ISSN 1229-1889(Print)
ISSN 2287-9005(Online)
J Korean Soc Qual Manag Vol. 48, No.1: 201-214, March 2020
https://dx.doi.org/10.7469/JKSQM.2020.48.1.201

정기교체 및 최소수리를 고려한 작업주기 횟수 최적화

이진표†

홍익대학교 경영대학 경영학부

Optimal Working Cycles for Minimal Repair Policy

Lee, Jinpyo†

College of Business Administration, Hongik University

ABSTRACT

Purpose: The purpose of this paper is to determine an optimal number of cycle times for the replacement under the circumstance where the system is replaced at the periodic time and the multiple number of working cycles whichever occurs first and the system is minimally repaired between the replacements if it fails.
Methods: The system is replaced at periodic time () or cycle time, whichever occurs first, and is repaired minimally when it fails between successive replacements. To determine the optimal number of cycle times, the expected total cost rate is optimized with respect to the number of cycle times, where the expected total cost rate is defined as the ratio of the expected total cost between replacements to the expected time between replacements.
Results: In this paper, we conduct a sensitivity analysis to find the following results. First, when the expected number of failures per unit time increases, the optimal number of cycle times decreases. Second, when the periodic time for replacement becomes longer, the optimal number of cycle times decreases. Third, when the expected value for exponential distribution of the cycle time increases, the optimal number of cycle times increases.
Conclusion: A mathematical model is suggested to find the optimal number of cycle times and numerical examples are provided through the sensitivity analysis on the model parameters to see the patterns for changes of the optimal number of cycle times.

Key Words: Minimal Repair, Random Cycle Time, Renewal Theory, Replacement Policy

● Received 6 February 2020, revised 18 February 2020, accepted 24 February 2020
† Corresponding Author(jinpyo.lee@hongik.ac.kr)

※ This research was supported by the 2020 Hongik University Research Fund.

1. 서 론

현대 사회에서 데이터베이스 시스템, 통신 네트워크 그리고 소셜 네트워크와 같은 시스템이 널리 사용되고 있으며 이러한 시스템의 갑작스러운 가동 중단과 같은 고장은 상당한 비용을 초래하는 것은 물론이고 때로는 사회적인 혼란도 동시에 야기하는 경우도 종종 발생하고 있다. 따라서 시스템 신뢰성이라는 관점에서 시스템에 대한 수리 계획, 가용성, 고장 관리 비용 등을 고려한 최적의 유지 보수를 찾는 것은 중요한 문제이다. 그러나 시스템을 유지 관리하는 비용은 일반적으로 상당히 높고 또한 일정한 수준을 유지하는 것은 쉬운 문제가 아니다. 실행 중인 작업을 중지할 경우 시스템을 사용하고 있는 고객에게 상당한 문제를 야기할 수 있다. 이러한 관점에서 본 연구는 정기적으로 계획된 교체 시점과 수리 및 교체 비용 간의 상충 관계를 고려하여 작업 주기 시간의 반복 횟수 최적화에 대하여 연구하였다.

Barlow and Hunter(1960)는 예정된 시점에 정기적으로 장치를 교체하며 교체 후 고장 발생 시 연속 교체 간의 고장 수리로 인해 고장률이 변하지 않을 정도로 최소 수리만을 하는 상황 예를 들어 일반적으로 네트워크 컴퓨터와 비행기와 같은 시스템에서 적용 가능한 상황에 대하여 연구하였다. Holland and McLean(1975)은 모터나 전자기적 부품 등에 적용하기위한 실질적인 정책에 대하여 연구하였다. Morimura(1970)은 고장 발생 시 교체(replacement)을 실행하고 그 다음 고장 발생 시에는 최소 수리를 실행하는 정책에 즉 교체과 최소 수리의 패턴이 반복하는 정책에 대하여 연구하였다. Tilquin and Cleroux(1975)는 시스템이 시간이 지나면서 비용이 증가하는 조정 비용에 대한 모형을 제시하였다. Nakagawa(1981; 1983; 1984)은 교체이 예정된 시점(T) 또는 교체 후 N번째 고장 발생 시점 중 먼저 발생하는 시점에 시스템을 교체하고 교체과 교체 사이에 발생하는 고장에 대해서는 최소 수리만을 적용하는 정책에 대하여 제시하였다. Nakagawa(1991)는 예정된 시점에 주기적으로 시스템이 교체되고 주어진 기간 동안 발생하는 사건들의 수가 임계치(threshold level) 보다 많은 경우 발생하는 교체 비용이 상당이 높을 때 가용한 다양한 교체 정책 모형을 임계치를 기반한 교체 모형으로 치환하여 분석하였다. Pulcini(2003)는 최소한의 유지 보수가 필요한 수리 가능한 고장의 패턴을 이해하기 위한 확률 모형을 제시하였다. Barlow(1996)는 교체 이론(renewal theory)을 이용하여 무작위적 작업 시간 하에서 적용 가능한 다양한 교체 정책에 대하여 제시하였다. Pinedo(1992)는 작업 시간이 일정하지 않은 즉 무작위적인 시간을 가지는 작업을 실행하는 시스템의 스케줄링에 대하여 분석한 다양한 결과를 요약 정리하였다. Stadje(2003)은 시스템이 일정하지 않은 즉 무작위적으로 발생하는 시점에만 교체을 할 수 있는 경우 연속된 고장 시 실행하게 되는 교체의 성질에 대하여 분석하였다. Wang(2013)은 예방적인 교체와 최소 수리 정책을 기반으로 하는 경제적 경제적 생산량 모형을 제시하였다. Yuan et al.(2012)은 불완전하게 수리한 시스템도 상당한 정도로 정상 작동한다는 점을 착안하여 최소 수리만으로도 시스템 사용에 큰 문제가 없음을 보였다. Zhao et al.(2016)은 정기적인 정비와 일정 횟수의 수리 중 먼저 또는 늦게 발생하는 시점에 교체 또는 수리를 진행하는 정책 모형을 제시하였다.

위에서 살펴본 바와 같이 기존의 연구에서는 교체과 수리 등 다양한 조합에 대한 연구가 진행되어 왔지만 교체과 교체 간에 발생하는 고장 시 최소 수리를 고려하면서 또한 주기 시간을 정확히 알 수 없는 상황에서 작업 주기가 일정한 반복 횟수(N)가 끝나는 시점(every N^{th} working cycles) 또는 교체을 하고자 하는 계획된 시점(T) 중 먼저 발생하는 시점에 교체(replacement)을 고려한 연구는 지금까지 없었다. 이러한 이유로 본 연구의 시스템에서는 다음과 같이 교체(replacement)과 수리(repair)가 특정한 조건하에서 반복되어지고 있는 상황을 고려하고 있다. 즉 실행 중인 작업의 주기 시간을 정확히 알 수 없는 상황에서 작업 주기가 일정한 반복 횟수(T)가 끝나는 시점 또는 교체을 하고자 하는 계획된 시점(T) 중 먼저 발생하는 시점에 교체를 하거나 또는 교체 후 다시 교체 시점이 오기 전에

시스템이 고장 난 경우에는 고장 나기 전과 같이 작동이 될 정도로 최소 수리를 하는 정책을 고려하고 있다. 예를 들어 클라우드 서비스 또는 서버 대여 서비스를 제공하는 기업에서 정기적으로 장비를 교체 또는 정비를 해주어야 하는데 고객 즉 사용자가 서비스 상에서 작업을 하고 있는 중에 서비스를 멈추고 장비를 교체 또는 정비하게 되면 고객에게 상당한 불편이 발생하게 된다. 그러므로 기업 입장에서의 정기적인 교체 시점 뿐만 아니라 서비스 사용 중인 고객의 작업 시간 즉 작업 주기도 교체 시점을 결정하는데 상당히 중요한 변수가 된다. 그러나 기업 입장에서의 정기적인 교체 시점의 최적화에 대해서는 기존의 연구에서 많이 다루어 왔기에 본 연구에서는 기업 입장에서의 정기적인 교체 시점은 주어진 값으로 보고 작업 주기 반복 횟수와 비교하는 값으로 놓고 작업 주기 반복 횟수 최적화에 초점을 맞추고 진행하였다(Nakagawa et al., 2009). 즉 본 연구에서는 교체 간 기대 비용을 최소화 하는 최적의 작업 반복 횟수(N^*)를 결정하기 위한 모형을 분석하자 한다. 또한 전통적으로 시스템의 교체 및 수리 문제에 대한 모형은 주로 연속 시간 프레임에서 분석 및 연구되어왔으나 현실에서는 이산적 시간(discrete time) 모형을 적용하는 것이 더 용이한 경우가 많다. 그리하여 본 연구에서는 현실에서 적용이 가능한 이산적 시간 프레임 하에서 교체 또는 수리 대상인 시스템에 대한 모형을 제시하고 분석하고자 한다.

앞으로 전개될 본문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 교체 또는 수리 대상인 시스템의 각 작업 주기를 정확히 알 수 없는 작업의 일정한 반복 횟수(N)가 끝나는 시점 또는 일정한 교체를 하고자 하는 시점(T) 중 먼저 발생하는 시점에 교체를 하거나 또는 시스템이 고장 난 경우에는 정상 작동이 될 정도로 최소 수리를 하는 상황에서 최적의 작업 반복 횟수를 찾기 위한 모형을 개발한다. 고장률이 순 증가하는 확률 분포를 기반으로 하는 모형을 개발하고 3장에서 수치 예제를 통해 일부 변수의 변화에 따른 최적의 작업 반복 횟수의 변화를 보여준다. 마지막으로 4장에서는 연구결과를 바탕으로 결론을 제시한다.

2. 정기적 교체과 최소수리 정책을 고려한 최적 작업 주기 모형

본 장에서는 교체 또는 수리 대상인 시스템에서 주기가 정확하지 않은 작업의 일정한 반복 횟수(N)가 끝나는 시점 또는 일정한 교체를 하고자 하는 시점(T) 중 먼저 발생하는 시점에 교체를 실행하고 교체 후 다음 교체 시점이 도래하기 전에 시스템이 고장 난 경우에는 정상 작동이 될 정도로 최소 수리를 실행하는 정책하에서 연속된 두 교체 간에 발생하는 기대 비용율을 최소화 하는 최적의 작업 반복 횟수(N*)에 대하여 연구한다. 본 연구에서 사용하는 용어와 가정은 다음과 같다.

(i) X_i는 시스템의 $(i-1)$번째 고장과 i번째 고장 사이의 시간 간격에 대한 확률 변수로 정의하며 각각은 서로 독립적이고 동일하게(independently and identically) 분포되어 있다. 누적 분포는 P{$X_i \le x$ ≡F(x)}이며 평균은 $E(X_i)=\mu\equiv\int_0^\infty \bar{F}(x)dx$이다. 확률밀도함수는 $f(x)\equiv\dfrac{dF(x)}{dx}$이고 $F(x)=\int_0^x f(u)du$이며 고장률함수(failure rate)는 $h(x)\equiv\dfrac{f(x)}{\bar{F}(x)}$에 대해서 h(0)=0에서 h(∞)=∞까지 순 증가하는(strictly increasing) 함수이다.

(ii) Y_k는 k번째 작업 주기에 대한 확률변수로 정의하며 각각은 서로 독립적이고 동일하게(independently and identically) 분포되어 있다. 누적 분포는 P{Yk≤y} ≡ G(y)이고 유한한 평균 $\dfrac{1}{\theta}\equiv\int_0^\infty G(y)dy$ 을 가진다. 그리고 확률밀도함수는 $g(y)\equiv\dfrac{dG(y)}{dy}$ 이고 G(y)의 n-겹 결합(n^{th} convolution)은 $G^n(y)$≡P{$\sum_{i=1}^{N} Yi \le y$}이다(n=1,2,…).

(iii) c_1은 고장시 발생하는 최소수리비용(minimal repair cost)이며 $c_2(c_2 \geq c_1)$ 정기적 교체 시기(T) 또는 일정한 횟수(N)의 작업주기가 끝나는 시점에 발생하는 교체 비용이다.

본 연구에서 교체는 시스템의 고장이 난 부분을 새 제품으로 교환하는 것으로 정의하고 최소 수리는 시스템이 고장이 난 경우 수리하였을 때 몇 번째 고장이지 와는 무관하게 고장률이 일정하게 유지된다고 정의한다. 즉 시스템이 고장이 난 경우 최소한 수리를 한다는 것은 몇 번째 고장과는 상관 없이 즉 모든 $n \geq 1$에 대해서 그리고 모든 양의 x와 t에 대해서 다음을 만족시킬 경우로 정의된다.

$$P\left\{X_n \leq x | \sum_{i=1}^{n-1} X_i = t\right\} = \frac{F(t+x) - F(t)}{\overline{F}(t)}$$

확률밀도함수 $f(t) \equiv dF(t)/dt$ 가 존재할 경우 모든 양의 x에 대하여 성립하여야 하므로 시스템이 고장이 난 경우 최소한 수리를 한다는 것은 모든 양의 t에 대해서 다음을 만족시킬 경우로도 정의가 된다.

$$\lim_{x \to 0} P\left\{X_n \leq x | \sum_{i=1}^{n-1} X_i = t\right\} = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} \equiv h(t)$$

n번째 고장까지의 시간($\sum_{i=1}^{n_i} X_i$)에 대한 확률분포는 다음과 같다(Nakagawa. 2006).

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\right\} = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-H(t)} \frac{[H(t)]^j}{j!} \tag{1}$$

식 (1)에서 $H(t)$은 $\int_0^t h(x)dx = \int_0^t \frac{f(x)}{\overline{F}(x)} dx$을 의미하며 식 (1)을 사용하여 $[0,t]$동안의 시스템이 고장 나는 횟수를 세는 셈과정(Counting process) $\{N_X(t), t \geq 0\}$에 대한 확률분포를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P\{N_X(t) = n\} &= P\{N_X(t) \geq n\} - P\{N_X(t) \geq n+1\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\right\} - P\left\{\sum_{i=1}^{n+1} X_i \leq t\right\} \\ &= \sum_{j=n}^{\infty} e^{-H(t)} \frac{(H(t))^j}{j!} - \sum_{j=n+1}^{\infty} e^{-H(t)} \frac{(H(t))^j}{j!} = e^{-H(t)} \frac{(H(t))^n}{n!} \end{aligned} \tag{2}$$

고장 횟수를 세는 셈과정의 평균은 $E[N_X(t)] = H(t)$이 된다. 교체는 정기 교체 기간(T) 또는 작업 일정한 주기 반복 횟수(N)가 끝나는 시점 중 먼저 발생하는 시점(min $[\sum_{i=1}^{N} Y_i, T]$)마다 실행을 하므로 $\sum_{i=1}^{N} Y_i \leq T$ 또는 두 $\sum_{i=1}^{N} Y_i \geq T$ 경우를 고려한 교체 및 수리 비용을 합산한 총 예상 비용을 계산하면 된다. 즉 $\sum_{i=1}^{N} Y_i \leq T$인 경우의 N번의 작업이 먼저 끝나므로 연속된 두 교체 구간 동안 예상 최소 수리 비용은 $c_1 E\left[N_X\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)\right] = c_1 H\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)$이고 한 번의 교체가 발생하므로 이 기간 동안의 예상 비용은 $E\left[c_1 H\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) + c_2 | \sum_{i=1}^{N} Y_i \leq T\right] P\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i \leq T\right)$이 되며 확률 변수인 N번의 작업 주기 $\sum_{i=1}^{N} Y_i$에 대한 확률 분포인 N-겹 결합 $G^N(y) \equiv P\left\{\sum_{i=1}^{N} Y_i \leq y\right\}$를 이용하여 정리하면 $\int_0^T [c_1 H(y) + c_2] dG^N(y)$와 같다. $\sum_{i=1}^{N} Y_i \geq T$도 마찬가지로 구할 수 있다. 그러므로 작업 주기 반복 횟수(N)를 결정 변수로 하는 교체 간 총 예상

비용(Expected total cost between replacements, ETC)은 다음과 같다.

$$ETC(N)=\int_0^T[c_1H(y)+c_2]\,dG^N(y)+\int_T^\infty[c_1H(T)+c_2]\,dG^N(y)=c_1\int_0^T\big(1-G^N(t)\big)dH(t)+c_2 \quad (3)$$

위 식의 좌변에 있는 첫 항은 $\sum_{i=1}^n Y_i \geq T$인 경우의 최소 수리와 교체에 대한 예상 비용이고 두번째 항은 $\sum_{i=1}^n Y_i \leq T$인 경우의 최소 수리와 교체에 대한 예상 비용이다. 작업 주기 반복 횟수(N)를 결정 변수로 하는 연속된 두 교체 간 예상 시간(Expected time between replacements, ETR)은 다음과 같다.

$$ETR(N)=\int_0^T y\,dG^N(y)+\int_T^\infty T\,dG^N(y)=\int_0^T\big(1-G^N(t)\big)dt \quad (4)$$

교체 간 총 예상 비용을 교체 간 예상 시간으로 나누면 작업 주기 반복 횟수(N)에 대한 총예상비용율(Expected total cost rate, ETCR)이 된다.

$$ETCR(N)=\frac{ETC(N)}{ETR(N)}=\frac{c_1\int_0^T\big(1-G^N(t)\big)dH(t)+c_2}{\int_0^T\big(1-G^N(t)\big)dt} \quad (5)$$

최적의 작업 주기 반복 횟수는 총예상비용율인 $ETCR(N)$가 최소가 되는 N으로 결정하면 되니 ETCR(N+1)−ETCR(N)≥0을 만족하는 가장 작은 값을 찾아서 최적의 작업 주기 반복 횟수(N^*)로 결정하면 된다. ETCR(N+1)−ETCR(N)는 다음과 같이 정리할 수 있다(자세한 유도 과정은 Appendix 참조).

$$ETCR(N+1)-ETCR(N)=\frac{c_1\int_0^T\big(1-G^{N+1}(t)\big)dH(t)+c_2}{\int_0^T\big(1-G^{N+1}(t)\big)dt}-\frac{c_1\int_0^T\big(1-G^N(t)\big)dH(t)+c_2}{\int_0^T\big(1-G^N(t)\big)dt} \quad (6)$$

$$=\left\{\frac{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^N}{N!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^N}{N!}dt}\int_0^T\big(1-G^N(t)\big)dt-\int_0^T\big(1-G^N(t)\big)dH(t)-\frac{c_2}{c_1}\right\}c_1\frac{c_1\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^N}{N!}dt}{\int_0^T\big(1-G^{N+1}(t)\big)dt\int_0^T\big(1-G^N(t)\big)dt}$$

위의 식에서 $\dfrac{c_1\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^N}{N!}dt}{\int_0^T\big(1-G^{N+1}(t)\big)dt\int_0^T\big(1-G^N(t)\big)dt}$ 은 분모와 분자의 피적분 함수들이 확률 값이므로 양의 값을 가진다. 최적의 작업 주기 반복 횟수 총예상비용율인 $ETCR(N)$가 최소가 되는 N을 구하기 위해서는 식 (6)의 마지막 변에 있는 첫번째 항에 대한 성질을 이해할 필요가 있다. 이 항에 대한 성질은 다음 Lemma 1에 정리하였다(증명은 Appendix를 참조).

Lemma 1. 고장이 발생하는 시간에 대한 확률변수의 고장률함수인 $h(t) \equiv f(t)/\bar{F}(t)$가 t에 순증가(strictly increasing)한다. 그럼 다음의 두 결과는 성립한다.

1. $\dfrac{\int_0^T e^{-\theta t}\dfrac{(\theta t)^N}{N!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\dfrac{(\theta t)^N}{N!}dt}$은 N에 대해서 순증가(strictly increasing)한다.

2. $\dfrac{\int_0^T e^{-\theta t}\dfrac{(\theta t)^N}{N!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\dfrac{(\theta t)^N}{N!}dt}\int_0^T\left(1-G^N(t)\right)dt-\int_0^T\left(1-G^N(t)\right)dH(t)-\dfrac{c_2}{c_1}$은 N에 대해서 순증가(strictly increasing)한다.

Lemma 1의 결과를 식 (6)에 적용하면 (6)의 마지막 변에 있는 첫번째 항은 N에 대하여 순 증가하는 함수이고 ETCR(N+1)−ETCR(N)>0을 만족하는 N을 찾으면 되므로 Theorem 1을 얻을 수 있다.

Theorem 1. 고장이 발생하는 시간에 대한 확률변수의 고장률함수인 $h(t) \equiv f(t)/\bar{F}(t)$가 t에 순 증가한다. 그러면 총예상비용율을 최소화하는 작업 주기에 대한 유한한 최적의 횟수 N^*가 존재하며 다음 부등식을 만족시키는 가장 작은 값이다.

$$\frac{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^N}{N!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^N}{N!}dt}\int_0^T\left(1-G^N(t)\right)dt-\int_0^T\left(1-G^N(t)\right)dH(t)-\frac{c_2}{c_1}\geq 0 \tag{7}$$

부등식 (7)을 만족하는 가장 작은 값을 구하면 정기 교체 기간(T) 또는 작업의 일정한 반복 횟수(N)가 끝나는 시점중 먼저 발생하는 시점마다 발생하는 시간 당 평균 총 비용을 최소화하는 작업 주기에 대한 최적의 횟수를 구하게 된다. 3장에서는 수치 예제를 이용하여 최적 작업 주기에 횟수를 구해본다.

3. 수치 예제

이 장에서는 2장에서 제시한 모형에 대한 수치 예제를 제공하고 있다. 고장 간격 시간에 대한 확률분포는 $F(t)=1-e^{-(\lambda t)^2}$이고 평균은 $\mu\equiv\int_0^\infty \bar{F}(t)dt=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}$이다. 고장 간격 시간 확률 분포의 특징은 간격 t가 증가하면 고장률인 $h(t)=\dfrac{f(t)}{\bar{F}(t)}=2\lambda^2 t$도 같이 증가한다. 작업 주기에 대한 확률분포는 지수 분포인 $G(t)=1-e^{-\theta t}$를 사용한다. 최소 수리 비용은 $c_1=1$이고, 교체비용은 $c_2=5$이다. T는 정기적으로 시스템을 교체하는 시간 간격으

로 사용하였다. 식 (7)을 적용하면 최적의 작업 주기 반복 횟수인 N^*는 다음을 만족하는 가장 작은 정수 값이다.

$$\frac{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^N}{N!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^N}{N!}dt}\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^j}{j!}dt-\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^j}{j!}dH(t)-\frac{c_2}{c_1}\geq 0$$

이제 식 (8)을 만족하는 최적의 작업 주기 반복 횟수 N^*를 구한 다음 다양한 고장 간격에 대한 모수 $\lambda \in \{0.12,0.125,0.13,0.135,0.14,0.145,0.15,0.155\}$와 지수 분포인 작업 주기에 대한 모수 $\frac{1}{\theta} \in \{0.2,0.4,0.6\}$에 대한 민감동 분석을 진행한다. 또한 주어진 값인 정기적 교체 시점을 다양한 값($T \in \{5.0,5.1,5.2,5.3,.5.4,5.5,5.6,5.7,5.8,5.9,6.0\}$)으로 바꿔가면서 최적의 작업 주기 반복 횟수 N^*의 민감도 분석을 진행한다. 민감도 분석의 결과는 표 1에서 확인할 수 있다.

Table 1. Optimal Number of Cycle Times (N^*)

	T	λ							
		0.12	0.125	0.13	0.135	0.14	0.145	0.15	0.155
1/θ=0.2	5.0	22	20	19	18	18	17	16	16
	5.1	21	20	19	18	17	17	16	16
	5.2	21	20	19	18	17	17	16	16
	5.3	21	20	19	18	17	17	16	16
	5.4	21	20	19	18	17	17	16	16
	5.5	20	19	19	18	17	17	16	16
	5.6	20	19	19	18	17	17	16	16
	5.7	20	19	18	18	17	17	16	15
	5.8	20	19	18	18	17	17	16	15
	5.9	20	19	18	18	17	16	16	15
	6.0	20	19	18	18	17	16	16	15
1/θ=0.4	5.0	14	13	12	11	10	10	9	9
	5.1	13	12	12	11	10	10	9	9
	5.2	13	12	11	11	10	10	9	9
	5.3	13	12	11	11	10	10	9	9
	5.4	12	12	11	10	10	9	9	9
	5.5	12	11	11	10	10	9	9	9
	5.6	12	11	11	10	10	9	9	9
	5.7	12	11	11	10	10	9	9	9
	5.8	12	11	10	10	10	9	9	9
	5.9	11	11	10	10	9	9	9	9
	6.0	11	11	10	10	9	9	9	8
1/θ=0.6	5.0	13	11	10	9	9	8	8	7
	5.1	12	11	10	9	8	8	7	7
	5.2	11	10	9	9	8	8	7	7
	5.3	11	10	9	8	8	8	7	7
	5.4	10	9	9	8	8	7	7	7
	5.5	10	9	9	8	8	7	7	7
	5.6	10	9	8	8	8	7	7	7
	5.7	9	9	8	8	7	7	7	7
	5.8	9	9	8	8	7	7	7	6
	5.9	9	8	8	8	7	7	7	6
	6.0	9	8	8	8	7	7	7	6

그림 1은 고장 간격에 대한 모수 λ가 증가할수록 최적의 작업 주기 반복 횟수는 감소하는 것을 볼 수 있다. 이는 단위 시간 당 고장 발생이 많아질수록 고장 당 발생하는 상대적으로 높은 비용인 최소 수리 비용(c_1)의 발생 빈도를 줄

이기 위해서 작업의 주기의 횟수(N)를 줄여 상대적으로 낮은 비용인 교체 비용(c_2)으로 시스템의 총 유지 비용을 최적화하기 때문이라고 이해할 수 있을 것이다. 그림 2는 정기 교체 시점(T)가 증가할수록 최적의 작업 주기 반복 횟수가 감소하는 것을 볼 수 있다.

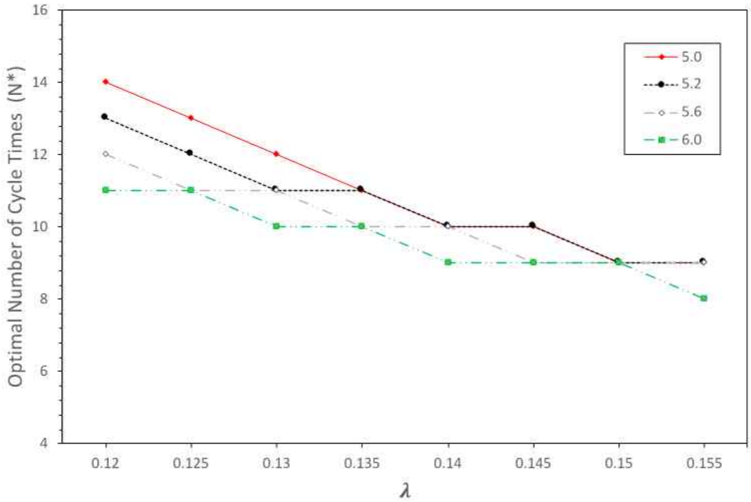

Figure 1. Relationship between Optimal Number of Cycle Times and failure time rate (λ)

그림 2는 정기 교체 시점(T)가 증가할수록 최적의 작업 주기 반복 횟수가 감소하는 것을 볼 수 있다. 정기 교체 시점(T)은 시스템 운영하는 동안 고정되어 있으므로 기간이 긴 고정 정기 교체 시점을 사용하면 작업의 주기의 횟수(N)를 줄여 고장 발생 시 상대적으로 높은 비용인 최소 수리 비용(c_1)의 발생 빈도를 줄이기 위해서 고정되어진 정기 교체 시점(T)을 대신하여 작업의 주기의 횟수(N)를 줄여 상대적으로 낮은 비용인 교체 비용(c_2)의 발생 빈도로 대체하고자 함으로써 시스템의 총 유지 비용을 낮추고자 하기 때문이라고 이해할 수 있을 것이다.

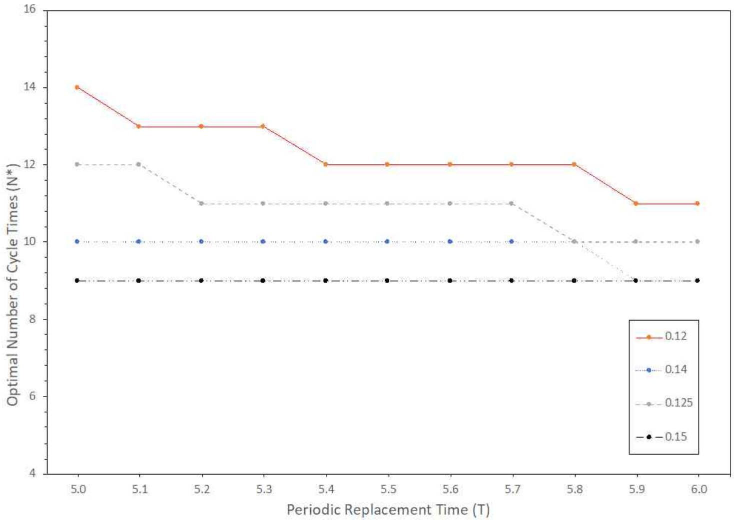

Figure 2. Relationship between optimal number of cycle times(N^*) and periodic replacement time (T)

그림 3은 지수 분포인 작업 주기에 대한 모수 $\frac{1}{\theta}$에 대해서는 $\frac{1}{\theta}$이 증가할수록 최적의 작업 주기 반복 횟수가 감소하는 경향을 볼 수 있다. 여기서 작업 주기에 대한 모수 $\frac{1}{\theta}$는 작업 주기의 평균값이므로 이 값이 커질수록 작업의 반복 횟수를 줄임으로써 높은 비용인 최소 수리 비용(c_1) 보다는 상대적으로 낮은 비용인 교체 비용(c_2)의 발생 빈도를 높여 시스템의 총 유지 비용을 낮추고자 하기 때문이라고 이해할 수 있을 것이다.

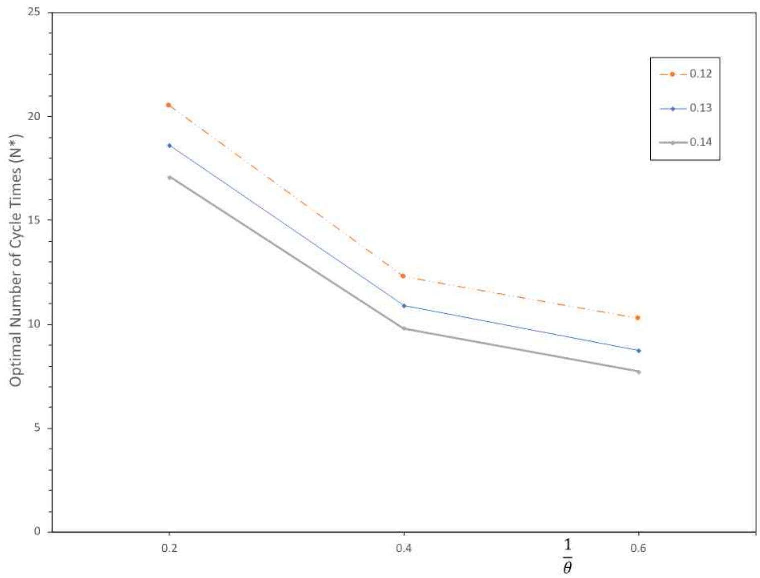

Figure 3. Relationship between Optimal Number of Cycle Times and $\frac{1}{\theta}$ for the cycle time

4. 결 론

본 연구는 교체 또는 수리 대상인 시스템에서 주기가 정확하지 않은 작업의 일정한 반복 횟수(N)가 끝나는 시점 또는 일정한 교체를 하고자 하는 시점(T) 중 먼저 발생하는 시점에 교체를 하거나 또는 시스템이 고장 난 경우에는 작동이 될 정도의 최소 수리를 하는 상황에서 교체 간 기대 비용을 최소화 하는 최적의 작업 반복 횟수(N^*)에 대하여 분석하는 것에 목적이 있다. 사용하는 시스템이 작업 불능 상태 즉 고장 상태에 있으면 작동이 가능하도록 최소 수리를 적용한다고 가정하고 이를 바탕으로 교체와 재상 간의 발생할 수 있는 총 예상 비용을 교체 간의 예상 시간으로 나누어 작업 주기 반복 횟수(N)에 대한 총예상비용율 계산할 수 있는 모형을 분석하였다. 최소 수리 서비스를 받은 시스템은 과거 고장 발생 경험에 영향을 받지 않는다고 즉 과거 고장 횟수와는 무관하고 직전 고장 발생 시 최소 수리 후 시간에는 고장률이 영향을 받는다는 가정하에 모형화 하였다. 간단한 데이터를 적용하여 모형에 대한 민감도분석을 시행하였다. 주기가 정확하지 않은 작업, 교체 이후 다음 교체 시점 이전에 고장이 발생한 경우에 작동이 될 정도의 최소 수리, 교체 비용과 최소 수리 비용 등을 고려하였고 수치 예제에서는 작업 주기 시간에 대한 확률 분포로 지수 분포를 이용하여 분석한 결과를 제시하였다.

앞으로의 연구주제로는 교체 시점을 고정하지 않고 변수로 놓고 최적화 하는 모형 또는 교체 시점과 작업 주기

시간의 반복 횟수 둘 다를 변수로 놓고 최적화 하는 모형을 제시하고 분석하는 것이다.

REFERENCES

Barlow, R., and Hunter, L. 1960. Optimum Preventive Maintenance Ppolicies. Operations Research 8(1):90-100.

Barlow, R. E., and Proschan, F. 1996. Mathematical Theory of Reliability. Vol. 17. Siam.

Fuqing, Y., and Kumar, U. 2012. A General Imperfect Repair Model Considering Time-dependent Repair Effectiveness. IEEE Transactions on Reliability 61(1):95-100.

Holland, C. W., and McLean, R. A. 1975. Applications of Replacement Theory. AIIE Transactions 7(1):42-47.

Morimura, H. 1969. On Some Preventive Maintenance Polices for IFR. North Carolina State University. Dept. of Statistics.

Nakagawa, T. 1981. Generalized Models for Determining Optimal Number of Minimal Repairs before Replacement. Journal of the Operations Research Society of Japan 24(4):325-338.

Nakagawa, T. 1984. Optimal Policy of Continuous and Discrete Replacement with Minimal Repair at Failure. Naval Research Logistics Quarterly 31(4):543-550.

Nakagawa, T. 2006. Maintenance Theory of Reliability. Springer Science & Business Media.

Nakagawa, T. and Mizutani, S. 2009. A Summary of Maintenance Policies for a Finite Interval. Reliability Engineering & System Safety 94(1):89-96.

Nakagawa, T., and Yasui, K. 1991. Periodic-replacement Models with Threshold Levels. IEEE Transactions on Reliability 40(3):395-397.

Nakagawa, T. 1983. Optimal Number of Failures before Replacement Time. IEEE Transactions on Reliability 32(1):115-116.

Pinedo, M., and Hadavi, K. 1992. Scheduling: Theory, Algorithms and Systems Development. In Operations Research Proceedings; 1991. Berlin, Heidelberg: Springer. pp. 35-42.

Pulcini, G. 2003. Mechanical Reliability and Maintenance Models. In Handbook of Reliability Engineering. London.: Springer. pp. 317-348.

Stadje, W. 2003. Renewal Analysis of a Replacement Process. Operations Research Letters 31(1):1-6.

Tilquin, C., and Cleroux, R. 1975. Periodic Replacement with Minimal Repair at Failure and Adjustment Costs. Naval Research Logistics Quarterly 22(2):243-254.

Wang, W. Y. 2013. Optimum Production and Inspection Modeling with Minimal Repair and Rework Considerations. Applied Mathematical Modelling 37(4):1618-1626.

Zhao, X., Al-Khalifa, K. N., Hamouda, A. M., and Nakagawa, T. 2015. First and last Triggering Event Approaches for Replacement with Minimal Repairs. IEEE Transactions on Reliability 65(1):197-207.

저자소개

이진표 Georgia Institute of Technology에서 Industrial System and Engineering 박사학위를 취득하고 현재 홍익대학교 경영학과 부교수로 재직 중이다. 주요 관심분야는 시스템 효율성, 확률론과 최적화 문제이다

APPENDIX

식 (3)의 정리

$$ETC(N) = \int_0^T [c_1 H(y) + c_2]\, dG^N(y) + \int_T^\infty [c_1 H(T) + c_2]\, dG^N(y) = c_1\left(\int_0^T H(y)\, dG^N(y) + \int_T^\infty H(T)\, dG^N(y)\right) + c_2$$

$$= c_1\left(\int_0^T \int_o^y dH(t)\, dG^N(y) + \int_T^\infty \int_o^T dH(t)\, dG^N(y)\right) + c_2 = c_1\left(\int_0^T \int_t^T dG^N(y)\, dH(t) + \int_0^T \int_T^\infty dG^N(y)\, dH(t)\right) + c_2$$

$$= c_1 \int_0^T \int_t^\infty dG^N(x)\, dH(t) + c_2 = c_1 \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dH(t) + c_2$$

식 (4)의 정리

$$ETR(N) = \int_0^T y\, dG^N(y) + \int_T^\infty T\, dG^N(y) = \int_0^T \int_o^y dt\, dG^N(y) + \int_T^\infty \int_o^{\wedge T} dt\, dG^N(y)$$

$$= \int_0^T \int_t^T dG^N(y)\, dt \;\; + \int_0^T \int_T^\infty dG^N(y)\, dt = \int_0^T \left(\int_t^T dG^N(t) + \int_T^\infty dG^N(t)\right) dt$$

$$= \int_0^T \int_t^\infty dG^N(t)\, dt = \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt$$

식 (6)의 정리

$$ETCR(N+1) - ETCR(N) = \frac{c_1 \int_0^T \left(1 - G^{N+1}(t)\right) dH(t) + c_2}{\int_0^T \left(1 - G^{N+1}(t)\right) dt} - \frac{c_1 \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dH(t) + c_2}{\int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt}$$

$$= \frac{\left(c_1 \int_0^T \left(1 - G^{N+1}(t)\right) dH(t) + c_2\right) \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt}{\int_0^T \left(1 - G^{N+1}(t)\right) dt \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt} - \frac{\left(c_1 \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dH(t) + c_2\right) \int_0^T \left(1 - G^{N+1}(t)\right) dt}{\int_0^T \left(1 - G^{N+1}(t)\right) dt \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt}$$

$$= \frac{c_1 \int_0^T \left(1 - G^{N+1}(t)\right) dH(t) \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt - c_1 \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dH(t) \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt}{\int_0^T \left(1 - G^{N+1}(t)\right) dt \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt}$$

$$- \frac{c_1 \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dH(t) \left(\int_0^T \left(1 - G^{N+1}(t)\right) dt - \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt\right) - c_2 \int_0^T \left(G^N(t) - G^{N+1}(t)\right) dt}{\int_0^T \left(1 - G^{N+1}(t)\right) dt \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt}$$

$$= \left\{ \frac{\int_0^T e^{-\theta t} \frac{(\theta t)^N}{N!} dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t} \frac{(\theta t)^N}{N!} dt} \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt - \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dH(t) - \frac{c_2}{c_1} \right\} c_1 \frac{c_1 \int_0^T \left(G^N(t) - G^{N+1}(t)\right) dt}{\int_0^T \left(1 - G^{N+1}(t)\right) dt \int_0^T \left(1 - G^N(t)\right) dt}$$

위의 마지막 등식은 다음에 의해서 성립한다

$$G^{N}(t)-G^{N+1}(t)=P\{N(t)\geq N\}-P\{N(t)\geq N+1\}=\sum_{n=N}^{\infty}e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{n}}{n!}-\sum_{n=N+1}^{\infty}e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{n}}{n!}=e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N}}{N!}$$

Lemma 1-1의 증명

$$\frac{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N+1}}{(N+1)!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N+1}}{(N+1)!}dt}-\frac{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N}}{N!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N}}{N!}dt}=\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt}-\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dt}$$

$$=\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dt-\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dH(t)\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dt}$$

고장률 $h(t)\equiv\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$은 t에 따라서 증가하므로, 모든 $t<T$에 대하여 $h(T)-h(t)>0$이 성립한다. 그러므로

$$\frac{d}{dT}\left[\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dt-\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dH(t)\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt\right]$$

$$=e^{-\theta T}(\theta T)^{N+1}h(T)\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dt+\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)e^{-\theta T}(\theta T)^{N}-e^{-\theta T}(\theta T)^{N}h(T)\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt$$
$$-\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dH(t)e^{-\theta T}(\theta T)^{N+1}$$

$$=e^{-\theta T}(\theta T)^{N}\left\{\theta Th(T)\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dt+\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)-h(T)\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt-\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dH(t)\theta T\right\}$$

$$=e^{-\theta T}(\theta T)^{N}\left\{h(T)\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}[\theta T-\theta t]\,dt-\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}[\theta T-\theta t]\,dH(t)\right\}$$

$$=e^{-\theta T}(\theta T)^{N}\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}[\theta T-\theta t]\,[h(T)-h(t)]\,dt>0$$

그러므로 $\frac{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N+1}}{(N+1)!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N+1}}{(N+1)!}dt}-\frac{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N}}{N!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N}}{N!}dt}$은 N이 증가함에 따라서 증가한다.

Lemma 1-2의 증명

$$\left[\frac{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N+1}}{(N+1)!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N+1}}{(N+1)!}dt}\int_0^T\left(1-G^{N+1}(t)\right)dt-\int_0^T\left(1-G^{N+1}(t)\right)dH(t)-\frac{c_2}{c_1}\right]$$

$$-\left[\frac{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N}}{N!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{N}}{N!}dt}\int_0^T\left(1-G^{N}(t)\right)dt-\int_0^T\left(1-G^{N}(t)\right)dH(t)-\frac{c_2}{c_1}\right]$$

$$=\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt}\int_0^T\left(1-G^{N+1}(t)\right)dt-\int_0^T\left(1-G^{N+1}(t)\right)dH(t)$$

$$-\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dt}\int_0^T\left(1-G^{N}(t)\right)dt+\int_0^T\left(1-G^{N}(t)\right)dH(t)$$

$$=\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt}\left(\int_0^T\left(1-G^{N+1}(t)\right)dt-\int_0^T\left(1-G^{N}(t)\right)dt\right)+\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt}\int_0^T\left(1-G^{N}(t)\right)dt$$

$$-\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dt}\int_0^T\left(1-G^{N}(t)\right)dt-\int_0^T\left(G^{N}(t)-G^{N+1}(t)\right)dH(t)$$

$$=\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt}\int_0^T\left(G^{N}(t)-G^{N+1}(t)\right)dt+\left(\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt}-\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dt}\right)\int_0^T\left(1-G^{N}(t)\right)dt$$

$$-\int_0^T\left(G^{N}(t)-G^{N+1}(t)\right)dH(t)$$

$$=\int_0^T\left(G^{N}(t)-G^{N+1}(t)\right)dt\left(\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt}-\frac{\int_0^T\left(G^{N}(t)-G^{N+1}(t)\right)dH(t)}{\int_0^T\left(G^{N}(t)-G^{N+1}(t)\right)dt}\right)$$

$$+\left(\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt}-\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dt}\right)\int_0^T\left(1-G^{N}(t)\right)dt$$

$$=\left(\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N+1}dt}-\frac{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}(\theta t)^{N}dt}\right)\int_0^T\left(1-G^N(t)\right)dt\ \Big\rangle\ 0$$

그러므로 $\dfrac{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^N}{N!}dH(t)}{\int_0^T e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^N}{N!}dt}\int_0^T\left(1-G^N(t)\right)dt-\int_0^T\left(1-G^N(t)\right)dH(t)-\dfrac{c_2}{c_1}$은 N이 증가함에 따라서 증가한다.