한국학교수학회논문집 제 23 권, 제 2호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 23, Number 2, 203-222, June 2020
http://doi.org/10.30807/ksms.2020.23.2.002

초등학생들의 분수 나눗셈 문제해결 방법에 대한 예비교사들의 지식 분석

이대현[1]

교육과정이 의도하는 목적을 달성하는데 교사의 역할은 중요하기 때문에 교사가 갖추어야 할 지식에 대한 연구가 중요하게 다루어져 왔다. 이 중에서 '교수학적 내용 지식'은 교사의 전문성을 부각시킬 수 있는 지식으로, 본 연구에서는 분수 나눗셈에 대해 초등학생들이 제시할 수 있을 것으로 생각되는 문제해결 방법에 대한 초등 예비교사들의 지식을 분석하였다. 본 연구에 참여한 예비교사들은 대학 교육과정 중 수학과 교육 필수 강좌를 모두 마친 상태였으며, 이들을 대상으로 분수 나눗셈의 4가지 유형에 대해 조사연구를 실시하였다. 연구 결과, 초등 예비교사들은 균등 분배 문제-포함제-등분제-단위 비율 결정 상황의 순으로 빈도수를 나타내었으며, 전형적인 알고리즘뿐만이 아니라, 그림을 이용하거나 식을 이용한 경우에서도 의미 있는 반응들을 제시하였다. 이를 바탕으로 예비교사 교육기간에 분수 나눗셈의 여러 가지 해결 방법을 서로 공유하면서 이에 대한 지식을 갖출 필요성을 제안하였다.

주요용어 : 초등 예비교사, 교사 지식, 내용과 학생에 대한 지식, 분수 나눗셈, 문제해결 방법, 비형식적 지식

Ⅰ. 서론

학교 교육과정을 운영하기 위하여 교육의 구성 주체인 '교사, 학생, 교육 내용'의 3요소가 제 기능을 다해야 한다. 이 중에서 교사는 자신이 가지고 있는 수학 교육관과 가르칠 내용에 대한 지식, 그리고 가르칠 내용과 관련된 다양한 유형의 지식 및 수업 운영 기술을 바탕으로 실제 교육을 운영해 가는 핵심 주체이다. 따라서 교사가 갖추어야 할 지식에 대한 관심이 대두되는 것은 당연한 이치이다. 교사가 갖추어야 할 지식은 가르칠 교과 내용에 대한 단편적인 지식에 한정되지 않으며, 가르칠 내용에 대해 학생들이 사고하는 방법과 그들이 나타낼 수 있는 전형적인 오류 및 이를 교정할 수 있는 방법을 아는 것, 교과 내용을 어떤 방법으로 가르칠 것인가와 같은 다양한 유형의 지식을 필요로 한다.

교사에게 필요한 지식에 대해 여러 연구자들이 많은 유형의 지식을 제시하였지만, 교사에게 필요한 지식은 여러 가지 지식이 복합적으로 융합된 지식이어야 된다는 데에는 공통된 의견이라고 할 수 있다. 일찍이 Shulman(1986)은 특정 내용과 관련하여 교사의 마음속에 성장해 가는 지식의 중요성을 강조하며, 이 중의 하나로 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge)을 제안하였다. 이후 교수학적 내용 지식은 교과교육학이 일반 교육학과 차별되는 정체성을 나타냄과 동시에 교사의 전문성을 보장하고 확보하는 특별한 지식으로 인식되기 시작하였다(박경미, 2016). 따라서 전문성을 갖춘 교사로서 교과 내용을 지도하는데 필요한 교수학적 내용 지식에 대한 폭넓은 이해는 교수・학습 상황에서

---

* MSC2010분류 : 97C70
1) 광주교육대학교 교수 (leedh@gnue.ac.kr)

학생들의 다양한 사고 방법을 이해하고, 이를 바탕으로 효율적인 교수 전략을 세워 수업을 운영해 간다는 면에서 중요하다.

특히, 분수의 나눗셈은 초등학생들이 학습하고 이해하기 어려운 학습 주제의 하나이며(김민경, 김서영, 2017), 교사들에게도 가르치기에 도전적인 내용으로 인식되고 있다. 그 이유의 하나로 분수의 나눗셈은 여러 유형으로 나누어지며, 유형에 따라 문제해결 방법과 알고리즘 생성 과정이 다르기 때문이다. 이에 분수 나눗셈의 유형으로 방정숙, 이지영(2009)은 등분제, 포함제, 직사각형의 넓이의 의미로, 박교식, 송상헌, 임재훈(2004)은 포함제, 등분제, 단위 비율의 결정, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역 상황의 의미로, 교육부(2019c)에서는 등분제와 포함제, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역, 단위 비율 결정 상황 등으로 제시하고 있다. 또, 김정하(2020)는 포함제, 단위 비율 결정 상황, 곱셈의 역연산 상황의 3가지 상황과 그에 따른 하위 유형을 제시하고 있다. 이러한 이유로 새로운 교육과정에 따른 교과서가 개발될 때마다 포함제와 등분제, 단위 비율 결정 상황, 곱셈의 역연산 상황 등과 같은 여러 유형의 맥락을 선택하여 나눗셈 도입 상황을 설정하고 있다. 예를 들어 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서에서는 제수가 분수인 경우에 포함제 맥락으로 문제 상황을 제시한 반면(교육부, 2015), 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서에서는 포함제, 단위 비율 결정 상황, 곱셈의 역연산 상황(직사각형 넓이 이용)으로 문제 상황을 제시하고 있다(교육부, 2019b).

마찬가지로 분수의 나눗셈은 나눗셈을 구성하는 제수와 피제수에 제시된 분수의 유형에 따라 나눗셈을 해결하기 위한 방법과 알고리즘을 생성하는 방법이 여러 가지 존재한다. 본 연구에서는 분수의 다양한 유형과 나눗셈 식을 구성하는 제수와 피제수에 제시된 분수의 유형에 따라 나눗셈의 해결 방법에 차이가 있음에 염두를 두고, (분수)÷(분수)의 지도에 중요한 역할을 하는 (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내는 균등 분배 상황과 나눗셈 식에 제시된 분수 유형에 따라 등분제와 포함제 상황 및 2015 개정 교과서에서 새로운 유형으로 제시된 단위 비율 결정 상황에 대한 예비교사들의 지식을 분석하고자 한다.

학생들이 다양한 방법으로 문제를 해결하도록 이끌어 주기 위해 그들의 사고 과정을 파악하는 것은 수업을 운영해 갈 주체인 교사에게 중요한 지식이다. 즉, 학생들의 분수 나눗셈 문제해결 방법을 예측하고 사고해 보는 것은 학생들의 문제해결 방법을 이해하고 이에 적절한 지도 방안을 탐색함으로써 학습지도 능력을 기를 수 있다는 면에서 중요하다. 특히 예비교사들이 학교 현장에 나가기 전에 분수 나눗셈 내용에 대해 어느 정도 가르칠 준비가 되어 있는지 뿐만이 아니라, 초등학생들이 분수 나눗셈에 대해 어떻게 사고하고 해결할 것인가에 대한 예비교사의 지식을 확인하는 것은 예비교사 교육에 시사점을 얻을 수 있기에 중요하다. 이전에 연구가 수학 교과 교육의 수강 여부와 무관하게 연구 대상자를 선정하였거나(예: 노지화, 고호경, 허난, 2016; 박교식, 송상헌, 임재훈, 2004) 분수 나눗셈 문장제 만들기나 교과 내용 지식에 초점을 둔 것(예: 강영란, 조정수, 김진환, 2012; 이대현, 서관석, 2003)에 비해 본 연구에서는 예비교사 교육기간에 이루어질 수학 교과교육론을 모두 수강한 예비교사를 대상으로 분수 나눗셈에 대한 '내용과 학생에 대한 지식'을 분석하였다. 이를 위해 본 연구에서는 분수 나눗셈의 대표적인 4가지 유형의 문제에 대해 초등학생들이 제시할 수 있는 문제해결 방법을 초등 예비교사들이 어떻게, 어느 정도 생각해 낼 수 있는가에 대한 내용과 학생에 대한 지식을 조사·분석하고자 한다. 이를 통해 분수 나눗셈 지도에 관한 예비교사들의 지식을 확인하고, 예비교사 지도에 시사점을 얻고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학교사 지식

학교교육의 질을 향상시키기 위한 노력에서 교사 지식은 중요하기 때문에 교사 지식에 대한 연구가 관심의 대상이 되어 왔다(방정숙, Li, 2008). 교사 지식은 교과 내용에 대해 일반인이 가지는 지식과 구별되는 특정 지식과 관련되며, 이것은 가르칠 내용에 대한 지식뿐만이 아니라, 학생들이 배울 내용에 대해 가지고 있는 비형식적 지식은 무엇인지, 학생들이 자주 범하는 오류는 무엇인지, 그러한 오류를 처치할 수 있는 교수 방안은 무엇인지 등에 관한 지식을 포함한다(송근영, 방정숙, 2013). 또한 교사의 지식은 교육과정이 지향하는 관점을 실현하는데 중요한데, 예를 들어 2015 개정 수학과 교육과정에서 제시하는 문제해결 교과 역량의 '협력적 문제해결'의 경우에 교사는 수업 상황에서 학생들이 상호 협력적으로 문제를 해결해 갈 수 있도록 이에 필요한 문제 상황을 제시하고 물리적 수업 환경도 구성할 수 있는 능력과 지식을 가지고 실천해야 할 것이다. 이와 같이 교육과정은 교사에 의해 교실에서 실현된다는 면에서 교사의 역할과 교사가 겸비할 지식은 수업의 질에 영향을 주는 중요한 요인의 하나로 관심의 대상이 되어 왔다.

교사가 갖추어야 할 지식에 대한 관심은 1985년에 American Educational Research Association의 회장이었던 Shulman에 의해 제기되어 여러 유형으로 세분화되기 시작하였다(박경미, 2016). Shulman(1986, 1987)이 제시한 특정 교과 내용과 관련해 교사의 마음속에 성장해 가는 지식 중에서 교수학적 내용 지식은 가르칠 내용과 교수학의 특별한 화합물로, 교과교육학이 일반 교육학과는 차별되는 교과교육학의 정체성을 확보하면서 수학 교사에게 요구되는 특별한 지식으로 인식되기 시작하였다. Shulman의 제안에 따라 교수학적 내용 지식에 대한 관심이 특히 높아지기 시작하였지만, 교사에게 요구되는 지식의 유형은 차이를 나타내었다(송근영, 방정숙, 2012; 박경미, 2009; Grossman, 1990).

한편, Ball, Thames & Phelps(2008)는 수학 교수학적 지식(mathematical knowledge for teaching; MKT)을 교과 관련 지식(subject matter knowledge)과 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge)으로 나누고, 각각에 대해 다음과 같이 3개씩 하위 지식을 제시하고 있다.

- 교과 관련 지식(subject matter knowledge)
  - 공통 내용 지식(common content knowledge; CCK)
  - 전문적 내용 지식(specialized content knowledge; SCK)
  - 수학적 안목의 지식(horizon content knowledge)
- 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge)
  - 내용과 학생에 대한 지식(knowledge for content and students; KCS)
  - 내용과 교수에 대한 지식(knowledge for content and teaching; KCT)
  - 내용과 교육과정에 대한 지식(knowledge for content and curriculum)

본 연구는 Ball, Thames & Phelps(2008)가 제시하는 교사 지식의 유형 중에서 '내용과 학생에 대한 지식'에 초점을 두고자 한다. 이를 이해하기 위해 교사에게 요구되는 6가지 지식을 본 연구의 조사 내용인 분수의 나눗셈의 맥락에 비추어 살펴보면 다음과 같다. 첫째, 공통 내용 지식은 학교 수업과 무관하게 이용되는 수학 지식으로, '사과 3개를 2명이 똑같이 나누어 먹을 때 한 사람이 먹는 사과의 양은 1개 반이라는 것을 아는 지식'을 의미한다. 둘째, 전문적 내용 지식은 수업 상황에 필요한 지식으

로, '사과 3개를 2명이 똑같이 나누어 먹을 때 한 사람이 먹는 사과의 양은 1개 반이라는 것을 학생들이 그림을 그리거나 구체물을 이용하여 구할 수 있다는 것을 아는 지식'을 의미한다. 셋째, 수학적 안목의 지식은 수업 주제가 교육과정 내의 다른 주제와 어떻게 관련되어 있는가를 아는 지식으로, '사과 3개를 2명이 똑같이 나누어 먹을 때 한 사람이 먹는 사과의 양을 구하는 균등 분배 문제가 몫으로서 분수 개념이라는 것을 아는 지식'을 의미한다.

넷째, 내용과 학생에 대한 지식은 가르칠 내용과 학생에 대해 아는 것을 결합하는 지식으로, '분수 나눗셈 문제에 대해 학생들이 어떻게 사고하고 해결할 것인가와 학생들이 나타내는 전형적인 오류 등을 아는 지식'을 의미한다. 따라서 본 연구에서 초등학생들이 분수 나눗셈을 어떻게 해결할 것인가에 대해 예비교사들이 제시하는 문제해결 방법을 통해 알고자 하는 지식은 내용과 학생에 대한 지식인 것이다. 다섯째, 내용과 교수에 대한 지식은 가르칠 내용과 가르치는 것에 대해 아는 것을 결합하는 지식으로, '분수 나눗셈에 대해 이중수직선과 같은 모델을 이용하여 해결하는 방법을 아는 지식'을 의미한다. 마지막으로 내용과 교육과정에 대한 지식은 교육과정의 내용 체계를 아는 지식으로, '분수 나눗셈을 포함한 초등학교 교육과정의 내용 체계에 대한 지식'을 의미한다.

이러한 구분에도 불구하고 각 지식은 중첩되는 경향이 있으며(서동엽, 2010), 분수 나눗셈의 경우에도 분수 나눗셈 자체는 공통 내용 지식이지만, 분수 나눗셈의 여러 하위 유형별로 해결 방법을 아는 것은 전문적 내용 지식에 속한다. 또한 분수 나눗셈에 대한 학생들이 보이는 전형적인 오류에 대한 지식은 내용과 학생에 대한 지식이지만, 학생들의 오류를 교정할 수 있는 방안에 대해 아는 지식은 내용과 교수에 대한 지식에 속하는 것이다.

이러한 구분에 비추어 본 연구에서는 초등 예비교사들이 분수의 나눗셈 문제에 대해 초등학생들이 제시할 수 있을 것으로 생각되는 문제해결 방법을 분석하는 연구이다. 따라서 예비교사로서 분수 나눗셈에 대해 초등학생들이 어떻게 사고하고 해결할 수 있는가를 아는 지식인 '내용과 학생에 대한 지식'의 영역에 연구 내용을 국한시킬 것이다. 예비교사들이 제시하는 학생들의 문제해결 방법에 대한 예견은 수업과 관련된 사고 내용을 미리 거치는 학습 지도 방법인 '사고실험'의 일환으로(우정호, 2000), 교사가 학습 내용의 지도에 앞서 학생들의 반응을 예상하고 이를 바탕으로 수업을 구상할 수 있는 사고실험의 출발점이기도 한 것이다.

한편, 우리나라의 경우에 교사 지식에 관한 연구는 2000년대 초반 이후로 꾸준히 증가하고 있는데(방정숙, 선우진, 2014), 교사 지식에 관한 연구는 주로 교수학적 내용 지식에 관한 연구가 주를 이루었으며, 그 하위 요소는 다양하게 나타났다(송근영, 방정숙, 2013). 교사 지식에 대한 연구 주제로는 교사의 전문성 신장에 관한 연구에서 출발되어, 2010년대 이후로는 교사 지식에 대한 실태와 교사 지식의 신장에 대한 연구의 비중이 높아지고 있는 추세이다(방정숙, 선우진, 2014). 특히 초등 예비교사를 대상으로 실시한 선행연구로는 특정 교과 내용에 관한 내용 지식 분석 연구(김해규, 2012; 방정숙, Li, 2008; 최은아, 강향임, 2014)가 주를 이루고 있는데, 이러한 연구들은 예비교사 교육에서 출발하는 교사의 전문성에 대한 신장 방안을 모색할 수 있다는 면에서 고무적이라고 할 수 있다.

2. 분수 나눗셈 문제해결 방법

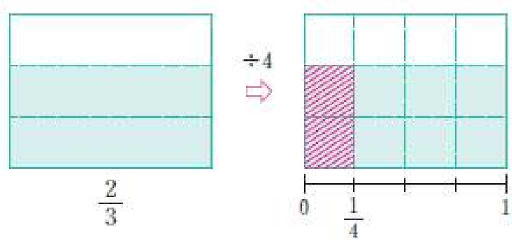
초등학교 수학에서 분수 나눗셈은 학생들뿐만이 아니라 교사들에게도 지도하기 어려운 내용으로 인식되는데, 그 이유는 자연수 맥락에서 적용된 원리가 분수 맥락에서는 적용되지 않으며 이를 해결하는 방법도 다양하기 때문이다. 예를 들어, 자연수 맥락에서 '사과 10개를 2명이 똑같이 나누어 가지면 한 사람이 가지는 사과는 몇 개인가?'라는 등분제에서는 한 사람당 5개씩 가지게 되는 비율 상황으로

적절하게 해석된다. 그렇지만 '컵의 $\frac{2}{3}$만큼 담긴 물의 양이 $\frac{4}{5}$L일 때 한 컵의 물의 양은 얼마인가?'라는 문제 상황은 등분제로 인식하기가 어려우며[2], 문제해결을 위해 이를 나눗셈 식으로 표현하기도 쉽지 않다. 따라서 교육과정 개정에 따른 교과서에서도 분수 나눗셈의 도입에 포함제나 등분제와 같은 맥락을 선택적으로 적용했음을 알 수 있다.

분수의 나눗셈은 크게 (자연수)÷(자연수), (분수)÷(자연수), (분수)÷(분수)의 유형으로 구분할 수 있다. 이에 2015 개정 교육과정에 따른 6-1학기 교과서에서는 (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내는 '몫으로서 분수' 도입에 중점을 두고 있고, (분수)÷(자연수)를 등분제 상황과 직사각형의 넓이를 이용한 역연산 상황으로 도입하고 있다(교육부, 2019a). 또 2015 개정 교육과정에 따른 6-2학기 교과서에서는 (분수)÷(분수)를 문제에 포함된 분수 유형에 따라 포함제, 단위 비율 결정 상황, 배 상황, 직사각형의 넓이를 이용한 역연산 상황 등과 같이 다양한 맥락으로 도입하고 있다(교육부, 2019b). 이러한 문제 상황의 도입 맥락의 차이는 각 유형에 따라 계산 원리를 발견하는 방법에서도 차이를 나타내게 된다.

분수 나눗셈에 유형에 대한 선행 연구(김정하, 2020; 박교식, 송상헌, 임재훈, 2004; 방정숙, 이지영, 2009)에서 제시된 몇 가지 유형중 대표적인 유형으로는 등분제, 포함제, 단위 비율 결정, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역 상황 등을 들 수 있다. 이중 등분제 상황은 제수가 자연수인 경우에 적합하며 제수가 분수인 경우에는 1단위에 해당되는 양을 구하는 단위 비율 결정 상황으로 해석하는 것이 적절하다. 또, 포함제 상황은 동수누감의 상황으로 해석하기 쉬우므로 분수로 표현되는 몫을 나머지와 혼동할 가능성이 있다. 곱셈의 역연산은 곱셈의 역조작인 나눗셈이므로 배의 상황의 역을 의미하며, 카테시안 곱의 역 상황은 직사각형의 넓이와 한 변의 길이를 알 때 나머지 변의 길이를 구하는 상황을 나타낸다(박교식, 송상헌, 임재훈, 2004). 이 중에서 본 연구에서는 교과서에서 대표적으로 다루어져 온 균등 분배 상황, 포함제, 등분제, 단위 비율 결정 상황의 문제를 설문 대상으로 선정하였다. 이에 현행 교과서에 제시된 몇 가지 대표적인 분수 나눗셈 해결 방법을 제시하면 다음과 같다.

먼저, (자연수)÷(자연수)는 '균등 분배 상황'의 문제로 분수 모형을 이용하여 여러 가지 방법으로 균등 분배하는 과정을 통해 한 사람이 갖는 양인 몫을 분수로 표현하도록 한다. 이 경우에 분수 모형을 분할하는 방법은 Ⅲ장의 <표 Ⅲ-1>과 같이 학생들에 따라 다양하게 나타날 수 있다. 다음으로 (분수)÷(자연수)인 등분제 상황에서는 [그림 Ⅱ-1]과 같이 그림을 이용하여 $\frac{2}{3}\div 4$는 $\frac{2}{3}$를 똑같이 4로 나눈 것의 하나이므로 $\frac{2}{3}$의 $\frac{1}{4}$과 같다. 따라서 $\frac{2}{3}\div 4=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$과 같은 과정을 통해 계산의 의미와 방법을 탐구하도록 하고 있다(교육부, 2019a).



[그림 Ⅱ-1] (분수)÷(자연수)의 해결 방법(교육부, 2019a, p. 16)

2) 분수의 등분제 상황은 단위 비율 결정 상황으로 해석하는 것이 적절하지만, 단위의 크기 또는 비율을 나타내기 때문에 등분 상황의 확장 또는 넓은 의미의 등분 상황으로 볼 수 있다(신준식, 2013; 교육부, 2019c).

마지막으로 (분수)÷(분수)인 단위 비율 결정 상황에서는 단위량을 구하기 위해 제수의 단위분수만큼을 구하는 과정(제수의 분자로 나누는 과정)과 단위량만큼을 구하는 과정(제수의 분모만큼 곱하는 과정)을 통해 나눗셈 식을 곱셈식으로 변환하는 과정으로 제시하고 있다(교육부, 2019b). 이상에서 제시한 방법 외에도 분수 나눗셈을 해결하기 위한 방법과 알고리즘을 생성하는 방법은 문제 맥락과 제수와 피제수에 제시된 분수 유형에 따라 여러 가지가 존재한다. 또한 그 방법 중에는 알고리즘을 생성하는 과정과는 달리, 비형식적으로 문제의 답을 찾는 여러 가지 방법이 가능하다. 따라서 본 연구에서는 초등 예비교사들이 알고리즘을 도출하기 위한 전형적인 해결 방법뿐만이 아니라, 초등학생들이 분수 나눗셈에 대한 문제를 해결할 때 사용할 수 있는 다양한 방법을 추측해 보도록 의도하였다.

분수 나눗셈의 답을 산출하는 각각의 방법들이 나눗셈의 계산 결과를 알아낼 수는 있지만, 알고리즘의 생성 과정을 충분히 보여주지는 못할 수도 있다. 예를 들어, 포함제 상황의 경우에는 제수만큼을 연속적으로 빼어서 계산 결과를 구할 수 있으며, 측정 상황에서는 측정 단위를 같게 만드는 과정인 분모를 같게 만들어 분자끼리의 나눗셈으로 해결하는 방법이 가능하다. 그렇지만 두 방법 모두 제수의 역수를 곱하는 과정을 자연스럽게 이끌어 내는 데에는 한계가 있다. 이에 비해, 단위 비율 결정 상황은 수직선과 분수 모형을 이용하여 학생들이 비형식적으로 문제를 해결해 가는 과정과 유사한 과정으로 분수 나눗셈 알고리즘의 생성 과정을 이끌어 낼 수 있다는 장점이 있기도 하다(Empson & Levi, 2011).

한편, Ma(1999)가 분수 나눗셈에 대한 교사 지식의 문제를 제시한 이후로 우리나라에서도 분수 나눗셈에 대한 예비교사 지식 연구가 이루어져 왔다. 그 중에서 몇 가지를 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 예비교사를 대상으로 설문지를 활용하여 분수 나눗셈 식에 맞는 문장제를 만들도록 요구한 연구들이 있다(예: 노지화, 고호경, 허난, 2016; 박교식, 송상헌, 임재훈, 2004). 이들 연구에서는 예비교사를 대상으로 분수 나눗셈 식을 제시하고, 이에 적합한 문장제(스토리 문제)를 만들도록 요청하였다. 그 결과로 예비교사들은 분수 나눗셈에 대한 상황적 의미를 인식하고 문장제를 만드는 데에 어려움을 가지는 것으로 나타났다.

예비교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식을 분석한 연구의 일환으로 방정숙, Li(2008)는 초등수학교육론 강좌를 수강한 예비교사들을 대상으로 설문지를 이용하여 분수 나눗셈과 관련된 일반적인 내용 지식과 교수 내용 지식을 분석하였다. 그 결과로, 내용 지식 측면에서 예비교사들은 단순 계산이나 문장제, 연산 감각 측면에서 높은 정답률을 보였으나, 나눗셈의 계산 과정을 개념적으로 이해하는 데에는 20%의 오답률을 보임으로써 예비교사들의 분수 나눗셈에 대한 문제점을 지적하였다. 또한 예비교사들이 분수 나눗셈에 대해 보이는 오류를 분석한 연구의 일환으로 박교식, 권석일(2011)은 예비교사 65명을 대상으로 포함제 맥락의 분수 나눗셈 문장제를 해결하도록 하였는데, 분수 나눗셈의 계산 결과를 해석하는데 어려움을 가진다는 것과 이에 대한 교육 프로그램이 필요함을 제안하였다.

분수 나눗셈에 대한 선행연구 중에서 균등 분배 상황인 (자연수)÷(자연수)에 대한 연구로는 Steffe의 분할 조작의 관점에서 균등 분배 문제해결 과정에 나타나는 전략을 유형화한 연구가 있다(김성희, 신재홍, 이수진, 2018). 또, 초등학생들을 대상으로 설문지를 활용하여 몫으로서 분수에서 단위에 대한 초등학생들의 사고를 분석한 연구(이지영, 방정숙, 2014)와 분수와 분수 연산을 학습한 학생과 학습하지 않은 학생들을 대상으로 균등 분배 문제에 대한 해결 방법을 조사한 연구도 있다(이대현, 2018). 이들 연구에서는 균등 분배 문제에 대해 초등학생들이 제시하는 다양한 문제해결 방법과 오류 유형을 제시하고 있는데, 균등 분배 문제는 이후에 분수 나눗셈을 다루는데 출발점이 되기 때문에 예비교사들은 이에 대한 이해가 필요하다. 교사 스스로 분수 나눗셈에 대해 개념적으로 이해하지 못하거나, 초등학생들이 제시할 수 있는 다양한 문제해결 방법을 인식하지 못한다면 의미 있는 학습 지도를 기대하기 어렵다. 따라서 본 연구에서는 예비교사들이 초등학생들의 문제해결 방법을 어느 정도 예측할 수 있는가에 초점을 두고 그 결과를 분석하고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구를 위해 G교육대학교 '수학과 교육Ⅰ, Ⅱ' 강좌의 수강을 마친 초등수학 심화과정 학생이 아닌 3학년 59명을 대상으로 질문지를 이용한 조사연구를 실시하였다. 연구 대상자들이 속한 G교육대학교의 경우에 초등 예비교사 교육과정에서는 수학 교과교육학으로 2학점과 3학점씩 각각 배정된 '수학과 교육Ⅰ, Ⅱ'를 수강하는 것으로 수학 교과교육학 필수 강좌를 모두 마치게 된다. 따라서 연구 대상자의 경우에 예비교사 교육과정에서 수학 교과교육학의 수강을 모두 마친 상태였으며, 분수 나눗셈 내용은 수와 연산 영역의 하위 내용으로만 다루었으며, 이를 위한 특별교육 프로그램은 받지 않은 상태였다.

2. 연구 도구

본 연구에서는 초등 예비교사들이 분수 나눗셈 문제에 대해 초등학생들이 어떻게 해결할 것으로 생각하는가에 대한 지식을 분석하는 것이다. 이를 위해 분수 나눗셈에 관한 대표적인 문제 유형을 <부록>에 제시된 것과 같이 균등 분배 문제, 등분제, 포함제, 단위 비율 결정 상황의 문제로 나누어 질문지를 구성하였다.

3. 자료 수집 및 분석 방법

본 검사 과정에서는 예비교사들의 입장에서 초등학생들이 주어진 분수 나눗셈 문제를 해결할 때 생각하고 해결할 수 있을 것으로 판단되는 방법을 적도록 하였다. 연구 대상자들은 <부록>의 4문항에 대해 자유롭게 자신의 생각을 기술하였고, 그 결과를 수합하여 분석하였다. 연구 대상자 59명 중에 질문에 3문항 이상 무응답으로 제출한 7명의 예비교사의 경우에는 검사 내용에 비추어 성실히 응답하지 않은 것으로 판단하여 이들 자료를 제외하고 52명에 대한 분석을 실시하였다.

문항 별 분석에서는 초등학생들이 제시할 수 있는 문제해결 방법에 대해 예비교사들이 얼마나 많은 반응을 예측하고 제시할 수 있는가를 알아보는 '반응 수'와 다양한 유형의 '문제해결 방법'을 분석하였다. 예비교사들이 제시한 반응 수와 문제해결 방법은 예비교사들이 초등학생들의 사고를 얼마나 유창하게 예측하고, 각 반응에 적절한 지도 방안을 모색할 기회를 가질 수 있다는 면에서 중요하다. 문제해결 방법의 분석에서는 그림이나 비형식적 지식을 활용하는 직관적 탐구와 식을 이용하는 형식적 탐구로 나누어 분석하였다. 균등 분배 문제의 경우에는 선행 연구에 따라 <표 Ⅲ-1>과 같은 분석틀을 활용하였다.

구체적으로 문항 1의 분석에서는 선행연구에서 제시한 균등 분배 문제에 대한 분석 방법을 종합·정리하여 직관적 탐구에서는 스플리팅 조작과 분배 분할 조작으로 구분하였다. 또, 형식적 탐구에서는 몫으로서 분수로 해석한 경우, 나눗셈으로 해결한 경우, 비율을 적용하여 해결한 경우로 구분하여 분석하였다.

다음으로 문항 2-4의 분석에서는 등분제, 포함제, 단위 비율 결정 상황을 고려하여 그림이나 수직선, 분수 모델을 활용하거나 수량 사이의 관계를 이용한 직관적 탐구와 식으로 해결한 형식적 탐구로 구분하여 분석하였다. 특히 문항 2-4의 분석에서는 각 문항별로 직관적 탐구와 형식적 탐구로 나타나는 그림이나 식이 상이하여 각 문항별로 예비교사들이 제시한 문제해결 방법에 따라 그 방법을 분류하여 분석하였다.

<표 Ⅲ-1> 문제 1에 대한 분석틀

유 형			설 명
직관적 탐구	스플리팅 조작		·전체의 각 단위를 같은 조각의 수로 분할하여 미지의 양인 한 사람 몫을 단위로 반복하여 전체를 구성하는 방법
	분배 분할 조작	단위보존[3]	·단위를 최대한 분할하지 않고 보존하며 분배하는 방법
		모두 표시	·모든 단위들을 여러 방법으로 분할하여 분배하는 방법
		분 배	·각각의 단위를 사람의 수만큼 똑같은 수로 나누어 각각에서 한 조각씩 나누어 가지는 방법
형식적 탐구	몫으로 분수		·$a\div b=\frac{a}{b}$로 표현하는 방법
	식(나눗셈)		·$a\div b$를 직접 계산하여 소수로 나타내는 방법
	비 율		·4÷6의 상황을 2÷3으로 해석하여 해결하는 방법
오 답	균등 분배 안 됨		·4개를 6명에게 균등하게 분배하지 못하는 방법
	분배할 양을 남김		·4개를 가능한 균등 분배 하고 나머지는 남기는 방법
	6÷4로 해석		·제수와 피제수를 바꾼 경우

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

1. 균등 분배 문제에 대한 분석 결과

이 절에서는 균등 분배 문제 상황으로 제시된 (자연수)÷(자연수) 문제에 대한 결과를 분석하였다. 먼저, 예비교사들이 제시한 반응에서 초등학생들이 제시할 수 있을 것으로 판단한 정답 유형과 오답 유형 및 전체 반응 수는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 1번 문항에 대한 유형별 반응 수(1인 평균 반응 수)

1번(균등 분배 문제)	정답 유형	오답 유형	전체
	142(2.73)	48(0.92)	190(3.65)

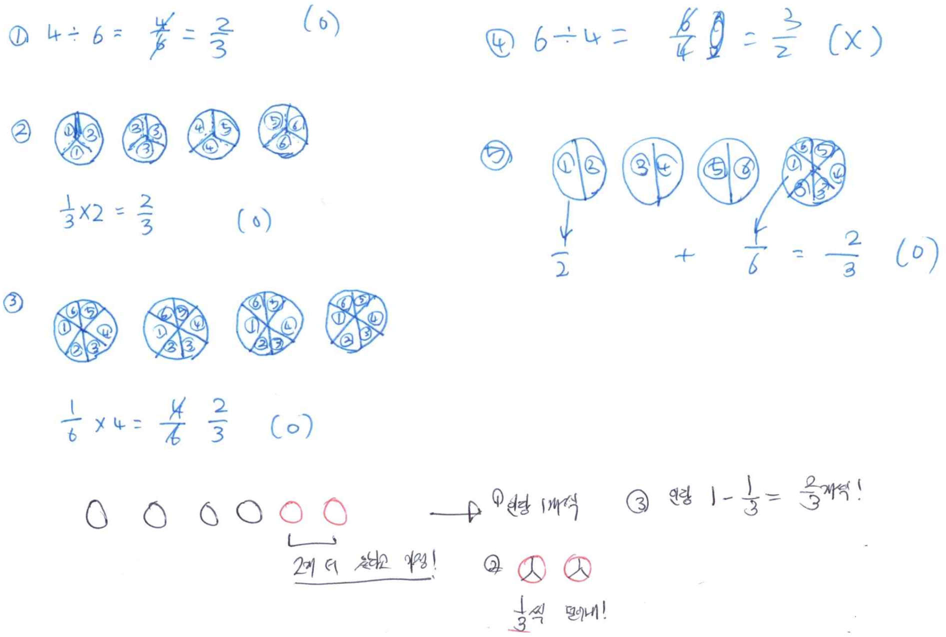
예비교사들은 균등 분배 문제에 대해 전체적으로 190개의 반응 수를 제시하여 1인당 3.65개 정도를 제시하였다. 구체적으로는 정답 유형으로 142개를 제시하여 1인당 2.73개 정도를 나타내었고, 오답 유형으로는 48개를 제시하여 1인당 0.92개 정도를 나타내었다. 예비교사들이 제시한 반응 유형을 구체적으로 살펴보면 다음 <표 Ⅳ-2>와 같다. 이 표에서는 예비교사들의 반응을 <표 Ⅲ-1>에 제시한 분석틀에 따라 분석하였다.

3) 단위 보존 방법은 피제수가 제수보다 큰 경우에 나타나는 방법이므로 본 연구에서는 사례가 나타나지 않았으나, 균등 분배 문제에 대한 분석에 비추어 분석틀에 제시하였음.

<표 Ⅳ-2> 1번 문항에 대한 문제해결 방법

유 형	직관적 탐구			형식적 탐구				오 답		
	스플리팅	분배 분할		식 이용				오답 유형		
		모두 표시	분배	몫	나눗셈	비율	기타	균등×	남김	6÷4
반응수	20	29	41	42	2	6	2	13	11	24
소 계	90			52				48		

먼저, 정답 유형으로 제시한 것 중에서 직관적 탐구 방법인 스플리팅 조작과 분배 분할 조작 방법은 90개의 반응 수를, 식을 이용한 형식적 탐구 방법은 52개의 반응 수를 제시하여 직관적 탐구 방법이 형식적 탐구 방법보다 1.73배 높은 반응 수를 나타내었다. 이것은 문제 상황을 그림으로 표현하여 문제의 조건에 맞게 분배하는 방법으로 제시한 비율이 높은 것으로, 초등학생들의 비형식적 지식을 활용한 문제해결 지도에 기여할 수 있을 것으로 기대된다. 구체적으로 살펴보면 직관적 탐구 방법에서 분수 모델을 분할하기가 용이한 분배 전략을 제시한 반응 수가 높게 나타났으며, 식을 이용한 형식적 탐구 방법에서는 몫으로서 분수로 해석할 것으로 판단하여 제시한 반응 수가 높게 나타났다.



[그림 Ⅳ-1] 균등 분배 문제에 대한 예비교사 반응의 예시들

특징적인 반응으로는 4÷6의 상황을 같은 비율을 가지는 2÷3으로 해석한 반응 수가 6개 나타났으며, 기타 반응으로는 2개가 더 있다고 가정하여 각각에게 1개씩을 분배한 후에 2개를 6명이 똑같이 나누어 가질 수 있는 양인 $\frac{1}{3}$을 빼어 $\frac{2}{3}$로 제시한 반응 수가 2개 나타났다. 그리고 오답 유형으로 제시한 반응에서는 균등 분배를 하지 못할 것이라는 반응 수가 13개, 대상을 모두 분배하지 못하고 남길 것

이라는 반응 수가 11개, 제수와 피제수를 혼동하여 6÷4로 답할 것이라고 제시한 반응 수가 24개 나타났다. 이러한 초등학생들의 오류 유형은 균등 분배 상황에 대한 전형적인 오류라는 면에서 수업 상황에서 교사가 대처하고 교정해 주어야 할 의미 있는 반응으로 해석된다. 다음 [그림 Ⅳ-1]은 균등 분배 문제에 대해 예비교사들이 제시한 반응의 예들이다.

위에 제시한 예시에서는 ① 몫으로서 분수, ② 스플리팅 조작, ③ 분배 방법, ④ 6÷4의 오류 ⑤ 모두 표시 방법으로 5가지 응답을 한 사례이다. 또 아래 제시한 예시에서는 기타 반응의 사례로, 2개의 사과를 추가한 후에 균등 분배한 다음에 이를 제거하는 방법으로 제시한 예이다.

결론적으로 균등 분배 문제 상황으로 제시된 (자연수)÷(자연수) 문제에 대하여 예비교사들은 직관적 탐구 방법에서 형식적 탐구 방법보다 높은 반응 수를 나타내었다. 이것은 형식적인 수식 위주의 문제해결보다 일상의 경험에 근거하여 비형식적 방법으로 문제의 조건에 맞게 분배하는 방법을 제시한 비율이 높은 것으로, 초등학생들의 비형식적 지식을 활용한 문제해결 지도에 관심을 둘 수 있다는 면에서 고무적이다.

또한 예비교사들이 제시한 반응 유형은 같은 문제에 대해 '몫으로서 분수' 개념을 학습하지 않은 초등학생과 학습한 초등학생들이 제시한 직관적 탐구와 형식적 탐구 방법(이대현, 2018)과 유사하다는 면에서 균등 분배 문제 상황의 문제를 초등학생들이 다양하게 해결할 수 있도록 이끌어 줄 수 있는 지도 가능성을 확인하였다. 또, 예비교사들이 제시한 직관적 탐구 방법은 형식적 방법의 학습 전에 초등학생들의 비형식적 지식을 활용한 문제해결 방법에 관심을 가지고 지도할 수 있는 능력을 기르는 예비교사 교육의 중요성을 상기하게 한다.

2. 등분제에 대한 분석 결과

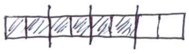
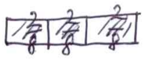
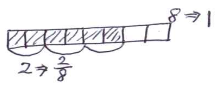
이 절에서는 등분제 상황으로 제시된 (분수)÷(자연수) 문제에 대한 결과를 분석하였다. 먼저, 예비교사들이 제시한 반응에서 초등학생들이 제시할 수 있을 것으로 판단한 정답 유형과 오답 유형 및 전체 반응 수는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 2번 문항에 대한 유형별 반응 수(1인 평균 반응 수)

2번(등분제)	정답 유형	오답 유형	전체
	118(2.27)	22(0.42)	140(2.70)

예비교사들은 분수 나눗셈의 등분제에 대해 전체적으로 140개의 반응 수를 제시하여 1인당 2.70개 정도를 제시하였다. 구체적으로는 정답 유형으로 모두 118개를 제시하여 1인당 2.27개 정도를 나타내었고, 오답 유형으로는 모두 22개를 제시하여 1인당 0.42개 정도를 나타내었다. 예비교사들이 제시한 반응 유형을 구체적으로 살펴보면 다음 <표 Ⅳ-4>와 같다. 이 표에서는 예비교사들의 반응을 그림을 이용한 직관적 탐구 방법과 식을 이용한 형식적 탐구 방법 및 오답 유형으로 구분하여 분석하였다.

<표 Ⅳ-4> 2번 문항에 대한 문제해결 방법

직관적 탐구		형식적 탐구		오 답	
유 형	반응수	유 형	반응수	유 형	반응수
① 	29	① $\frac{6}{8}\div 3=\frac{6}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	36	① $\frac{6}{8}\times 3$	8
② 	12	② $\frac{6}{8}\div 3=\frac{6\div 3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	26	② $3\div\frac{6}{8}$	8
③ 	5	③ $\frac{6}{8}=0.75,\ \frac{0.75}{3}=0.25$	1	③ 계산오류	5
④ 	4	④ $\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}$	3	④ $\frac{6}{8}\div\frac{1}{3}$	1
		⑤ $\frac{6}{8}\div 3=\frac{6}{8}\div\frac{24}{8}=6\div 24=\frac{1}{4}$	2		
소 계	50	소 계	68	소 계	22

먼저, 그림을 이용하여 제시한 방법으로는 4가지 유형이 나타났는데, 분수 모형을 이용하여 전체 1에 대한 분수 $\frac{6}{8}$을 표현하고 이를 3등분한 결과를 이용하여 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$을 제시한 경우가 29개로 가장 높게 나타났다. 다음으로는 $\frac{6}{8}$을 분수 모형으로 나타내고 이를 3등분하여 답을 한 경우와 $\frac{6}{8}$을 먼저 약분하여 $\frac{3}{4}$으로 나타내어 이를 3등분한 결과를 이용하여 답을 한 경우, 그리고 전체를 자연수 맥락으로 해석한 후에 분수로 재해석한 경우로 나타났다.

식을 이용하여 제시한 경우는 5가지 유형이 나타났는데, 분수 나눗셈의 전형적인 알고리즘인 나눗셈 식을 곱셈식으로 변형하여 제시한 경우가 36개로 가장 높게 나타났고, 피제수의 분자를 제수로 나누는 방법으로 제시한 경우가 26개로 2번째로 높게 나타났다. 그 외에도 분수를 소수로 변형하여 계산하거나, 분모를 같게 하여 분자끼리 계산하는 방법 등을 제시하였는데, 교과서 구성 체계로 볼 때 분수를 소수로 변형하여 계산하는 방법은 초등학생들의 경우에는 아직 학습하지 않은 내용에 속한다.

마지막으로 예비교사들이 생각하는 오류 유형으로는 제수와 피제수를 바꾸어 계산할 것이라는 것과 나눗셈 대신 곱셈을 하는 경우, 계산 과정에서 실수 등이 나타날 것으로 생각하여 제시한 경우가 있었다.

등분제 상황으로 제시된 (분수)÷(자연수) 문제에 대해서 현행 교과서에서는 두 가지 해결 방법을 제시하고 있다. 첫 번째는 분수 모형을 이용하여 직관적으로 몫을 구하도록 하고, 피제수의 분자를 제수로 나누는 방법을 식으로 제시하고 있다(<표 Ⅳ-4>의 식 ②). 두 번째로는 분수 모형을 이용하여 제수만큼 나눈 결과가 제수의 역수를 곱만큼 된다는 것을 이용하여 나눗셈 식을 곱셈식으로 변형하여 식으로 제시하는 방법을 제시하고 있다(<표 Ⅳ-4>의 식 ①). 이런 면에서 예비교사들이 제시한 식을 이용한 문제해결 방법은 연구 대상자에 따라 차이는 있지만 전반적으로 두 가지 경우를 모두 포함하고 있으며, 그 외에 제시한 방법도 의미 있는 방법들을 제시하였다. 그렇지만 그림을 이용한 방법에서는 나눗셈 알고리즘을 생성하는 과정을 보여주는 그림을 제시한 경우는 한 사례도 없었고, 단지 계산 결과에 대한 몫을 찾기 위한 분수 모형을 여러 가지로 제시한 경우가 전부였다. 이것은 예비교사들이 유사한 문제에 대해 그림을 활용하거나 수직선 등을 활용하여 계산 과정을 설명한다고 제시하였지만

(방정숙, Li, 2008), 이 역시 알고리즘 생성의 원리를 보여주는 데는 한계가 있었다는 것과 유사한 결과이다. 따라서 [그림 Ⅱ-1]과 같이 분수 모형을 활용한 그림을 이용하여 알고리즘을 생성하는 과정에 대한 지식에 대해 관심을 둘 필요가 있다.

3. 포함제에 대한 분석 결과

이 절에서는 포함제 상황으로 제시된 (자연수)÷(분수) 문제에 대한 결과를 분석하였다. 먼저, 예비교사들이 제시한 반응에서 초등학생들이 제시할 수 있을 것으로 판단한 정답 유형과 오답 유형 및 전체 반응 수는 <표 Ⅳ-5>와 같다.

<표 Ⅳ-5> 3번 문항에 대한 유형별 반응 수(1인 평균 반응 수)

3번(포함제)	정답 유형	오답 유형	전체
	129(2.48)	25(0.48)	154(2.96)

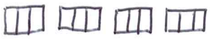
예비교사들은 분수 나눗셈의 포함제에 대해 전체적으로 154개의 반응 수를 제시하여 1인당 2.96개 정도를 나타내었다. 구체적으로는 정답 유형으로 모두 129개를 제시하여 1인당 2.48개 정도를 나타내었고, 오답 유형으로는 모두 25개를 제시하여 1인당 0.48개 정도를 나타내었다. 또한 전체적으로 포함제 상황의 반응 수가 등분제 상황의 반응 수보다 높게 나타났다. 예비교사들이 제시한 반응 유형을 구체적으로 살펴보면 다음 <표 Ⅳ-6>과 같다. 이 표에서는 예비교사들의 반응을 그림을 이용하거나 양사이의 관계 이해를 통한 직관적 탐구 방법과 식을 이용한 형식적 탐구 방법 및 오답 유형으로 구분하여 분석하였다.

먼저, 그림을 이용하여 제시한 방법으로 3가지 유형이 나타났다. 첫째는 이산량 분수 모델을 이용하여 4컵을 각각 단위로 나타내고, 각 단위를 3등분하여 $\frac{1}{3}$씩 3일을 나타내어 전체가 12일이 된다는 것을 제시한 반응 수가 38개로 가장 높게 나타났다. 다음으로는 4일을 연속량으로 제시하고 이를 등분할한 경우와 1컵을 단위로 나타내어 가능한 수를 찾고, 이를 4배를 하여 구한 경우가 나타났다. 그림을 이용하지 않았지만 분수 사이의 관계적 이해를 통해 1컵으로 3일이 가능하므로 4컵으로는 12일이 가능하다는 ‘묶음을 만들어 결합하기’ 방법을 통해 직관적으로 해결한 반응 수가 12개 나타났다. 이 방법은 <표 Ⅳ-6>의 식을 이용한 방법 중에서 ④번의 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$이므로 4컵으로 12일이 된다는 것과 유사한 방법으로 초등학생들의 비형식적 문제해결 방법에서도 나타나는 유형이기도 하다(Empson & Levi, 2011).

식을 이용하여 제시한 경우는 6가지 유형이 나타났는데, 분수 나눗셈의 전형적인 알고리즘인 나눗셈 식을 곱셈식으로 변형하여 구한 반응 수가 32개로 가장 높게 나타났다. 다음으로는 포함제 문제해결의 보편적 방법인 동수누감을 활용한 방법과 반대로 $\frac{1}{3}$을 연속으로 더하여 4가 될 때까지의 횟수를 구한 경우 및 1컵으로 가능한 일수를 구하는 식인 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$을 이용하여 12일을 구한 경우가 비슷한 반응 수를 보였다. 이 외에도 분모를 같게 하여 분자끼리의 나눗셈으로 구하거나, 곱셈식에서 역수를 곱하여 구한 경우가 나타났다. 곱셈식에서 역수를 이용한 방법은 초등학생의 경우에 명시적으로

학습하지 않은 내용이지만, 분수의 곱셈과 분수의 양사이의 관계적 이해가 이루어진다면 제시할 수도 있는 방법으로 간주된다. 마지막으로 예비교사들이 생각하는 오류 유형으로는 제수와 피제수를 바꾸어 계산할 것이라는 것과 나눗셈 대신 곱셈을 하는 경우가 나타날 것으로 생각하여 제시한 경우가 있었다.

<표 Ⅳ-6> 3번 문항에 대한 문제해결 방법

<table>
<tr><th colspan="2">직관적 탐구</th><th colspan="2">형식적 탐구</th><th colspan="2">오 답</th></tr>
<tr><th>유 형</th><th>반응수</th><th>유 형</th><th>반응수</th><th>유 형</th><th>반응수</th></tr>
<tr><td>① </td><td>38</td><td>① $4\div\frac{1}{3}=4\times3=12$</td><td>32</td><td rowspan="2">① $\frac{1}{3}\div4=\frac{1}{12}$</td><td rowspan="2">7</td></tr>
<tr><td>② </td><td>3</td><td>② $4-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{3}=0$</td><td>11</td></tr>
<tr><td>③  3×4=12</td><td>4</td><td>③ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3}=12$</td><td>12</td><td rowspan="4">② $4\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$</td><td rowspan="4">18</td></tr>
<tr><td rowspan="3">③ 1컵이 3일이므로 4컵은 12일(묶음을 만들어 결합하기)</td><td rowspan="3">12</td><td>④ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, 12일</td><td>11</td></tr>
<tr><td>⑤ $4\div\frac{1}{3}=\frac{12}{3}\div\frac{1}{3}=12\div3=12$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>⑥ $\frac{1}{3}\times\square=4$, $3\times\frac{1}{3}\times\square=4\times3$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>소 계</td><td>57</td><td>소 계</td><td>72</td><td>소 계</td><td>25</td></tr>
</table>

본 연구에서 포함제 상황으로 제시된 (자연수)÷(분수) 문제에 대하여 예비교사들이 제시한 방법은 이산량 분수 모델을 이용하여 4컵을 4개의 단위로 나타내고, 각 단위를 등분할하여 답을 제시한 경우가 가장 높게 나타났다. 이것은 (자연수)÷(분수) 문제 상황을 포함제 상황으로 제시한 2009 개정 교육과정에 따른 교과서에 제시된 방법과 유사하다는 특징이 있으나(교육부, 2018), 2009 개정 교육과정에 따른 교과서에서는 문제가 연속량으로 제시되어 <표 Ⅳ-6>의 그림 이용 ②번 방법으로 제시한 차이가 있었다. 그렇지만 2015 개정 교육과정에 따른 교과서에서 (자연수)÷(분수) 문제는 단위 비율 결정 상황으로 맥락을 제시하고 있다. 이에 따라 현행 교과서에서는 제수의 단위 분수량 만큼을 먼저 구한 후에 제수의 분모만큼 구하는 과정(1에 해당되는 양)을 통해 계산 알고리즘을 생성하는 과정과 결과를 제시하고 있다. 따라서 본 연구에서 예비교사들이 제시한 방법과는 차이가 있다.

교과서에 제시된 분수 나눗셈의 경우에 같은 나눗셈 식으로 표현될지라도 주어진 문제 상황에 따라 그 해결 방법에서 차이가 나타날 수 있다는 것은 예비교사들의 경우에 다양한 문제해결 방법을 경험하는 것이 중요하다는 것을 말해 준다. 또한, 방정숙, Li(2008)의 분수 나눗셈에 대한 예비교사들의 지식에 대한 연구에서 예비교사들의 알고리즘 원리에 대한 설명 능력이 낮다는 지적과 같은 맥락에서 주목할 필요가 있다. 한편, 식을 이용한 방법에서는 나눗셈 식을 곱셈식으로 변형하여 구한 경우가 가장 높게 나타났는데, 이 방법은 계산 알고리즘을 알고 있는 경우에 나타날 수 있는 방법이다. 따라서 계산 알고리즘의 발견하고 적용하기 이전 단계에서 사고할 수 있는 여러 가지 해결 방법에 대해서도 예비교사들이 사고해 보는 학습의 기회를 가질 필요가 있었다.

4. 단위 비율 결정 문제에 대한 분석 결과

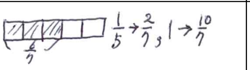
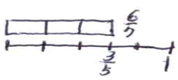
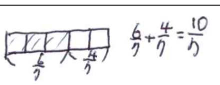
이 절에서는 단위 비율 결정 상황으로 제시된 (분수)÷(분수) 문제에 대한 결과를 분석하였다. 먼저, 예비교사들이 제시한 반응에서 초등학생들이 제시할 수 있을 것으로 판단한 정답 유형과 오답 유형 및 전체 반응 수는 <표 Ⅳ-7>과 같다.

<표 Ⅳ-7> 4번 문항에 대한 유형별 반응 수(1인 평균 반응 수)

4번(단위 비율 결정)	정답 유형	오답 유형	전체
	116(2.23)	15(0.29)	131(2.52)

예비교사들은 분수 나눗셈의 단위 비율 결정 상황 문제에 대해 전체적으로 131개의 반응 수를 제시하여 1인당 2.52개 정도를 제시하였다. 구체적으로는 정답 유형으로 모두 116개를 제시하여 1인당 2.23개 정도를 나타내었고, 오답 유형으로는 모두 15개를 제시하여 1인당 0.29개 정도를 나타내었다. 단위 비율 결정 상황의 경우에 나머지 3가지 다른 유형의 문항에 비해 예비교사들이 제시한 반응도 가장 적게 나타났다. 예비교사들이 제시한 반응 유형을 구체적으로 살펴보면 다음 <표 Ⅳ-8>과 같다.

<표 Ⅳ-8> 4번 문항에 대한 문제해결 방법

직관적 탐구		형식적 탐구		오 답	
유 형	반응수	유 형	반응수	유 형	반응수
① 	19	① $\frac{6}{7}\div\frac{3}{5}=\frac{6}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{10}{7}$	22	① $\frac{3}{5}\div\frac{6}{7}=$ $\frac{3}{5}\times\frac{7}{6}=\frac{7}{10}$	6
② 	5	② $\frac{3}{5}:\frac{6}{7}=1:\square$	17		
③ 	7	③ $\frac{6}{7}\div\frac{3}{5}=\frac{6}{7}\div3\times5=\frac{10}{7}$	13	② $\frac{3}{5}\times\frac{6}{7}=$ $\frac{18}{35}$	6
④ 3봉지$=\frac{30}{7}$, 1봉지$=\frac{10}{7}$	10	④ $\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}\to\frac{6}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{10}{7}$	8		
⑤ $\frac{1}{5}$만큼이 $\frac{2}{7}$, 1은 $\frac{10}{7}$	9	⑤ $\frac{6}{7}\div\frac{3}{5}=\frac{30}{35}\div\frac{21}{35}=30\div21$	4	③ $\frac{6}{7}+\frac{2}{5}$	3
		⑥ 기타	2		
소 계	50	소 계	66	소 계	22

이 표에서는 예비교사들의 반응을 그림을 이용하거나 양사이의 관계 이해를 통한 직관적 탐구 방법과 식을 이용한 형식적 탐구 방법 및 오답 유형으로 구분하여 분석하였다. 먼저, 그림을 이용하여 제시한 방법으로 3가지를 제시하였으며, 문제의 맥락을 관계적으로 파악하여 제시한 방법으로 2가지를 제시하였다. 구체적으로 그림을 이용한 경우로는 1에 해당되는 분수 모델을 이용하여 $\frac{3}{5}$을 나타내고,

이를 이용하여 $\frac{1}{5}$에 해당되는 $\frac{2}{7}$를 구한 후에 5를 곱하여 $\frac{10}{7}$을 구하는 방법의 반응 수가 19개로 가장 높게 나타났다. 그 외에는 이중수직선을 이용한 경우와 1에 해당되는 분수 모델에서 $\frac{3}{5}$에 해당하는 양과 $\frac{2}{5}$에 해당하는 양을 각각 구하여 두 값을 더하는 방법으로 제시한 경우였다.

문제 맥락을 관계적으로 이해한 것으로 제시한 한 경우는 $\frac{3}{5}$봉지에 해당되는 양이 $\frac{6}{7}$이므로 3봉지의 양 $\frac{30}{7}$을 구하고, 이를 3으로 나누어 $\frac{10}{7}$을 구한 경우가 있었으며, 그림이 없이 $\frac{1}{5}$에 해당하는 양 $\frac{2}{7}$를 구한 후에 5를 곱하여 $\frac{10}{7}$을 구하는 경우가 있었다.

식을 이용하여 제시한 경우는 6가지 유형이 나타났는데, 나눗셈 식을 곱셈식으로 변형하여 구한 반응 수가 22개로 가장 높게 나타났다. 다음으로는 비례식을 활용한 경우와 통분하여 분자끼리의 몫으로 구한 경우가 나타났다. 그 외에도 $\frac{3}{5}$에 해당하는 양을 1로 만들기 위해 $\frac{3}{5}$에 $\frac{5}{3}$를 곱한 대로 $\frac{6}{7}$에 $\frac{5}{3}$를 곱하는 것으로 제시한 경우와 단위 비율 결정 상황에서 유도되는 알고리즘 생성과정인 $\frac{6}{7}\div\frac{3}{5}=\frac{6}{7}\div 3\times 5$로 제시한 경우도 나타났다. 기타의 반응으로는 식을 이용하여 $\frac{3}{5}$과 $\frac{2}{5}$에 해당되는 양을 각각 구하여 더한 것으로 제시한 경우와 $\frac{3}{5}$의 두 배인 $\frac{6}{5}$의 값 $\frac{12}{7}$에서 $\frac{1}{5}$에 해당하는 양 $\frac{2}{7}$를 구한 후에 5를 곱하여 $\frac{10}{7}$을 구하는 경우가 있었다.

이 문항에 대한 예비교사들의 반응도 분수 나눗셈 알고리즘을 제시한 반응 수가 높게 나타났으며, 특히 단위 비율 결정 상황의 문제에서는 관련된 식을 구하기가 어려움이 있다는 면에서 비례식을 활용하는 방안을 고려하는 것도 고무적이라 생각된다. 한편, 오답 유형으로는 제수와 피제수를 바꾸어 계산할 것이라는 것과 나눗셈 대신 곱셈을 하는 경우가 나타날 것으로 생각하여 이 전의 문제와 유사한 오답 유형으로 제시하였다.

(분수)÷(분수) 문제에 대하여 현행 교과서에서는 배의 상황에서 분모를 같게 하여 분자끼리의 나눗셈으로 구하는 방법과 단위 비율 결정 상황으로 (자연수)÷(분수) 문제를 제시하고 있다. 본 연구에서 (분수)÷(분수) 문제는 단위 비율 결정 상황으로 제시하였는데, 예비교사들이 제시한 방법은 분수 모형을 이용하여 제수의 단위분수만큼을 구한 후에 제수의 분모만큼을 곱하는 방법으로 단위 비율만큼의 답을 찾은 반응 수가 높게 나타났다. 또 그림을 활용하지 않고서도 직관적으로 제시한 경우도 나타났다. 이러한 방법들은 분수 나눗셈의 알고리즘의 생성 과정을 직접적으로 보여주는 방법으로, 교과서에 이러한 방법을 제시하지 않은 시점에 실시한 연구에서는 예비교사들에게 나타나지 않은 반응이었지만 (방정숙, Li, 2008), 새로운 교과서에 제시한 방법을 경험한 예비교사에게 나타난 반응이라는 면에서 고무적이라 할 수 있다. 따라서 나눗셈 식을 곱셈식으로 변형시켜 주는 과정인 형식화 과정과 이를 관련시키는 지도 과정을 예비교사 교육 기간에 중시할 필요가 있다.

한편, 이중수직선을 활용한 방법이나 분수 사이의 관계를 활용하여 결과를 산출하는 방법들과 더불어 식을 활용한 여러 가지 방법들은 교과서에 제시되는 문제해결 방법이 제한적이라는 한계를 벗어나 교실 현장에서 초등학생들이 다양한 방법으로 분수 나눗셈을 시도해 보도록 지도할 수 있는 방안 탐구의 기틀이 될 것이다. 또한 (분수)÷(분수) 유형의 문제도 본 문항과 같이 단위 비율 결정 상황뿐만이 아니라, 포함제 상황으로도 제시할 수 있다는 면에서 예비교사 교육 기간에 다양한 문제해결 방법에 관심을 가질 필요가 있을 것이다.

Ⅴ. 결론

분수 나눗셈은 문제 상황에 따라, 또는 문제에 포함된 분수 유형에 따라 해결 방법에 차이가 있기 때문에 학습 지도에도 어려움이 있는 주제이다. 따라서 교과서에 기술된 나눗셈이나 분수 유형 및 교사의 지도 방법은 학생들의 분수 나눗셈 이해에 직접적인 영향을 끼칠 수 있다. 특히, 교사가 가진 분수 나눗셈에 대한 교수학적 지식은 학생들의 문제해결 방법을 다양하게 이끌어 줄 수 있다는 면에서 중요하며, 교육 현장에 나서기 전인 예비교사의 관련 내용 지도 준비의 중요성에 비추어 본 연구에서는 분수의 나눗셈에 관한 예비교사들의 지식을 분석하였다. 이를 위해 예비교사 52명을 대상으로 분수 나눗셈 문제에 초등학생들이 어떻게 해결할 것으로 예상되는가를 제시하도록 하는 질문지를 이용한 조사연구를 실시하여 그 결과를 분석하였다.

연구 결과를 종합하면, 예비교사들은 4개 문항에 대해 모두 615개의 반응 수를 나타내어 1인당 평균 2.96개의 반응을 하였으며, 문제 유형별로는 균등 분배 문제-포함제-등분제-단위 비율 결정 상황의 순으로 응답 반응 수가 높게 나타났다. 균등 분배 문제의 경우에 그림을 이용하여 조건에 맞게 분배하는 방법으로 제시한 반응 수가 높게 나타나, 비형식적 지식을 활용한 초등학생들의 문제해결 방법의 지도에 기여할 수 있을 것으로 보여 진다. 또한 균등 분배 문제를 해결하는 다양한 방법과 더불어 학생들에게서 전형적으로 나타날 수 있는 오류를 예측함으로써 수업 상황에서 학생들의 오류를 교정해 줄 수 있는 방안을 모색하는데 기여할 것으로 판단된다.

다음으로 여러 유형의 분수 나눗셈의 문제해결 방법에서는 포함제, 등분제, 단위 비율 결정 상황의 세 가지 유형 모두에서 식을 이용한 반응 수가 그림이나 관계를 통한 해결 방법을 제시한 반응 수보다 높게 나타났다. 그리고 식을 이용한 방법에서는 분수 나눗셈 알고리즘의 전형인 제수의 역수를 곱하여 곱셈식으로 구하는 방법을 제시한 반응이 가장 높게 나타났다. 그 외에도 반응 빈도의 차이는 있지만, 그림을 이용하거나 식을 이용한 경우에서 의미 있는 반응들을 제시하였다.

본 연구에서 예비교사들이 제시한 방법은 초등학생들의 해결 방법을 사고하여 제시한 것이라는 것에 비추어 분수 나눗셈 지도에서 예비교사들이 초등학생들에게 다양한 방법으로 문제를 해결할 수 있는 기회를 제시할 필요성을 인식하게 해 주는 자료가 될 수 있다. 따라서 초등 예비교사 교육 과정에서 예비교사들은 분수 나눗셈에 대한 다양한 유형과 그에 따른 여러 가지 해결 방법에 대해 충분한 경험을 할 필요가 있으며, 다양한 방법들을 서로 공유하도록 하여 분수 나눗셈 지도에 적용하도록 할 필요가 있다. 또한 본 연구와 같은 교사 지식에 대한 분석을 통해 분수 나눗셈의 형식적인 알고리즘의 적용만이 아니라, 다양한 방법으로 대안적인 알고리즘 생성 과정과 방법에도 관심을 기울이도록 예비교사 교육을 실시할 필요가 있다. 이를 위해 분수 나눗셈에 대한 유형별 지도 방법을 추출하고, 이를 위한 지도 프로그램을 개발하여 예비교사 교육기간에 활용하는 방안에도 관심을 가질 필요가 있다. 이것은 교실 현장에서 초등학생들이 다양한 방법으로 문제를 해결할 수 있도록 이끌어 주는 수업을 위한 준비가 될 수 있는 것이다. 마지막으로 본 연구는 특정 지역의 예비교사를 대상으로 실시한 조사연구라는 것과 조사 내용이 4가지 분수 나눗셈 문제에 국한되었다는 제한이 따른다.

참고문헌

강영란, 조정수, 김진환(2012). 분수 나눗셈의 문장제에 대한 초등 교사들의 전문화된 내용지식(SCK) 분석. **수학교육논문집, 26**(3), 301-316.

교육부(2015). **수학 6-1**. 서울: ㈜ 천재교육.

교육부(2018). **수학 6-1**. 서울: ㈜ 천재교육.

교육부(2019a). **수학 6-1**. 서울: ㈜ 천재교육.

교육부(2019b). **수학 6-2**. 서울: ㈜ 천재교육.

교육부(2019c). **수학 6-2 교사용 지도서**. 서울: ㈜ 천재교육.

김민경, 김서영(2017). 서술형 평가 문항에서 나타나는 초등학생의 분수 연산 능력과 오류 유형과의 관계. **한국학교수학회 논문집, 17**(3), 409-435.

김성희, 신재홍, 이수진(2018). Steffe의 분할 조작의 관점에서 본 균등 분배 문제 해결 과정 분석과 그 적용. **학교수학, 20**(1), 17-42.

김정하(2020). 분수 나눗셈 지도 방법의 변천과정 분석. **수학교육학연구, 30**(1), 67-88.

김해규(2012). 수와 연산 영역에 대한 초등 예비 교사들의 수학을 가르치는데 필요한 지식(MKT). **수학교육논문집, 26**(1), 71-84.

노지화, 고호경, 허난(2016). 분수 나눗셈 스토리 문제 만들기에 관한 예비교사 지식 조사 연구. **초등수학교육, 19**(1), 19-30.

박경미(2009). 수학의 교수학적 내용 지식(PCK)에 대한 연구의 메타적 검토. **수학교육, 48**(1), 93-105.

박경미(2016). 예비수학교사의 내용과 학습자에 대한 지식(KCS) 탐색 연구. **수학교육학연구, 26**(2), 269-285.

박교식, 권석일(2011). 예비초등교사들이 분수 포함제의 몫과 나머지 구하기에서 범하는 오류에 대한 분석. **초등수학교육, 14**(3), 317-328.

박교식, 송상헌, 임재훈(2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 관한 연구. 학교수학, 6(3), 235-249.

방정숙, 선우진(2014). 수학 교사교육에 관한 국내 연구의 동향 분석-대한수학교육학회의 학술지를 중심으로-. **학교수학, 16**(2), 335-353.

방정숙, 이지영(2009). 사례연구를 통한 분수 나눗셈의 연산 감각 분석. **학교수학, 11**(1), 71-91.

방정숙, Yeping Li (2008). 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석. **수학교육, 47**(3), 291-310.

서동엽(2010). 초등수학교육에서 MKT 탐구. **수학교육학논총, 38**, 163-175.

송근영, 방정숙(2012). 평면도형에 관한 학생들의 오류에 대한 초임 초등 교사들의 교수학적 내용 지식 분석. **한국학교수학회논문집, 15**(3), 429-451.

송근영, 방정숙(2013). 수학과 교사지식에 관한 국내 연구의 동향 분석. **한국학교수학회논문집. 16**(1), 265-287.

신준식(2013). 문제 상황과 연결된 분수 나눗셈의 교과서 내용 구성 방안. **수학교육, 52**(2), 217-255.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판부.

이대현(2018). 균등 분배 문제와 분수의 크기 비교에 대한 초등학생들의 문제해결 분석. **한**

국학교수학회논문집, 21(4), 303-326.
이대현, 서관석(2003). 초등수학 예비교사들의 분수에 대한 표상의 분석. **초등수학교육, 7**(1), 31-41.
이지영, 방정숙(2014). 분수의 다양한 의미에서 단위에 대한 초등학교 6학년 학생들의 이해 실태 조사. **수학교육학연구, 24**(1), 83-102.
최은아, 강향임(2014). 예비교사의 원의 넓이에 대한 내용지식 분석. **학교수학, 16**(4), 763-782.
Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching-What makes it teaching. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.
Empson, S. B., & Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics-Fractions and Decimals-*. Portsmouth, NH: Heinemann.
Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United State*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.
Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

An Analysis on the Pre-service Teachers' Knowledge about Elementary Students' Problem Solving Strategies for Fraction Division

Lee, Dae hyun[4)]

Abstract

Because the role of the teacher is important for the education to actualize the goals of the curriculum, the interest about the teacher's knowledges has been addressed as an important research topic. Among them, the pedagogical content knowledge is the knowledge that can emphasize the professionalism of the teacher.

In this study, I analyzed the elementary pre-service teachers' the problem solving strategies that they imagined the methods that elementary school students can think about fraction division. Pre-service teachers who participated in this study were completed all of the mathematics education courses in the pre-service teachers' education courses. The research was conducted using the four type-problems of fraction division.

The results showed that elementary pre-service teachers responded in the order of equal sharing problem-measurement division-partitive division-context of determination of a unit rate problem. They presented significant responses not only with typical algorithms but also with pictures or expressions. On the basis of this research, we have to take an interest in the necessity of sharing and recognizing various methods of fraction division in pre-service teachers education.

Key Words : Elementary pre-service teacher, Teacher's knowledge, Knowledge for content and students, Fraction division, Problem solving strategy, Informal knowledge

Received February 21, 2020
Revised March 17, 2020
Accepted April 20, 2020

---

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97C70
4) Gwangju National University of Education (leedh@gnue.ac.kr)

<부록> 설문지

※ 다음 각각의 문제에 대해 초등학교 학생들이 답(정답이나 오답)으로 제시할 수 있을 것 같다고 생각되는 방법을 5가지 제시하시오. 학생들의 방법을 식이나 글로 쓰거나, 그림으로 그려서 제시하시오.

1. 사과 4개를 6명이 똑같이 나누어 먹으려고 합니다. 한 사람이 먹는 양은 얼마 만큼인지 구하시오.
2. 막대 $\frac{6}{8}$m를 3등분하여 똑같은 길이의 막대로 나누었습니다. 한 막대의 길이를 구하시오.
3. 고양이가 하루에 $\frac{1}{3}$컵의 먹이를 먹습니다. 고양이에게 줄 먹이가 4컵이 있다면 며칠간 먹일 수 있는지 구하시오.
4. 과자 $\frac{3}{5}$봉지의 무게는 $\frac{6}{7}$kg입니다. 과자 1봉지의 무게를 구하시오.