韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2020.59.1.1
2020. 2. 제 59권, 제 1호, 1-15.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2020, Vol. 59, No. 1, 1-15.

부등식의 영역 교육과정 분석: 고교-대학수학의 연계 및 수학적 연결성을 중심으로

이송희(연세대학교, 교육대학원생)・임웅(연세대학교, 부교수)†
†교신저자

An analysis of the curriculum on inequalities as regions: Using curriculum articulation and mathematical connections

Lee, Song Hee (Yonsei University, thd2432@yonsei.ac.kr)
Lim, Woong (Yonsei University, woonglim@yonsei.ac.kr)†
†Corresponding Author

초록

본 연구에서는 2015개정교육과정에서 '경제수학'으로 이동한 '부등식의 영역(inequalities as regions)' 단원과 미적분학 사이의 연계성 및 수학적 연결성을 분석하여 '부등식의 영역'이 미적분학의 중요한 선수학습개념이라는 논지를 제시한다. 교육과정의 연계성 측면에서 직업 교과에 포함된 '경제수학'을 학습하지 않고 이공계에 진학하는 학생들은 '부등식의 영역'의 절차적 개념적 지식의 부재로 인하여 미적분학에서 학습 위계의 '격차'를 경험할 가능성이 크다. 수학적 연결성의 관점에서는 '부등식의 영역'과 밀접한 연관이 있는 미적분학의 다변수함수 이론의 학습에 어려움을 느낄 수 있다고 판단된다.

Abstract

In this paper, we analyzed curriculum materials on inequalities as regions. Constructs such as mathematical connections and curriculum articulation were used as a framework. As for articulation, our findings indicate the topic of inequalities as regions addresses meaningful subordinate mathematical thinking and skills that serve prerequisite to calculus. Regarding connections, mathematical concepts involving inequalities extend to multivariate calculus. One implication is, as an unintended consequence of curricular decision of 2015 Revised National Curriculum to teach the topic only in mathematical economics, students who plan to study STEM subjects in college but opt out of mathematics economics in high school may miss the key concept and naturally struggle to understand calculus especially the theory of multivariate function of calculus.

* 주요어 : 2015개정교육과정, 부등식의 영역, 교육과정 연계성, 연계성 준거모형, 수학적 연결성, 미적분학, 기초수학
* **Key words** : 2015 revised national curriculum, regions of inequalities, curriculum articulation, analysis taxonomy for curricular articulation, mathematical connections, calculus, remedial mathematics
* 이 논문은 2019년도 연세대학교 연구비 지원을 받아 수행된 것임(과제번호 2019-22-0024).
* **Address** : Graduate School of Education, Yonsei University, Seoul, Korea
* **ZDM Classification** : U24
* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97C90
* **Received**: November 26, 2019 **Revised**: December 20, 2019 **Accepted**: January 20, 2020

Ⅰ. 서론

본 연구는 학교수학의 ‘부등식의 영역(inequalities as regions)’ 단원이 미적분학과 어떤 연관이 있는지를 교육학 이론에서 전통적인 분류인 교육과정의 연계성과 수학적 연결성의 관점에서 분석하고자 한다. 연계성과 관련하여, Tyler(1949)는 교육과정의 조직 원리로서 계속성, 계열성, 통합성을 제시하였다. 계속성과 계열성은 학년 간, 학교 급간의 수직적 연계성에 해당하며 통합성은 교육과정 내용들이 횡적으로 연계되어야 한다는 원칙이다. 수학적 연결성과 관련하여, 수학은 여러 아이디어들이 긴밀하게 상호 연결되어 있으며, 일찍이 Whitehead, Russell(1913)은 수학에서 상이한 영역의 개념과 결과들은 상호보완적으로 발전되어 간다고 하였다.

본 연구가 다루고자 하는 ‘부등식의 영역’은 국내 교육과정에서 ‘계통학습기’인 제2차 수학교육과정부터 단원명이 사용되기 시작한 이후 2009개정교육과정까지 줄곧 고등학교 1학년 수학에 포함되었는데 2015개정교육과정에서는 해당 단원이 직업선택과목인 ′경제수학′으로 옮겨짐으로써 교수⋅학습 방법 및 유의 사항에서 내용의 깊이에 대한 감축이 이루어졌다. 이는 ‘부등식의 영역’을 활용하는 선형계획법이 ′경제수학′에서 핵심적인 개념이기 때문이다.

그러나 ‘부등식의 영역’은 좌표평면 위의 특정 영역을 나타낼 수 있게 하는 개념으로서 대수와 기하를 연결하는 내용을 제시한다. 학교수학에서 특정 방정식을 만족하는 점들의 집합을 다루는 단원은 많지만 학생들로 하여금 원의 내부와 외부, 직선의 윗부분과 아랫부분 등의 좌표평면 상의 기하적인 특정 영역을 대수적으로 생각하고 다룰 수 있는 기회를 제공하는 단원은 ‘부등식의 영역’이라고 할 수 있다. 이러한 배경에서 ‘부등식의 영역’이 ‘경제수학’을 학습하는 학생들만 배울 내용이 아니라 이공계에 진학하는 학생들이 배워야 하는 단원이라는 견해를 고려한다면 ‘부등식의 영역’ 단원의 이동으로 인하여 내용 감축을 초래한 교육적 함의를 객관적으로 고찰할 필요가 있다. 이에 본 연구는 좌표평면 위의 특정 영역을 나타낼 수 있게 하는 ‘부등식의 영역’ 단원과 미적분학 간 교육과정의 연계성 및 수학적 연결성에 대해 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학 교육과정 연계성

연계성(articulation)이란 학년 혹은 학교 수준사이의 학습 내용이 의미 있는 관련을 맺고 있는 상태이다. 적절한 관련을 맺고 있다는 것은 교육 내용들이 서로 의미 있게 구분된다는 것과 그 사이의 관련이 원활하다는 것을 동시에 나타낸다(Woo, 1998).

Tyler(1949)는 교육과정의 조직원리로서 계속성(continuity), 계열성(sequence), 통합성(integration)의 3요소를 제시하였다. Taba(1962)는 Tyler의 이론을 확장하여 누적학습(cumulative learning) 개념을 정의하였다. 누적학습은 동일요소의 단순한 반복이 아니라 점진적인 심화⋅확대를 더 강조하고 특정 개념의 학습에 있어서 더 의미 있는 통합으로 이끌어 주도록 하는 내용 조직을 뜻하는 것으로 Tyler의 계속성과 계열성을 포함하는 개념이다. 이후 Bruner(1963)는 아동의 사고를 어른의 사고로 발전시키기 위해서는 나선형 배열을 통해 같은 내용이 점차 더 높은 수준에서 여러 번 반복해서 제시될 필요가 있다고 주장하였고 Gagne(1970)는 학습을 오랜 기간 동안 지속되는 성향 또는 능력의 변화로 보며 학습의 누적성을 강조하였다.

Tyler의 계속성과 연결성, Taba의 누적학습, Bruner의 나선형 교육과정, Gagne의 학습 위계 이론들을 종합해보면, 교육과정의 수직적 연계성이란 동일한 학습 내용이 학년 간 및 학교 간에 어느 정도 계속 반복되어 점차 더 높은 수준으로 심화, 확대되어 제시되는 원리라고 할 수 있다(Yeo & Kim, 1987, as cited in Song et al., 1991). 결국, 학습 요소는 독립적으로 존재하는 것이 아니라 다른 학습 요소와 상하로 연결되며 위계를 이루고 있다는 관점이 설득력을 얻는다. 좀 더 구체적으로, Song 외(1991)는 선행학습과 후속학습 간에 반복과 심화⋅확대의 두 과정이 적절하게 이루어졌는지의 여부에 따라 선행학습과 후속학습 간에 반복과 심화⋅확대의 두 과정이 적절하게 배합되어 이상적인 연계가 이루어진다는 ‘발전’, 후속학습이 선행학습에 비해 심화 및 확대가 되지 않고 동일한 수준에서 단순한 반복에 그치는 ‘반복’, 학습 위계상에서 일련의 하위 항목 중 일부 항목이 학습과제에서 누락되어 학습을 저해하는 ‘격차’로 나누어

연계성을 판단하였다.

더 나아가 Song 외(1991)는 수직적 연계 정도를 ‘발전(development)’, ‘반복(repetition)’, ‘격차(gap)’로 구분하기 위한 세부적인 준거로서 내용의 표현 방법과 내용의 수준으로 구분하여 연계성 준거모형을 제시했다.

[Table 1] Analysis taxonomy for articulation(Song et al., 1991)

Elements	Levels
Expression of content	ㄱ. Repetition ㄴ. Change of directions and perspectives ㄷ. Advance from ㄴ and formalize concepts
Level of content	a. The same level b. Ready for development c. Enabling understanding d. Unable to understand due to lack of prior knowledge

2. 수학적 연결성

1) 90년대 초반의 연결성 개념

90년 초반에 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)은 실생활 또는 수학 이외의 학문에서 제기되는 문제 상황과 그것의 수학적 표상 사이의 연결하는 모델링 연결(modeling connection)과 두 동치표상 사이와 각각에서의 과정들 사이를 연결하는 수학적 연결(mathematical connection)을 제시하였다(NCTM, 1989). 예를 들어, 같은 문제 상황 혹은 같은 수학적 개념의 서로 다른 표상 사이를 번안할(translate) 수 있는 학생들은 문제해결 과정에서 강력하고 유연한 도구를 가지고 수학의 아름다움과 일관성에 대해 음미할 수 있다.

2) 수학의 외적·내적 연결성

이후 NCTM(2000)은 수학적 연결성이 수학 교과 내 연결, 수학과 타 교과와의 연결, 수학과 실생활의 연결, 이 세 가지로 분류될 수 있으며 수학 교과 내의 연결 또는 다른 지식 유형 간의 연결을 수학 내적 연결성, 수학과 타 교과와의 연결, 수학과 실생활의 연결을 수학 외적 연결성이라고 설명하였다. 수학 내적 연결성은 지식 유형, 표현(형식), 내용(주제) 관련성의 세 가지로 구별되며, 특히 중·고등학교에서는 다양한 표현 간의 동치성에 대한 인식과 그 번안 활동을 강조하고 있다([Table 2] 참조). Peggy, Coxford(1995)가 교사가 학생들에게 경험시킬 수 있는 수학적 연결성으로 제시한 개념적 지식과 절차적 지식 간의 연결, 수학적 주제사이의 연결, 같은 개념의 동치 표현 사이의 연결 역시 수학 내적 연결성에 해당한다(Chang et al., 2016).

[Table 2] A study on the types of internal connectivity of mathematics by grade group(NCTM, 1989)

Grade	Connections
9-12	· Recognizing representations of the same concept · Understanding procedures in one representation may be linked to others · Using connected mathematical ideas and appreciating relations

3) 대수와 기하의 연결

NCTM(1989, 2000)은 대수와 기하의 연결을 고등학교 수학에서 중요한 요소로 보았다. 기하와 대수 사이의 상호작용은 학생들로 하여금 수학 안팎에서 상황으로부터 문제를 구성하고 분석하는 능력을 강화시킨다. 학생들은 종합기하, 좌표기하, 변환기하를 분리하여 학습하지만 각 체계 사이를 비교하고, 대비하고, 번안하는 가능한 많은 기회가 제공되어야 한다. 또한, 학생들은 특별한 문제가 특정한 체계 내에서 보다 쉽게 해결될 수 있다는 점을 이해해야 한다. 예를 들면, 대수에서 함수식의 근을 구하는 것은 함수의 그래프와 x축 사이의 교점을 구하는 것이며 연립방정식의 해를 구하는 것은 방정식 그래프의 교점 좌표를 결정하는 것이다. 또한, $|x-y|$를 구하는 것은 수직선 위의 두 점 x, y 사이의 거리를 구하는 것으로 생각할 수 있으며 함수의 극댓값을 찾는 것은 함수의 그래프의 극대점을 찾는 것으로 생각할 수 있다. 학교수학의 ‘부등식의 영역’은 원의 내부 또는 외부, 직선의 윗부분 또는 아랫부분 등의 좌표평면 상의 기하학적 개념들을 대수(부등식)과 연결하는 중요한 역할을 한다.

3. 선행연구

1) 연계성 연구

Song 외(1991)의 연계성 준거모형을 이용하여

Lee(2006)는 중・고등학교의 확률・통계에 해당하는 내용의 주제별 분석을 통하여 '격차"의 비율이 높게 나타남을 확인하였고 이에 대한 개선점을 제시하였다. Lim(2010)은 미적분 개념에 대한 고등학교와 대학교 공통 주제간 연계성을 분석하고 '반복'에서 '발전'으로, '격차'에서 '발전'으로 고교-대학 연계성을 높일 수 있는 방안을 제안하였다. 한편 Lee(2017)는 고등학교 경제수학과 대학 기초경제수학의 교육 내용을 비교하고, 연계성 준거모형을 활용하여 극한 및 미분법을 중심으로 고등학교 '경제수학'과 대학 '기초경제수학'의 연계성을 분석에 근거하여 고등학교에서 미적분 과목을 학습하지 않고 경제 관련 학과에 진학하는 학생들을 대상으로 대학에서 경제 수학 보충 교과목의 신설을 제안하였다.

연계성 준거모형을 활용하여 연구한 선행연구에서는 각연구의 연계성 분석 결과에서 나타나는 학습 위계의 격차를 해소하기 위한 방안을 제시했다는 점에서 공통점이 있다. 특히, Lim(2010)와 Lee(2017)의 연구에서는 고등학교와 대학교 수학에서의 발전적인 연계성의 중요성을 강조하고, '격차'로 인해 대학에 진학한 학생들이 겪을 어려움에 대해 고찰했다는 점에서 본 연구와 그 방향성을 같이한다.

2) 수학적 연결성 연구

Kim(2012a)은 NCTM에서 제시한 수학 내적 연결성을 개념과 표현으로, 수학 외적 연결성을 교과와 맥락으로 구분하여 수학적 연결성의 관점에서 수학 교과서를 분석하는 틀을 제시하였고, 이를 활용하여 2007개정교육과정에 따른 고등학교 수학 교과서의 복소수 단원을 분석하였다.

Lee(2014)는 Kim(2012a)이 제시한 수학적 연결성의 분석 준거를 토대로 2009개정교육과정의 수학Ⅰ 방정식 영역을 분석하였다. 이와 유사하게 Lee(2019) 역시 Kim(2012a)의 수학적 연결성 분석 준거를 활용하여 2015 개정교육과정 고등학교 1학년 수학 교과서를 수학적 연결성의 관점에서 분석하였다. Kim(2012a), Lee(2014), Lee(2019)는 여러 수학 교과서를 모아서 교과서에서 사용하고 있는 수학 내적, 외적 연결성을 통계적으로 분석하였다는 점에서 공통점이 있다.

Park, Park, Lee(2017)은 2009개정교육과정과 2015개정교육과정 수학과 교육목표에서 실생활에서의 수학적 활용도에 대해 강조하고 있음에도 실제 학교 현장에서는 그에 대한 인식이 매우 낮음을 지적하며 연결성 관점에 중점을 두고 문제 해결 능력 강화와 수학적 의사소통능력을 향상시키기 위해서 개발된 미국의 CMP 교육과정의 방정식, 부등식 단원을 수학적 연결성 관점에서 분석하였다. 이들은 CMP 교과서의 방정식, 부등식과 함수 단원의 다양한 표현 양식(상황・언어적 서술, 표, 그래프, 공식) 간의 수학적 연결성을 분석하였다. 본 연구와 분석 틀은 다르지만 부등식의 영역이 그 자체로서 상황・언어적 서술, 그래프, 공식(대수적 표현)의 표현 양식 간의 연결을 이루는 단원이라는 점에서 볼 때, 다양한 시각에서 부등식의 영역 개념의 수학적 연결성을 분석하는 연구 동기를 부여해 준다.

Ban, Shin, Lew(2016)는 대수와 기하의 연결 고리를 마련한 해석 기하학의 관점을 바탕으로 삼차방정식을 해석하여 대수와 기하의 연결성에 대한 통찰의 기회를 제공했다. 한편, Lyou, Han(2011)은 대수식을 포함하는 고등학교 수준의 문제 해결 과정에 관련된 대수식의 기하학적 해석 및 문제해결 과정의 특징 등을 고찰하였다. 본 연구의 소재인 부등식의 영역은 학생들로 하여금 좌표평면 상의 점들의 집합을 대수적으로 표현하고 부등식으로 표현된 대수적인 상황을 좌표평면 상에서 기하학적으로 해석할 수 있는 기회를 제공한다는 점에서 대수와 기하를 연결하는 학교수학의 대표적인 예로 볼 수 있으므로 수학적 연결성의 관점에서 의미 있는 연구 주제로 판단된다.

3) 학교수학과 대학수학 사이의 연계성 연구

Sin(2006)은 제7차 고등학교 수학과 교육과정과 대학 기초수학 교과과정의 비교를 통해 대학수학교육에 나타난 학습내용의 축소, 기초과목으로서 수학의 약화, 고등학교 교육과의 연계성 단절, 학문의 특성에 대한 인식 부족 등의 문제점들을 지적하였다. 또한 고교수학과 대학수학의 연계성에 대한 개선 방안으로 대학 기초수학 교과과정의 개정, 미적분학 보충 교과목의 신설과 미적분학 실습 과목 개설, 대학 교양수학 과목의 개설 등을 주장하였다. Yang, Lee(2019)에 따르면 중등 수학교사들은 교원 양성기관 재학 당시 대학 수학의 높은 난이도와

학교 수학과의 연계 부족 때문에 전공 수업을 이해하는 데 어려움이 있었으며 학교 수학과 대학 수학 사이의 연계성에 대해서 소극적, 부정적 반응을 보였다. 또한 교사들은 학교 수학 이상으로 수학적 내용을 확장하는 것을 어려워하는 경향이 있었고 수학의 각 영역 간의 연계성에 대한 인식이 부족한 것으로 나타났다.

Youn, Kwon(2011)에 따르면 예비교사와 현직교사 모두 벡터 개념에 대한 대학수학을 배웠지만 본인이 고등학교 때 배운 지식으로 학생들을 지도하겠다고 설문에 답했다. 이로부터 수학교사가 되는 사람들이 직면하는 학교수학과 대학수학 사이의 이중단절(Klein, 1968)을 확인할 수 있다. 또한 Cho(2012)는 예비교사의 미분영역에 대한 내용지식의 분석을 통해 수학교사 교육 프로그램에서 학교수학과 학문적 수학 사이의 연결이 강조될 필요가 있다고 주장하였다.

지금까지 논의한 위 연구들은 소재나 연구 방법 등에서는 차이가 있으나 모두 학교수학과 대학수학간의 연계성의 중요성을 강조하고 있다.

4) 부등식의 영역 연구

Shin(2009)은 우리 교육과정에서 많은 학생들이 함수의 여러 가지 표현 간의 연결성을 이해하지 못하여 방정식과 함수와의 관계를 반드시 이해해야 하는 '부등식의 영역' 단원 학습에 많은 어려움을 겪고 있는 점을 지적하며 표현의 번역을 강조한 '부등식의 영역' 단원의 교수-학습 자료를 개발하여 수업에 적용해 본 후 수학 학업 성취도와 태도 변화를 분석하였다.

Lee, Lee, Kim(2012)은 '부등식의 영역'을 활용하는 최대, 최소문제(선형계획법)를 등고선 개념 중심으로 Geogebra를 활용하여 지도하고 학생들의 수학적 사고에 미치는 영향에 대해서 알아보았다. 부등식의 영역의 대표적 활용인 선형계획법이 미적분학의 이변수함수 이론에서 제시된 등고선 개념과 관련이 있다는 점에서 본 연구의 주제 중 하나인 부등식의 영역과 수학적 연결성이 있는 미적분학의 단원을 설정하는 근거를 제시할 수 있었다.

이처럼 학계에서는 교과과정에서 수학적 연결성 혹은 학교수학과 대학수학의 연계성 등을 꾸준히 분석해왔고 한편으로는 방정식 및 '부등식의 영역'의 효과적인 교수법에 대하여 연구결과를 축적해왔다. 그러나 본 연구에서 살펴보고자 하는 2015개정교육과정에 따른 '부등식의 영역' 단원과 미적분학 사이의 연계성과 (내적) 연결성의 관점을 동시에 검토함으로써 교육과정 개정에서 파생되는 문제를 다룬 연구는 찾아보기 어렵다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 문제

본 연구는 Song 외(1991)가 제시한 연계성 준거모형을 활용하여 고등수학의 '부등식의 영역' 단원과 미분적분학의 연계성의 양상을 분석한 후 수학 내적 연결성의 관점에서 고등학교 '부등식의 영역' 단원과 미분적분학의 연결성을 살펴보았다. 구체적인 연구 문제는 다음과 같다.

연구 문제 1 : 수학적 연계성 관점에서 고교 '부등식의 영역' 단원과 미적분학의 연계 경로는 어떠한 연계양상을 보여주는가?

연구 문제 2 : 수학적 (내적) 연결성의 관점에서 고교 '부등식의 영역'과 미적분학은 개념과 표현 측면에서 어떤 연결성이 있는가?

2. 분석 방법

본 연구에서는 2015개정교육과정의 중학교, 고등학교 수학 교과서 및 국내 대학에서 미적분학 교재로 많이 사용되는 James Stewart의 <Stewart Calculus> 제7판을 분석 대상으로 하며 개념 묘사를 위해 해당 교과서의 그림을 사용하였다.

첫 번째 연구 문제와 관련한 분석 단원으로는 중학교 1, 2학년, 고등학교 기하, '경제수학' 교과서에서 수직선, 좌표평면, 좌표공간 위의 점들을 다루는 단원들과 미지수가 1개 혹은 2개 이하인 부등식을 다루는 단원들을 선정하였고 학교수학과 연계되는 미적분학의 11장 벡터와 공간기하학에서 좌표 공간, 미지수가 3개 이하인 부등식을 다루는 단원들을 선정하여 분석하였다.

두 번째 연구 문제와 관련한 분석 단원으로는 '부등식의 영역'과 수학적 연결성이 있는 미적분학의 개념들을 탐구하기 위해서 "개념과 표현 측면에서 '부등식의 영역'

과 어떤 연결성이 있는가?”를 기준으로 <Stewart Calculus>의 모든 단원들을 분석하였다. 해당 단원의 내용이 ‘부등식의 영역’에 대한 이해 없이도 학습에 무리가 없는 경우 분석 대상에서 제외하였다.

분석 결과 1장(함수의 극한)에서 12장(벡터함수), 15장(벡터해석)에서는 개념 또는 표현의 측면에서 ‘부등식의 영역’과 수학적 연결성이 있는 단원이 존재하지 않거나 미미함을 확인할 수 있었다. 예를 들어 <Stewart Calculus> 5장(적분의 응용)에서 소개하는 2차원 평면에서의 일반적인 넓이 개념은 ‘부등식의 영역’으로 표현할 수 있다. 그러나 학교수학에서 초등학교부터 여러 가지 평면도형에 대한 넓이 개념을 학습한다는 점(Kim, 2012b)과 고등학교 수학Ⅱ 및 미적분학 과목의 정적분의 활용 단원인 ‘곡선 사이의 넓이’에서 <Stewart Calculus>의 5장에서 다루는 수준과 비슷하게 좌표평면 상의 두 곡선으로 이루어진 일반적인 넓이에 대해서 다루지만 ‘부등식의 영역’ 개념을 사용하지 않는다는 점을 고려할 때 ‘부등식의 영역’에 대한 깊이 있는 이해가 없어도 직관적으로 넓이 개념에 대한 이해가 가능하다고 판단하여 분석 대상 범위에서 제외하였다.

또한, 11장(벡터와 공간기하학)에서는 3차원 공간에서 부등식으로 표현된 점들의 집합을 다루고 있으나 연구 문제 1에서 ‘부등식의 영역’과의 연계성을 살펴볼 것이므로 연구 문제 2의 분석 대상에서 제외하였다.

한편, ‘부등식의 영역’을 활용하는 선형계획법에 해당하는 내용의 본질이 다변수함수 이론의 등고선 개념을 활용한 점이라는 것(Lee et al., 2012)에 착안하여 ‘부등식의 영역’과 이변수함수 이론 사이의 수학적 연결성에 대해서 분석하고자 하였다. 이에 미적분학에서 이변수함수 이론을 다루는 13장 편도함수와 14장 다중적분 단원을 분석하였다.

1) 연구 문제 1

집합론적 관점에서 ‘부등식의 영역’은 R에서 R로의 어떤 관계, 즉 $R \times R$의 어떤 부분집합으로 정의할 수 있다. ‘부등식의 영역’은 미지수가 2개인 부등식의 해를 이루는 점들의 집합을 나타내는 것으로 미지수가 2개인 방정식의 해와 함께 R^2(좌표평면)을 구성한다. 이러한 점에 주목하여 연구 문제 1을 해결하기 위해서 학교수학과 미적분학에서 수직선, 좌표평면, 좌표공간위의 점들을 다루는 단원들을 아래 [Table 3]과 같이 코딩하였고 연계성 준거모형을 활용하여 분석하였다.

[Table 3] Codes for articulation analysis

	Number line (R)	Coordinate plane (R^2)	Coordinate space (R^3)	
Key concept	①	②	③-1	③-2
Solution sets of inequality	④	⑤ (inequality as regions)	⑥	

R, R^2, R^3의 방정식의 해집합 역시 연계성 분석의 대상이 될 수 있으나 이는 본 연구의 범위를 넘어서므로 본 연구에서는 다루지 않도록 한다.

연계의 경로는 R, R^2, R^3을 다음과 같이 기본 개념, 부등식의 해집합의 2가지 기준으로 나누어 분석하였다.

① → ② → ③-1 → ③-2
④ → ⑤ → ⑥

또한, 본 내용을 표로 나타내기 위해 각 화살표를 차례대로 A, B, C, D, E 로 코딩하였다([Table 4]). 연계성 A, B, C는 각각 ①과 ②, ②와 ③-1, ③-1과 ③-2 사이의 연계성을 나타낸다. ①, ②, ③은 각각 R, R^2, R^3 상의 점을 좌표로 나타내는 기본 개념에 대한 단원으로, R^3의 경우 고등학교 ‘기하’ 교과목과 미적분학에서 동시에 나오는 개념이므로 ③-1과 ③-2로 나누었다. 먼저, 각 학교 급에서 사용하는 교과서에서 제시하는 수직선, 좌표평면, 좌표공간의 정의와 수직선, 좌표평면, 좌표공간의 점을 나타내는 방법을 정리해보고 이들의 연계성을 분석하였다.

연계성 D, E는 각각 ④와 ⑤, ⑤와 ⑥사이의 연계성을 나타낸다. ④, ⑤, ⑥는 각각 미지수가 1개 이하, 2개 이하, 3개 이하인 부등식의 해집합이 이루는 R, R^2, R^3

의 부분집합을 나타낸다. 이 중 ⑤은 본 연구의 주제인 ‘부등식의 영역’에 대한 내용이다.

[Table 4] Articulation paths

Articulation	Paths
A	① → ②
B	② → ③-1
C	③-1 → ③-2
D	④ → ⑤
E	⑤ → ⑥

연계성의 의미 규정은 연계준거모형의 분류요소 조합 코딩을 따랐다. 각 분류 요소 조합에 대한 설명은 다음과 같다([Table 5]).

[Table 5] Combination of classification factors and articulation(Song et al., 1991)

Articulation	Combination of classification factors	Descriptions
Repetition	ㄱa	· The method of expression of content is simply repetition · The level of content is the same as that of the preceding stage
	ㄴa(1)	· The method of expression of content is a simple other way; there is a change in direction or perspective · The level of content is simple enumeration
Development	ㄱb	· The method of expression of content is simply repetition · The level of content is developed from the preceding stage
	ㄴa(2)	· The method of expression of content is a simple other way; there is a change in direction or perspective · The level of content is the same as that of the preceding stage, but enumeration is the preparation stage for generalization
	ㄴb	· The method of expression of content is a simple other way; there is a change in direction or perspective · The level of content is developed from the preceding stage
	ㄷa	· The method of expression of content is developed from the change of ㄴ, so that generalized concept can be formed · The level of content is the same as that of the preceding stage
	ㄷb	· The method of expression of content is developed from the change of ㄴ, so that generalized concept can be formed · The level of content is developed from the preceding stage
	ㄷc(1)	· The method of expression of content is developed from the change of ㄴ, so that generalized concept can be formed · The level of content is understood with sufficient explanation from the preceding stage
Gap	ㄱc	· The method of expression of content is simply repetition · The level of content is understood only when it is fully explained from the preceding stage
	ㄱd	· The method of expression of content is simply repetition · The level of content is incomprehensible without prior concepts, even with the help of the preceding stage
	ㄴc	· The method of expression of content is a simple other way; there is a change in direction or perspective · The level of content is understood only when it is fully explained from the preceding stage

	ㄴd	・The method of expression of content is a simple other way; there is a change in direction or perspective ・The level of content is incomprehensible without prior concepts, even with the help of the preceding stage
	ㄷc(2)	・The method of expression of content is developed from the change of ㄴ, so that generalized concept can be formed, which may not be sufficient ・The level of content is understood if there is sufficient explanation from the preceding stage
	ㄷd	・The method of expression of content is developed from the change of ㄴ, so that generalized concept can be formed ・The level of content is incomprehensible without prior concepts, even with the help of the preceding stage

2) 연구 문제 2

연구 문제 2의 해결을 위해서 Kim(2012a)이 제시한 수학 내적 연결성의 분석틀 [Table 6]을 활용하여 '부등식의 영역'과 '미적분학'의 수학적 연결성을 분석하였다. 다수의 선행연구(Lee, 2014; Lee, 2019)가 수학적 연결성을 통계적으로 분석하였지만 본 연구에서는 분석틀로 '부등식의 영역'이라는 개념이 미적분학에서 어떤 수학적 개념과 어떻게 연결되어 있는지를 질적으로 확인하는 준거로 활용하였다. 학교수학에서 다루는 '부등식의 영역'의 가장 대표적인 활용은 선형계획법 즉, 주어진 영역에서의 x, y로 이루어진 특정한 식의 최댓값, 최솟값을 구하는 문제이다. 이때 미적분학에서 다루는 등고선의 개념이 적용되는데(Lee et al., 2012; Choi, 2014), 등고선 개념은 x, y에 대한 이변수함수 $z=f(x,y)$와 평면 $z=k$의 교선을 xy평면에 정사영 시켜 얻은 $f(x,y)=k$이다. 즉, '부등식의 영역'에서의 최대・최소 문제는 미적분학의 이변수함수 이론의 이해와 연결되는 개념으로 생각할 수 있으므로 이러한 수학적 연결성이 이변수함수의 정의역, 이변수함수의 최대・최솟값, 이중적분 등에서 '부등식의 영역'의 이해가 어떻게 개념적, 절차적 지식으로 작용하는지 고찰하였다.

[Table 6] Framework of the mathematical internal connections(Kim, 2012a)

Concept	・Concept-concept ・Concept-procedure ・Procedure-procedure
Representation	・Analyzing of the relationships and equivalent representations ・Connecting a math concept with a representation ・Using everyday (figurative or metaphorical) language for mathematical objects

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 연구 문제 1의 분석 결과 및 논의

1) 연계성 A, B, C의 분석 결과

학교수학에서 실수집합 R과 일대일 대응을 이루는 수직선(①) 개념은 중학교 1학년의 '정수와 유리수' 단원에서 음수 개념을 도입하며 처음으로 나오게 된다. 학교수학에서 R^2와 일대일 대응을 이루는 좌표평면(②) 개념은 중학교 1학년 함수의 '순서쌍과 좌표' 단원에서 처음으로 등장한다. 학교수학에서 좌표공간(③-1)은 전문선택과목인 '기하' 과목에서 처음으로 등장한다. 미적분학의 좌표공간(③-2)은 <Stewart Calculus> 7판의 11장 벡터와 공간기하학 단원에서 삼차원 직교좌표계의 정의 및 좌표공간의 점을 나타내며 등장한다.

(1) 연계성 A (① → ②)

①과 ②에서는 각각 R과 일대일 대응을 이루는 수직선, R^2와 일대일 대응을 이루는 좌표평면을 정의하였고 수직선 및 좌표평면 위의 점을 나타내는 예시를 보여주었다. 내용수준에 있어서는 R에서 R^2로의 확장이 일어났으나 좌표평면을 '수직선을 수직으로 교차하여 생기는 평면'으로 정의했으므로 전단계인 수직선의 도움을 받아 곧바로 발전될 수 있는 수준인 b로 보았다. 또한, 내용의

표현 방법은 제시방향이나 관점의 변화가 없는 단순한 반복인 ㄱ으로 보았다. 따라서 연계성 A는 [Table 6]의 분류 요소의 조합에서 '발전(development)'에 해당하는 ㄱb로 해석할 수 있다.

(2) 연계성 B (② → ③-1)

③-1에서는 ①과 ②에서 정의했던 수직선과 좌표평면 위의 점을 표현하는 방법을 언급하며 3차원 공간상의 점의 위치를 나타내는 방법을 도입하고 있다. 내용의 수준은 R^2에서 R^3로의 확장이 일어났으나 역시 전단계인 수직선과 좌표평면의 도움을 받아 곧바로 발전될 수 있는 수준인 b로 보인다. 또한, 내용의 표현 방법은 제시방향이나 관점의 변화가 없는 단순한 '반복'인 ㄱ으로 분류할 수 있다. 따라서 연계성 B는 연계성 A와 마찬가지로 '발전(development)'에 해당하는 ㄱb로 볼 수 있다.

(3) 연계성 C (③-1 → ③-2)

③-1과 ③-2는 모두 R^3와 일대일 대응을 이루는 공간좌표계를 다루고 있다. 고등학교 '기하'에서 정의하는 공간좌표계와 미적분학에서 정의하고 있는 공간좌표계는 그 내용이 정확히 일치하고 내용의 표현 방법 역시 제시방향이나 관점의 변화가 없는 단순한 반복이었으므로 연계성 C는 '반복(repetition)'에 해당하는 ㄱa로 볼 수 있다.

이상의 논의에서 연계성 A, B, C를 분석한 결과는 다음 [Table 7]과 같다.

[Table. 7] Analysis of articulation A, B, C

	Articulation	Combination of the factors
A	development	ㄱb
B	development	ㄱb
C	repetition	ㄱa

2) 연계성 D, E의 분석 결과

④ 미지수가 1개인 부등식의 해집합: 학교수학에서 부등식은 중학교 2학년의 일차부등식 단원에서 처음 나온다. 이 밖에도 학교수학에서는 연립부등식, 이차부등식, 삼각부등식 등을 다루고 있으며 전문교과인 '심화수학Ⅰ'에서는 삼・사차부등식, 유리・무리부등식, 지수・로그부등식 등을 다루고 있다.

⑤ 부등식의 영역: 미지수가 2개 이하인 부등식의 해집합은 R^2의 부분집합을 이룬다. 학교수학에서 '부등식의 영역'은 직업선택과목의 '경제수학'에 포함되어 있다.

⑥ 미지수가 3개 이하인 부등식의 해집합: 미지수가 3개(또는 3개 이하)인 부등식의 해집합은 R^3의 부분집합을 이룬다. 미적분학에서는 여러 가지 예제 및 연습문제를 통해 부등식의 해집합을 다루고 있다.

④, ⑤, ⑥의 내용을 토대로 이들 간의 연계성을 분석해 보았다.

(1) 연계성 D (④ → ⑤)

④에서는 미지수가 1개인 부등식의 해집합이 실수집합 R의 부분집합을 이룬다는 내용을 다루었다. 학교수학에서는 부등식의 해집합이 실수집합 R의 부분집합을 이룬다는 사실을 언급하기는 하지만 수직선 위에서의 부등식이 나타내는 영역은 주어진 (이차 또는 연립)부등식의 해를 구하기 위한 중간 과정으로 다루고 있었다. 주어진 부등식을 간단한 형태($x<a, x\le a, x>a, x\ge a$)의 부등식으로 바꾸고 수직선 위에 나타내는 영역을 그리는 과정을 통해서 부등식의 해를 구했으므로 미지수가 1개인 부등식의 해집합은 학생들에게 그 자체로서 실수집합의 부분집합이라는 개념적 지식이라기보다는 대수적으로 부등식의 해를 구하기 위한 절차적 지식에 가깝게 느껴질 수 있다.

한편 ⑤에서는 처음부터 특정 부등식이 나타내는 영역이 좌표평면 상의 어떤 점들의 집합인지에 대한 발문으로부터 논의를 시작하고 있으며 좌표평면에서 x, y에 대한 부등식을 만족하는 점(x, y)의 집합을 '부등식의 영역'이라는 용어를 활용하여 명시적으로 정의하고 있다. 이로부터 학생들은 부등식의 해집합이 R^2집합의 부분집합이라는 사실을 정확히 인지할 수 있다.

이상의 논의로부터 ④와 ⑤에서 다루는 내용의 수준은 전단계의 도움을 받아 충분한 설명이 있다면 이해가 가능한 수준인 c로 볼 수 있고 내용의 표현 방법은 [Table 5]의 ㄴ에서 발전해서 일반화된 개념형성이 가능한 ㄷ에 해당한다고 할 수 있다. 그러므로 연계성 D는 ㄷc에 해당하며 ㄷ에서 ㄴ의 변화에서 발전해서 일반화된 개념 형성에 이르기에 충분하다고 판단하였다. 이에

따라 연계성 D는 '발전(development)'에 해당하는 ㄷc(1)으로 분류 하였다.

(2) 연계성 E (⑤ → ⑥)

미적분학에서는 ③-2 이후에 특별히 또 다른 정의를 내리거나 하는 일 없이 예제로서 ⑥의 내용을 소개하고 있다. ③-2에 대한 이해와 함께 그러나 ⑤의 내용('부등식의 영역')에 대한 충분한 이해가 이루어졌다면 미지수가 3개인 부등식이 나타내는 영역이 R^3의 어떤 영역을 나타낼 수 있음을 깨닫는 데에는 무리가 없는 수준으로 보인다. 그러므로 내용의 수준은 전단계의 도움을 받아 곧바로 발전될 수 있는 수준인 b에 해당하며 내용의 표현 방법은 미지수가 2개인 부등식에서 미지수가 3개인 부등식으로의 단순한 반복이므로 ㄱ에 해당한다고 볼 수 있다. 그러므로 연계성 E는 '발전(development)'에 해당하는 ㄱb로 분류하였다.

이상의 논의에서 연계성 D, E를 분석한 결과는 다음 [Table 8]과 같다.

[Table. 8] Analysis of articulation D, E

	Articulation	Combination of the factors
D	development	ㄷc(1)
E	development	ㄱb

연구 문제 1의 분석 결과를 요약하면 다음 [Table 9]와 같다.

[Table. 9] Analysis concerning research question 1

	Articulation	Combination of the factors
A	development	ㄱb
B	development	ㄱb
C	repetition	ㄱa
D	development	ㄷc(1)
E	development	ㄱb

3) 연구 문제 1의 결과에 대한 논의

연계성 준거모형을 활용하여 부등식의 영역과 미적분학 사이의 연계성에 대해서 분석해본 결과 A, B, D, E에서 발전, C에서 반복의 연계성을 확인할 수 있었다. 2015 수학과 각론 교육개정 결과에 따라 부등식의 영역이 경제수학으로 이동하게 될 경우 [Table 3]의 부등식의 영역에 해당하는 ⑤가 삭제되므로 연계성 D와 E가 사라지고, 다음과 같은 새로운 연계성이 생긴다.

새로운 연계성 F : ④ → ⑥

연계성 F를 준거모형을 통해 분석해보면 앞서 언급한 바와 같이 ④에서 미지수가 1개인 부등식의 해집합은 실수집합 R의 부분집합을 이루기는 하나, 학생들에게 그 자체로서 실수집합의 부분집합이라는 개념적 지식이라기보다 대수적으로 부등식의 해를 구하기 위한 절차적 지식으로 다루어진다. 그러나 미적분학에서는 ③-2 이후에 특별히 또 다른 정의를 내리지 않고 예제로서 ⑥의 내용을 다루고 있다. 고등학교에서 부등식의 영역을 학습하지 않고 대학에 와서 미적분학을 접한 학생들이 곧바로 미지수가 3개인 부등식의 해집합을 다루게 되었다고 할 때, 내용의 수준은 전 단계(④)의 도움을 받고도 다른 선수 개념(부등식의 영역) 없이 곧바로 R^3의 부분집합이라고 파악하는 것은 불가능한 수준으로 보이므로, [Table 4]의 내용 수준 분류 기준에 근거하여 d에 해당한다고 볼 수 있다. 한편 내용의 표현방법은 연계성 D에서와 마찬가지로 ㄷ(ㄴ에서 발전해서 일반화 된 개념 형성이 가능한 경우)로 볼 수 있으므로 새로운 연계성 F는 격차에 해당하는 ㄷd로 분류할 수 있다.

이와 같이 교육과정 연계성의 측면에서 부등식의 영역은 미지수가 2개 이하인 부등식의 해집합이 2차원 유클리드 공간 R^2의 부분집합을 이룬다는 것을 처음으로 개념화하는 단원이라는 점에서 의의가 있다. 부등식의 영역을 학습하지 않고 대학에 진학하여 미적분학을 접한 학생들은 격차 F에 의해 미지수가 n개 이하인 부등식의 해집합이 R^n의 부분집합을 이룬다는 사실을 받아들이는데 어려움을 느낄 것으로 예상할 수 있다.

2. 연구 문제 2의 분석 결과 및 논의

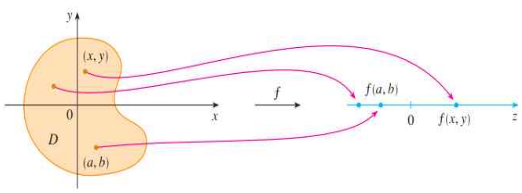
1) 이변수함수의 정의역

학교수학에서 보편적으로 다루는 R의 부분집합은 학

생들이 배우는 대부분의 함수의 정의역이기도 하다. 2015개정교육과정에서 함수의 정의역은 '수학'에서 함수를 정의할 때 처음 등장한다. 이후 새롭게 배우는 모든 함수를 정의할 때 정의역을 함께 다루고 있다.

이변수함수는 미분적분학의 13장 다변수함수 단원에서 처음으로 등장하는데 좌표평면 R^2의 부분집합을 정의역으로 하고 R의 부분집합을 치역으로 갖는 함수이다. 이변수함수 f는 집합 D의 실수의 각 순서쌍 (x,y)에 단 하나의 실수를 대응시키는 규칙으로 $f(x,y)$와 같이 나타낸다[Fig. 1]. 집합 D는 실수 f의 정의역이고 치역은 f가 취하는 실수값들의 집합 $\{f(x,y)|(x,y)\in D\}$이다.

일반적인 점 (x,y)에서 f에 의해 정해진 값을 명확히 표시하기 위해 종종 $z=f(x,y)$로 쓴다. 변수 x와 y는 독립변수, z는 종속변수이다.



[Fig. 1] Domain and range of a function f of two variables

예제 1. 다음 함수들의 정의역을 구하고 $f(3,2)$를 계산하여라.

(a) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ (b) $f(x,y)=x\ln(y^2-x)$

예제 1에서 제시하는 바와 같이 '부등식의 영역'은 이변수함수 개념을 정의하기 위한 구성요소 중 정의역 개념에 해당하는 역할을 한다고 할 수 있고 따라서 이것을 개념('부등식의 영역')과 개념(이변수함수의 정의역) 사이의 연결로 보았다.

2) 이변수함수의 최대・최소

학교수학에서는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 일변수함수의 최대, 최소 정리와 극댓값, 극솟값을 활용하여 $[a,b]$에서 일변수함수의 최댓값과 최솟값을 정의한다. 이와 유사하게 미적분학에서는 이변수함수의 극댓값과 극솟값, 최댓값과 최솟값을 정의한다. 앞서 언급한 이변수함수의 정의역은 '부등식의 영역'으로 표현되므로 예제 2에서 보이는 바와 같이 '부등식의 영역'은 이변수함수의 최대, 최솟값과도 연결되는 개념이라고 할 수 있다.

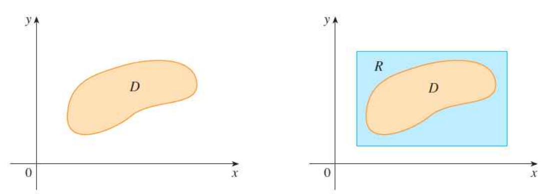
예제 2. 사각형 $D=\{(x,y)|0\le x\le 3, 0\le y\le 2\}$에서 함수 $f(x,y)=x^2-2xy+2y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

이상의 논의에서 '부등식의 영역'은 이변수함수의 최대, 최소문제를 해결하는 데 핵심적인 역할을 한다는 것을 확인할 수 있었다. 수학 내적 연결성의 개념적 관점에서 '부등식의 영역'은 이변수함수의 정의역이라는 개념적 지식으로서 이변수함수의 최대, 최솟값이라는 개념적 지식과 연결되므로 개념과 개념 사이의 연결이라고 할 수 있다. 또한, 이변수함수의 최대, 최솟값을 구하는 과정에서 반드시 '부등식의 영역'의 경곗값을 고려해야 하므로 개념과 절차의 연결이라고도 볼 수 있다.

수학 내적 연결성의 표현적 관점에서 이변수함수의 최대, 최솟값의 후보가 되는 이변수함수의 정의역에 해당하는 '부등식의 영역'의 경곗값을 좌표평면 상에 표현해야 하므로 수학적 대상(개념)을 그래프라는 표상과 연결 짓고 있다고 할 수 있다.

3) 이중적분의 적분구간

일변수함수에 대한 적분에서는 적분하려는 영역이 일반적으로 구간이다. 그러나 이중적분에서는 직사각형의 영역뿐만 아니라 아래 그림[Fig. 2]에서처럼 더 일반적인 모양의 영역 D에서 함수 f를 적분하고자 한다.



[Fig. 2] General regions of double integrals

영역 D가 [Fig. 2]와 같이 어떤 직사각형 영역 R안에 포함됨을 의미하는 유계영역이라 할 때 정의역을 R

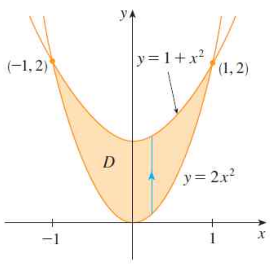
로 하는 새로운 함수 F를 다음과 같이 정의한다.

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y)\ , (x,y)\in D \\ 0 \qquad\quad\ , (x,y)\in R-D \end{cases}$$

만약 F의 이중적분이 R 위에서 존재하면 D위에서 f의 이중적분을 다음과 같이 정의한다.

$$\iint_D f(x,y)dA=\iint_R F(x,y)dA$$

예제 3. D가 포물선 $y=2x^2$과 $y=1+x^2$에 의해 유계된 영역일 때 $\iint_D (x+2y)dA$를 계산하여라.



[Fig. 3] $y=2x^2$과 $y=1+x^2$에 의해 유계된 영역 D

예제 3에서와 같이 이중적분을 세울 때 [Fig. 3]처럼 수직 화살표를 그리면 내부의 적분에 대한 적분한계를 그림으로 나타낼 수 있다. 화살표는 적분의 하단을 제공하는 아래의 경계 $y=g_1(x)$에서 출발하여 적분의 상단을 제공하는 위의 경계 $y=g_2(x)$에서 끝난다.

분석 결과 R^2의 부분집합인 '부등식의 영역'이 미분적분학 후반부의 핵심적인 내용인 다변수함수 이론과 연결되는 것으로 나타났다. 수학 내적 연결성의 개념의 관점에서 '부등식의 영역'은 이중적분의 적분영역에 해당하는 개념적 지식임과 동시에 이중적분의 계산에 이용되는 절차적 지식이라는 것을 확인하였다. 이로부터 '부등식의 영역'과 이중적분 사이에 첫째, 개념과 개념의 연결성 둘째, 개념과 절차의 연결성이 공존함을 알 수 있다. 한편, 수학 내적 연결성의 표현의 관점에서는 '부등식의 영역'은 이중적분의 적분 영역이라는 수학적 대상(개념)을 그림으로 표현할 수 있도록 도와주는 역할을 한다는 것을 확인하였다.

지금까지의 연결성에 대한 내용을 요약해보면 다음과 같다([Table 10]).

[Table 10] Analysis of mathematical internal connectivity between regional inequality and calculus concerning research question 2

Factors of internal connectivity	Concept	Representation
Domain of functions of two variables	·Concept -concept	
Maximum and Minimum of functions of two variables	·Concept -concept ·Concept - procedure	·Connect a mathematical target(concept) with a representation
Integration section of a double integral	·Concept -concept ·Concept - procedure	·Connect a mathematical target(concept) with a representation

4) 수학적 연결성 분석 결과에 대한 논의

지금까지 수학 내적 연결성을 개념, 표현의 관점에서 나누어 부등식의 영역과 미적분학 사이의 연결성에 대해서 살펴보았다. 연구 결과 부등식의 영역은 미적분학과 크게 세 가지 연결성을 확인할 수 있었다. 이를 바탕으로 2015개정교육과정의 변화에 따라 부등식의 영역이 경제수학으로 이동하게 되어 이공계에 진학하는 대부분의 학생들이 부등식의 영역을 학습하지 않고 미적분학을 접하게 되는 경우 생길 수 있는 문제점들에 대해서 살펴보고자 한다.

(1) 이변수함수의 정의역 및 최대·최소

이변수함수는 R^2의 부분집합을 정의역으로 R의 부분집합을 치역으로 갖는 함수이므로 이변수함수 이론의 학습에 앞서 부등식의 영역을 학습하지 않으면 R^2의 부분집합인 이변수함수의 정의역을 좌표평면 상에 나타내고 대수적으로 표현하는 과정에서 학습 상의 어려움이 나타날 수 있다. 또한, 이변수함수의 최대·최솟값은 함수의 극대·극소 또는 정의역의 경계에서 나타나므로 부등식의 영역에 대한 충분한 학습이 이루어지지 않으면 이변수함수의 정의역을 정확히 설정하여 경계를 구하는

것이 쉽지 않을 것이다. 예를 들어, 아래 예제(Ash & Ash, 1986)와 같이 정의역이 주어져있지 않고 정의역을 구하는 과정이 다소 복잡한 경우 부등식의 영역의 개념을 활용하지 않고는 이변수함수의 최대, 최솟값을 구하기 쉽지 않다.

예제 4. 시계와 라디오를 만드는 어떤 회사가 있다. 이 회사는 시계 한 개당 4만원, 라디오 한 대당 6만원의 이익을 낸다고 하자. 세 대의 기계 A, B, C가 제조 과정에 투입된다. 이 구조에서 시계 하나를 만들 때, 기계 A에서는 2시간, 기계B에서는 1시간, 기계 C에서는 3시간이 필요하며, 기계 A, B, C는 각각 주당 최대 70시간, 40시간, 90시간씩 사용할 수 있다. 이러한 정보를 정리하면 다음 표와 같다. 이때 이 회사가 최대의 이익을 내기 위해 주당 몇 개의 시계와 몇 대의 라디오를 만들어야 하는지 구하시오.

(2) 이중적분의 적분 구간

부등식의 영역은 이중적분의 적분 구간에 해당하며 이중적분의 계산 과정에서 이용되므로 ‘부등식의 영역’과 이중적분 간에는 개념적, 절차적 지식이 공존함을 알 수 있었고, ‘부등식의 영역’은 이중적분의 적분영역이라는 수학적 대상을 그림으로 표현할 수 있도록 돕는 역할을 한다는 것을 확인하였다. 또한, 푸비니(Fubini) 정리등과 같이 이중적분 문제의 해결에서 상황에 따라 어떤 변수를 먼저 적분하는 것이 효율적인지에 대한 의사결정과정이 필요한 경우가 적지 않은데 적분 구간의 설정에서 정리를 통해 두 변수의 적분 순서를 바꾸는 과정에서 두 변수의 적분 구간을 정확히 설정하기 위해 좌표평면 R^2의 부분집합인 적분 영역을 ‘부등식의 영역’을 통해 수식으로 표현하는 과정에 대한 이해를 돕는 교과과정이 필요하다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 학교수학의 ‘부등식의 영역’ 단원과 미적분학 사이의 연계성을 분석해보고 수학적 연결성의 관점에서 ‘부등식의 영역’과 미적분학 사이의 수학적 연결성을 알아보았다.

연구문제 1에서 좌표평면 R^2의 부분집합을 나타내는 ‘부등식의 영역’과 관련된 단원들의 미적분학과의 연계성을 분석한 결과, 2015개정에 따라 고등학교에서 부등식의 영역을 학습하지 않고 미적분학을 학습하게 될 학생들은 정의 혹은 부연설명 없이 구의 내부 또는 외부, 평면의 위쪽과 아래쪽 등을 부등식으로 표현하는 공간기하학 단원의 학습에서 격차를 경험하게 된다. 연계성에 대한 Lee(2006), Lim(2010), Lee(2017) 등의 선행연구에서 공통적으로 각각의 연구결과에서 나온 격차를 줄이고자 하는 방안을 제시했다는 점을 주목한다면 본 연구에서는 ‘부등식의 영역’ 단원의 학습 결손으로 인한 미적분학 학습을 저해하는 구체적 요인을 제공하였다는 점에서 의의가 있다.

연구문제 2의 분석 결과, ‘부등식의 영역’은 미적분학의 이변수함수 이론의 이해와 연결되는 개념으로서 이변수함수의 정의역, 최대·최솟값에서 개념적, 절차적 지식으로 작용함을 확인하였다. 이변수함수의 정의역이 R^2의 부분집합임을 고려할 때 기하학적으로 표현된 이변수함수의 정의역과 대수식의 관계에서 부등식의 영역이 중요하게 활용되었다. 한편 그동안 학교수학에서 부등식의 영역의 대표적인 활용으로 여겨졌던 선형계획법 역시 그 뿌리는 이변수함수의 최대·최소 이론에 있었다는 점을 생각하면, 부등식의 영역은 이변수함수 이론의 학습에 있어 중요한 선수개념의 역할을 함을 알 수 있다. 또한, 연결성의 관점에서 부등식의 영역은 이중적분의 적분구간으로서 이중적분의 계산에서 개념적, 절차적 지식으로 작용함을 확인하였다.

선행연구에서 살펴보았듯 NCTM(1989, 2000)에서 제시한 수학적 연결성의 관점에서 교과서를 분석한 연구는 그 대상이 한 학년 전체이거나 특정 대단원인 경우로서 통계적으로 각 연결성의 빈도수 등을 분석한 연구가 많았다. 본 연구에서도 부등식의 영역과 미적분학 사이의 수학 내적 연결성을 분석하기 위해 Kim(2012a)의 분석틀 일부를 활용하였으나 ‘부등식의 영역’이라는 고등학교 수학에 포함된 단원이 미적분학의 어떤 수학적 개념과 어떻게 연결되어 있는지를 질적으로 판단하는 준거로 활용했다는 점에서 위 연구들과 차이가 있다.

지금까지의 연구결과로부터 몇 가지 제언을 하고자 한다. 첫째, 2015개정교육과정에 따른 ‘부등식의 영역’의

학습 결손은 교육과정의 연계성 및 수학적 연결성의 관점에서 미적분학 학습에 지장을 초래할 것으로 예상된다. 따라서 ‘부등식의 영역’은 향후 교육과정 개정에서 이공계에 진학할 모든 학생들이 필수적으로 학습할 수 있도록 고등학교 내에서 그 위치가 재조정되거나 이공계에 입학한 모든 대학생들이 미적분학 이전에 혹은 미적분학과 동시에 필수적으로 학습할 수 있도록 대학에서 교육할 필요가 있다. 둘째, 2015개정교육과정에서는 누리과정과의 연계성을 확보하고 초등학교 수학과 중학교 수학의 연계성을 확보하기 위해 중학교 1학년 수학의 학습량과 난이도를 조절하였다. 이처럼 특정 단원을 교육과정에 추가, 이동, 삭제하게 될 때 누리과정, 중등과정(초·중·고)의 각 학교 급별 연계성과 관련해서는 다양한 연구(Moon & Lim, 2014; Chang, Lee, & Lim, 2015)가 존재한다. 그러나 문헌(Cho, 2012; Sin, 2006; Yang & Lee, 2019)에서 중등수학과 대학수학 사이의 연계성을 강조함에도 불구하고 중등수학의 특정 개념 또는 단원이 대학수학의 어떤 부분과 연관되어 있는지를 다룬 연구는 아직 미미하다. 이에 본 연구는 ‘부등식의 영역’과 미적분학의 연계 및 연결성을 살펴보았다. ‘부등식의 영역’ 외 다른 단원에 대해서도 다양한 관점에서 대학수학과의 연계성 및 연결성을 분석해보는 연구가 이루어질 수 있기를 기대한다. 후속 연구로는 2015개정교육과정에서 감축된 내용을 살펴보는 데에 그치지 않고 향후 고교 수학 교육과정에서 필요한 부분을 구체적으로 제안할 필요가 있다. 그리고 수학교육학계의 연구가 교육과정의 추가, 이동, 삭제 등을 결정하는 데에 중요한 기초자료로 활용되어야 할 것이다. 셋째, 많은 대학에서 신입생들의 기초수학능력을 평가하여 수준에 맞는 수학교육을 제공하고자 노력하고 있지만 기본적으로 가르쳐야 할 내용 선정에 있어서는 개별 강의를 담당하는 교수의 주관에 의존하는 경향이 있다. 각 대학에서 교육과정의 변화를 민감하게 받아들이고 변화를 충분히 반영하여 대학수학 학습을 위해 학생들이 반드시 알아야 할 내용을 선정하고 이를 바탕으로 기초수학 교과목의 교육과정을 제공해야 한다. 이를 위해서는 대학수학의 각 내용 별 사전 지식을 분석하는 연구와 함께 이와 연계되는 고등학교 수학의 내용을 함께 제시하여 고교-대학 수학 사이의 연계를 체계화할 필요가 있다. 넷째, 본 연구에서는 부등식의 영역이 미적분학의 중요한 선수학습개념이라는 것을 보였다. 그러나 어느 특정한 선수학습개념이 얼마나 중요하며 선수학습의 효과적인 학습시기 및 학습량에 대해서는 실제 학습과 관련된 데이터를 수집·분석하는 연구가 필요하다. 이와 관련하여 ‘부등식의 영역’의 학습 결손이 미적분학 교수-학습에 있어서 구체적으로 어떤 어려움을 야기하는지 어느 정도의 선수학습량이 학습 결손을 효과적으로 극복할 수 있는지에 대한 후속연구가 이루어질 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

Ash, C., & Ash, R. B. (1986). *The Calculus Tutoring Book*. New York: IEEE Press.

Ban, E. S., Shin, J. H., & Lew, H. C. (2016). Re-interpreting the descartes perspectives on the connection of algebra and geometry. *Journal of Educational Research in Mathematics, 26*(4), 715-730.

Bruner, J. S. (1963). *The Process of Education*. New York: Vintage Books.

Chang, H. W., Lee, H. Y., & Lim, M. I. (2015). Study on continuity of elementary mathematics curriculum and nuri curriculum. *Journal of Educational Research in Mathematics, 25*(2), 207-223.

Chang, H. W., Lew, S. L., Kim, N. H., …, Hong, G. J. (2016). *Korea Society of Education Studies in Mathematics 2016 Yearbook School Mathematics and Mathematical Connectivity*. Seoul: Kyungmoonsa.

Cho, W. Y. (2012). Analysis of prospective teachers mathematical content knowledge about differential area. *Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics, 14*(2), 233-253.

Choi, K. S. (2014). *A study on teaching and learning problem-solving of the optimization problems in regional inequalities using geogebra* (Master's thesis). Mokwon University. Daejeon. Korea.

Gagne, R. M. (1970). *The Conditions of Learning* (2nd Ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston.

Kim, J. Y. (2012a). *A study on analysis of mathematical textbooks in high school based on mathematical connection: focused on the 10th grade curriculum of complex number* (Master's thesis). Ewha Womans University. Seoul. Korea.

Kim, J. Y. (2012b). *A comparative study on elementary mathematics textbooks of Korea and Japan-focused on* *the area of plane figures* (Master's thesis). Busan National University of Education. Busan. Korea.

Klein, F. (1968). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic·Algebra·Analysis*. New York: Dover Publications.

Lee, C. S. (2006). A study on the linkage between probability and statistics units in view of the secondary curriculum changes (Master's thesis). Yonsei University. Seoul. Korea.

Lee, D. J. (2017). *A study on the relationship between high-school mathematics for economics and undergraduate basic mathematics for economics* (Master's thesis). Yonsei University. Seoul. Korea.

Lee, S. H., Lee, J. H., & Kim, W. K. (2012). The effects of using geogebra of the mathematical thinking in the optimization problems of regional inequalities - focus on level curve. *Korean Journal of Teacher Education, 28*(4), 1-44.

Lee, Y. J. (2019). *An analysis of 10th grade mathematics textbooks based on mathematical connection* (Master's thesis). Korea National University of Education. Chung-Buk. Korea.

Lee, Y. N. (2014). *Analysis of equations in math1 textbooks for high school based on mathematical connection-focused on the 2009 revised curriculum* (Master's thesis). Yonsei University. Seoul. Korea.

Lim, J. A. (2010). *The analysis on the connection for calculus between high school and university mathematics curriculum* (Master's thesis). Yonsei University. Seoul. Korea.

Lyou, I. S. & Han, I. K. (2011). A study on problem solving related with geometric interpretation of algebraic expressions. *Communications of Mathematical Education, 25*(2), 451-472.

Moon, J. W., & Lim, Y. S. (2014). A study on the articulations between the mathematical exploratory areas for age 5 in the 3-5 years old nuri curriculum and the first grade in math curriculum. *Journal of Children's Literature and Education, 15*(3), 403-431.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). P*rinciples and Standard for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

Park, J. M., Park, J. H., & Lee, J. K. (2017). A study of analysis of American CMP textbooks in terms of mathematical connectivity - focused on equations, inequalities, and functions. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 20*(3), 277-302.

Peggy, A. H., & Coxford, A. F. (Eds.). (1995). *Connecting Mathematics Across The Curriculum*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sin, S. J. (2006). *A study on the connection between the 7th high school mathematics curriculum and university mathematical education*. (Master's thesis). Ulsan University. Ulsan. Korea.

Shin, J. H. (2009). *A study on mathematics teaching-learning focused on the translation of representaion in the scope of inequality* (Master's thesis). Ewha Womans University. Seoul. Korea.

Song, S. H., Lee, Y. H., Lee, J. R., Kim, S. W., Kang, S. H., Park, J. Y. ⋯ Yoo, K. H. (1991). Development and application of an analysis taxonomy for curricular articulation in mathematics and science. *Journal of the Korean Association for Science Education, 11*(2), 119-131.

Stewart, J. (2012). *Early Transcendentals Calculus* (7th ed.). Belmont, CA.: Brooks/Cole-Cengage Learning.

Taba, H. (1962). *Basic Principles of Curriculum and Practice*. New York: Harcourt, Brace, Jovanovich, Inc.

The Ministry of Education. (2015). *Mathematics Curriculum. Ministry of Education*. 2015-74 [Supplement 8].

Tyler, R. W. (1949). *Basic Properties of Curriculum and Instruction*. Chicago: University of Chicago Press.

Whitehead, A. N., & Russell, B. (1913). *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press.

Woo, J. H. (1998). *The Educational Foundation of the School Mathematics*. Seoul: Seoul National University Press.

Yang, S. A., & Lee, S. J. (2019). Secondary teacher's advanced knowledge for teaching algebra. *School Mathematics, 21*(2), 419-439.

Yeo, H. J., & Kim, J. H. (1987). A study of sequence on chemistry sphere of the science curriculum in elementary-secondary school. *Kyungbuk Education Forum, 29,* 83-102.

Yoon, H. K., & Kwon, O. N. (2011). Pre-service and in-service teacher's MKT about the concept of vector. *School Mathematics*, *13*(4), 615-632.