 유일성(Uniqueness Theorem)이 엄밀하게 증명되어 있다. 따라서 식 (10)의 결과 역시 유일하게 존재하는 값을 제시할 것이며, 한편  $\mu$ 는 실수 값이므로 위에서 설명한 접촉면 미끄럼 발생의 가능성과 미끄럼 구간이 존재할 수 있다는 것이 명백하다. 즉 해석 결과로서  $|\sigma_r(x, 0)/\sigma_{\theta\theta}(x, 0)| > \mu$ 인 경우가 분명히 존재할 수 있을 것이다.

그러나 이러한 분석결과는 본 문제가 응착 접촉 상황을 고려한 것이라는 것과 모순이 된다. 즉, 문제 해석을 위한 경계조건으로서 도입한 식 (3)에서 탄성체 1과 2의 접촉면에서 발생하는 전단 응력이 동일하다고 한 것 ( $\sigma_r^1(r, 0) = \sigma_r^2(r, 0)$ )과 전단 방향의 변위가 동일하다고 한 것( $u_r^1(r, 0) = u_r^2(r, 0)$ )은 탄성체 1 및 2가 접촉면에서

상대 변위를 갖는 미끄럼이 발생하지 않을 때 적용할 수 있기 때문이다.

이와 같은 모순에 대해 현재까지 접촉역학 분야에서 명백한 설명을 하고 있지는 않다. 이에 대해  $K_I$ 과  $K_{II}$ 의 부호에 따른 미끄럼 구간의 거동 및 그 변화에 대해서는 분석된 적이 있다[6]. 그에 의하면, 접촉 경계에 가까운 구간( $x \rightarrow 0$ )에서는 지수 ( $\lambda_i - 1$ )의 항이 지배적이므로 이에 의한 미끄럼 구간을 고려할 수 있으며, 그 반면에 접촉면 내부, 즉 접촉 경계로부터 먼 구간( $x \rightarrow \infty$ )에서는( $\lambda_{ii} - 1$ )의 항이 지배적이므로 그에 따른 미끄럼 구간을 고려할 수 있다고 하였고, 이와 함께  $|\sigma_r(x, 0)/\sigma_{\theta\theta}(x, 0)| < \mu$ 인 응착 구간의 존재에 대해 분석하였다.

이 연구결과[6]를 이용하여, 본 논문에서는, 특히 날카로운 접촉 경계 부근에서의 트라이볼로지 손상 가능성에 더욱 초점을 맞추어, 실제의 응착 완전 접촉 문제에서 접촉 경계 부근에서의 미끄럼 현상이 가능할 것인지 분석해 보고자 한다. 이를 위해 식 (10)의 양변에  $x \rightarrow 0$ 의 극한을 취한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma_r(x, 0)}{\sigma_{\theta\theta}(x, 0)} = \frac{f_{r,\theta}^I(0)}{f_{\theta\theta}^I(0)} \quad (11)$$

즉  $|f_{r,\theta}^I(0)/f_{\theta\theta}^I(0)| > \mu$ 일 경우 접촉 경계로부터 접촉면 내부로 일정 구간의 미끄럼 영역이 발생한다. 이때의 미끄럼 구간 길이는 식 (10)과  $\mu$ 를 등치시킨 후 구하게 되는  $x$ 값이 된다. 이때 주의하여야 하는 것은 접촉 문제에서  $\sigma_{\theta\theta}(x, 0)$ 의 부호가 (-)이므로 식 (5)에서  $K_I$ 의 부호도 (-)가 되고 따라서 식 (8)을 계산하기 위해  $\bar{K}_I = -K_I$ 로 하여 허수가 계산되는 것을 피하고, 또한  $K_{II}$ 의 부호가 (+)일 경우와 (-)일 경우로 분리하여 생각하여야 한다는 것이다.  $K_{II}$ 의 부호는 접촉 전단 하중의 방향에 따라 결정된다. 예를 들어  $K_{II}$ 의 부호가 (+)일 경우에는 접촉 경계로부터의 미끄럼 구간의 길이를 식 (12)로부터 계산할 수 있다.

$$x = d_o \cdot \left[ \frac{f_{\theta\theta}^{II}(0) - \mu \cdot f_{\theta\theta}^{II}(0)}{f_{r,\theta}^I(0) - \mu \cdot f_{\theta\theta}^I(0)} \right]^{\frac{1}{\lambda_i - \lambda_{ii}}} \quad (12)$$

### 4. 예제 해석 및 토의

응착 완전 접촉 상태의 접촉면에 발생하는 미끄럼 현상이 어떻게 나타날 수 있는지를 관찰하기 위해 간단한 예제를 해석하였다. 해석에 사용한 기하학적 모델은 Fig. 2와 같이 서로 다른 재질의 두 정사각형이 접촉하며 접촉면에 상대적인 미끄럼이 없다는 조건을 적용하였다.

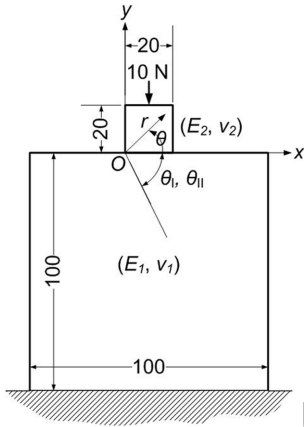


Fig. 2. Geometrical description of the example problem.

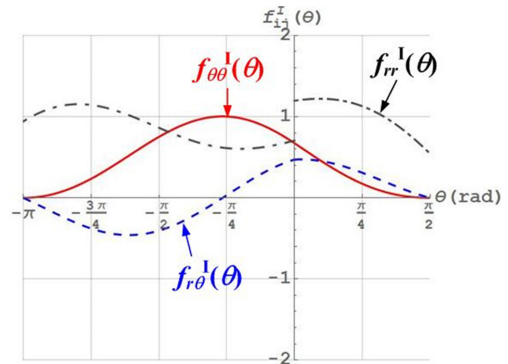
아래의 정사각형(탄성체 1)과 이에 접촉하는 위의 정사각형(탄성체 2)은 각각  $100 \times 100 \text{ mm}$ ,  $20 \times 20 \text{ mm}$ 의 크기로 하였고, 둘 사이의 접촉력으로서 수직 하중  $10 \text{ N}$ 을 부가하였다. 접촉 물체를 육면체가 아닌 사각형으로 모델링한 것은 본 예제를 평면 변형을 문제로 다루고자 한 것이다.

한편 정사각형 간의 접촉이므로 접촉각(Fig. 1에서의  $\varphi$ )는  $90^\circ$ 이며 각각의 재질은 식 (13)으로 표현되는 Dundurs 상수[7],  $(\alpha, \beta) = (0.4, 0.1)$ 인 경우로 하여, 두 접촉물체가 탄성적으로 동일한 경우에 대해 관찰한 기존 문헌의 경우[4]를 확장하여 해석하였다.

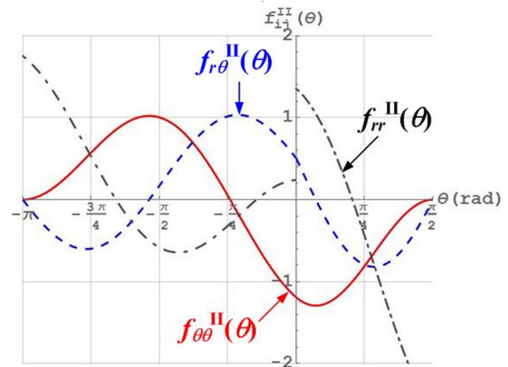
$$\alpha = \frac{G_2(K_1 + 1) - G_1(K_2 + 1)}{G_2(K_1 + 1) + G_1(K_2 + 1)}, \quad \beta = \frac{G_2(K_1 - 1) - G_1(K_2 - 1)}{G_2(K_1 + 1) + G_1(K_2 + 1)} \quad (13)$$

해석의 순서는 앞의 2 및 3절에 기술한 것과 같으며, 이때 일반 응력확대계수  $K_I$ 과  $K_{II}$ 를 구하기 위해 간단한 유한요소해석을 수행하였다. 즉 식 (5)를 적용하기 위해 접촉 경계(Fig. 2에서 원점 O로 표시된 지점)로 접근할 때의  $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta)$ 과  $\sigma_{r\theta}(r, \theta_{II})$ 를 구하기 위해 유한요소해석을 수행한 것이다.

유한요소해석을 위해서는 상용 프로그램 ABAQUS (version 6.10)를 사용하였고, 전체 유한요소 모델로서 PLANE182를 사용하였으며, 탄성체 1의 바닥은 모든 방향의 자유도를 구속하였다. 탄성체 1과 2의 모델에 사용한 요소의 수는 총 14,192개였다. 이를 제외하고는 모



(a)  $f_{ij}^I(\theta)$



(b)  $f_{ij}^{II}(\theta)$

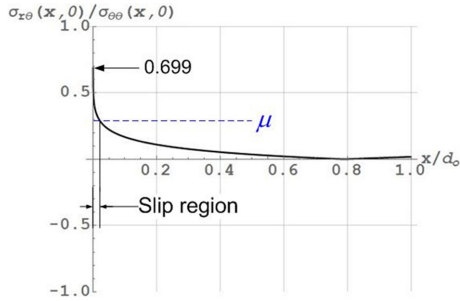
Fig. 3. Plots of  $f_{ij}^I(\theta)$  and  $f_{ij}^{II}(\theta)$ ,  $(i, j) = (r, \theta)$  of the example problem.

두 이론적 해석으로 이루어지며, 이때의 계산을 위해 상용 프로그램 Mathematica(version 10)을 사용하였다.

해석 결과로서, 우선 경계 조건 식 (3)을 이용하여 계산된 eigenvalue는  $\lambda_1 = 0.5107$ ,  $\lambda_{II} = 0.8046$ 이었다. 이를 이용하여  $f_{ij}^I(\theta)$ 와  $f_{ij}^{II}(\theta)$ 를 계산하면 Fig. 3과 같이 도시할 수 있다. Fig. 2에서  $-\pi \leq \theta \leq +\pi/2$ 이므로, Fig. 3에서 이와 동일한 정의역을 갖는 것을 볼 수 있다. Fig. 3과 식 (6)으로부터  $\theta_I = -43.50^\circ$ ,  $\theta_{II} = -47.67^\circ$ 를 얻을 수 있다.

한편, 식 (5)의 정의와 유한요소해석으로부터 구한 일반 응력확대계수는  $K_I = -0.3609 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-0.5107}$ 과  $K_{II} = 0.2294 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-0.8046}$ 을 얻는다. 이에 따라 식 (8)로부터  $d_0 = 4.673 \text{ mm}$ ,  $G_0 = 0.170 \text{ N/mm}$ 가 계산된다.

이제 식 (11)의 결과를 얻기 위해 Fig. 3을 이용하면,  $f_{r\theta}^I(0)/f_{\theta\theta}^I(0) = 6.99$ 를 얻게 된다. 즉 접촉면의 정지 마찰계수,  $\mu < 0.699$ 일 때 접촉면에서 미끄럼이 발생하게



**Fig. 4.** Behaviour of  $(\sigma_{x0}(x, 0) / \sigma_{00}(x, 0))$  of the example problem. Also depicted is  $f'_{r,\alpha}(\theta)$  and  $f''_{\theta\theta}(\theta) = 0.699$  as  $x \rightarrow 0$ . A slipping takes place if  $\mu < 0.699$ .

되는 것이다. Fig. 4에는 식 (10)에서 나타낸  $\sigma_{r,\alpha}(x, 0) / \sigma_{00}(x, 0)$ 의 결과를 도시하고 있다. 여기서 접촉 경계로부터 접촉면 내부로 진행할수록 단조 감소하는 거동을 보이는 것을 알 수 있다.

Fig. 4에 정지 마찰계수를 적용하여 미끄럼 구간의 범위를 파악할 수 있으며, 정확한 길이는 식 (13)을 이용하여 계산할 수 있다. 예로서,  $\mu = 0.1, 0.3, 0.5$ 일 때, 미끄럼 구간의 길이는 각각 0.227, 0.019 및  $0.773 \times 10^{-3}$  mm로 계산된다. 마찰계수 값이 증가할수록 미끄럼 구간의 길이가 줄어드는 것을 알 수 있다. 계산된 미끄럼 구간의 길이는 탄성체 1번 아니라 탄성체 2와 비교하더라도 그 크기가 상대적으로 매우 작은 값이다. 그러나 본 연구에서 논의하고 있는 응착 접촉면에서의 미끄럼 발생이 명백히 존재한다는 것은 확인이 된다.

다른 예제 계산을 위해서는 두 물체의 탄성적 성질 ( $\alpha, \beta$ ) 및 접촉 각( $j$ )을 변경하고, 또한 접촉 물체의 크기 및 접촉 하중을 다르게 하여(이에 따라  $K_1, K_2$  및  $d_0, G$ 가 달라짐) 본 논문에서 사용한 방법을 그대로 반복하여 수행하면 된다. 그러나, 식 (11)에서 나타낸 것과 같이  $|f'_{r,\alpha}(0) / f'_{\theta\theta}(0)| > \mu$ 일 경우에는 접촉면에서의 미끄럼 발생을 피할 수 없을 것이다.

## 5. 결 론

완전 접촉의 형상을 구성하고 있는 두 탄성체가 접촉면이 응착되어 있는 경우의 문제를 접근해석 방법을 이

용하여 이론적으로 해석할 때, 전제로 설정한 응착 조건에 반하는 접촉면 미끄럼 현상을 관찰할 수 있다. 응착 완전 접촉을 모사한 한가지 경우의 예제 해석에서, 비록 아주 작은 크기이나 접촉면에 미끄럼 구간이 발생할 수 있다는 것을 확인할 수 있었다. 이와 같은 흥미로운 현상에 대해 향후 수학적, 물리적 의미를 찾아야 할 것으로 생각된다.

## Acknowledgements

본 논문은 한국원자력연구원 기술수출사업과제 (과제 번호: 72702-19)의 지원으로 수행되었음.

## References

- [1] Hills, D. A., Nowell, D., Sackfield, A., *Mechanics of Elastic Contacts*, Chap. 4 & 5, pp.84, Butterworth-Heinemann Ltd., Oxford, UK, 1993.(ISBN 0-7506-0540-5)
- [2] Williams, M. L., "Stress Singularities resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension", *J. Appl. Mech.*, Vol.19, pp.526-528, 1952.
- [3] Kim, H.-K., "Stress Singularity Behaviour in the Frictional Complete Contact Problem of Three Bodies", *Tribol. Lubr.*, Vol.35, No.4, pp.229-236, 2019, <https://doi.org/10.9725/kts.2019.35.4.229>
- [4] Barber, J., *Contact Mechanics*, Chapter 10, pp. 214-216, Springer, Dordrecht, Netherlands, 2018.(ISBN 978-3-319-70939-0)
- [5] Jang, J.-W., Kim, H. -K., Lee, S.-B., "Numerical and Experimental Investigation of a Complete Contact Problem by comparing with an Asymptotic analysis", *Int. J. Solids Struct.*, 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.12.023>
- [6] Kim, H.-K., Hills, D. A. Paynter, R. J. H., "Asymptotic Analysis of an Adhered Complete Contact between Elastically Dissimilar Materials", *J. Strain Analy.*, 2014, <http://sdj.sagepub.com/content/49/8/607>
- [7] Dundurs, J., "Discussion on edge bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading", *J. Appl. Mech.*, Vol.36, pp.650-652, 1969.