인지과학, 제31권 제1호
Korean Journal of Cognitive Science
2020, Vol. 31, No. 1, 1～23
http://dx.doi.org/10.19066/cogsci.2020.31.1.1

확산모형 분석도구: SNUDM

고 성 룡[1)2)] 주 혜 리[2)†] 이 다 정[1)]
[1)]서울대학교 심리학과 [2)]서울대학교 인지과학협동과정

이 논문에서는 지난 40여 년 동안 인지심리학에서 가장 중요한 모형 가운데 하나이며 근래에는 인지신경과학에서도 중요한 자리를 차지하고 있는 Ratcliff의 확산(diffusion)모형을 분석하는 도구 SNUDM을 소개한다. SNUDM은 확산과정을 Ratcliff & Tuerlinckx(2002)에 소개된 방식으로 단순 무작위걷기(random walk)를 묘사했다. 구체적으로, 모형이 생성하는 반응시간 분포는 주어진 파라미터 값들에서 작은 걸음으로 무작위걷기를 하여 일정 수준에 다다를 때까지 걸린 시간들로 이루어졌고, 모형의 파라미터 추정치는 단순도형(Simplex) 방식을 이용하여 실험 자료와 생성된 분포를 비교하기 위해 계산된 카이제곱값을 최소화하는 파라미터의 값을 사용한다. 사용의 간편함을 위해, 입력 파일은 반응시간의 분위수(quantile), 시행수와 기타 정보를 담은 파일로 간단하게 했고, 프로그램 작동에 필요한 피험자 수와 조건 수 등은 질문에 답을 하는 방식으로 입력하도록 했으며, 조건에 따라 비교할 파라미터와 그렇지 않고 고정할 파라미터도 미리 지정하도록 했다. 분석도구 SNUDM이 파라미터 값을 제대로 찾아내는지를 알아보기 위해 Ratcliff, Gomez, & McKoon(2004)의 실험1 자료를 써서 검토한 결과, 그들이 보고한 실험 조건들 사이에서 보인 상대적인 표집율의 크기에서 동일한 패턴을 얻었다. 또한 SNUDM으로 생성된 자료를 DMAT과 fast-dm의 자료와 비교해 보았을 때 SNUDM은 시행수가 적을 경우에는 경계 파라미터를 fast-dm과는 비슷한 값을 추정하였고 DMAT보다는 작은 값으로 추정했으나 시행수가 많은 경우에는 세 도구 모두 비슷하게 파라미터를 추정하는 것을 확인하였다.

주요어 : 인지심리, 확산모형, 분석도구, 무작위걷기

† 교신저자: 주혜리, 서울대학교 심리학과 언어와사고 실험실, (08826) 서울시 관악구 관악로1 16동 M404
연구분야: 인지과학, 언어심리
E-mail: kingni1956@snu.ac.kr

우리는 일상생활에서 빈번히 둘 중에 하나를 선택한다. 중국식당에서 자장면과 짬뽕 중 하나를 고르기도 하고, 아침 현관에서 구두와 운동화 중 하나를 고르기도 한다. 또한 수많은 질문에 “예”와 “아니오” 가운데 하나를 골라 답하거나 결정을 내린다. Ratcliff(1978)의 확산모형(diffusion model)은 이러한 둘 중에 하나를 고르는 결정과정을 시뮬레이션 하는 인지 모형이다. 이 모형은 둘 가운데 하나를 고르는 모든 인지 과정을 묘사하는 것은 아니고, 한 번 자극이 주어지면 빠르게 결정하는 한 번의 과정을 묘사 한다. 예를 들어, “핸국”을 보자마자 낱말인지 아닌지를 판단하는 과정을 시뮬레이션하지만 집을 살까 말까 하룻밤에 여러 번 생각이 바뀌는 복잡한 결정과정을 시뮬레이션하지는 않는다. 70년대 후반에 나온 확산모형은 지각 판단(Ratcliff & Rouder, 1998), 재인기억(Ratcliff, 1978), 단어 처리(Ratcliff, Gomez, & McKoon, 2004)와 같은 여러 인지 과정에 적용되고 또한 노화 효과의 설명에도 적용되고 있다(Thapar, Ratcliff, & McKoon, 2003). 최근에는 인지 신경과학 연구에서도 다양하게 적용되고 있다(Mulder, Wagenmakers, Ratcliff, Boekel, & Forstmann, 2012; Ratcliff & Smith, 2015 참고). 이 논문에서는 여러 분야에서 활용되고 있는 Ratcliff(1978)의 확산모형으로 반응시간 자료를 분석하는 새 도구 SNUDM을 소개하고자 한다.

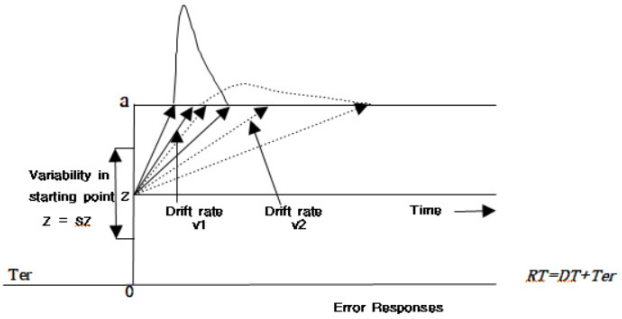
Ratcliff의 확산모형

Ratcliff의 확산모형(Ratcliff, 1978; Ratcliff & McKoon, 2008)은 두 선택 가운데 하나를 빠르게 고르는 인지과제에서 정반응과 오반응의 비율과 시간분포를 분석하는 모형이다. Ratcliff의 확산모형에서 결정과 두 선택 중 한 선택이 맞는 정보나 증거들을 일정한 수준까지 쌓는 것을 나타낸다. 이러한 정보 누적 과정은 작은 입자가 물이나 공기에서 수많은 다른 입자들과 충돌하며 나아가는 브라운 운동(Brownian motion)으로 가정할 수 있다. 브라운 운동에서 입자가 일정한 경계에 처음 다다르는 데 걸리는 시간(first passage/hitting time)은 중요한 정보 중에 하나이다. 이 시간은 주변의 물이나 공기 입자와 충돌로 생기는 무작위요인 때문에 하나의 값으로 결정되지 않고 분포로 드러난다. 이 시간분포는 여러 요인에 영향을 받는다. 한 요인은 입자의 시작 위치이다. 입자가 경계 가까운 위치에서 출발한 경우는 먼 데에서 출발한 경우보다 경계에 일찍 다다를 확률이 높다. 또 다른 한 요인은 경계의 위치이다. 경계가 입자의 위치와 가까운 데에 설정될 경우는 먼 데 설정한 경우보다 빨리 도착할 수 있을 것이다. 그리고 마지막 요인은 물속에 있는 입자의 속도이다. 한 경계로 흘러가는 입자의 속도가 빠른 경우는 그렇지 않을 경우보다 경계에 일찍 다다를 확률이 높다. 이 속도를 표집율(drift rate)이라고 한다. 표준편차(σ)를 파라미터로 하는 시간의 확률분포 식을 이끌어낸다. Ratcliff(1978)는 일차원의 브라운운동을 연속무작위걷기로 분석하여 경계의 거리, 시작 위치, 표집율, 충돌로 생기는 소음의 표준편차(σ)를 파라미터로 하는 처음 통과 시간의 확률분포 식을 이끌어낸다. 자연과학 실험에서는 소음의 표준편차를

매체에 따른 확산계수를 계산하여 이를 바탕으로 구할 수 있으나 심리학 실험에서는 계산할 수 없기 때문에 일정한 값으로 고정한다. Ratcliff 그룹은 이를 0.1로 고정하고 다른 그룹은 1로 고정하기도 한다. 연구목적에 따라 소음의 표준편차 대신에 다른 파라미터를 고정할 수도 있지만 이 연구에서는 Ratcliff의 전통을 따라 0.1로 고정한다.

다양한 심리학 연구 결과를 반영하기 위해 Ratcliff는 표집율을 무선변인으로 취급하고 평균이 v이고 시행 간 표준편차가 η인 정규분포를 띈다고 가정했고, 뒤에 시작위치도 평균이 z이고 범위(range)가 sz인 균등(uniform)분포를 따른다고 가정했다. 보통 단어판단과 같은 인지과제에서 얻어지는 반응시간은 결정 과정뿐만 아니라 자극의 부호화와 반응실행도 반영한다. Ratcliff 자극의 부호화와 반응실행의 시간도 매 시행마다 변동이 있다고 보아 평균이 T_{er}이고 범위가 ster인 균등분포를 따른다고 가정했다. Ratcliff과 그의 동료들은 sz와 ster의 두 변동성 파라미터를 가정하여 보통 정반응의 시간이 오반응의 시간보다 빠른 결과와 아주 빠른 오반응 시간들을 확인한 실험 결과를 묘사 할 수 있었다(Ratcliff & McKoon, 2008 참고). 정리하면, Ratcliff의 확산모형은 두 경계거리(a), 표집율(v), 시행에 걸친 표집율의 변동성(η), 평균 시작 위치(z), 시행에 걸친 시작위치의 범위(sz), 자극의 부호화와 자극 실행시간의 평균(T_{er}), 그리고 시행에 걸친 자극 부호화와 자극 실행시간의 범위(ster) 등의 7개 파라미터로 이루어진다.

Ratcliff 확산모형은 모형의 파라미터 값들이 예측하는 시간분포와 실험에서 얻어진 경험적인 자료의 시간분포를 비교하여 어떤 파라미터의 값들에서 이 경험적인 분포가 생성되었는지를 추정한다. Ratcliff의 모형의 파라미터들과 시간의 흐름의 따른 증거의 누적정도로 그려보면 아래와 같이 그릴 수 있다



a는 경계, z는 시작위치 평균, v는 표집율 평균인데, 시작위치평균 (z)와 표집율에 따른 경계(0, z)에 처음 다다르는 시간의 분포를 보여준다. RT는 전체 반응시간, DT는 확산과정시간, T_{er}은 비결정시간 평균이다.

(그림 1) Ratcliff의 확산모형

일반적으로 확산모형의 파라미터들은 결정과정의 구성부분을 나타내는 것으로 해석된다. 이런 해석은 경험적인 실험에서도 타당하다고 드러난다. Voss & Voss(2004)는 특정 조작이 한 파라미

터에 영향을 미친다는 것을 보였다. 이들은 자극 변별의 어려움은 표집율(v)에 영향을 미치고, 반응속도를 강조하는 지시는 경계거리(a)에 영향을 미치고, 반응에 대한 보상은 평균 시작위치(z)에 영향을 미친다는 것을 확인했다. 그래서 보통 확산모형 분석은 실험조작이 어떤 파라미터에서 영향을 미칠 것이라는 가정하여 분석한다. 단어의 빈도와 같은 자극의 질은 표집율에 영향을 미친다고 가정되고 반응의 속도와 정확성은 경계의 거리에 영향을 미친다고 가정된다.

위에서 소개한 Ratcliff의 확산모형으로 반응시간 자료를 분석하는 일은 쉽지 않다. 그래서 반응시간자료를 Ratcliff의 확산모형으로 분석하는 fast-dm과 DMAT와 같은 도구들이 소개됐다. 이 연구에서는 fast-dm과 DMAT과는 다른 방식으로 분석하는 확산모형 분석 도구 SNUDM을 소개하고자 한다. 먼저 SNUDM의 특징과 대략의 사용법을 설명하고, SNUDM의 분석 결과와 fast-dm과 DMAT로 분석한 결과를 간략히 비교할 것이다.

SNUDM의 확산과정

SNUDM에서는 확산과정을 불연속적인 무작위걷기로 묘사

Ratcliff의 확산모형의 핵심인 확산과정, 즉 브라운운동은 수학적으로 세 가지 방식으로 다룰 수 있다. 첫 번째 방식은 확산 과정을 확률미분방정식(stochastic differential equation)으로 나타내는 것이다(Brown, Ratcliff, & Smith, 2006 참고). 입자의 순간 위치 변화량은 물속의 입자의 속도(혹은 표집율)에 따른 순간의 이동과 정규 분포를 바탕으로 발생하는 무작위 이동의 합으로 나타낸다. Ratcliff의 확산모형은 물속의 입자 속도, 즉 정보 누적률을 일정한 상수로 가정한다. 다른 방식은 현재의 위치와 시간에서 입자가 존재할 수 있는 확률분포를 가정하고 시간에 따른 확률분포의 변화를 편미분 방정식으로 표현한다. 또 다른 방식은 불연속적인 무작위걷기(random walk)를 가정하고 이 불연속적인 무작위걷기에서 연속적인 무작위걷기로 확장하는 것이다(Feller, 1971; Ratcliff, 1978). Ratcliff는 이 확장과정을 통해 특정 위치에서 역치나 경계까지 이르는 시간(first-passage time)의 확률분포를 이끌어내고 이 확률분포에서 누적분포 함수를 이끌어 낸다.[1] Ratcliff와 그의 동료들은 이 확률밀도와 누적분포함수를 바탕으로 정반응과 오반응의 시간분포

1) Ratcliff(1978)가 도출한 확산과정의 최초통과시각의 누적분포 함수

$$G_{-}(t,v)=\frac{\pi s^2}{a^2}e^{-(zv/s^2)}\times\sum_{k=1}^{INF}\frac{2k\sin(\frac{k\pi z}{a})[1-e^{-\frac{1}{2}(v^2/s^2+\pi^2k^2s^2/a^2)t}]}{(\frac{v^2}{s^2}+\frac{\pi^2k^2s^2}{a^2})}$$

위 식에서 v는 표집율, a는 경계, z는 시작위치, s는 소음, t는 시간을 나타낸다.

자료를 분석했다. 그의 동료들의 확산모형 분석도구 DMAT는 이 함수를 바탕으로 만들었다.

그러나 Ratcliff(1978)가 도출한 확산과정의 최초통과시각(first-passage time)의 누적분포 함수의 공식에는 첫째 무한 합이 들어가 있다. 무한 합을 구하는 방법은 일반적으로 일정한 합과 그 다음 합이 차이가 거의 나지 않을 때까지 합을 구하는 것이다. 즉, 차이가 0에 아주 가까워졌을 때 합을 멈추고 그 값을 무한 합으로 여긴다. 아래 각주로 설명한 누적분포 함수 공식을 보면 공식 자체에 sin 함수를 품고 있다. 이 함수는 －1과 1사이의 주기를 갖고 있어서 주기적으로 그 주기 사이에 0에 가까이 접근해 가고 이러한 이유로 안정적인 무한 합을 구하는 것은 쉽지 않다.

Ratcliff의 확산모형에서 가정하는 표준편차 파라미터들을 다루는 데는 수치적인 적분이 편리하기 때문에 Brown, Ratcliff, & Smith(2006)는 통계미분 방정식의 근사치를 구하는 방법으로 Ratcliff의 확산모형의 파라미터를 구했다. Verdonck, Meers, & Tuerlinckx(2016)도 통계미분 방정식의 근사치를 구하는 대표적인 방법인 Euler-Maruyama 방식을 써서 여러 확산모형을 처리하는 툴을 내놓았고 그래픽처리장치(GPU)를 사용하여 처리 속도를 높혔다. 그러나 그들의 방식은 1ms 단위로 근사치를 구해서 정확도가 떨어질 수 있다는 아쉬움이 있다. 또 다른 방식은 현재의 위치와 시간에서 입자가 존재할 수 있는 확률분포를 가정하고 시간에 따른 확률분포의 변화를 나타내는 편미분 방정식(Komolgorv backward 방정식, Voss & Voss (2007) 참고)의 근사치를 구하는 방식으로 접근하는 것이다. Voss & Voss(2007)는 이를 구현해 fast-dm이라는 분석도구를 내놓았다. 마지막 방법이 불연속적 무작위걷기로 묘사 하는 방법이다. 이 연구에서는 이 방법을 이용해 Ratcliff의 확산모형을 분석하는 도구 SNUDM을 만들었다. 아래에서는 반응시간 모형에 적절한 1차원에서 불연속 무작위 걷기를 소개하고 이 무작위 걷기가 연속 걷기로 확장될 때 특정 시간과 자리에서 작은 입자 혹은 증거가 존재하는 분포가 정규분포가 되는 것을 보이고, 이 분포의 평균인 표집율과 분산을 무작위걷기의 두 파라미터인 한 걸음의 크기와 위로 갈 확률의 관계를 단순무작위걷기의 극한이 브라운운동이 된다는 점을 이용해 확인한다.

무작위걷기의 특징

무작위걷기(simple random walk)는 술에 취한 사람이 한 걸음 한 걸음 걸어가는 비유인데, 무작위로 한 걸음 한걸음 나아가는 경로를 그리는 불연속확률과정이다.

일차원에서 그려지는 불연속 무작위 모형은 시작 위치, 걸음 보폭, 그리고 한 걸음을 위쪽으로 옮길 확률(p)과 아래쪽으로 옮길 확률(q = 1-p)로 이루어진다. 간단한 대칭무작위걷기 모형에서는 시작 위치가 0이고, 위쪽으로 옮기는 걸음 폭을 1이고 아래도 옮기는 걸음 폭을 －1이고 , 위로 옮길 확률이나 아래로 옮길 확률은 1/2로 같다. 이 간단한 무작위걷기과정에 따라 일정 시간 동안에 N걸음을 걸었다면 그 사람의 위치에 대한 기댓값과 분산은 어떻게 될까? 우선 N번 걸었을 때 위치변화를 S(N)으로 쓰면 S(N)은 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$S(N) = X(1) + X(2) + ...+ X(n) \quad (1)$$

(1)은 위치변화가 각 걸음마다 걸음 폭(X(i)=1이나 -1)을 더한 값이라는 것을 보여준다. 그렇다면 기댓값은 (2)에 나타낸 대로 0이 되고 분산은 걸음 수, 즉 N이 된다(부록 참고).

$$E(S(N)) = 0 \quad (2)$$

$$VAR(S(N)) = N \quad (3)$$

위의 간단한 대칭 무작위걷기를 비대칭 무작위걷기로 확장해 보자. 이를 위해 위로 가는 확률을 p, 아래로 가는 확률을 q(=1-p)로 하고 위로 가는 걸음 폭은 $\Delta\chi$로 하고 아래로 가는 걸음 폭은 $-\Delta\chi$라 하자. 그렇다면 한 시간 단위의 N걸음 뒤에 위치변화의 기대치는(4)가 되고 분산은 (5)가 된다(부록1 참고).

$$E(S(N)) =(p-q)\Delta\chi N \quad (4)$$

$$VAR(S(N)) = 4pq\Delta\chi^2 N \quad (5)$$

위에서는 단순 대칭무작위걷기와 이를 확장한 비대칭무작위 걷기에서 평균과 분산을 확인했다. 아래에서는 불연속무작위걷기를 연속무작위 걷기로 확장하고, 대칭무작위 걷기의 극한이 브라운동이 된다는 점을 활용하여 무작위 걷기의 파라미터들과 연속무작위 걷기의 표집율과 분산과의 관계를 구할 것이다.

무작위걷기의 연속무작위걷기로 확장

위에서 소개한 불연속 무작위걷기 모형에서 걸음 폭을 아주 작게 줄이고 걸음 수를 무한대로 늘리고 시간 변인을 도입하여 연속 무작위 걷기로 나아갈 수 있다. 이 과정에서 위에 소개한 기대치(4)와 분산(5)은 정규분포의 평균, 즉 표집율(drift, v)과 분산(s^2)으로 다가간다(부록1 참고).

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2 t}} e^{\frac{-(x-\nu t)^2}{2s^2 t}} \quad (6)$$

분석도구 SNUDM은 앞서 말했듯이 확산과정을 불연속무작위걷기로 묘사한다. 이 모사를 위해서는, 무작위걷기의 두 파라미터인 위나 아래로 향할 확률(p나 q, q=1-p)과 걸음 폭($\Delta\chi$)과 확산과정의 표집율(v)과 분산(s^2)과 관계를 정해야 한다. 위의 (4)와 (5)에 소개된 식을 바탕으로 이 관

계를 정할 수 있다. 이미 잘 알려진 대로, $\Delta\chi$와 한 걸음에 걸리는 시간(Δt)이 0에 다가가고 p가 1/2에 다가가면 무작위걷기는 확산과정에 수렴한다. 위의 (4)에서 N은 시간 한 단위의 걸음 수이므로 한 걸음에 걸리는 시간, Δt는 1/N로 나타낼 수 있다. 위의 (5)는 $4pq\Delta\chi^2N$은 $4pq\Delta\chi^2/\Delta t$로 쓸 수 있고 q가 1/2로 수렴하면, $\Delta\chi^2/\Delta t$는 분산 s^2으로 다가간다. 그러므로 (7)에 정리한 대로 걸음 폭은 표준편차(s)와 $\sqrt{\Delta t}$의 곱으로 정해진다. 걸음 폭이 정해지면 확률을 구해야 하는데, 위의 식(4)를 $(2p-1)\Delta\chi/\Delta t$로 바꿔 쓰고 (7)을 이에 대입하면 (8)과 같이 정리된다. 이 식들이 Ratcliff & Tuerlinckx(2002)가 확산과정을 무작위 걷기로 근사치를 구할 때 쓴 식이다.

$$\Delta\chi = s\sqrt{\Delta t} \tag{7}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\nu\sqrt{\Delta t}}{s}\right) \tag{8}$$

위에서는 대칭무작위걷기의 극한이 브라운운동이 되는 점을 이용해 한 걸음의 크기(7)와 위로 올라갈 확률과 시간 증가량, 소음의 표준편차, 그리고 표집율의 관계(8)를 확인했다.

SNUDM의 구체적인 확산 모형 분석

이 연구에서 만든 분석도구 SNUDM은 위에서 언급했듯이 불연속적인 무작위걷기 묘사를 바탕으로 한다. 즉, 확산과정의 파라미터들이 결정되면 이를 바탕으로 많은 수의 불연속 무작위 걷기를 하여 시간분포를 생성하고 이 분포를 경험 자료의 시간 분포와 비교하여 최적의 파라미터를 찾았다.

이 연구에서는 최적의 파라미터를 찾는 방식으로 다른 연구들에서 쓰인 Nelder-Mead 단순도형(Simplex) 방법(Nelder & Mead, 1965; Luersen, M. A., et al., 2003)을 사용했다. 이 방법은 파라미터들의 초기 값이 주어지면 이 값을 바탕으로 조금씩 반복적으로 최적의 값을 찾아가는 방법이다. 이 연구에서 만든 SNUDM에서는 초기 값을 정하는 것이 중요하다고 믿고 한 가지로 고정하지 않고 다음 세 가지 방식에서 선택할 수 있도록 했다. 첫 번째 방식은 EZ-diffusion(Wagenmakers, van der Maas, & Grasman, 2007)을 쓰는 것이다. 이 방법을 써서 a, drift rate(v), T_{er}의 초기 값을 구하고 z는 a값의 절반으로 한다. 나머지 sz, ster, 그리고 η은 0과 0.005 범위의 균등분포(Uniform)에서 무작위로 생성된다. 두 번째 방식에서는 EZ-diffusion으로 구한 a, T_{er}, drift 값에서 0.005를 빼고 더한 범위의 균등분포에서 각 값들을 무선 생성하고 z는 a/2로 했다. 표준편차와 범위 파라미터들은 첫 번째 방식과 같은 방식으로 구한다. 세 번째 방식에서는 a는 0.5와 1.5 범위의 균등분포에서 무작위로 생성했고, z는 a/2로 했고, T_{er}은 0.3과 0.7 범위의 일양분포에서 무선 생성했고,

drift는 0.2와 0.5 범위의 균등분포에서 무선 생성한다. 나머지는 다른 방식과 동일하다.

파라미터들의 초기 값이 결정이 되면 한 시행의 시뮬에리션이 시작되고, 먼저 표준편차(η)와 범위 파라미터들(ster, sz)이 반영되었다. 한 시행의 시작위치, 표집율, 경계 파라미터, 비결정시간들의 초기 값을 정해야 하는데, 시작위치는 평균 시작위치(z)에서 시작위치 범위 파라미터에 0.5를 곱한 값을 뺀 값과 더한 값의 범위를 갖는 균등분포에서 한 값(uniform(-0.5*sz+z, 0.5*sz+z))을 무작위로 생성하고, 비결정시간도 이와 같은 방식으로 정했다(uniform(-0.5*ster+ter, 0.5*ster+ter)).

표집율은 시행 간 표집율 표준편차의 제곱을 분산으로 0을 평균으로 하는 정규분포에서 한 값을 생성시켜 이 값과 표집율을 더한 값을 한 시행으로 규정했다. 이렇게 한 시행의 모든 파라미터들이 결정되면, 무작위걷기를 시작한다. 즉, 0과 1 사이의 값의 균등분포에서 무선 생성시킨 확률 값이 이 파라미터들로 결정된 위로 갈 확률(위의 식 (8) 참고)보다 작으면 위로 $s\sqrt{\Delta t}$ 만큼 올라가고 그렇지 않으면 아래로 그만큼 아래로 내려간다. 이런 과정을 반복해서 위치가 경계에 다다르면 한 시행은 끝이 나고 그 시행의 반응시간은 결정시간(걸음 수 * Δt)과 비결정시간을 더한 값으로 정의된다. 그리고 다음 시행이 시작된다. 이 연구에서는 이런 시행을 이 만 번 반복하여 정반응과 오반응의 반응비율과 반응시간분포를 구했다.

이렇게 확산모형의 파라미터들에서 기대되는 반응시간분포가 생성되면, 그 다음의 일은 이 분포가 경험 자료와 잘 맞는지(fitting)를 검토하여 최적의 파라미터를 찾아내는 작업을 한다. 이 작업에서 중요한 일이 목적/손실(objective/loss) 함수를 정하는 것이다. 보통 목적함수로는 카이제곱, 우도, 분위우도 등을 많이 쓴다(Ratcliff & Tuerlinckx, 2002; Voss, Nagler & Lerche, 2013). 목적함수가 카이제곱 함수인 경우에는 함수 값이 최소인 파라미터를 찾고 우도나 분위우도 함수인 경우에는 함수 값을 최대로 하는 파라미터를 찾아 최적의 파라미터로 추정한다. 일반적으로 우도 함수는 모든 경험 자료를 다 써서 추정하여 극단 값에 취약할 수 있어 이 연구에서는 경험 자료의 분위수를 반영하는 함수를 목적함수로 쓰고자 했다. 이를 만족하는 친근한 후보가 카이 제곱 함수였다. 하지만 이 함수는 파라미터를 추정하는 데 기술적인 어려움이 있었다. 이 함수는 아래에서 더 자세히 기술하겠지만 각 구간의 기대빈도와 경험빈도의 제곱을 기대빈도로 나눈 값의 합이다. 이 과정에서 문제는 시뮬레이션에서 기대빈도가 0이 되는 경우들이다. 이 경우를 다루는 것이 쉽지 않아서 Ratcliff & Tuerlinckx(2002)가 부록에 잠깐 소개한 변형된 카이제곱 함수를 썼다. 이 함수는 카이제곱 함수와 분자는 같지만 분모가 기대빈도가 아니라 경험빈도이다. 즉 분자를 기대빈도로 나누는 것이 아니라 경험빈도로 나누는 것이다. Ratcliff & Tuerlinckx(2002)에서 서술하듯이, 이 방법은 분위우도 함수(Heathcote, Brown, & Mewhort, 2002)와 동일한 파라미터값을 최적의 값으로 추정한다. Vandekerckhove & Tuerlinckx(2007)는 그들의 분석도구인 DMAT에서 개념적으로 분위우도와 동일한 다항우도(multinominal likelihood)함수를 사용했다.

경험 자료와 이론 분포의 비교과정을 좀 더 자세히 들여다보면, 먼저 정반응 시행들에서 얻어진 반응시간 값들의 분포에서 0.1, 0.3, 0.5, 0.7과 0.9의 분위수를 구한다. 그리고 이 분위수를 바

탕으로 생성된 정반응 시간들을 0.1분위수보다 작은 반응시간들의 빈도, 0.1과 0.3분위수 사이에 들어가는 반응시간들의 수, 0.3과 0.5분위수 사이에 들어가는 반응시간들의 빈도, 0.5와 0.7분위수 사이에 들어가는 반응시간의 수, 0.7과 0.9분위수 사이에 들어가는 반응시간의 빈도, 그리고 0.9분위수보다 크거나 같은 반응시간을 관찰한 시행의 빈도를 계산한다. 그리고 이 빈도들을 생성된 전체 정반응수로 나눠 각 구간의 비율을 계산하고 이 비율을 실제 실험 자료의 정반응수를 곱해 이론적으로 생성된 각 구간의 기대빈도를 정한다. 이 기대 빈도수와 실험 자료의 경험 빈도수의 차이를 제곱하고 경험 빈도로 나눈 값들을 더하면 변형된 카이제곱 값이 된다. 오반응 자료도 같은 과정을 거쳐 변형된 카이제곱 값을 구하고 이 정반응과 오반응의 변형 카이제곱 값을 더한 값이 한 조건의 변형 카이제곱 값이 되었다.

단순도형(Simplex) 방법은 파라미터의 초기 값들을 벡터공간의 한 점(vertex)으로 나타내고 이 값들을 조금씩 바꿔 파라미터의 수보다 하나 더 많은 점으로 된 단순도형(Simplex)을 만든다. 그리고 각 점의 파라미터 값들을 써서 변형된 카이제곱 값을 계산한다. 변형된 카이제곱 값이 가장 낮은 값은 가장 좋은 점, 변형된 카이제곱 값이 가장 높은 점은 가장 나쁜 점, 그리고 그 다음 나쁜 점을 정한다. 그러고 나서 가장 나쁜 값의 점을 빼고 나머지 점들의 각 파라미터의 평균치로 된 중심점을 구하고 가장 나쁜 점을 중심점 반대쪽으로 한 걸음 옮긴 점을 찾아 변형된 카이제곱 값을 구한다. 옮긴 점이 가장 좋은 점보다는 못하고 두 번째로 나쁜 점보다 나으면 가장 나쁜 점을 이 옮긴 점으로 바꿔 새로운 단순도형(Simplex)을 만든다. 옮긴 점의 값이 가장 좋은 값보다도 좋으면 한 걸음 더 나아가 변형된 카이제곱 값을 계산한다. 이 두 걸음 옮긴 점이 처음 옮긴 점보다 나으면 가장 나쁜 점을 이 점으로 바꿔 새로운 단순도형(Simplex)을 만든다. 옮긴 점이 두 번째로 나쁜 점보다 나쁘면 반걸음 뒤로 물러나는 점을 찾아 변형된 카이제곱 값을 계산한다. 이 점이 가장 나쁜 점보다 나으면 가장 나쁜 점을 이 점으로 바꿔 단순 도형을 만든다. 이런 과정을 최대 250번 반복하면서 최적의 파라미터들의 값을 찾는다. 이 연구에서는 Van Zandt, Colonius, & Proctor(2000)의 제안대로 이 파라미터를 초기 값으로 하여 다시 한 번 더 찾도록 했다. 이 단순도형(Simplex) 방식에서 한 가지 고려해야 할 점은 파라미터들이 제약이 있을 경우에 이를 어떻게 반영할지의 문제이다. Ratcliff의 확산모형은 일곱 개의 파라미터 가운데 흩어진 정도를 반영하는 시작점의 범위, 표집율의 시행 간 표준편차, 비결정시간의 범위_들이 있다. 이 파라미터들은 거리 개념을 바탕으로 하기 때문에 음수가 될 수 없다. 그런데 단순도형(Simplex) 방식은 제약이 없이 실수 공간에서 찾기 때문에 표준편차 파라미터들이나 다른 파리미터들의 값으로 음수를 찾아낼 수도 있다. 이런 경우를 배제하기 위해 탐색 공간에 제약을 주어야 하는데, 가능한 방법은 이 파라미터들을 지수함수로 변환한 파라미터로 바꿔 추정하거나, 이 파라미터 값들이 0보다 작은 값을 추천했을 때 이 값을 아주 작은 양수(예: 0.000001)로 바꿔 이 파라미터들의 값을 양수의 공간에서만 찾도록 하거나(Luersen, M. A., et al., 2003 참고) 아니면 음수를 찾았을 때 아주 큰 벌칙값(penalty)을 주어 반대 공간에서 값을 찾도록 하는 방법들이 있다.

이 연구에서는 뒤의 두 방법을 구현했다. 기본적으로 단순도형(Simplex) 방식을 구현한 c 프로그램을 http://www.mikehutt.com에 공개된 소스를 내려 받아서 썼다. 이 프로그램에 표준편차 파라미터의 값들이 양수가 되도록 하는 선택 사항과 벌칙값 선택사항을 프로그램에 더했다. 그리고 무선 수 생성 프로그램은 http://www.cs.wm.edu/~va/software/park/park.html에 공개된 소스를 내려 받아 사용했다.

연구가 모든 실험 조건에서 확산모형의 모든 파라미터를 비교한다면, 조건별로 따로 위의 절차를 밟으면 된다. 하지만 보통 피험자내 설계의 연구에서 조건 간에 모든 파라미터들을 비교하지는 않고 연구자의 가설에 따라 조건 사이에 제한된 파라미터들을 비교한다. 예를 들어, 아래에서 소개하는 Ratcliff, Gomez, & McKoon(2004)의 연구는 단어의 빈도가 표집율에만 영향을 미친다고 보고 네 조건별로 다른 파라미터들은 바꾸지 않고 표집율만을 바꿔 비교했다. 이 경우에 최적의 값을 구해야 하는 파라미터는 한 조건에서 적합도를 구하는 7개의 파라미터와 다른 세 조건의 표집율 파라미터까지 더해 모두 10개가 된다. 이 연구에서는 조건별로 다른 값의 표집율과 같은 값의 다른 파라미터들을 돌려 얻은 변형된 카이제곱 값들을 더한 값이 최소가 되는 파라미터의 값을 찾았다. 구체적인 내용은 아래에서 SNUDM 프로그램 사용을 설명하면서 기술 하겠다. SNUDM 프로그램은 http://psych.snu.ac.kr/SNUDM 에서 다운받을 수 있다.

SNUDM의 사용법과 이 분석도구를 이용한 분석

SNUDM의 사용은 무작위걷기 방식으로 생성된 자료를 이용한 자료의 분석과 Ratcliff, Comez, & McKoon(2004)의 실험 자료의 분석을 통해 설명한다. 그리고 생성된 자료의 분석에서는 다른 확산모형 분석도구들과 분석결과를 비교한다.

Ratcliff, Gomez, & McKoon(2004)의 실험 1 자료 분석

Ratcliff, Gomez, & McKoon(2004)의 실험 1 자료를 써서 설명한다. 이 연구자들은 위에서 말한 대로 단어의 빈도가 모형의 표집율에 영향을 미친다는 것을 보이기 위해 어휘판단(lexical decision) 실험을 했다. 이 연구에서 한 피험자는 250개 높은 빈도 단어, 250개 낮은 빈도 단어, 250개 아주 낮은 빈도 단어, 그리고 750개 비단어를 보고 단어인지 아닌지를 판단하도록 했다. 연구자들은 각 참가자별로 확산모형의 파라미터를 분석한 것이 아니라 참가자들의 분위수 값을 구하고 이 값들의 평균을 구해 이 자료를 분석했다. 이 자료를 SNUDM을 사용하여 분석하려면 먼저 실험자료 입력 파일을 만들고 프로그램을 사용한다. 프로그램을 실행하면 분석에 필요한 여러 정보를 묻는다. 이에 답하면 최적의 파라미터 값을 담은 결과 파일과 여러 관련 정보를 담은 파일

이 만들어진다.

자료파일의 준비

먼저 'dataez.txt'이라는 이름의 입력파일을 만들어야 한다. 이 파일의 행은 한 조건의 정반응이나 오반응의 정보에 대해 쓰는데, 정반응을 항상 먼저 쓴다. 예를 들어, 아래 표 1을 보면 비단어조건에서는 '아니오' 반응이 정반응이므로 '아니오' 반응에 대한 정보를 먼저 썼고, 단어조건들에서는 '예' 반응이 정반응이므로 '예' 반응에 대한 정보를 먼저 썼다. 자료 파일의 한 행의 자료파일의 형식은 다음과 같다. 그 파일을 보면 아래와 같은데, 첫 번째 열(column)은 피험자 번호이고, 두 번째 열은 실험 조건 이름이고, 세 번째 열은 경계('예'는 1, '아니오'는 0)이다. 네 번째 열은 0.1 분위수이고, 다섯 번째 열은 0.3 분위수이고, 여섯 번째 열은 0.5 분위수이고. 일곱 번째 열은 0.7 분위수이고, 여덟 번째 열은 0.9 분위수이다. 아홉 번째 열은 그 조건의 정반응이나 오반응의 시행수이다. 열 번째 줄은 평균반응시간이고, 열한 번째 열은 반응시간의 분산이고, 열두 번째 열은 반응비율이다. 표 1은 저자들이 정리한 Ratcliff, Gomez, & Mckoon(2004) 실험 1의 'dataez.txt'파일이다.

〈표 1〉 Ratcliff, Gomez, & Mckoon(2004) 실험 1의 'dataez.txt'파일

1	Pseudowords	0	0.492	0.556	0.613	0.691	0.884	696	0.661	0.003	0.928
1	Pseudowords	1	0.467	0.548	0.629	0.747	1.008	54	0.698	0.009	0.072
1	Highfrequency	1	0.453	0.501	0.542	0.591	0.710	243	0.571	0.001	0.972
1	Highfrequency	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	5	0.571	0.001	0.028
1	Lowfrequency	1	0.487	0.547	0.597	0.670	0.841	228	0.642	0.001	0.910
1	Lowfrequency	0	0.480	0.545	0.627	0.723	0.952	22	0.682	0.01	0.09
1	Verylowfrequency	1	0.497	0.565	0.632	0.717	0.912	201	0.683	0.002	0.804
1	Verylowfrequency	0	0.476	0.553	0.624	0.732	0.984	49	0.686	0.009	0.196

이 연구에서는 평균적인 사람을 분석했으며 피험자는 한 명이다. 그리고 네 가지 조건에 대해 분석했다. 그러니 전체 8행이 만들어져야 한다. 8행 가운데 높은 빈도 오반응은 Ratcliff 등의 논문에 정보가 없어서 0으로 했다. 아래에서 최소 표본의 크기를 5로 해서 이 조건의 오반응 처리는 건너뛰었다. 위에서 말한 대로, 첫 번째 열은 평균적인 사람을 분석하니 한 명이고 그 번호는 1로 했다. 그리고 다음은 네 실험 조건들에 대한 이름이다. 다음은 경계이름이다. "예" 반응은 1로, "아니오" 반응은 0으로 표시된다. 이 때 한 조건에서 정반응을 먼저 써 준다. 이는 EZ-diffusion은 이 정반응을 읽어서 a, T_{er}, drift의 초기 값을 계산한다. 위의 비단어조건을 보면, 정반응인 '0'에 대한 자료가 먼저 나오고 단어 조건들은 정반응인 '1'에 대한 자료가 먼저 나온다.

나머지는 위에 설명한 대로, 분위수들이다. 열 번째 뒤로 나오는 평균반응시간, 분산, 정반응비율은 EZ-diffusion(Wagenmakers, van der Maas, & Grasman, 2007)을 써서 초기 값을 설정하는 데 쓰인다. 실험 자료를 위와 같이 준비하고 파일이름을 “dataez.txt”로 저장해야 한다.

프로그램의 실행

SNUDM 프로그램을 실행시키면 여러 선택 사항을 묻는다. 첫 번째는 피험자 수를 묻는다. Ratcliff 등의 연구에서는 한 명이다. 그 다음 질문은 실험조건의 수를 묻는다. Ratcliff 등의 실험 1은 네 가지 조건이다. 그 다음은 한 걸음의 시간 간격을 묻는다. 이 분석에서는 0.5ms를 골랐다. 다음 질문은 a, z, T_{er}, sz, ster, η의 값을 양수에서만 찾을 것인지를 묻는다. 이 분석에서는 양수만을 찾도록 했고 그 방법으로 음수를 찾았을 때 벌칙값을 주는 방법을 골랐다. 다음 질문은 초기 값 설정 방식을 묻는다. 이 분석에서는 EZ-diffusion 방법이 필요로 하는 분산 정보가 논문에 있는 정보로 추정해서 정확하지 않아 무작위로 초기 값을 설정했다. 이 방법을 고르면 무작위로 파라미터를 생성해서 파라미터 추정을 세 번 수행한다. 그 가운데 가장 좋은 값을 골라 다시 한 번 파라미터 값을 추정한다. 다음 질문들은 7개의 파라미터를 조건 간에 비교할 것인지를 묻는다. 이 분석에서는 표집율만 비교하고 나머지는 조건들 사이에 차이가 없는 것으로 했다. 위의 선택사항에 답하면 프로그램이 돌아간다. 위의 내용을 정리한 파일이 부록 2에 제시되어 있다.

결과 파일

프로그램 실행 완료시 두 결과 파일(best.txt, log.txt)이 만들어진다. 이 파일들은 부록 3에 제시되어 있다. “best.txt” 파일에는 자료와 가장 잘 들어맞는 파라미터들의 값과 변형된 카이제곱 값이 있다. 표 2에는 Ratcliff 등의 실험 1을 SNUDM으로 분석한 결과가 나와 있다. “log.txt” 파일에는 선택사항들의 값과 적합도 계산 과정에서 찾은 파라미터의 값과 산출된 변형된 카이제곱 값이 기록된다. 또한 참고로 이 묘사에서 맞는 자유도를 계산하고 그 자유도에서 유의도 0.05 p값의 카이제곱 값도 기록된다. Ratcliff 등의 실험 1을 돌려 생긴 ‘log.txt’는 부록 3에 있다.

〈표 2〉 Ratcliff 등의 실험 1을 SNUDM으로 분석한 결과와 논문에서 보고한 분석

	a	z	sz	T_{er}	ster	drift1	drift2	drift3	drift4	eta
SNUDM	0.1426	0.0743	0.0731	0.4216	0.0891	- 0.3252	0.4518	0.3270	0.2728	0.1174
Ratcliff	0.110	0.056	0.004	0.435	0.159	-0.213	0.396	0.216	0.128	0.070

SNUDM은 경계거리(a) 값과 시작위치 평균(z)를 Ratcliff 등의 분석보다 크게 추정했고 T_{er} 은 오

히려 조금 작게 추정했다. 그리고 표집율들의 절대값도 전반적으로 크게 추정했다. 이 표집율들이 크게 추정된 것은 경계거리(a)가 크게 추정되었기 때문일 것이다. 이런 차이들이 있으나 실험조건들 사이의 표집율의 절댓값 순위는 같게 추정했다. 즉 높은 빈도 단어 조건의 표집율(표 2의 drift2)이 가장 크고, 아주 낮은 빈도 단어 조건의 표집율(drift3)이 가장 작았고 비단어조건의 표집율(drift1)과 낮은 빈도의 단어 조건의 표집율(drift4)은 비슷했다. 정리하면 SNUDM과 Ratcliff의 분석에서 조건들간의 표집율의 크기 패턴은 동일하게 나타났다.

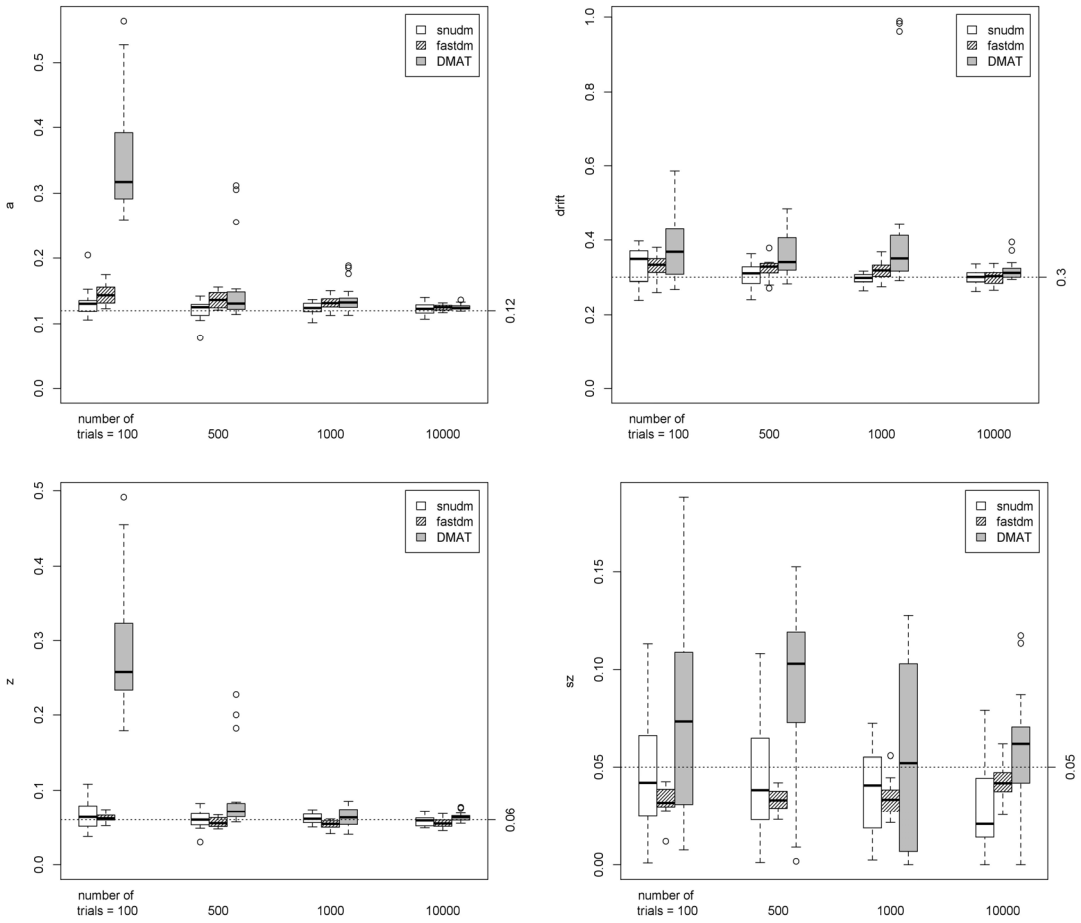
SNUDM과 이전 도구들의 생성된 자료 비교

자료는 이 연구에서 소개한 무작위 걷기 방식으로 생성했다. 구체적으로 확산모형에서 사용되는 파라미터들의 값을 지정한 뒤, 이것을 가지고 앞에서 소개한 무작위 걷기 방법에 따라 반응시간을 계산하여 필요한 실험참가자 수와 시행수에 맞게 자료를 얻는다. 자료를 생성하는 데에 사용된 파라미터들은 경계 거리(a) 0.12, 시작위치 평균(z) 0.06, 시작위치의 범위(sz) 0.05, 자극부호화와 반응실행 시간(T_{er}) 0.4, 자극부호화와 반응실행의 범위(ster) 0.1, 표집율 평균(v) 0.3, 표집율의 시행 간 표준편차(η) 0.05 등이다. 이 분석에서는 20명의 실험참가자가 각각 100회, 500회, 1000회, 10000회의 시행을 했다고 가정한 반응시간 자료를 생성하여 사용하였으며, 시행수를 다르게 하더라도 사용된 파라미터들은 모두 동일하게 적용하였다. 생성된 20명의 자료들은 이 글에서 소개하고 있는 SNUDM과 DMAT(Diffusion Model Analysis Toolbox) 그리고 fast-dm으로 분석하였다. DMAT는 Vandekerckhove와 Tuerlinckx(2008)에 의해 고안된 확산모형 분석 프로그램으로 https://ppw.kuleuven.be/okp/soft ware/dmat/에서 내려 받아 사용하였다. fast-dm 또한 반응시간을 확산모형으로 분석할 수 있는 프로그램으로 Jochen Voss와 Andreas Voss(2007)에 의해 고안되었으며, http://www.psychologie.uni-heidelberg.de/ae/meth/fast-dm/에서 내려 받아 사용하였다.

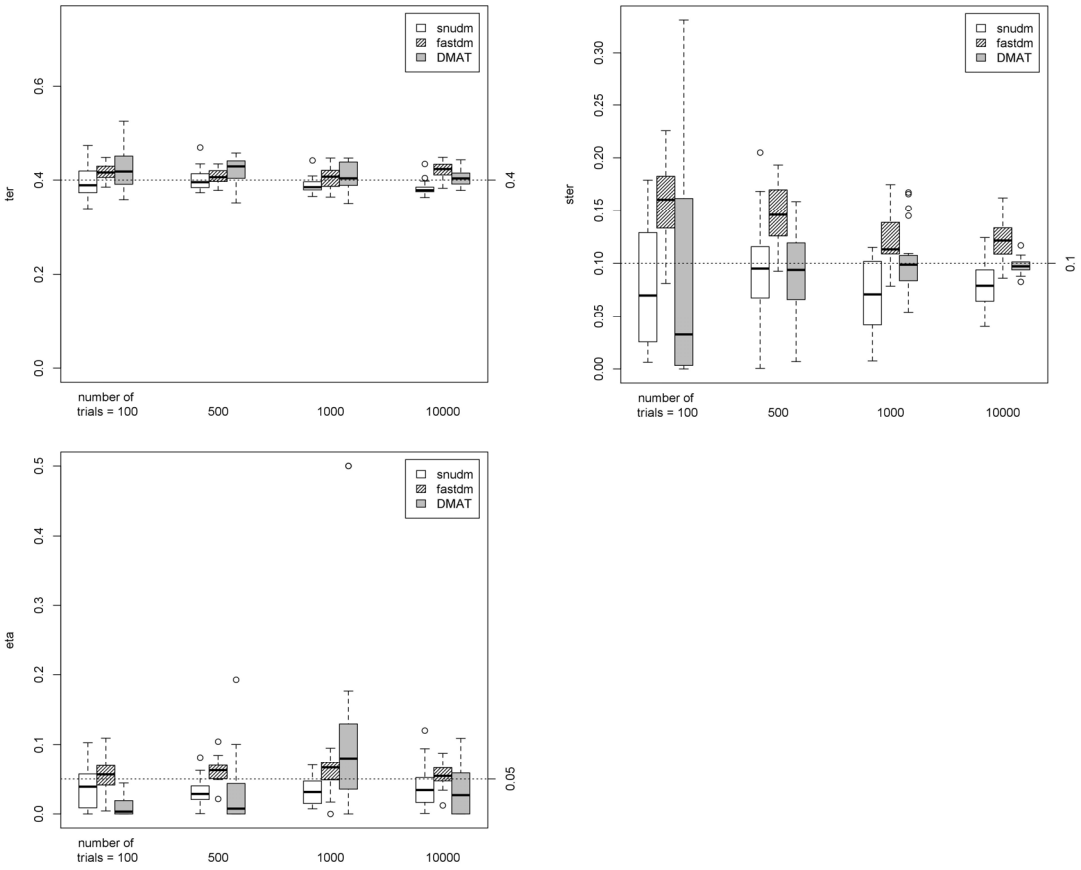
분석 결과

생성한 반응시간 자료를 SNUDM을 포함한 3가지 확산모형 분석 프로그램으로 분석한 결과는 그림 3과 같다. 세 프로그램에서 추정한 확산모형의 주요한 파라미터들을 비교해보면, 경계거리 파라미터(a)는 시행수가 100회일 때 SNUDM이 평균 0.1304(표준편차 0.0212)로 추정하였고 fast-dm은 0.1448(0.0142), DMAT는 0.3490(0.0843)이었다. DMAT의 경우 시행수가 500회일 때 경계 거리 파라미터(a)가 평균 0.1541(표준편차 0.0607)로 추정되었다. 시행수가 100회일 때 시작위치 평균(z)에 대한 3가지 프로그램들의 추정 결과는 SNUDM이 평균 0.0652(표준편차 0.0206)였고 fast-dm은 0.0630(0.0058)이었다. DMAT는 0.2852(0.0854)로 추정된 결과를 보였다. DMAT는 시행수가 500회일 때 z를 평균 0.0900(0.0501)으로 추정하였다. 또한 100회 시행에서 자극부호화 및 반응실행 시간에 대한 파라미터 평균(T_{er})는 SNUDM이 평균 0.3971(표준편차 0.0366)로 추정하였다. fast-dm과

DMAT는 동일한 파라미터에 대해 각각 0.4178(0.0176), 0.4235(0.0477)의 추정 결과를 보였다. 마찬가지로 시행수가 100회인 자료에서 표집율(v)은 SNUDM에서 평균 0.3312(표준편차 0.0499), fast-dm에서 0.3291(0.0330), DMAT에서 0.3750(0.0805)으로 추정되었다. 생성된 반응시간 자료를 SNUDM을 포함한 3가지 확산모형 분석 프로그램으로 분석한 결과 시행수가 적을 때 DMAT가 경계 파라미터 값을 크게 추정하는 점을 빼고는 대체로 자료 생성 시 지정하였던 파라미터들을 잘 추정하는 모습을 보였으며, 특히 시행수가 많은 경우에 그러한 경향을 더 잘 보여준다고 할 수 있다. 즉 SNUDM은 시행수가 적을 경우에는 경계 거리 파라미터를 fast-dm과는 비슷한 값을, DMAT보다 작은 값으로 추정했으나 시행수가 많은 경우에는 세 도구 모두 비슷하게 파라미터를 추정했다.



(그림 3) 생성된 자료 분석 결과



(그림 3) 생성된 자료 분석 결과 (계속)

결 론

이 연구에서는 본 연구자들이 만든 Ratcliff 확산모형의 새로운 분석도구 SNUDM을 소개했다. 이 분석 프로그램은 확산모형의 핵심인 확산과정을 무작위걷기로 근사묘사 하고, 적합도는 단순도형(Simplex) 방식을 써서 계산했다. 이 도구를 써서 분석한 Ratcliff 등(2004)의 실험 1의 표집율 파라미터의 패턴이 연구자들이 보고한 패턴과 거의 같았고 생성한 자료도 다른 분석도구들과 유사하게 추정하는 것을 확인했다. 이 프로그램은 기존의 분석도구와 비교하여 무엇보다도 중요 정보를 질문과 대답의 방식으로 받아 사용이 편리하다.

SNUDM 제작의 의의는 확산과정의 누적분포를 써서 우도(likelihood)를 구하는 DMAT와 편미분 방정식의 근사치를 구하는 fast-dm과 더불어 무작위걷기를 바탕으로 한 확산모형 분석 도구

SNUDM가 마련되었기 때문에 연구자들이 현상을 설명하는 가정에 따라 보다 다양하게 도구를 쓸 수 있도록 또 하나의 분석도구가 마련했다는 것이다.

SNUDM에서는 아직 구현되지 않은 것들이 있다. 표집율 기준(drift criterion) 파라미터(Starns, Ratcliff, & McKoon, 2012)가 구현되어 있지 않았고, 표본이 다섯 개 미만인 자료 처리와 극단값에 대한 처리 방법도 추가해야 할 것이다. 나아가 여러 목적 함수와 최적화 방법들을 적용해서 도구의 질을 높여야 할 것이며 그래픽 처리 장치(GPU)를 써서 처리의 속도를 높이도록 보완할 필요가 있다.

본 연구자들은 이 도구가 우리 연구들이 이론 방향으로 넓혀 가는데 조금이라도 도움이 되기를 바라며 앞으로 나올 새로운 도구 제작에 밑거름이 되기를 바란다.

참고문헌

Berkson, J. (1980) Minimum Chi-Square, Not Maximum Likelihood!". *Annals of Statistics. 8* (3): 457-487.

Brown, S., Ratcliff, R., & Smith, P. L. (2006). Evaluating methods for approximating stochastic differential equations. *Journal of Mathematical Psychology, 50*, 402-410.

Feller, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications.* New York: Wiley.

Heathcote, A., Brown, S., & Mewhort, D. J. K. (2002). Quantile Maximum Likelihood

Estimation of Response Time Distributions. *Psychonomic Bulletin and Review, 9*, 394-401.

Luersen, M. A., Le Riche, R., & Guyon, F. (2004). A constrained, globalized, and bounded Nelder-Mead method for engineering optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization, 27*(1), 43-54.

Mulder, M., Wagenmakers, E., Ratcliff, R., Boekel, W., & Forstmann, B. (2012). Bias in the brain: A diffusion analysis of prior probability and potential payoff. *The Journal of Neuroscience, 32(*7), 2335-2343.

Nelder, J. A., & Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computer Journal,* 7, 308-313.

Ratcliff, R. (1978). A theory of memory retrieval. *Psychological Review, 85*(2)*,* 59-108.

Ratcliff, R., Gomez, P, & McKoon, G. (2004). A diffusion model account of the lexical decision task. *Psychological Review, 111*(1), 159-182

Ratcliff, R. & McKoon, G. (2008). The diffusion decision model: Theory and data for two-choice decision tasks. *Neural Compuation, 20*, 873-922.

Ratcliff, R. & Smith, P. L. (2015). Modeling simple decisions and applications using a diffusion model. In J. R. Busemeyer, Z. Wang, J. T. Townsend, & A. Eidels(Eds.), *Oxford Handbook of Computational and*

Mathematical Psychology. New York, NY: Oxford University Press.

Ratcliff, R. & Tuerlinckx, F. (2002). Estimating parameters of the diffusion model: Approaches to the contaminant reaction times and parameter variability. *Psychonomic Bulletin & Review, 9*(3), 438-481.

Smelser N. J. & P. B. Baltes, eds. (2001). International encyclopedia of the social and behavioral sciences. Oxford: Elsevier Science

Thapar, A., Ratcliff, R., & McKoon, G. (2003). A diffusion model analysis of the effects of aging on letter discrimination. *Psychology and Aging, 18*, 415 – 429.

Tuerlinckx, F., Maris, E., Ratcliff, R., & De Boeck, P. (2001). A comparison of four methods for simulating the diffusion process. *Behavior Research Methods, Instruments, and Computers, 33*, 443-456.

Vandekerckhove, J., & Tuerlinckx, F. (2007). Fitting the Ratcliff diffusion model to experimental data. *Psychonomic Bulletin & Review, 14,* 1011-1026

Vandekerckhove, J., & Tuerlinckx, F.(2008). Diffusion model analysis with MATLAB: A DMAT primer. *Behavior Research Methods, 40*, 61-72.

Van Orden, G., Holden, J., & Turvey, M. (2003). Self organization of cognitive performance. *Journal of Experimental Psychology: General, 132*, 331-350.

Van Zandt, T., Colonius, H., & Proctor, R. W. (2000). A comparison of two response time models applied to perceptual matching. P*sychonomic Bulletin & Review, 7(2),* 208-256.

Verdonck S., Meers K., Tuerlinckx F.(2016). Efficient simulation of diffusion-based choice RT models on CPU and GPU. *Behavior Research Methods*. *48*(1), 13-27.

Voss, A., Nagler, M., & Lerche, V. (2013). Diffusion Models in Experimental Psychology: A Practical Introduction. *Experimental Psychology, 60,* 385-402.

Voss, A., & Voss, J. (2007). Fast-Dm: a Free Programm for Efficient Diffusion Model Analysis. *Behavior Research Methods, 39*(4), 767 – 775.

Wagenmakers, E.-J., van der Maas, H. L. J., & Grasman, R. P. P. P. (2007). An EZ-diffusion model for response time and accuracy. *Psychonomic Bulletin & Review, 14*, 3-22.

1차 원고 접수: 2018. 11. 10
1차 심사 완료: 2019. 09. 11
2차 원고 접수: 2019. 03. 13
2차 심사 완료: 2020. 04. 21
3차 원고 접수: 2020. 04. 22
3차 심사 완료: 2020. 05. 04
4차 원고 접수: 2020. 05. 07
최종 게재 확정: 2020. 05. 07

(*Abstract*)

Analysis Program for Diffusion Model: SNUDM

Koh, Sungryong[1)2)] Choo, Hyeree[2)] Lee, Dajung[1)]

[1)]Department of Psychology, Seoul National University

[2)]Cognitive Program, Seoul National University

This paper introduces SNUDM, an analysis program for Ratcliff's diffusion model, which has been one of the most important models in cognitive psychology over the past 35 years and which has come to occupy an important place in cognitive neuroscience in recent years. The analysis tool is designed with the basic principles of easy comprehension and simplicity in use. A diffusion process was programmed as the limit of a simple random walk in a manner resembling Ratcliff & Tuerlinckx(2002). The response time distribution of the model was constructed by simulating the time taken by a random walk until it reaches a threshold with small steps. The optimal parameter values in the model are found to be the smallest value of the chi-square values obtained by comparing the resulting distribution and the experimental data using Simplex method. For simplicity and ease of use, the input file used here is created as a file containing the quantile of the reaction time, the trials and other information. The number of participants and the number of conditions required for such work programs are given in a way that answers the question. Using this analysis tool, the experimental data of Ratcliff, Gomez, & McKoon(2004) were analyzed. We found the very similar pattern of parameter values to Ratcliff et al.(2004) found. When comparing DMAT, fast-dm and SNUDM with the generated data, we found that when the number of trials is small, SNUDM estimates the boundary parameter to a value similar to fast-dm and less than the DMAT. In addition, when the number of trials was large, it was confirmed that all three tools estimate parameters similarly.

Key words : cognitive psychology, diffusion model, analysis program, random walk

부록 1

불연속 무작위걷기의 특징과 연속무작위 걷기로 확장

일차원에서 무작위 모형은 시작 위치, 걸음 보폭, 그리고 한 걸음을 위쪽으로 옮길 확률(p)와 아래쪽으로 옮길 확률(q = 1-p)로 이루어진다. 간단한 무작위걷기 모형에서는 시작 위치가 0이고, 위쪽으로 옮기는 걸음 폭을 1이고 아래도 옮기는 걸음 폭을 -1이고 , 위로 옮길 확률이나 아래로 옮길 확률은 1/2로 같다. 이 간단한 무작위걷기과정에 따라 일정 시간 동안에 N을 걸었다면 그 사람의 위치에 대한 기댓값과 분산은 어떻게 될까? 우선 N번 걸었을 때 위치변화를 S(N)으로 쓰면 S(N)은 (1)와 같이 나타낼 수 있다.

(1) $S(N) = X(1) + X(2) + ...+ X(n)$

(1)은 위치변화가 각 걸음마다 걸음 폭(X(i)=1이나 -1)을 더한 값이라는 것을 보여준다. 그렇다면 기댓값은 (2)과 같이 나타낼 수 있다.

(2) $E(S(N)) = 0$

(2)에서 $E(X(1)) = 1*1/2 +(-1)*1/2$ 이 되어 모든 항이 0이 된다. 즉 위치변화의 기댓값은 우리의 직관에 맞게 0이다. 분산은 무선변인의 제곱의 기댓값과 기댓값의 제곱의 차로 나타낸다. 무선변인의 제곱의 기댓값, 즉 위치변화의 제곱은 (3)와 같이 나타낼 수 있다.

(3) $E(S^2(N)) = N$

(3)에서 $E(X^2(1)) = 1^2*(1/2) +(-1)^2*(1/2) = 1$이 되고 이와 마찬가지로 모든 보폭의 제곱의 항들은 1이 되고, 한편 E(X(1)X(2))는 각 걸음이 독립이라는 가정으로 E(X(1))*E(X(2))가 되고 이는 0이 되어, 결국 위치변화의 제곱의 기대치는 N이 된다. 또한 무선변인의 기대치(0)의 제곱도 0이므로 분산은 N이 된다.

위의 간단한 대칭 무작위걷기를 비대칭 무작위걷기로 확장해 보자. 이를 위해 위로 가는 확률을 p, 아래로 가는 확률을 q(=1-p)로 하고 위로 가는 걸음 폭은 $\Delta\chi$로 하고 아래로 가는 걸음 폭은 $-\Delta\chi$라 하자. 그렇다면 한 시간 단위의 N걸음 뒤에 위치변화의 기대치는(4)가 된다. 즉, 한 걸음을 걷고 난 뒤 위치변화의 기대치인 E(X(1))는 $\Delta\chi*p + (-\Delta\chi)*q$ 즉, $(p-q)\Delta\chi$가 되고 N걸음 뒤는 이런 항 N개의 합이 되어$(p-q)\Delta\chi N$이 된다.

(4) $E(S(N)) = (p-q)\Delta_X N$

위치변화의 제곱의 기대치는 (5)과 같다. 위의 (3)에서 $E(X^2(1))$은 $p*\Delta_X^2 + q*\Delta_X^2$이 되고 이를 정리하면$(p+q)\Delta_X^2$이 되는데, p+q는 1이어서 그 기댓값은 Δ_X^2이 된다. 이런 항이 N개 있으니 Δ_X^2 N이 생기고 E(X(1)X(2))는 위에서 말한 대로 걸음들이 독립이니 E(X(1))*E(X(2)), 즉 $(p-q)^2\Delta_X^2$이 되는데 이런 항이 N(N-1) 개가 있다. 그래서 $S^2(N)$의 기대치는 Δ_X^2 N과 $(p-q)^2\Delta_X^2 N(N-1)$의 합이 된다. 이 합을 정리한 결과가 (5)이다.

(5) $E(S^2(N)) = 4pq\Delta_X^2 N + (p-q)^2\Delta_X^2 N^2$

위치변화의 분산은 위치변화의 제곱의 기대치(6)에서 N걸음 뒤의 위치변화 기대치(4)의 제곱을 뺀 결과인 (6)이다.

(6) $var(S(N)) = 4pq\Delta_X^2 N$

위에서 살펴본 불연속 무작위걷기 모형에서 걸음 폭(Δ_X)을 아주 작게 줄이고 걸음 수(r)를 무한대로 늘리고 이 걸음 수(r)를 단위시간의 걸음 수(N)로 나눈 시간 변인(t = r/N)을 도입하여 연속 무작위 걷기로 나아간다. 이 과정에서 위에 소개한 기대치(5)와 분산(7)은 정규분포의 평균, 즉 표집율(drift, v)과 분산(s^2)으로 다가간다. 이 정규분포를 끌어내는 한 방법은 이항분포에서 정규분포로 근사하는 것이다(Feller, 1968). 아래에서는 Feller(1968)에서 소개된 방법을 살펴본다. S(r)은 (1)와 같이 원점에서 출발하여 r걸음 뒤의 위치변화를 나타내는 변인이라 하자. 즉, S(r)은 위쪽으로 간 걸음 횟수에서 아래쪽으로 간 걸음 횟수를 뺀 값을 나타내는 데, S(r)의 값이 k인 경우의 확률을 구해보자. S(r)이 k이면, 술에 취한 사람의 위치는 $S(r)*\Delta_X$, 즉 $k\Delta_X$가 된다. 이 경우 위로 간 걸음 수를 n1, 아래로 간 걸음 수를 n2라고 하면, n1+n2= r이고 n1-n2=k가 된다. 이 두 식을 더하면, 2n1은 r+k가 되어 n1(위쪽으로 걸은 걸음 수)은 (r+k)/2이다. 예를 들어, 10 걸음 걸었는데 위치가 $4\Delta_X$라면 위로는 7번 아래로는 3번 움직인 것이다. 이것은(10+4)/2가 되어 쉽게 위로 움직인 걸음 수가 7번임을 알 수 있다. 이때 눈여겨 볼 점은 r과 k는 둘 다 홀수이거나 짝수라는 점이다. 예를 들어, 10번 걸었는데 현재 위치가 $3\Delta_X$인 경우나 11번 걸었는데 현재 위치가 $4\Delta_X$인 경우는 없다. 위쪽으로 옮긴 걸음을 성공으로 보면 그 횟수를 이항변인으로 볼 수 있고 그 확률은 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

(7) $V(k, r) = {}_rC_{(r+k)/2}\ p^{(r+k)/2}\ q^{(r-k)/2}$

위의 식에서 (r+k)/2는 위쪽으로 옮긴 걸음 수이고, (r-k)/2는 아래로 옮긴 걸음 수이다. 우리의 목표는 확산과정을 연속무작위걷기로 접근하는 것인데 이를 위해서 시간의 변인(t)을 걸음 수(r)를 단위시간의 걸음 수(N)로 나누는 방식으로 들여와서 특정 시간과 특정위치에서 술 취한 사람을 찾을 확률을 구해야 한다. 이 확률분포는 (8)에 제시되어 있다. 이 확률 분포는 이항분포를 정규분포로 근사하는 De Moivre-Laplace 정리를 (7)에 적용하여 얻은 것이다. (8)에서 ~는 다가간다는 것을 나타낸다.

(8) $V(k,\ r) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi rpq}} e^{-\frac{1}{2rpq}[\frac{1}{2}(r+k)-rp]^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi rpq}} e^{\frac{-[k-r(p-q)]^2}{8rpq}}$ (r=Nt)

$= \frac{2\triangle x}{\sqrt{2\pi 4pq\triangle x^2 Nt}} e^{\frac{-[k\triangle x-(p-q)\triangle x Nt]^2}{2*4pqNt*\triangle x^2}}$ ($k\Delta x = x, (p-q)\Delta\chi N = v,\ 4pq\Delta\chi^2 N = s^2$)

$\sim \frac{2\Delta x}{\sqrt{2\pi s^2 t}} e^{\frac{-(x-\nu t)^2}{2s^2 t}}$

(8)에 r=Nt을 적용하고 (5)와 (7)을 대입해서 정리하면 (8)의 마지막 식이 나온다. (8)의 V(k, r)에서 생각해야 할 점은 간격이 $2\Delta\chi$라는 점이다. 즉, 한 위치에서 위로도 갈 수 있고 아래로도 갈 수 있으니 그 위치를 확인하려면 현 위치에서 아래와 위를 확인해야 한다. 이 간격 $2\Delta\chi$로 V(k, r)을 나누면 시간과 위치의 확률 밀도를 얻을 수 있다. 이렇게 얻은 (9)은 특정시간(t)에서 특정위치(x)의 분포가 평균(v)과 분산(s^2)을 가진 정규분포를 띠는데, 이런 특징을 가진 확률 과정을 통계와 물리에서 Wiener 과정이라고 한다.

(9) $v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2 t}} e^{\frac{-(x-\nu t)^2}{2s^2 t}}$

부록 2

Ratcliff, Gomez, & McKoon(2004)의 실험 1의 분석을 위한 입력 정보

How many subjects? 1

How many conditions? 4

Time interval(1: 1msec, 2:0.5ms, 3:0.1msec, 4:0.05msec)?") 2

Least Sample Size(5,6,7,8,9 etc) 5

Do you want to search the space for(sz, ster, eta) greater than 0(No: 0, Yes-Minimum: 1, Yes-Penalty 2)") 2

Do you want to use initial values from EZ-diffusion(1), EZ with noise(2), or all randoms(3)(1, 2, 3) 3

Do you want a to vary depending on conditions:(1 or 0)") 0

Do you want z to vary:(1 or 0)") 0

Do you want sz to vary:(1 or 0)") 0

Do you want ter to vary:(1 or 0)") 0

Do you want ster to vary:(1 or 0)") 0

Do you want drift to vary:(1 or 0)") 1

Do you want eta to vary:(1 or 0)") 0

부록 3

Ratcliff, Gomez, & McKoon(2004)의 실험1의 분석결과로 생긴 'best.txt'파일과 'log.txt'파일

2-1. 'best.txt' 파일

Sub	MChi	a	z	sz	ter	ster	drift1	drift2	drift3
	drift4	eta							
1	88.63	0.1426	0.0743	0.0731	0.4216	0.0891	-0.3252	0.4518	0.3270
	0.2728	0.1174							

2-2. 'log.txt' 파일

Wed Oct 11 21:09:11 2017

How many subjects:1
How many conditions:4
Time interval 2: 0.5msec
Least Sample Size: 5
Constrained Search is : 2
YESEZ is : 3

Sub	MChi	a	z	sz	ter	ster	drift1	drift2	drift3
	drift4	eta	nfe	nitr					
1		0.1259	0.0629	0.0009	0.6051	0.0005	-0.4326	0.2913	0.2864
	0.4899	0.0047							
1	318.72	0.1276	0.0694	0.1053	0.4619	0.0877	-0.3366	0.3006	0.3679
	0.5045	0.0861	511	250					
1		0.1087	0.0544	0.0040	0.4787	0.0032	-0.3138	0.3072	0.3495
	0.4200	0.0008							
1	159.28	0.1261	0.0660	0.0900	0.4475	0.0615	-0.2621	0.4283	0.3480
	0.3120	0.0692	476	250					
1		0.1041	0.0520	0.0044	0.4491	0.0037	-0.3941	0.3948	0.4378
	0.3175	0.0038							
1	113.23	0.1506	0.0816	0.0820	0.4210	0.1139	-0.3516	0.4403	0.3123
	0.3136	0.1026	483	250					
Additional Search									
1		0.1506	0.0816	0.0820	0.4210	0.1139	-0.3516	0.4403	0.3123
	0.3136	0.1026							
1	88.63	0.1426	0.0743	0.0731	0.4216	0.0891	-0.3252	0.4518	0.3270
	0.2728	0.1174	514	250					
1	88.63	0.1426	0.0743	0.0731	0.4216	0.0891	-0.3252	0.4518	0.3270
	0.2728	0.1174							

Chi^2(34) = 55.7580,