

원기등을 이용한 중학생의 공간기하 이해 능력 분석

장현석(울산대학교 객원 교수) · 홍정애(장곡중학교 교사) · 이봉주(경북대학교 교수)[†]

[†]교신저자

An analysis on middle school students' space geometrical thinking based on cylinder

Chang, Hyun Suk(University of Ulsan, genichang@hanmail.net)

Hong, Jeong Ae(Janggok middle school, edumath07@naver.com)

Lee, Bongju(Kyungpook National University, leebj@knu.ac.kr)[†]

[†]Corresponding Author

초록

이 연구의 목적은 원기등으로 중학생의 공간기하에 대한 이해 정도를 분석하는 것이다. 선행연구를 토대로 검사 도구를 개발하여 중학교 433명을 대상으로 검사를 실시하고, 그 응답 사례를 토대로 면담하였다. 학년과 성별에 따른 문항 정답률의 차이를 검증하고, 공간추론 능력 평가 문항에 대한 학생의 응답을 바탕으로 오류 유형을 분석하였다.

Abstract

The purpose of this study is to analyze how well middle school students understand space geometrical concept related to a cylinder. To this end, we developed the test tool based on prior research and examined 433 middle school students in November and December, 2018. And in March 2019, we interviewed 4 students who showed some type of errors. The difference in the correct answer rate of the questions by the grade and gender was tested, and the error type was analyzed based on the student's responses to the questions to evaluate the spatial reasoning ability. The results of this study are as follows. First, the difference by graders was not statistically significant in the questions evaluating spatial visual ability. On the other hand, in the case of the two questions for evaluating spatial measurement ability and spatial reasoning ability, the difference in the correct answer rate between the 7th graders and 8th is not significant, but the difference between lower graders and 9th was significant. Second, there was no significant difference in the spatial geometric ability of all girls and boys participating in this study. Third, analyzing the student's error type for an item which assessed spatial reasoning ability, we found that there are various error types in relation to visual, manipulative, and reasoning errors.

* 주요어 : 공간기하 이해, 원기등, 중학생

* **Key words** : spacial geometrical thinking, cylinder, middle school students

* **Address** : Department of Mathematics Education, Kyungpook National University, Daegu, Korea.

* **ZDM Classification** : G43

* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97C90

* **Received**: March 30, 2020 **Revised**: April 24, 2020 **Accepted**: May 12, 2020

I. 서론

학생은 기하 교육을 통해 도형과 구조를 배우고 그 특성과 관계를 이해하게 된다. National Council of Teachers of Mathematics(NCTM, 2000)은 특히 향후 추론 및 정당화 기술을 발달시키는 데 중요한 요인의 하나로 공간을 시각화하고 하나의 물체를 여러 측면에서 인식하는 것이라고 하였다. 우리나라 2015 개정 수학과 교육과정에서도 공간기하와 관련하여 초등학교에서 입체도형의 간단한 성질을 학습하고 이를 통해 공간 감각을 기른 후, 연결하여 중학교에서 입체도형의 성질을 더 학습하도록 체계화하고 있다. 이와 같이 국내외 교육과정의 기하 교육에서는 초등학교와 중학교의 연계된 공간기하 학습을 강조하고 있다.

최근 기하 교육에 관한 연구에도 이러한 경향이 반영되고 있다. 학교 기하 관련 연구는 전통적으로 Piaget, Inhelder(1956)의 연구와 van Hiele(1985) 모델을 기반으로 대부분의 경우 평면기하에 편중되어 있었지만, 최근에는 공간기하에 관한 연구도 점점 증가하는 추세이다(Sinclair & Bruce, 2015). 국외 연구의 예로는 8~9세 학생을 대상으로 다면체를 이용한 실험 연구(Ambrose & Kenehan, 2009), 공간 추론 능력의 중심 척도를 머릿속에서 물체를 회전시키는 능력으로 제안한 연구(Jansen, Schmelter, Quaiser-Pohl, Neuburger, & Heil, 2013), 교육을 통한 4~8세 아동의 공간 추론 능력 향상 가능성에 대한 연구(Bruce & Hawes, 2015), 도형 영역에 관한 초등예비교사의 교수학적 지식 조사 연구(Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai, & Tabach, 2015), 정육면체를 이용한 학생의 공간기하 사고 범주 분석 연구(Fujita, Kondo, Kumakura, & Kunimune, 2017) 등을 들 수 있다.

공간기하와 관련한 국내 선행연구의 예로는, 초등학생의 공간 감각과 공간 추론 능력 조사 연구(Kim & Pang, 2007), 입체도형 학습 프로그램 개발 연구(Kim & Ju, 2008), 초등학생의 공간 능력 조사 연구(Kim & Oh, 2008), 입체도형에 대한 초등학생의 오개념과 그 원인 분석 연구(Kim, 2009), 전개도를 활용한 초등수학 영재교육 프로그램 개발과 적용 연구(Ryue, Chong, & Song, 2007; Lee, 2014), 중학생의 공간 시각화 능력 분석 연구(Lee & Jeon, 1998), 중학생의 공간 기하적 사고에 대한

SketchUp 활용의 효과 연구(Lee & Kim, 2013), 중등 예비수학교사를 대상으로 3차원 기하적 사고와 공간적 추론의 형태 조사 연구(Lee & Cho, 2014) 등을 찾아볼 수 있다.

이러한 국내의 공간기하 관련 선행연구를 연구 대상 측면에서 구분해 보면, 초등학생을 대상으로 한 연구가 중등학생을 대상으로 한 연구보다 상대적으로 더 많이 이루어졌음을 알 수 있다. 즉, 중등수학 교육에서 공간기하에 관한 연구가 초등수학 교육과 비교하여 상대적으로 부족한 편이다. 평면기하와 더불어 공간기하에 대한 이해는 다양한 실생활 문제를 해결하는 데 기초가 되므로(Ministry of Education, 2015), 중등학생의 공간기하에 대한 이해 향상을 지원할 수 있는 연구도 더 다양한 관점에서 수행되어야 할 필요가 있다.

이에 이 논문에서는 크게 두 가지 관련 연구에 주목하였다. 하나는 중학생의 수학 성취도 및 사고와 관련된 공간기하 연구이고, 또 다른 하나는 입체도형 중에서 정육면체와 연결하여 학생의 공간기하 사고 범주를 분류한 Fujit 외(2017)의 연구이다. 그 이유는 먼저, 공간 추론 능력과 수학 성취도가 긍정적인 관련이 있고(Fennema & Tarte, 1985), 공간 측정 능력이 우수한 학생은 수학 측정 능력도 우수한 것으로 보고되었기 때문이다(Delgado & Prieto, 2004; Farmer et al., 2013). 또한 Clements, Sarama(2011)도 공간 기술에 대한 주의의 결핍은 수학 성취도 향상에 부정적인 영향을 주므로, 향후 수학 학습에 기하가 우선되어야 한다고 강조하였기 때문이다. 이러한 이유에 근거하여 중학생의 공간기하 이해 능력이 어느 정도인지를 파악하고 오류 유형을 분석하여 유용한 정보를 제공함으로써, 중학생의 공간기하 능력 향상도 지원하고 더 나아가 수학 학업성취도 향상에 도움을 주고자 하였다.

다음으로, 후자의 연구는 학생의 공간기하 사고 범주를 분류하는 데 초등학교에서 다루는 기본적인 정육면체에 대한 3개의 문항으로 시도하였다. 정육면체는 초등학교 1~2학년의 기하 영역에서 가장 먼저 다루는 기본 입체도형의 모양 중의 하나이고, 초등학교 6학년 단계에서 그 성질과 겨냥도 및 전개도를 다루어 초등학생의 공간 감각을 기르도록 하고 있다. 이에 초등학교 1~2학년에서 다루는 기본 입체도형의 하나이고 초등학교 6학년에서

성질을 다루지만, 중학교 1학년 과정에서 전개도를 이용하여 겹넓이를 원주율 π 로 표현하는 원기둥과 관련한 중학생의 공간기하 이해 실태를 조사하여 실질적인 정보를 제공함으로써, 공간기하 사고 함양을 지원하고자 하였다.

이를 위한 일환으로 이 논문에서는 Fujita 외(2017)의 연구를 토대로 원기둥과 관련한 공간기하 이해를 측정하기 위한 평가 도구를 개발하고, 이를 적용하여 중학생의 원기둥 관련 공간기하 개념의 이해 정도와 오류 유형을 학년별 및 성별로 분석하였다. 이러한 실증적인 연구 결과는 Fujita 외(2017)의 연구 결과와 더불어 중학교 공간기하 교육을 위한 유용한 기초 자료로 활용될 것으로 기대된다.

II. 이론적 배경

1. 수학과 교육과정에서 공간기하 교육

먼저, 2015 개정 수학과 교육과정의 공통 교육과정에서 ‘기하’ 영역의 공간기하에 초점을 맞추어 그 내용과 교수·학습 방법의 측면을 각각 살펴보면 다음과 같다.

내용 측면에서는 크게 평면도형과 입체도형으로 구성되어 있다. 입체도형과 직접적으로 관련하여 학생이 알아야 할 보편적인 지식은 주변 모양이 여러 가지 입체도형으로 범주화 되고, 각각의 입체도형이 고유의 성질을 가진다는 것이다. 또한 입체도형을 이해하는 것은 여러 분야의 문제 해결을 위한 토대가 되고, 수학의 다른 분야와도 관련성이 높다는 것을 명시하고 있다.

초등학교 도형 영역에서 입체도형 내용을 살펴보면, 1-2학년에서 입체도형의 모양, 5-6학년에서 직육면체와 정육면체, 각기둥과 각뿔, 원기둥과 원뿔, 구, 입체도형의 공간 감각 등을 학습하도록 구성되어 있다. 2009 수학과 교육과정과 비교하여 2015 개정 수학과 교육과정에서는 ‘구’가 추가되었다는 점 이외에 다른 변화는 없었다.

중학교 기하 영역에서는 입체도형과 관련하여 1학년에서만 입체도형의 성질을 학습하도록 구성되어 있다. 입체도형의 성질에서는 초등학교에 학습한 여러 입체도형의 성질을 바탕으로, 다면체와 회전체의 성질 및 입체도형의 겹넓이와 부피를 다룬다.

교수·학습 방법 측면에서는 초등학교 1-2학년의 경우,

도형에 대한 공간 감각을 구체물로 직접 모양을 만들거나 꾸미는 활동으로 기르도록 하고, 입체도형의 모양은 형식적인 용어가 아니라 일상용어를 사용하도록 하였다. 초등학교 5-6학년의 경우, 직육면체와 간단한 각기둥은 전개도로부터 입체도형을 추측할 수 있게 하고, 원기둥, 원뿔, 구는 한 직선을 중심으로 평면도형을 돌리는 활동을 통하여 만들어 보도록 하고 있다. 특히 입체도형의 구성 요소와 성질을 모형을 이용하여 확인하게 한다는 것이 큰 특징이다.

중학교의 경우에는 초등학교에서 익힌 공간 감각을 바탕으로 간단한 입체도형의 단면을 관찰하고 전개도를 이용하여 간단한 입체도형을 만들어 봄으로써 평면도형과 입체도형의 관계를 직관적으로 이해할 수 있게 한다. 중학교 단계에서 회전체는 단면의 모양이 회전체의 성질을 이해할 수 있는 정도로만 다루도록 하고 있다. 특히 이러한 입체도형에 대한 교수·학습 방법 및 유의사항은 2009 개정 수학과 교육과정과 비교하여 2015 개정 수학과 교육과정에 추가된 것이다. 이는 초등학교 과정의 입체도형과 관련한 내용 및 교수·학습 방법의 모든 측면에 걸쳐 이루어진 입체도형과 공간 감각에 대한 학습이 중학교 과정에서 실제적으로 연결하도록 강조한 것으로 보인다.

다음으로, 수학과 교육과정과 관련되어 있다고 판단한 국내의 공간기하 연구를 고찰한 결과, 초등학교와 중학교 수학교육에서 각각 찾을 수 있었다. 초등학교 수학교육의 경우는 초등학생을 대상으로 한 입체도형 관련 연구(Pang & Hwang, 2010)이고, 중학교 수학교육의 경우는 중학생의 공간 시각화 능력과 관련된 연구(Lee & Jeon, 1998)이다.

초등학교 수학교육의 경우에는 제7차 교육과정부터 ‘공간 감각’이라는 별도의 세부 영역을 명시하기 시작하였다(Kim, 2008). Pang, Hwang(2010)은 2007 개정 수학과 교육과정에 제시된 입체도형의 지도 내용과 지도 방법 및 공간 감각과 관련하여 교과서를 분석하였다. 이러한 분석을 통하여 수학적 정의와 차이가 있는 용어와 관련하여 주의가 필요함을 강조하고, 각뿔과 원뿔에 대한 내용에서는 단계별 활동이 잘 구현되지 않았음을 밝혀내었다. 특히 공간 감각과 관련하여 제7차 수학과 교육과정보다 2007 개정 수학과 교육과정에서 예측하기 단계가

상대적으로 상당히 강조되었음을 보고하였다.

중학교 수학교육과 관련하여 Lee, Jeon(1998)은 중등 기하 영역을 Hoffer(1981)의 연구를 기반으로 하여 6가지 세부 영역 - 시각 기술, 언어적 기술, 작도 기술, 논리적 기술, 응용 기술, 측정 기술 영역 - 으로 구분한 후, 제6차 수학과 교육과정의 중학교 1학년과 2학년의 내용을 대상으로 각각 세부 영역별 구성 비율을 조사하였다. 이들은 또한 공간 시각화 능력(상상 속 3차원 회전 능력)을 시각 기술과 작도 기술로 간주하여 분석하였다. 그 결과 중학생의 공간 시각화 능력은 수학 성취도와 양의 상관관계가 있고, 남학생의 경우 1학년과 2학년 사이에 유의하게 향상한다는 것을 밝혀내었다. 그러나 우리나라 중학생은 학년 상승에 따라 공간 시각화 능력이 신장되지 않는다고 보고하고, 우리나라 제6차 수학과 교육과정에 따른 교과서의 기하 내용 구성이 중학생의 공간 시각화 능력을 신장시키지 않는 것으로 보였다.

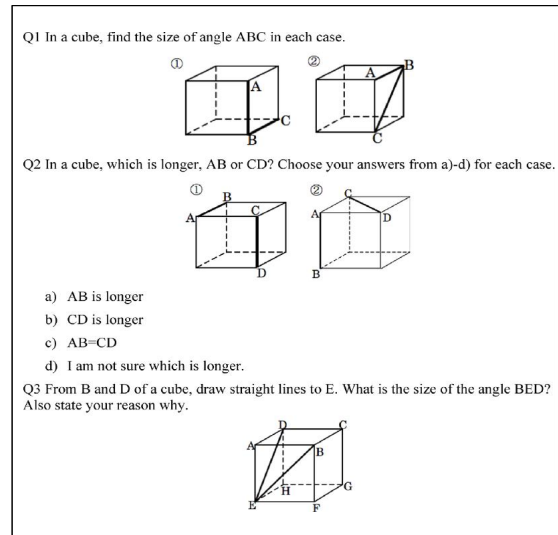
이에 이 연구에서는 공간기하 영역에서 제7차 수학과 교육과정의 전반적인 개편 이후 현재까지 이루어진 수학과 교육과정 및 교과서의 내용 구성의 변화가 학생의 공간기하 능력에 영향을 주는지 살펴보는 것이 의미 있다고 판단하였다. 더불어 선행연구(Lee & Jeon, 1998)에서 분류한 중등 기하 영역의 6가지 세부 영역을 이 연구의 검사 도구 개발에 반영하였다.

2. 정육면체를 이용한 공간기하 사고 평가 도구

Fujita 외(2017)는 학생의 3차원 공간기하 이해 정도를 평가하기 위하여 Widder, Gorsky(2013)가 제안한 3차원 기하 사고의 2가지 이해 유형¹⁾을 정육면체 개념에 반영하여 검사 도구를 개발하였다([Fig. 1] 참조).

[Fig. 1]의 Q1은 $\angle ABC$ 를 시각화한 다음 정육면체의 성질에 대한 지식을 기반으로 각의 조작과 추론을 통해 해결해야 하는 문항이다. Q2는 \overline{CD} 를 대각선으로 보는 사고 과정을 거친 다음 정사각형에서 한 변의 길이보다 대각선의 길이가 더 길다는 판단을 해야 하는 문항이다. Q3은 보조선 \overline{DB} 를 그리고 $\triangle BDE$ 가 정삼각형임을

을 연역하여 $\angle BDE = 60^\circ$ 라고 판단하는 과정이 필요한 문항으로 조작 능력과 추론 능력이 모두 요구된다.



[Fig. 1] A cube assessment questions(Fujita et al., 2017, p. 100)

요약하면, 위 Fujita 외(2017)의 공간기하 이해 검사 도구는 학생의 조작(시각적 능력 포함)과 추론 능력을 순차적으로 평가할 수 있도록 구성되어 있다. 이들은 이 검사 도구를 이용하여 중학생 455명을 대상으로 조사하고, 그 결과를 바탕으로 학생의 공간기하 사고를 6개의 범주로 분류하였다. 그 결과는 [Table 1]과 같다.

[Table 1]의 밑줄 친 부분을 보면, Fujita 외(2017)는 학생의 공간기하 능력을 조작 능력과 추론 능력의 종합으로 보고, 조작 능력을 하위 범주(Category 1, 2)로, 추론 능력을 상위 범주(Category 3)으로 분류하였음을 알 수 있다. 그러나 시각적인 능력을 독립된 하나의 범주, 특히 공간 시각적인 능력을 하나의 범주로 분류하지 않고, 2-A와 2-C의 두 범주에 부분적으로만 포함시키고 있다.

Fujita 외(2017)는 Q1문항에서 Q3문항의 순서로 조작 가능 여부를 기준으로 범주를 구분하고, 조작을 통해 옳은 답을 연역해 내는지와 이에 대한 타당한 이유를 도형의 성질을 기반으로 추론할 수 있는지의 여부로 범주를 구분하고 있다.

1) Widder, Gorsky(2013)은 학생의 3차원 기하 사고를 구두 정보와 논리 해석적 사고에 근거한 이해(A-type item), 그리고 시각화에 근거한 이해, 즉 기하 도형의 정신적 조작에 근거한 이해(B-type item)의 두 가지 유형으로 나누었다.

[Table 1] Assessment framework for 3D geometric thinking with representations(Fujita et al., 2017, p. 109)

Category	Assessment descriptors
0	No capacity to manipulate or reason with 3D representations.
1	<u>Limited capacity to undertake simple manipulations</u> with 3D representations mentally seeing CD as a diagonal of the face, resulting in difficulties to activate their knowledge to reason for even simpler questions e.g. Q2.
2-A	<u>Capacity to undertake relatively simple manipulations</u> with 3D representations, enabling students to answer correctly for Q2. For complex problems such as Q3 or lessons B, there are no manipulations but some flawed deduction based on <u>visual appearances</u> in the given representations.
2-B	<u>Capacity to undertake relatively simple manipulations</u> with 3D representations, enabling students to answer correctly for Q2. For complex problems, they are capable of undertaking manipulations, drawing/adding to figures (e.g. adding extra lines, drawing a net etc.), but such manipulations do not activate their knowledge that can be used to deduce a correct answer for given problems.
2-C	<u>Capacity to undertake relatively simple manipulations</u> with 3D representations. For more complex problems, students are capable of undertaking manipulation or addition to the figure which can be used to activate their knowledge in properties which are useful to generate the correct answers, but they cannot proceed further with their reasoning. This is due to, for example, influences by ways they <u>visualise geometric shapes</u> from the given representations (e.g. seeing a detached triangle as a right angled triangle).
3	<u>Capacity to manipulate the representation and demonstrate valid reasoning</u> by using properties of geometrical figures, resulting in correct answers to complex problems such as Q3 or lessons B.

Fujita 외(2017)가 제안한 공간기하 이해 범주를 좀 더 상세하게 살펴보면 다음과 같다. 첫째, 모든 문항을 틀리면 범주 0으로, Q1-①, Q1-②, Q2-①에 옳은 답을 하면 범주 1로 구분하였다. 둘째, 그 다음의 범주 구분은 Q2-②에 옳은 답을 하지만 Q3에 어떠한 방식으로 옳게 답하였는지에 따라 다시 범주를 구분하였다. 또한 범주의 구분 기준을 조작, 시각, 추론 등으로 보았다. 셋째, Q1-①, Q1-②, Q2-①, Q2-②에 옳게 답하지만 Q3에 대해서는 조작이 없고 시각적으로 일부 잘못된 추론을 한다면 범주 2-A로 분류하였다. 넷째, Q1-①, Q1-②, Q2-①, Q2-②에 옳게 답하고 Q3에 대해서도 조작(예, 보조선 긋기, 망(Net) 그리기 등)을 할 수 있지만, 이러한 조작을 통해 옳은 답을 추론해 내지 못하면 범주 2-B로 분류하였다. 마지막으로, Q1-①, Q1-②, Q2-①, Q2-②, Q3의 모든 문항에 대하여 조작하고 이를 이용해 옳은 답을 한 경우에도 2가지 범주로 다시 분류하였다. 즉, 제시한 추론이 타당하지 않으면 범주 2-C로, 추론이 타당하면 범주 3으로 구분하였다.

그러나 이 연구를 수행하는 입장에서 Fujita 외(2017)의 공간기하 사고 범주 분류가 의미 있지만, 두 가지 측면에서 접근하여 논의하였다. 첫째, 검사 도구의 Q1과 Q2의 문항 배치가 전통적인 기하 학습 수준 이론과 부합하는지에 대한 것이다. Q1에서 구해야 하는 각의 크기는 시각적인 능력을 바탕으로 하지만, 정육면체의 성질을 반영하여 각의 조작 능력을 요구한다. Q2에서 길이 비교는 주로 시각적 표상 능력과 관련되어 있다. 그러나 van Hiele(1985)의 기하 학습 수준 이론에서는 시각적 표상 능력이 도형의 성질을 반영한 조작 능력에 선행한다. 이에 Fujita 외(2017)의 검사 도구에서 기하 학습 수준의 순서를 고려한 문항 배치에 대하여 논의하였다. Fujita 외(2017)의 검사 도구에서 문항 배치는 Widder, Gorsky(2013)가 제안한 유형 분류를 적용하였기 때문일 것으로 보인다. 또한 이는 [Table 1]에 제시된 학생의 기하 사고 범주 틀에서 학생의 ‘공간시각 능력’이 빠지게 된 결정적인 이유로 추측된다. 그러나 Fujita 외(2017)의 연구에서는 이러한 논의를 찾아보기 어려웠다.

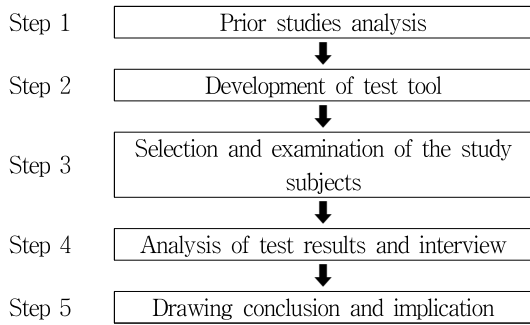
둘째, Fujita 외(2017)의 공간기하 사고 평가 틀을 학생의 공간기하 사고 범주로 일반화하는 것이 타당한가에 대하여 논의하였다. 시각적 범주가 빠졌다는 이유와 더

불어, 정육면체에 초점이 맞추어져 있어 공간기하의 사고 오류 유형으로서는 제한적이기 때문이다. 이러한 2가지 이유로 [Table 1]과 같이 학생의 공간기하 사고를 범주화하기에는 다소 무리가 있다고 보았다. 이러한 논의에 근거하여 검사 도구 개발은 이 선행 연구를 토대로 하였지만 공간기하 사고 범주를 그대로 분석틀로 활용하지 않았음을 밝힌다.

III. 연구 방법

1. 연구 절차

이 연구는 [Fig. 2]의 절차로 진행되었다. 가장 먼저 문헌을 고찰하고 논의한 문제점을 토대로 후속 연구 주제를 설정하였다. 이어서 관련 선행 연구를 토대로 검사 도구를 개발하고, 연구 대상을 선정하였다. 검사 결과를 토대로 오류의 원인을 심층 분석하기 위하여 일부 연구 대상을 선정하여 면담을 실시하였다. 연구 자료를 분석하고 연구 결과를 토대로 결론 및 시사점을 도출하였다.



[Fig. 2] Research Process

2. 검사 도구 개발 방향

선행 연구 분석을 통하여 이 연구에서는 학생의 시각적인 능력을 기하 영역에서 평가해야 할 필수 요소로 간주하였다. 이에 학생의 ‘공간시각 능력’을 측정하기 위한 문항을 검사 도구에 포함시키고, 공간시각 능력, 공간측정 능력, 공간추론 능력의 순서로 문항을 구성하기로 하였다.

구체적인 평가 문항 구성 능력의 근거는 다음과 같다. 먼저, Lee, Jeon(1998)은 중학교 기하교육에서 다루어야

할 기술의 영역을 시각 기술, 언어적 기술, 작도 기술, 논리적 기술, 응용 기술, 측정 기술 등의 6가지 영역으로 구분하였다. 이에 이 연구에서는 논의를 거쳐 시각 기술은 공간시각 능력²⁾으로, 작도 기술과 측정 기술을 공간측정 능력으로, 그 외 언어적 기술, 논리적 기술, 응용 기술을 공간추론 능력으로 정의하였다. 또한 Fujita 외(2017)의 연구에서 분류한 6단계의 정육면체에 대한 학생의 공간기하 이해 범주에 대하여 논의한 결과, 6단계 구분이 다소 불명확하다는 판단에 따라 3단계로 축소할 수 있음을 확인하였다. 이에 1단계는 시각적으로 영향을 받는 수준, 2단계는 측정을 활용하여 사고하는 수준, 3단계는 추론을 활용하여 사고하는 수준으로 구분할 수 있었다. 이러한 선행 연구를 바탕으로 이 연구에서는 공간기하 이해 분석을 위한 최종적인 틀에 포함시켜 평가하고자 하는 능력으로 공간시각 능력, 공간측정 능력, 공간추론 능력을 설정하였다.

이와 같은 3가지 능력을 측정하기 위한 검사 도구의 문항 배치 순서의 근거는 다음과 같다. 첫째, van Hiele(1985)의 기하 학습 수준 이론과 유사한 맥락에서 공간기하 문제 해결 과정에서도 최초로 직면하는 학생의 직관적 감각 현상이 공간시각 능력일 것이라 판단하였다. 이는 자연스러운 현상으로 학생마다 드러나는 공간시각 능력은 다를 수 있지만 향후 공간기하 문제 해결에 영향을 줄 수 있음을 고려하였다. 이에 학생의 공간시각 능력 측정 문항을 가장 먼저 제시하기로 하였다.

둘째, 공간측정 능력을 측정하기 위한 문항을 2번으로 배치한 것은 McLellan, Dewey(1895)가 수학적 대상을 명확한 전체로 파악하기 위해서 측정 활동이 필수적이라고 강조하였기 때문이다. 이에 이 연구에서는 공간측정 능력을 입체도형의 속성을 측정 활동으로 분석하고 이들의 관계를 이해하는 능력으로 정의하였다. 이는 학생이 측

2) 이 논문에서 정의된 학생의 공간시각 능력은 시각적으로 달라 보이는 원기둥의 반지름의 길이를 비교할 수 있는 능력의 평가를 통해 보이고자 하였다. 반면, Lee, Jeon(1998)은 공간 시각화 능력을 학생의 3차원 회전 능력으로 보이고자 하였다. 이를 위해 Lee, Jeon(1998)은 PSVR 검사 도구를 도입하였다. 이 검사 도구는 3차원 물체를 문제에 명시된 안내에 따라 머릿속으로 상상하여 회전시키도록 요구하는 검사로, 공간 시각화 능력의 한 특수한 형태를 측정하기 위해서 1977년 Guay가 개발한 것이다. 총 30문항으로 풀이 제한 시간은 20분이고, 13세 이상의 학생이 풀기에 적합하도록 개발되었다.

정 활동을 통해 입체도형을 대상화하여 명료하게 파악하고, 이러한 대상화 과정을 통해 입체도형의 성질도 파악할 수 있게 된다는 것을 의미한다. 이는 van Hiele(1985)의 기하 학습 수준 이론과 맥을 같이 한다고 볼 수 있다. 이러한 이론적 논의와 별도로 학교 현장에서 실증적 근거를 찾기 위해 현직 수학교사 3명의 의견을 조사하였다. 조사에 참여한 현직 수학교사도 공간측정 능력이 공간시각 능력을 바탕으로 길이, 크기 비교와 더불어 대수적 능력을 발현하여야 풀 수 있다는 의견을 제시하였다.

셋째, 학생의 공간추론 능력을 측정하는 문항은 Fujita 외(2017)의 검사 도구와 동일하게 가장 마지막에 배치하였다. 공간추론 능력을 측정하는 문항은 공간시각 능력, 공간측정 능력을 모두 포함할 뿐만 아니라 입체도형을 평면도형으로 전개하는 등 학생의 창의적인 사고도 요구할 수 있기 때문이다.

3. 검사 도구 개발 과정

Fujita 외(2017)의 연구를 기반으로, 원기둥에 대한 학생의 공간기하 이해 정도를 측정하기 위한 검사 도구를 개발하였다. 선행 연구 문헌을 바탕으로 수학교육 전문가 협의회(박사 1명, 박사과정 4명, 석사과정 2명)를 구성하여 총 4회에 걸쳐 논의를 실시하였다. 이 협의회에서 공간기하 이해 단계를 3단계로 축소하는 것에 대한 적절성 검토도 이루어졌다.

1차 협의(2018. 10. 14)에서는 처음 개발한 검사 도구를 검토하였다. 처음에는 원기둥 접근이 어려워 직육면체, 원뿔 등으로 접근하였다. 그러나 원기둥과 구가 정육면체를 제외한 가장 대표적인 입체도형인 것으로 의견을 수렴하였고, 원기둥 문항 개발을 합의하였다.

2차 논의(2018. 10. 23)에서는 검사 도구의 구체적인 문항 소재를 확정하였다. 1번 문항은 시각적인 영향을 받는 수준의 문항으로, 원기둥에서 두 밑면의 지름을 시각적으로 다르게 표현하여 지름의 길이를 어떻게 인식하는지에 초점을 두는 문항으로 개발하기로 하였다. 2번 문항은 2단계의 측정을 활용하여 사고하는 수준으로, 밑면의 반지름의 길이가 1이고 높이가 3인 원기둥에서 밑면의 반원인 호의 길이와 높이를 비교하도록 하지만, 시각적인 비교가 어려워 호의 길이를 직접 계산하는 과정

이 필요하도록 하였다. 3번 문항은 전개도를 그리는 능력을 요구할 뿐만 아니라, 길이 비교를 위한 추론 능력이나 피타고라스 정리를 활용한 수학적 추론 능력을 필요로 하는 문항으로 구성하기로 하였다. 연구자 각자 개발 문항을 합의하여 배당하였다.

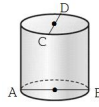
3차 논의(2018. 11. 02)에서는 2차 논의 후 개발한 문항을 논의한 형식에 맞게 배치하고 검토하였다. 첫째, 1차 완성한 검사 도구를 학생에게 제시하는 기호 및 언어 표현 방식에 관하여 토론했다. 둘째, 문항에 수식만 있고 설명이 없었던 부분을 수정하여 설명을 추가하였다. 셋째, 3번 문항에서 최단거리의 표현을 곡선으로 할지, 직선으로 할지 논의하다가, 최단거리 l 로 표기하는 것으로 합의하였다.

4차 논의(2018. 11. 08)에서는 3차 논의에서 구성한 검사 도구에 대하여 조사한 현직 수학교사 2명의 의견과 현행 교과서에서 사용하는 표현 방식을 반영하여 검사 도구를 수정·보완하였다. 현직 수학교사는 검사 도구의 표현 방식에 문제가 없지만, '3번 문항의 그림에서 반지름의 표현에 오해의 소지가 있을 수 있다.'는 의견을 제시하였다. 이에 아래에 표시한 반지름의 표현을 위로 이동하였다. 그리고 여러 종류의 현행 교과서 검토한 후에 3번 문항 표현에서 '원기둥 표면에서 최단거리'를 '원기둥의 옆면을 반 바퀴 돌아'라는 표현으로 수정하였다.

4. 검사 도구 문항

검사 도구의 1번 문항은 학생의 공간시각 능력을 알아보기 위한 것이다. [Fig. 3]에서 볼 수 있듯이, 선분 CD와 선분 AB의 실제 길이는 같지만 시각적으로 길이가 다르게 보인다. 밑면인 원의 지름에 대한 기존 지식을 이용하여 다르게 보이는 길이에 대한 시각적 표상을 정확하게 판단할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

1. Which of the following statements is true about the cylinder?

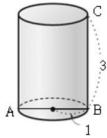


① $\overline{AB} > \overline{CD}$
 ② $\overline{AB} < \overline{CD}$
 ③ $\overline{AB} = \overline{CD}$
 ④ There is no comparison.

[Fig. 3] Question 1

2번 문항은 학생의 공간측정 능력을 알아보기 위한 것이다([Fig. 4] 참조). 주어진 반지름의 길이를 이용하여 구한 곡선의 길이와 직선의 길이를 비교할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. The following figure shows a cylinder with a radius of the base 1 and a height 3. When the line AB is the diameter of the bottom, what is true by comparing the length of the line BC with the arc AB?

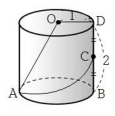


① $\overline{AB} > \overline{BC}$
 ② $\overline{AB} < \overline{BC}$
 ③ $\overline{AB} = \overline{BC}$
 ④ There is no comparison.

[Fig. 4] Question 2

3번 문항은 학생의 공간추론 능력을 알아보기 위한 것으로, 학생의 다양한 공간기하 능력을 종합적으로 평가하고자 하였다([Fig. 5] 참조). 학생은 입체도형을 평면도형으로 변형할 수 있어야 한다. 전개도를 활용할 경우, 두 직각삼각형의 빗변을 비교하는 데에 피타고라스 정리를 이용할 수 있다. 피타고라스의 정리를 학습하지 않은 중학교 1-2학년 학생은 삼각형의 고정된 밑변을 기준으로 하여 길이가 다른 한 변의 길이를 이용하여 빗변의 길이를 비교할 수 있어야 한다.

3. As shown in the figure below, there is a cylinder with a radius of 1 under and a height of 2. When from the point A to the center C of the line BD halfway around the side of the cylinder is the shortest distance l and the line AO is from the point O to the center of the bottom of the cylinder, which of the following is true?



① $\overline{AO} > l$
 ② $\overline{AO} < l$
 ③ $\overline{AO} = l$
 ④ There is no comparison.

[Fig. 5] Question 3

5. 연구 대상

D도 중·소도시 소재 J중학교 1학년 163명, 2학년 139명, 3학년 131명의 총 433명의 중학생을 대상으로 검사를 실시하였다. J중학교 주위에 공업단지가 있고, 수험담당 교사는 면담에서 연구 대상 학생의 수학 성취도 수준을 대도시 학생에 비해 낮은 편으로 진단하였다. 중학교 2-3학년의 경우 2009 개정 수학과 교육과정으로 학습하였다. 검사를 실시한 2018학년도는 2015 개정 수학과 교육과정을 중학교에 도입하기 시작한 해로 1학년 학생에 해당한다. 특히, 학교교육을 통해서는 3학년 학생만 피타고라스 정리를 학습하였다. 연구 대상의 학년별, 성별 인원수는 [Table 2]와 같다.

[Table 2] Participants

Grade	The number of participants	Total
7th	girls	96
	boys	67
8th	girls	72
	boys	67
9th	girls	72
	boys	59
Total	girls	240
	boys	193

6. 자료 수집 및 분석

중학교 1학년의 경우에는 호의 길이를 학습한 이후인 12월 초에 검사를 실시하였고, 중학교 2학년과 3학년의 경우에는 11월 말에 검사를 실시하였다. 검사는 15분 동안 진행하도록 하였다. 모든 문제 풀이 과정을 지우지 않고 제시하도록 안내하고, 대화 등과 같은 학생 간 상호작용을 허용하지 않도록 검사 담당 교사와 사전에 협의하였다.

검사 후 3번 문항에 대한 오류 분석을 위하여 학생의 반응을 바탕으로 7명의 학생을 선정하였다. 이 문항의 오류 응답자는 모두 305명이고 이 중 264명이 사고 과정을 기술하지 않고 41명만 그 과정을 기술하였다. 이에 41명의 학생 오답에 대한 풀이 과정을 확인하여 시각적, 조작적, 추론적 오류가 드러남에 따라 분석이 용이한 답안을 작성한 학생을 선정하였다. 선정된 학생 7명 중에서 면담 불가 사유가 발생(진출 1명, 상급학교 진학 2명) 한 학생 3명을 제외하고 면담이 가능한 4명을 대상으로

면담 동의를 받았다. 면담에 최종적으로 참여한 학생은 총 4명으로, 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명이었고, 면담은 2019년 3월에 이루어졌다.

면담 참여 학생의 3번 문항의 답지 선택은 3명이 '① 비교할 수 없다.'이고, 1명이 '③ $\overline{AO} = l$ '이다. 이를 바탕으로 질문 내용을 구성한 후에, 면담 진행 교사와 2회 논의하고 면담 훈련을 실시하였다. 이는 학생이 자신의 선택 답지에 대한 이유를 적절히 표현하지 못할 가능성도 있고, 교사의 의도하지 않은 힌트를 통해 대답할 가능성도 있기 때문이었다. 면담은 교사가 직접 교실에서 학생 개인별로 직접 응답한 답안지를 보여준 다음 10분에서 15분 정도 진행하였다. 학생의 동의를 받아 면담 내용을 녹음기로 기록하고 전사하였다.

지필 검사 후 수거한 433명의 자료를 정리하고, SPSS 18.0 버전을 이용하여 분석하였다. 문항별 답지 반응률을 산출하고, 학년별 정답률 차이와 성별 정답률 차이를 분산분석으로 검증하였다. 특히 3번 문항에 오답을 한 학생의 답안에 대한 오류 유형을 시각적 오류(V), 조작적 오류(M), 추론적 오류(I), 세 가지 유형의 조합, 공란 또는 판단이 어려운 오류(Other) 등으로 분류하였다. 오류 유형별 빈도수를 산출하고, 학생 답안 사례와 면담 자료를 분석하였다. 모든 분석 자료를 교차로 분석하고 논의를 통해 최종 확정하였다.

IV. 결과 분석 및 논의

1. 학년에 따른 문항별 정답률 분석

학년에 따른 문항별 정답률(%)을 분석한 결과는 [Table 3]과 같다. 문항 3번을 제외한 다른 두 문항에 대하여 학년이 올라갈수록 정답률이 높아지고, 3번 문항의 경우 1학년의 정답률이 2학년보다 5%p 높은 것으로 나타났다. 한편 2-3 학년의 경우 문항 배치가 뒤로 갈수록 정답률이 낮아지지만, 1학년의 경우 3번 정답률이 2번보다 2%p 더 높다. 그러나 1학년의 3번 정답률이 2번과 비교하여 유의미하게 더 높다고 하기에는 어려움이 따른다.

검사 도구의 모든 문항의 절대적인 난이도가 동일하지 않은 한계가 있지만, 학년에 따른 문항의 정답률 결과를 바탕으로 학년별 공간기하 이해 능력을 단순 비교해 보면 다음과 같다. 먼저, 유사한 경향을 보이는 중학

교 1학년과 2학년 학생의 경우 공간시각 능력을 평가하고자 한 1번 문항의 정답률에 비하여 공간측정 능력 및 공간추론 능력을 평가하고자 한 2번과 3번의 정답률이 51%p~58%p 낮은 것으로 나타났다. 반면에 2번과 3번 문항의 정답률의 차이는 2%p와 5%p로 상대적으로 현저하게 낮았다. 다음으로, 3학년 학생의 경우에는 1번과 2번 문항의 정답률 차이가 26%p, 2번과 3번 문항의 차이가 14%p로, 문항별로 다소 고르게 차이가 있는 것으로 드러났다. 이는 1-2학년과 달리 3학년 학생의 경우 공간기하 능력의 3가지 하위 능력에서 공간시각 능력, 공간측정 능력, 공간추론 능력의 순으로 낮아지고, 일반적으로 예측되는 결과이다. 1학년과 2학년 학생의 경우에는 공간측정 능력이 3학년과 비교하여 상대적으로 크게 부족하고 그 영향이 공간추론 능력에 반영되었다고 해석해 볼 수 있다.

[Table 3] Percentage (%) of correct answers by grade

Question no. \ Grade	Q1	Q2	Q3
7th	76	23	25
8th	78	25	20
9th	86	60	46

한편, 문항별 정답률이 학년에 따라 차이가 있는지를 검증하기 위한 분산분석 결과는 [Table 4]와 같다. Levene의 검정 결과에서 세 문항 모두 유의수준 .05에서 등분산이 가정되지 않아, Dunnett T3의 방법을 사용하였다.

[Table 4] ANOVA results

Sort	Sum of squares	df	A/S	F	p-value
intergroup	.799	2	.400	2.500	.083
Q1 within a group	68.721	430	.160		
Sum	69.520	432			
intergroup	12.195	2	6.097	30.435***	.000
Q2 within a group	86.147	430	.200		
Sum	98.342	432			
intergroup	5.099	2	2.549	12.887***	.000
Q3 within a group	85.063	430	.198		
Sum	90.162	432			

*** $p < .01$

분산분석 결과, 1번 문항의 경우 유의수준 .05에서 학년별 정답률에 차이가 없고, 2번과 3번 문항의 경우 학년별 정답률에 통계적으로 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 공간시각 능력을 측정하고자 한 1번 문항의 정답률을 고려하였을 때, 학년이 올라갈수록 정답률도 전반적으로 상승하였지만 학년이 공간시각 능력 발달에 큰 영향을 준다고 단정하기는 어렵다. 이는 Lee, Jeon(1988)의 연구 결과와 유사한 결과이지만, 학년이 올라가도 공간시각 능력이 발달하지 못한다기보다 문항의 난이도가 쉬운 편이라 1학년과 2학년의 정답률이 상대적으로 높게 나타났거나 1학년과 2학년 학생의 공간시각 능력이 우수하다고 해석할 수 있다.

이어서 학년별 정답률에 차이가 통계적으로 유의미한 2번과 3번 문항에 대한 사후검정 결과는 [Table 5]와 같다. 모든 문항에 대하여 중학교 1학년과 2학년의 정답률의 차이는 통계적으로 유의하지 않은 것으로 나타났다. 2번과 3번 문항에 대해서는 모두 통계적으로 3학년 학생의 정답률이 높은 것으로 나타났다.

[Table 5] Post-test *p*-value on grade difference

Sort	7th-8th	7th-9th	8th-9th
Q2	.943	.000	.000
Q3	.738	.000	.000

이러한 결과를 중학교 학년 사이의 공간기하 이해 능력 차이 측면에서 접근하여 좀 더 상세하게 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 모든 문항에 대하여 중학교 1학년과 2학년의 정답률에 차이가 없다는 결과는 공간기하 능력에 차이가 없음을 보여준다. 즉, 두 학년의 공간기하 능력은 유사한 경향이라고 할 수 있다. 이에 대하여 좀 더 명확하게 해석하기 위하여 검사 수행을 실시한 교사와 논의한 바에 따르면, 1학년 학생을 대상으로 검사 전에 수행 평가에 반영한다고 예고하였다. 이러한 예고가 1학년 학생의 문항 정답률에 영향을 주었다고 보는 것이 타당할 것이다. 그럼에도 불구하고 1학년과 2학년 학생 모두 2번과 3번 문항의 정답률이 동일한 수준으로 3학년과 비교하여 상대적으로 낮고 두 문항 사이의 정답률 차이도 작다는 것에 주목해 볼 필요가 있다. 이는 2학년 교육과정에서 입체도형과 직접 관련된 학습이 이루어지지 않았

기 때문으로 볼 수도 있다. 그러나 초등학교 단계에서 원의 둘레의 길이를 구하는 학습을 하기 때문에 이러한 현상의 원인을 해석하기에는 한계가 따른다.

다음으로, 2번과 3번 문항의 정답률에서는 1학년과 3학년, 2학년과 3학년에서 통계적으로 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 이는 1-2학년과 비교하여 3학년 학생의 공간측정 능력, 공간추론 능력이 더 발달되었음을 의미한다. 3학년의 경우 대수적 처리와 계산 연습을 비롯하여 여러 가지 평면도형에 대한 성질을 정당화하는 기회가 더 많았기 때문으로 보인다. 또한 다른 학년과 달리 피타고라스의 정리를 학습한 것도 직접적인 영향을 주었을 것으로 해석된다.

2. 성별에 따른 문항별 정답률 분석

전체 여학생 240명과 전체 남학생 193명을 대상으로 성별에 따른 문항별 정답률(%) 및 여학생과 남학생의 정답률 차이를 검증한 t-검정 결과는 [Table 6]과 같다. 1번 문항의 경우에는 여학생의 정답률(81%)이 남학생의 정답률(79%) 보다 높았지만, 2번과 3번 문항의 경우에는 모두 남학생의 정답률이 여학생보다 높은 것으로 나타났다. 그러나 세 문항에 대한 이러한 정답률 차이는 독립 표본 t-검정 결과 모두 유의수준 .05에서 통계적으로 유의하지 않았다. 이는 원기둥에 대한 중학생의 공간기하 능력에서 남학생과 여학생의 차이가 없음을 보여준다.

[Table 6] Correct answers Percentage (%) for all participants and t-test results on gender difference

Sort	Boys	Girls	t	<i>p</i> -value
Q1	79	81	-.428	.669
Q2	38	32	1.284	.200
Q3	32	26	1.290	.198

공간기하 능력에 대한 성차를 학년별로 분석한 결과는 [Table 7]과 같다. 1학년과 2학년의 경우에는 전체 학생을 대상으로 한 결과와 동일하게 모든 문항의 정답률에서 성차가 통계적으로 유의하지 않은 것으로 나타났다. 다만 단순히 정답률 차이만 비교해 보면, 1학년의 경우에는 모든 문항에 대하여 남학생의 정답률이 여학생보다 높지만, 2학년의 경우에는 다른 두 문항과 달리 3번 문항에 대하여 여학생의 정답률이 남학생보다 상대적

으로 높았다. 3학년의 경우 남학생과 여학생의 정답률 차이가 2번과 3번 문항에서는 전체 학생을 대상으로 한 결과와 동일하게 통계적으로 유의하지 않았지만, 1번 문항에서는 통계적으로 유의하였다. 특히 다른 두 문항과 달리 1번 문항에서 여학생의 정답률이 남학생보다 높게 나타남으로써, 여학생의 공간시각 능력이 남학생보다 더 우수하다고 볼 수 있다.

[Table 7] Correct answer rate (%) by grade and t-test results on gender difference

Sort	Boys	Girls	t	p-value
7th	Q1	77	.360	.720
	Q2	26	1.247	.214
	Q3	27	.900	.369
8th	Q1	81	.632	.529
	Q2	29	1.124	.263
	Q3	19	-.212	.833
9th	Q1	81	-2.206*	.029
	Q2	61	.207	.837
	Q3	51	1.418	.159

*p < .05

3. 문항별 오류 분석

1) 답지 반응에 근거한 오류

중학생의 원기등 관련 공간기하 이해에 대한 오류는 각 문항에서 선택한 오답지 반응을 통하여 확인할 수 있다. 학년별 각 문항의 답지 반응을 백분율로 나타낸 결과는 [Table 8]과 같다.

[Table 8] Multiple-choice response percentage by item & grade

Sort	①	②	③	④	Non	Sum
Q1	7th	13	4	76	6	100
	8th	6	4	78	11	100
	9th	7	3	86	4	100
Q2	7th	23	44	11	14	100
	8th	25	53	7	11	100
	9th	60	24	10	5	100
Q3	7th	13	25	22	24	100
	8th	18	20	29	22	100
	9th	28	46	14	6	100

* Shading shows the correct answer percentage.

먼저, 앞 절에서도 제시하였듯이 원기등의 겨냥도를 이용하여 공간시각 능력을 평가하는 1번 문항의 정답률은 3개 학년 모두 76~86%에 분포한 것으로 보아, 대부분의 학생이 쉽게 해결하였음을 알 수 있다. 그러나 연구에 참여한 1학년 학생의 경우 13%, 2학년의 경우 6%, 3학년의 경우 7%에 해당하는 학생이 두 선분을 실제로 원기등을 구성하는 밑면인 원의 지름으로 인식하지 않고, 시각적으로 보이는 대로 길이를 비교한 것으로 나타났다. 또한 2학년 학생의 경우에는 6%보다 더 많은 11%, 1학년은 6%, 3학년은 4%의 학생이 비교할 수 없다고 응답하였고, 두 선분이 모두 원기등을 이루는 밑면의 지름으로 인식하지 못하였음을 드러낸다고 볼 수 있다. 이러한 오류 분석 결과는 소수이지만 일부 학생을 위하여 교육과정의 교수·학습에서 권고하는 구체적 모형을 이용한 구성 요소 확인, 전개도를 이용하여 만드는 활동, 직선을 중심으로 직사각형을 돌리는 활동 등 다양한 활동을 통하여 원기등의 구성 요소 및 그 성질을 이해할 수 있도록 좀 더 주의를 기울일 필요가 있음을 시사한다. 또한 원기등의 경우에도 전개도뿐만 아니라 정육면체 지도에서와 마찬가지로 겨냥도도 그려 보는 기회를 충분히 제공하는 것도 고려해 볼 수 있다.

다음으로, 원기등의 겨냥도에 주어진 정보를 이용하여 공간측정 능력을 평가하는 2번 문항에 대하여 1학년과 2학년의 경우 약 75%, 3학년의 경우 약 40%의 학생이 호의 길이와 선분의 길이를 비교하는 데 어려움을 가지고 있음을 드러내었다. 특히 세 학년에서 모두 밑면의 원주의 길이의 반인 호의 길이가 모선의 길이보다 짧다는 오류를 가장 많이 보였다. 이러한 반응에 대한 오류는 크게 3가지로 추측해 볼 수 있다. 첫째, 원기등의 겨냥도를 이해하지 못하고 시각적으로 보이는 대로 길이를 비교한 오류, 둘째, 호의 뜻이나 그 기호를 이해하지 못한 경우, 셋째, 호의 길이를 밑면의 지름으로 오해한 경우이다. 이러한 학생의 오류를 줄이기 위해서는 앞에서 제안한 공간시각 능력 향상을 위한 교수·학습 방법 도입을 비롯하여 수학적 용어의 뜻과 기호에 대한 지도, 문제해결 과정에서 학생 자신의 주의집중 등이 요구되어진다고 볼 수 있다.

또한 중학교 1학년과 2학년의 경우 3학년과 비교하여 상대적으로 호의 길이와 선분의 길이를 비교할 수 없다

는 오류도 많이 나타났다. 이는 이후 3번 문항의 오류 유형 분석을 위한 면담에서 드러나듯이 곧은 선과 굽은 선의 길이를 비교할 수 없다는 인식으로부터 기인한 것으로 추측된다. 이러한 인식은 중학교 3학년에 비하여 중학교 저학년에서 상대적으로 더 많이 나타남에 주의할 필요가 있음을 드러낸다.

마지막으로, 원기둥의 겨냥도에 주어진 정보를 이용하여 공간추론 능력을 평가하는 3번 문항에 대하여 1학년과 2학년의 경우 각각 약 75%와 80%, 3학년의 경우 약 55%의 학생이 두 선분의 길이를 비교하는 데 어려움을 가지고 있음을 드러내었다. 1학년과 2학년은 두 학년 모두 3번 문항과 비교하여 상대적으로 더 단순한 2번 문항과 유사한 정도의 어려움을 보이는 특이한 현상을 나타낸 반면에, 3학년은 상대적으로 쉬운 문항을 드러나게 더 잘 해결하는 일반적인 현상을 보였다. 이는 1학년 이후에 3학년에서 원기둥의 구성 요소인 원의 성질을 다룬 학습의 기회가 영향을 미친 것으로 추측되어, 학습의 기회가 많을수록 기본 지식이 풍부해져 동일한 문제의 해결 능력이 향상되었음을 보여준다고 할 수 있다.

한편 1학년과 2학년은 두 선분의 길이가 같거나 비교할 수 없다는 오답을 모두 정답보다 더 많이 선택한 반면에, 3학년은 겨냥도 상에서 곧은 선으로 표현된 선분의 길이가 더 길다는 오답을 가장 많이 선택한 것으로 나타났다. 이 공간추론 문제를 해결하기 위해서는 입체도형인 원기둥의 구성 요소에 대한 정보를 바탕으로 평면도형인 2개의 직각삼각형을 인식해야 한다. 이러한 과정은 1번과 2번 문항을 해결하는 과정보다 복잡하여 답지 반응만으로 오류를 분석하기에는 한계가 따른다. 이에 다음 절에서 선행연구를 토대로 제시한 오류 유형에 따라 좀 더 상세하게 분석하였다.

2) 공간추론 능력 평가 문항 반응에 대한 오류 유형

전체 중학생 433명 중 3번 문항에 오답을 한 학생은 305명이다. 이는 많은 학생이 공간추론 능력을 평가하고자 한 3번 문제 해결에 어려움을 가지고 있다는 것을 드러낸다. 이들을 대상으로 오류 유형별 빈도수를 분석해보면 [Table 9]와 같다. 각 유형의 오류뿐만 아니라 2가지 유형 이상의 조합 오류 등 여러 오류 유형이 나타난다는 것을 알 수 있다.

[Table 9]를 토대로 중학생의 오류 유형과 관련하여 좀 더 상세하게 살펴보면 다음과 같다. 기타(264명)로 분류된 사례가 가장 많았고, 이는 풀이 과정을 제시하지 않고 오답지만 선택하였기 때문으로 보인다. 이러한 결과는 일반적으로 학생이 임의로 오답지를 선택하였거나 자신이 선택한 오답의 이유를 설명하는 데 어려움이 있었음을 보여준다. 기타를 제외한 41명³⁾ 학생의 오류 유형을 분석하면 추론과 관련된 오류 사례(32명)가 상대적으로 많이 나타난 반면에, 시각적 오류 유형과 조작적 사고 유형의 사례는 적은 편이다. 특히, 오류 유형별로 조사된 남학생과 여학생 수는 크게 차이가 없다고 볼 수 있다.

[Table 9] Frequency by error type of Q3 for all students with errors

Sort	Error type & Frequency				Sum
	V	M	I	Other	
Boys	2	2	12	143	163
	V & M	V & I	M & I	ALL	
Girls	1	1	1	1	142
	V	M	I	Other	
	1	1	12	121	
	V & M	V & I	M & I	ALL	
	2	3	2	-	

V: Visual error, M: Manipulative error

I: Inferential error, ALL: All of V, M, I

Other: Unjudgeable error or Blank

좀 더 상세한 정보를 제공하기 위하여 학년에 따른 성별 오류 유형을 분석한 결과는 [Table 10]과 같다. 1-2학년은 전체 오답 학생에 대한 오류 유형 분석 경향과 대체로 유사한 반면에, 3학년에서는 여학생이 상대적으로 대부분의 오류 유형, 특히 추론적 오류 유형을 더 많이 보였다. 그러나 이는 3학년 남학생과 여학생의 수가 비슷하지만 여학생이 오류 유형을 판단할 수 있는 풀이 과정을 더 많이 제시하였기 때문이다.

³⁾ 전체 오류 응답자 305명 중 무응답이나 판독 불가능한 응답이 대다수(264명)를 차지함으로써, 이와 비교하여 41명의 오류 응답 수가 상대적으로 소수이지만 유형 유형의 패턴을 볼 수 있다고 판단하여 분류하였다.

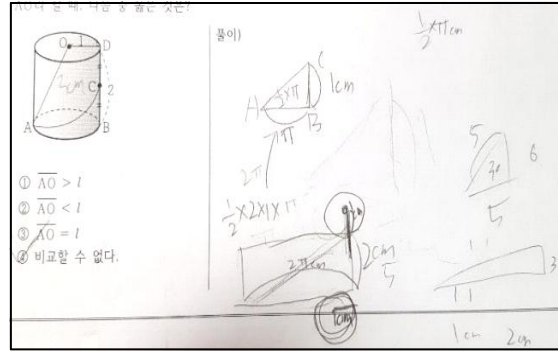
[Table 10] Errors' frequency of Q3 by grade

Sort	Error type & Frequency				Sum
	V	M	I	Other	
7th	Boys				70
	1	-	6	62	
	V & M	V & I	M & I	ALL	
	1	-	-	-	
7th	Girls				53
	-	-	4	49	
	V & M	V & I	M & I	ALL	
	-	-	-	-	
8th	Boys				58
	1	-	5	50	
	V & M	V & I	M & I	ALL	
	-	1	-	1	
8th	Girls				53
	-	-	3	47	
	V & M	V & I	M & I	ALL	
	-	3	-	-	
9th	Boys				35
	-	2	1	31	
	V & M	V & I	M & I	ALL	
	-	-	1	-	
9th	Girls				36
	1	1	5	25	
	V & M	V & I	M & I	ALL	
	2	-	2	-	

V: Visual error, M: Manipulative error
 I: Inferential error, ALL: All of V, M, I
 Other: Unjudgeable error or Blank

3번 문항에 대한 학생의 오류 양상을 좀 더 구체적이고 실제적으로 알아보기 위하여, 몇 가지 유형에 해당하는 7가지 응답 사례를 선별하여 분석하고, 일부(4명) 학생을 대상으로 면담을 실시하였다. 선별한 사례의 오류 유형은 시각적 오류, 추론적 오류, 조작적·추론적 오류, 모든 유형의 복합적인 오류에 해당한다. 차례로 살펴보면 다음과 같다.

첫째 사례 [Fig. 6]은 시각적 오류를 보인 1학년 남학생 S1의 응답이다. 학생은 원기둥을 전개도로 표현하여 해결하려고 하였으나, 선분 AO의 길이가 전개도 상에서 옆면의 대각선의 길이와 같다고 시각적으로 잘못 판단한 것으로 보인다.



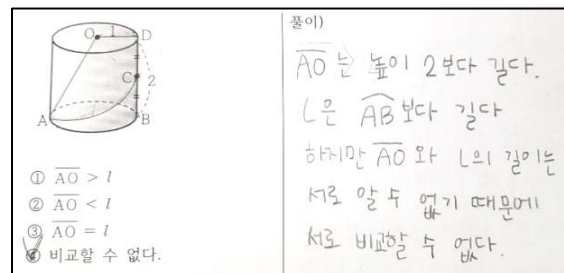
[Fig. 6] Case of Visual error from the 7th grader S1

[Fig. 6]의 시각적 오류를 보인 학생 S1을 대상으로 한 면담 과정에서, 이 학생은 자신의 풀이 과정을 설명하지 못하였다. 학교 내에서 수학 성취도가 상위권이고 수학에도 흥미가 높은 학생이지만, 3번 문항에 대한 자신의 풀이를 잘 설명하지 못함을 다음 대화에서 확인할 수 있다.

교 사: 두 선분의 길이를 비교할 수 없다고 한 이유는 무엇이니?

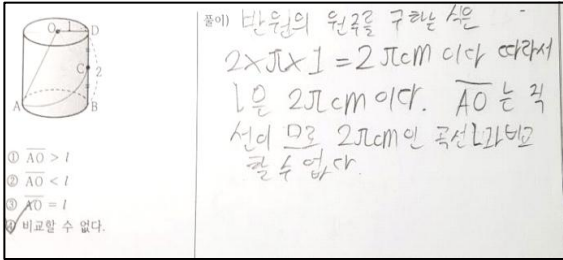
학생 S1: 삼각형 ABC는 밑변의 길이가 π 이고 높이가 1인 직각삼각형이에요. ... 그래서 두 길이를 비교할 수 없어요.

둘째 사례 [Fig. 7]은 추론적 오류를 보인 1학년 여학생의 응답이다. 선분 AO와 선분 l의 길이가 모두 2보다 길다는 판단을 하였으나 두 길이를 추론하여 비교하는 데에 이르지 못하였다. 즉, 직접 길이를 구하여야 두 길이를 비교할 수 있다는 오류를 나타내고 있다.



[Fig. 7] Case of inferential error from the 7th grader

셋째 사례 [Fig. 8]은 조작적 오류와 추론적 오류가 모두 발생한 중학교 1학년 남학생 S2의 응답이다. 이 학생은 원주를 구하였지만 2로 나누어 반원의 둘레를 구하는 많은 조작적 오류와 직선과 곡선의 길이를 비교할 수 없다는 추론적 오류를 동시에 드러내고 있다.



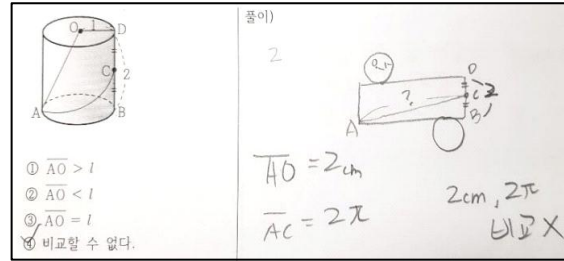
[Fig. 8] Case of manipulative and inferential error from the 7th grader S2

[Fig. 8]의 오류 원인을 좀 더 명확하게 분석하기 위한 다음 학생 S2와의 대화에서 이 학생은 직선과 굽어 있는 곡선의 모양이 서로 다르기 때문에 길이를 비교할 수 없다고 응답하였다. 이 학생과 같은 추론적 오류를 보이는 학생은 모양이 서로 다른 도형에 대하여 어렵거나 추론을 통하여 길이를 비교하는 것에 어려움을 가지고 있을 것으로 보인다. 이는 기하교육 과정에서 직접 계산하지 않고 어렵거나 추론을 통하여 길이, 넓이, 부피 등을 비교하는 기회를 자주 제공하는 것이 필요함을 시사한다.

- 교 사: 비교할 수 없다고 한 이유는 무엇이니?
 학생 S2: A에서 C까지는 곡선이고 A에서 O까지는 직선이예요. 곡선과 직선은 길이를 비교할 수 없어서 4번이예요.
 교 사: 곡선과 직선의 길이는 왜 비교가 안 되니?
 학생 S2: 곡선은 굽어 있고 직선은 똑바르기 때문에 비교가 안돼요.

넷째 사례 [Fig. 9]는 시각적 오류, 조작적 오류, 추론적 오류의 세 가지 유형이 모두 나타난 2학년 남학생 S3의 응답이다. 이 학생은 전개도를 그리는 과정에서 $\overline{AO}=2$, $\overline{AC}=2\pi$ 라고 판단하였다. 이는 문제가 지시하

는 선분을 시각적으로 틀리게 표상한 것일 뿐만 아니라 실제 선분의 길이도 틀리게 계산하는 조작적 오류도 동시에 드러낸 것이라 볼 수 있다. 또한 π 의 근삿값을 사용하여 두 값을 직접 비교하거나 어렵으로 비교할 수 있음에도 불구하고 비교할 수 없다는 오답지를 선택함으로써 조작적 오류와 추론적 오류를 복합적으로 보여준다고 할 수 있다.



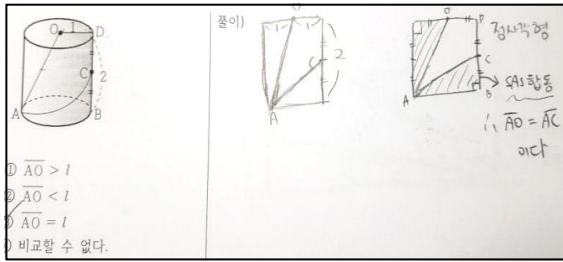
[Fig. 9] Case of ALL error type from the 8th grader S3

그러나 [Fig. 9]의 오류 원인을 좀 더 명확하게 분석하기 위한 다음 면담의 대화에서 학생 S3은 π 에 대한 이해가 부족함을 드러내었다. 이 학생은 원주율 π 를 수로 인식하지 않고 문자로 인식하는 오류를 가지고 있었다. 또한 면담 단계에서도 원기둥의 옆면을 펼쳐서 \overline{AO} 를 잘못 표시하고, 두 선분의 길이도 각각 $\overline{AO}=2$, $\overline{AC}=2\pi$ 로 수정하지 않고 검사에서 보여주었던 오류를 여전히 유지하였다.

- 교 사: 두 선분을 비교할 수 없다고 한 이유는 무엇이니?
 학생 S3: A에서 C까지는 2π 이고 A에서 O까지는 2예요. 그래서 둘은 비교가 불가능해요.
 교 사: 2π 와 2는 왜 비교가 안 되니?
 학생 S3: π 하고 수는 비교할 수 없어요.

다섯째 사례 [Fig. 10]은 시각적 오류와 추론적 오류를 보인 2학년 여학생 S4의 응답이다. 이 학생은 원기둥을 전개도로 표현하여 고려하는 대신에, 회전축을 포함하는 면으로 절단한 그림으로 표현하여 문제를 해결하려고 하였다. 그리고 최단거리 l 을 원기둥을 따라 반 바퀴 돌아간 거리로 생각하지 않고 절단면의 선분 AO의 길

이와 같다고 판단하였다.



[Fig. 10] Case of Visual and Inferential error from the 8th grader S4

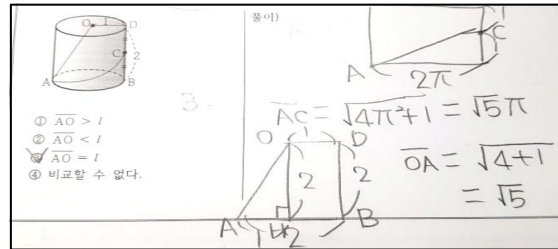
[Fig. 10]의 오류 원인을 좀 더 명확하게 분석하기 위한 다음 대화에서, 학생 S4는 S3과 마찬가지로 지필검사에서 오류를 수정하지 않고 원래의 생각을 그대로 유지하고 있음을 알 수 있다. 특히, 학생 S4는 자신이 풀 풀이를 그냥 읽는 정도로 대답하였고, 더 이상의 대답은 하지 않았다. 이 학생과 같이 면담에 참여한 학생은 대부분 자신의 답안을 수정하지 않고 유사한 대답을 하였다. 이러한 면담 내용은 학생의 답안만으로 분석한 오류가 학생의 실제 오류와 거의 동일함을 보여준다고 할 수 있기 때문에, 지필 답안 분석 결과의 질을 보장한다고 볼 수 있다.

교 사: 길이가 같다고 한 이유는 무엇이니?

학생 S4: 원기둥을 중심을 포함해서 자르면 정사각형이 나와요. A에서 O를 연결하고, A에서 C를 연결하면 삼각형이 두 개 나오는데, 둘은 SAS 합동이니까, $\overline{AO} = \overline{AC}$ 예요.

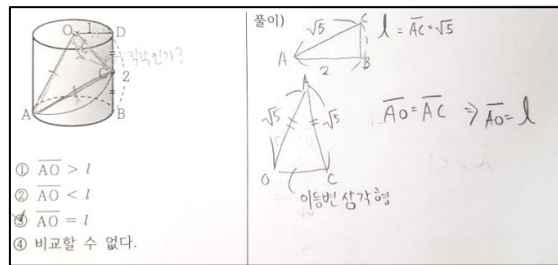
여섯째 사례 [Fig. 11]은 조작적 오류와 추론적 오류를 동시에 드러낸 3학년 여학생의 응답이다. 이 학생은 원기둥을 전개도로 표현하는 과정에서, 반원의 둘레의 길이를 구해야 하나 원주를 구하는 오류를 드러내었다. 이는 시각적 오류에 기인한 것으로 보인다. 또한 제곱근을 계산하는 과정에서 조작적 오류가 나타났다. 이러한 계산 실수는 다른 학생에게서도 다수 발견되었다. 이는 학생에게 유리수와 무리수를 동시에 포함하는 대수식의 계산 연습의 기회를 많이 제공해야 함을 의미한다. 이러

한 절차적 연습 기회는 더 나아가 학생의 공간측정 능력과 공간추론 능력을 향상시키는 데에도 중요한 역할을 하게 될 것이다.



[Fig. 11] Case of Manipulative and Inferential error from one 9th grader

일곱째 사례 [Fig. 12]는 추론적 오류를 보이는 3학년 남학생의 응답이다. 이 학생은 원기둥에서 최단거리 l 을 공간에서 고려하지 않고 현재의 평면에서 곧바로 직선으로 추론하는 오류를 보여주었다. 즉, [Fig. 12]의 오른쪽 직각삼각형의 빗변을 최단거리 l 로 인식하고, 피타고라스 정리로 길이를 직접 구하여 $\overline{AO} = l$ 이라는 오답을 이끌어내었다.



[Fig. 12] Case of inferential error from one 9th grader

이 절에서 살펴본 공간추론 능력 평가 문항과 관련한 학생의 오류 분석 결과를 학년별로 비교하여 요약해 보면 다음과 같다. 첫째, 오류 유형이 다양하고 즉, 모든 유형의 오류가 나타나고 있다. 또한 동일한 오류일지라도 학년이 올라감에 따라 학생의 기호 사용이나 표현이 더 정밀해지고 추론 과정도 더 심화됨을 알 수 있었다. 1학년의 경우 전반적으로 풀이 과정을 구어적인 문장으로 표현하는 경향이 있지만, 2학년과 3학년으로 올라갈

수록 도형과 기호를 더 많이 사용하고, 나아가 도형과 기호를 결합하여 표현하며 계산 과정도 더 구체화하는 경향인 것으로 파악된다. 즉, 1학년과 달리 풀이 과정을 말로 설명하는 표현이 줄어들고, 그림과 수식으로 풀이 과정과 답을 표현하는 경향을 보였다.

둘째, 3차원 입체도형을 2차원 평면도형으로 전개하는 능력에서 전반적으로 미숙함을 드러내었다. 이 연구의 3번 문항은 원기둥과 같은 입체도형을 전개하는 과정에서 시각적이고 추론적인 판단을 해야 한다. 그러나 사례 분석을 위하여 답안을 추출한 7명의 학생 중 5명의 학생이 전개도 그리기를 시도하였지만 모두 옳게 표현하지 못한 것으로 확인되었다.

셋째, 남학생과 여학생의 공간기하 이해 정도를 비교한 결과, 통계적으로 유의한 차이는 없는 것으로 검증되었다. 그러나 공간추론 능력 평가 문항에 대한 오류 유형의 발생 빈도로 단순하게 고려해 볼 때, 1학년과 2학년에서는 남학생이 상대적으로 더 많은 시각적 오류를 보였다. 반면에 3학년의 경우에는 여학생이 남학생보다 더 많이 응답하여 3가지 종류의 모든 오류 유형에서 여학생의 오류가 더 많이 나타났다.

넷째, 피타고라스 정리를 이용한 3학년 학생의 경우 제곱근의 계산 능력이 부족하여 두 선분의 길이를 비교하지 못하는 사례가 발견되었다. 이로부터 3학년 과정에서 학습하는 무리수의 조작에 대한 이해 또는 연습이 부족하여 어려움을 가지게 되면 기하 학습, 더 나아가 공간기하 추론 능력에도 영향을 준다는 것을 알 수 있다.

V. 결론 및 제언

이 연구에서는 원기둥을 이용하여 중학생의 공간기하 이해 정도를 분석하고자 하였다. 이를 위하여 선행연구를 기반으로 검사 도구를 개발하여 중학교 433명을 대상으로 검사를 실시하고, 검사 응답 사례를 토대로 면담을 실시하였다. 학년과 성별에 따른 문항의 정답률 차이를 검증하고, 공간추론 능력을 평가하고자 한 문항에 대한 학생의 응답을 토대로 오류 유형을 분석하였다. 이 연구의 결과를 토대로 도출한 결론은 다음과 같다.

첫째, 학년별 차이를 검증한 결과, 공간시각 능력을 평가하는 문항에서는 학년 간 차이가 유의하지 않았다.

반면에 공간측정 능력과 공간추론 능력을 평가하고자 한 두 문항의 경우, 1학년과 2학년 사이에는 정답률 차이가 유의하지 않지만, 이 두 학년과 3학년 사이에는 각각 유의한 차이가 있는 것으로 나타났다. 이에 공간시각 능력은 Lee, Jeon(1998)의 연구 결론과 마찬가지로 학년이 올라감에 따라 크게 신장되지 않는다고 할 수 있다. 즉, 제6차 수학과 교육과정에서의 연구 결론과 유사함에 따라 제7차 수학과 교육과정 이후의 교육과정으로 학습한 중학생도 학년이 올라감에 따라 공간시각 능력이 신장되지 않는다고 볼 수 있다. 반면, 공간측정 능력, 공간추론 능력은 중학교 고학년이 되면 이전의 수학 학습과 더불어 성숙의 효과가 반영되어 나타난다고 볼 수 있다.

둘째, 성별 공간기하 능력의 차이를 검증한 결과, 연구 참여 전체 남학생과 여학생의 공간기하 능력에 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다. 반면에 학년별로 그리고 하위능력별로 검증한 결과에서는 3학년 여학생이 남학생보다 공간시각 능력이 우수함을 보여주었다. 이는 여학생이 남학생보다 쉬운 문항을 더 쉽게 해결하고 어려운 문항을 해결하는 데 더 어려움을 가진다는 기존 연구(예, Bielinski & Davison, 1998; Lee, 2009)의 결과에 근거해 볼 때, 공간시각 능력을 평가하는 문항이 다른 두 문항에 비하여 더 쉬운 문항(정답률: 전체 학생 80%, 3학년 학생: 87%)이기 때문이라고 해석된다. 또한 성별 공간기하 능력에 성차가 없다는 결과도 중학교 단계에서 수학 성취도에 성차가 없다는 가장 최근 연구(Lee, 2019)의 결과와 일치한다.

셋째, 원기둥을 이용한 공간기하 이해 검사도구의 각 문항에 대한 오답지 반응을 통해 오류를 분석한 결과, 무엇보다 중학교 저학년의 경우 수학과 교육과정에서 권고하는 교수·학습 및 유의사항에 주의를 기울여 원기둥을 명확하게 파악할 기회를 충분히 제공하여야 할 필요가 있는 것으로 나타났다. 특히 구체적인 활동과 모형을 통하여 원기둥의 구성 요소 및 성질을 이해하는 것뿐만 아니라, 성취기준에서 제시한 정육면체 학습과 마찬가지로 겨냥도와 관련지어 그 구성 요소와 성질을 탐색하는 것도 요구됨을 알 수 있었다. 또한 3번 문항의 정답률이 전 학년에 걸쳐 상대적으로 낮고 오답 반응도 다양하게 나타남에 따라, 입체도형의 성질을 다루는 중학교 1학년 단계에서부터 이와 관련한 교육과정의 교수·학습 유의

사항을 따를 필요성이 제기되었다. 즉, 입체도형의 단면을 관찰하는 활동, 전개도를 접어 입체도형을 만드는 활동 등을 통해 평면도형과 입체도형의 관계를 직관적으로 탐색하는 학습의 기회가 보다 풍부하게 제공되어야 할 것이다.

넷째, 공간추론 능력을 평가한 3번 문항에 대한 학생의 오류 유형을 분석한 결과, 시각적, 조작적, 추론적 오류와 관련하여 다양한 오류 유형을 가지고 있음을 발견하였다. 대표적인 예를 들면, 곡선과 선분의 길이를 비교할 수 없다는 판단, 반원과 원주의 길이에 대한 혼동, 원기둥의 전개도를 그렸으나 구해야 하는 선분에 대한 틀린 표현 등이다. 이외에도 주목할 만한 현상으로, 학년이 올라감에 따라 기호 사용이나 도형의 표현이 일상적 구어 수준에서 형식적 수준으로 변화, 3차원 입체도형을 2차원 평면도형으로 전개하는 능력의 부족, 제공근의 계산의 오류로 길이 비교의 실패, 풀이 과정을 기술하지 않아 다수의 반응에 대한 기타 분류 등을 들 수 있다. 특히, 많은 학생이 풀이 과정을 기술하지 않은 현상은 이후 교수·학습 과정에서 학생에게 자신의 추론 과정을 표현하거나 정당화할 기회를 충분히 제공할 필요가 있음을 시사한다.

마지막으로 연구 결과를 바탕으로 후속연구를 제안하면 다음과 같다. 첫째, 이 연구에서 개발된 공간기하 능력의 하위영역인 공간시각, 공간측정, 공간추론 능력을 다른 입체도형에 대한 공간기하 이해 측정에 적용하는 연구를 제안한다. 이때 이 연구의 검사 도구의 문항 수가 적어서 나타나는 한계점을 보완하기 위하여 다수의 평가 문항으로 확장된 검사 도구의 개발을 제안한다. 예를 들어, 공간측정 능력의 경우 각의 측정, 길이의 측정, 넓이의 측정 등으로 세분화가 가능하고, 이를 원과 사각형의 둘레, 넓이 공식 사용 등의 대수적인 능력과 결합하여 평가하는 것도 고려해 볼 수 있다.

둘째, Fujita 외(2017)의 정육면체에 대한 공간기하 이해 분석결과와 이 연구에서 분석한 원기둥과 관련된 오류 유형을 공간기하 교수·학습에 반영하고 그 효과를 분석하는 연구를 제안한다. 이러한 선행연구 결과가 학생의 오개념이나 오류를 발견하고 교정하는 데에 유익한 정보를 제공하는 근거가 될 수 있기 때문이다.

셋째, 1학년과 2학년 학생의 공간측정 능력과 공간추

론 능력에 큰 차이가 없는 원인에 대한 추가 연구가 필요하다. 1학년은 2015 개정 수학과 교육과정, 2학년은 2009 개정 수학과 교육과정을 토대로 학습하였기 때문이다. 특히, 공간기하 학습과 관련하여 2015 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법 및 유의사항에 추가된 내용이 중요한 역할을 한 가능성도 배제할 수 없기 때문이다. 이에 2015 개정 교육과정에 추가된 교수·학습 방법이 중학생의 공간기하 능력 발달에 영향을 미치는지 조사해 볼 필요가 있다.

참 고 문 헌

- Ambrose, R. & Kenenhan, G. (2009). Children's evolving understanding of polyhedra in the classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(3), 158-176.
- Bielinski, J. & Davison, M. N. (1998). Gender differences by item multiple-choice mathematics items. *American Educational Research Journal*, 35, 455-476. doi.org/10.3102/00028312035003455
- Bruce, C. & Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotations in mathematics for young children: what is it? why does it matter? and what can we do about it? *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 331-343. doi:10.1007/s11858-014-0637-4
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(2), 133-148.
- Delgado, A. R. & Prieto, G. (2004). Cognitive mediators and sex-related differences in mathematics. *Intelligence*, 32(1), 25-32.
- Farmer, G., Verdine, B., Lucca, K., Davies, T., Dempsey, R., Newcombe, ..., & Golinkoff, K. (2013). Putting the pieces together: spatial skills at age 3 predict to spatial and math performance at age 5. *Seattle: SRCD poster presentation*.
- Fennema, E. & Tartre, L. A. (1985). The use of spatial visualization in mathematics by girls and boys. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 184-206.
- Fujita T., Kondo Y., Kumakura H., & Kunimune S. (2017). Students' geometric thinking with cube representations: assessment framework and empirical evidence. *The J. of Mathematical Behavior*, 46, 96-111. doi: 10.1016/j.jmathb.2017.03.003

- Hoffer, A. (1981). Geometry in more than proof. *Mathematics Teacher*, 74, 11-18.
- Jansen, P., Schmelter, A., Quaiser-Pohl, C., Neuburger, S., & Heil, M. (2013). Mental rotation performance in primary school age children: are there gender differences in chronometric tests? *Cognitive Development*, 28(1), 51-62.
- Kim, S. H. (2009). *Analysis of plane figure and solid figure 6th grader misconceptions and reasons for these misconceptions*. Master's thesis, Korea National University of Education, Seoul.
- Kim, S. M. (2008). On the gap of revision and the 7th national mathematics curriculum according to shifts in contents. *Education of Primary School Mathematics*, 11(2), 95-103.
- Kim, J. M. & Ju, Y. J. (2008). Development of web-based three-dimensional structure learning programs using AVA 3D. *Journal for History of Mathematics*, 21(1), 121-138.
- Kim, N. G. & Oh, E. S. (2008). A study on the elementary school student's abilities. *Education of Primary School Mathematics*, 11(1), 21-38.
- Kim, Y. K. & Pang, J. S. (2007). An investigation on 6th grade students' spatial sense and spatial reasoning. *School Mathematics*, 9(3), 327-352.
- Lee, B. J. (2009). The trend of gender differences in variability in national assessment of educational achievement on mathematics. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 19(2), 273-288.
- Lee, M. Y. (2014). *A study on programs using a net for the development of spatial visualization ability of mathematically gifted elementary*. Master's thesis, Seoul National University of Education, Seoul.
- Lee, S. J. (2019). An analysis of gender differences in primary, middle school and college students' academic achievements in mathematics. *Journal of Educational Innovation Research*, 29(2), 1-16, DOI: <http://dx.doi.org/10.21024/pnuedi.29.2.201906.1>
- Lee, Y. B. & Cho, C. S. (2014). A study of representing activities of preservice secondary mathematics teachers in 3D geometric thinking and spatial reasoning. *The Mathematical Education*, 53(2), 275-290.
- Lee, C. H. & Jeon, S. K. (1998). A study for spatial visualization ability of middle school students. *Journal of Research in Curriculum Instruction*, 2(2), 214-234.
- Lee, H. H. & Kim, R. Y. (2013). SketchUp, spatial visualization, spatial orientation, 3D geometric thinking, spatial structuring, measurement, solid figures. *The Mathematical Education*, 52(4), 531-547. DOI: <http://dx.doi.org.libproxy.knu.ac.kr/10.7468/mathedu.2013.52.4.531>
- McLellan, J. A. & Dewey, J. (1895). *The Psychology of Number: and its Applications to Methods of Teaching Arithmetic*. New York: D. Appleton & Company.
- Ministry of Education (2015). *Mathematics Curriculum*. Ministry of Education Notification No. 2015-74 [Vol. 8]. Seoul: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: Author.
- Pang, J. S. & Hwang, H. M. (2010). An analysis of elementary mathematics textbooks on three-dimensional figures. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 13(4), 549-568.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1956). *The Child's Conception of Space*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Ryue, H. A., Chong, Y. O., & Song, S. H. (2007). Analysis of the mathematically gifted 6th and 7th graders' spatial visualization ability of solid figures. *School Mathematics*, 9(2), 277-289.
- Sinclair, N. & Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *The International Journal on Mathematics Education*, 47(3), 319-329.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 497-509. doi:10.1007/s11858-014-0641-8
- Van Hiele, P. M. (1985). The child's thought and geometry. In D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn: Brooklyn College, School of Education (Original work published 1959).
- Widder, M. & Gorsky, P. (2013). How students use a software application for visualizing 3D geometric objects to solve problems. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 32(1), 89-120.