The Korean Journal of Applied Statistics (2020) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2020.33.2.161
33(2), 161–170

Performance of the combined $\bar{X}$-S^2 chart according to determining individual control limits

Hwi Ju Hong[a] · Jaeheon Lee[a,1]

[a]Department of Applied Statistics, Chung-Ang University

(Received February 4, 2020; Revised February 26, 2020; Accepted February 28, 2020)

Abstract

The combined $\bar{X}$-S^2 chart is a traditional control chart for simultaneously detecting mean and variance. Control limits for the combined $\bar{X}$-S^2 chart are determined so that each chart has the same individual false alarm rate while maintaining the required false alarm rate for the combined chart. In this paper, we provide flexibility to allow the two charts to have different individual false alarm rates as well as evaluate the effect of flexibility. The individual false alarm rate of the $\bar{X}$ chart is taken to be γ times the individual false alarm rate of the S^2 chart. To evaluate the effect of selecting the value of γ, we use the out-of-control average run length and relative mean index as the performance measure for the combined $\bar{X}$-S^2 chart.

Keywords: average run length, control chart, control limit, false alarm rate, $\bar{X}$-S^2 chart

1. 서론

관리도(control chart)는 생산공정에서 이상원인으로 인한 공정의 변화를 탐지하고 공정을 관리하는 통계적 공정관리의 도구로 오랫동안 사용되어져 왔다. 효율적인 관리도의 조건은 공정이 관리상태인 경우 가능한 한 공정을 오래 유지시키고, 이상상태인 경우 신속하게 이상신호를 발생시키는 것이다. 이러한 관점에서 관리도의 성능을 판단하는 대표적인 측도로 평균런길이(average run length; ARL)가 있다.

런길이는 이상신호까지 관측한 표본의 수를 나타내는데, 일반적으로 런길이의 평균값인 ARL을 관리도 성능의 측도로 사용하고 있다. 따라서 효율적인 관리도는 관리상태에서의 평균런길이(in-control ARL; ICARL)는 크고, 이상상태에서의 평균런길이(out-of-control ARL; OCARL)는 작은 관리도라고 할 수 있다. ICARL 및 OCARL은 통계적 가설검정에서 제1종 오류 및 제2종 오류와 관련되어 있으며, 가설검정에서와 마찬가지로 위에서 언급한 두 가지 조건을 모두 만족시킬 수는 없다. 그래서 일반적으로 ICARL은 사전에 지정한 값을 만족하면서 OCARL이 작은 관리도가 성능이 좋은 관리도가 된다.

실제 공정에서 관리도를 사용하는 경우, 먼저 관리도의 관리한계(control limit)를 설정해야 한다. 관리한계는 위에서 언급한 바와 같이 ICARL이 주어진 값, 또는 제1종 오류인 오경보율(false alarm rate)이 사전에 지정한 α가 되도록 설정하게 된다.

This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (2017R1D1A1B03029035).

[1]Corresponding author: Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, 84 Heukseok-ro, Dongjak-gu, Seoul 06974, Korea. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr

공정의 품질특성치(quality characteristic)가 연속형 변수일 경우 일반적으로 정규분포를 가정하며, 관리도를 사용하여 공정의 평균과 산포의 변화를 동시에 탐지하고 있다. 평균과 산포의 변화를 동시에 탐지하는 Shewhart 관리도 중 가장 전통적인 절차로 $\bar{X}$-R 관리도, $\bar{X}$-S 관리도, $\bar{X}$-S^2 관리도 등이 있는데 (Montgomery, 2013), 이 논문에서는 관리한계의 설정이 가장 용이한 $\bar{X}$-S^2 관리도를 고려하였다. 이때 각 관리도의 이름은 사용하는 관리통계량을 나타내는 것으로, 각각 표본평균 $\bar{X}$, 표본범위 R, 표본표준편차 S, 표본분산 S^2을 사용하는 관리도임을 의미한다.

평균과 산포의 변화를 동시에 탐지하기 위해 두 관리도를 병행하는 절차의 성능에 대해서는 많은 연구가 있었는데, 최근 연구로는 McCracken 등 (2013), Sanusi 등 (2019), Quinino 등 (2020)이 있으며, 좀 더 상세한 참고문헌 목록은 리뷰 논문인 McCracken과 Chakraborti (2013)를 참고할 수 있다. 최근 연구에 대해 간략하게 소개하면 다음과 같다. McCracken 등 (2013)은 평균의 변화를 탐지하는 통계량과 산포의 변화를 탐지한 통계량의 최댓값과 거리를 관리통계량으로 사용하는 절차를 제안하였고, Sanusi 등 (2019)은 각 통계량으로 exponentially weighted moving average (EWMA)를 사용할 때 최댓값과 거리를 관리통계량으로 사용하는 절차로 이를 확장시켰다. Quinino 등 (2020)은 계량형 데이터를 계수형 검사를 통해 그룹 데이터로 변환시켜 평균과 산포의 변화를 탐지하는 관리도 절차를 제안하였다.

하지만 평균의 변화와 산포의 변화를 동시에 탐지하고자 두 개의 관리도를 병행하여 사용할 때, 두 관리도의 관리한계를 설정하는 방법에 대해서는 많은 연구가 진행되지 않았다. 이에 대한 사전 연구를 간략하게 살펴보면, Saniga (1991)와 McWilliams 등 (2001) 등은 ICARL과 OCARL에 통계적 또는 경제적인 제약을 주고 이를 만족하도록 개별 관리도를 설계하는 절차 및 프로그램을 제공했고, 최근 Faraz 등 (2019)은 in-control run length (ICRL)의 특정한 백분위수가 주어진 값 이상이 되도록 개별 관리도의 관리한계를 설정하는 백분위수 기반 설계(percentile-based design) 절차를 제안하였다. 그러나 전통적으로 가장 많이 사용하는 설계 방법은 두 관리도의 개별적인 오경보율은 동일하면서 병행하는 관리도의 오경보율이 주어진 값을 만족하도록 설계는 것이다. 이와 같은 방법은 연구자가 탐지하고자 하는 공정의 평균과 산포의 변화에 대한 특별한 정보가 없거나 관심 정도가 유사한 경우 적합한 방법일 것이다.

이 논문에서는 병행하는 관리도의 오경보율은 주어진 값을 만족하지만 개별 관리도의 오경보율은 동일하지 않게 설정할 경우 병행하는 관리도의 성능이 어떻게 변화하는지, 다시 말해 개별 관리도의 관리한계의 설정이 병행하는 관리도의 성능에 어떤 영향을 주는지 연구를 수행한 결과를 제시하고자 한다.

공정의 특성에 따라 개별 관리도의 오경보가 유발시키는 비용 등의 심각성이 서로 다를 수 있기 때문에 이를 고려하여 관리한계를 설정하는 것은 올바른 관리도의 설계 방법이 될 것이다. 이 논문에서는 $\bar{X}$-S^2 관리도의 오경보율은 주어진 값을 만족하면서 개별 관리도인 $\bar{X}$ 관리도와 S^2 관리도의 오경보율은 상대적으로 다양하게 설정하여, 이에 대한 효과를 알아보고 효율적인 $\bar{X}$-S^2 관리도의 설계에 대하여 제안하고자 한다.

2. $\bar{X}$-S^2 관리도의 설계

2.1. $\bar{X}$ 관리도와 S^2 관리도의 설계 및 특성

관리도의 설계(design)는 표본크기, 표본추출간격, 그리고 관리한계를 설정하는 것을 말한다. 일반적으로 표본크기와 표본추출간격은 공정의 상황과 비용을 고려하여 설정하며, 관리한계는 주어진 통계적 특성을 만족하도록 설정하고 있다. 즉, 사전에 주어진 오경보율(제1종 오류), 또는 ICARL값을 만족하도록 관리한계를 설정한다.

공정의 품질특성치가 관리상태인 경우 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$을 따르며 각 시점에서 크기 n의 표본을 추출한다고 가정하자. 먼저 공정 평균의 변화를 탐지하는 $\bar{X}$ 관리도의 오경보율은 $\alpha_{\bar{X}}$이고 제2종 오류는 $\beta_{\bar{X}}$라 하자.

그러면 $\bar{X}$ 관리도의 관리한계인 관리하한(lower control limit; LCL) $\mathrm{LCL}_{\bar{X}}$와 관리상한(upper control limit; UCL) $\mathrm{UCL}_{\bar{X}}$는

$$\mathrm{LCL}_{\bar{X}} = \mu_0 - k\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \qquad \mathrm{UCL}_{\bar{X}} = \mu_0 + k\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \tag{2.1}$$

가 된다. 이때 $z_{(\alpha)}$를 표준정규분포에서 상위 $100(1-\alpha)$ 백분위수라고 할 경우 $k = z_{(\alpha_{\bar{X}}/2)}$로 설정한다. $\bar{X}$ 관리도는 각 시점에서 계산된 $\bar{X}$가 $\mathrm{LCL}_{\bar{X}}$ 또는 $\mathrm{UCL}_{\bar{X}}$를 벗어날 경우 이상신호를 주며, 이 경우 관리상태에서의 평균런길이는 $\mathrm{ICARL}_{\bar{X}} = 1/\alpha_{\bar{X}}$가 된다.

다음으로 공정 산포의 변화를 탐지하는 S^2 관리도에서 오경보율은 α_{S^2}이고 제2종 오류는 β_{S^2}이라 하자. 이 논문에서 산포의 변화는 공정 관리에서 일반적으로 관심이 많은 양의 변화만을 고려하기로 한다. 따라서 S^2 관리도의 관리한계는 관리상한만 고려하면 된다. 이때 관리통계량인 S^2의 분포는 비대칭이기 때문에 확률한계를 사용하면, S^2 관리도의 관리상한 UCL_{S^2}은

$$\mathrm{UCL}_{S^2} = \frac{\sigma_0^2}{n-1}\, l \tag{2.2}$$

이 된다. 이때 $\chi^2_{(v;\alpha)}$를 자유도가 v인 카이제곱분포에서 상위 $100(1-\alpha)$ 백분위수라고 할 경우 $l = \chi^2_{(n-1;\alpha_{S^2})}$으로 설정한다. S^2 관리도는 각 시점에서 계산된 S^2이 UCL_{S^2}을 벗어날 경우 이상신호를 주며, 이 경우 관리상태에서의 평균런길이는 $\mathrm{ICARL}_{S^2} = 1/\alpha_{S^2}$이 된다.

이상상태에서의 공정 평균과 분산을 각각 μ_1과 $\sigma_1^2\,(> \sigma_0^2)$이라 하고, 평균의 변화량은 $\delta(\mu) = |\mu_1 - \mu_0|/\sigma_0$이고 산포의 변화량은 $\delta(\sigma) = \sigma_1/\sigma_0$로 표현할 경우, 각 관리도의 제2종 오류는

$$\beta_{\bar{X}} = \Phi\left(\frac{\delta(\mu)\sqrt{n}+k}{\delta(\sigma)}\right) - \Phi\left(\frac{\delta(\mu)\sqrt{n}-k}{\delta(\sigma)}\right), \qquad \beta_{S^2} = \chi^2_{n-1}\left(\frac{l}{\delta(\sigma)^2}\right)$$

이 됨을 알 수 있다. 여기서 $\Phi(\cdot)$와 $\chi^2_v(\cdot)$는 각각 표준정규분포와 자유도가 v인 카이제곱분포의 누적분포함수를 나타낸다. 이 경우 각 관리도의 이상상태에서의 평균런길이는 각각 $\mathrm{OCARL}_{\bar{X}} = 1/(1-\beta_{\bar{X}})$와 $\mathrm{OCARL}_{S^2} = 1/(1-\beta_{S^2})$이 된다.

참고로, 공정의 변화를 탐지하는 관리도 절차는 통계적 가설검정과 유사한 점이 많다. 이 논문에서 고려하는 관리도 절차는 정규분포를 가정한 일표본에서 귀무가설은 $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$이고 대립가설은 $H_1 : \mu = \mu_1\,(\neq \mu_0),\ \sigma^2 = \sigma_1^2\,(> \sigma_0^2)$일 때 이를 매시점마다 검정하는 절차와 동일하다.

2.2. $\bar{X}$-S^2 관리도에서 각 관리도의 오경보율을 동일하게 설정하는 경우

$\bar{X}$-S^2 관리도는 공정의 평균과 산포를 동시에 관리하는 Shewhart 관리도로서, $\bar{X}$ 관리도와 S^2 관리도를 병행하여 사용하는 절차이다. $\bar{X}$-S^2 관리도의 관리한계는 두 관리도를 병행하여 사용할 때 오경보율이 α가 되도록 설정할 수 있다.

품질특성치가 정규분포를 따르는 경우 표본평균과 표본분산, 즉 $\bar{X}$와 S^2은 통계적으로 독립이기 때문에, $\bar{X}$ 관리도와 S^2 관리도는 서로 독립적으로 운영될 수 있다. 따라서 $\bar{X}$-S^2 관리도의 오경보율 α와 제2종 오류 β는 각각 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= (1-\alpha_{\bar{X}})(1-\alpha_{S^2}), \\ \beta &= \beta_{\bar{X}}\beta_{S^2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

일반적으로 $\bar{X}$-S^2 관리도의 관리한계는 $\bar{X}$ 관리도의 오경보율 $\alpha_{\bar{X}}$와 S^2관리도의 오경보율 α_{S^2}은 동일하면서, $\bar{X}$-S^2 관리도의 오경보율은 α를 만족하도록 설정한다. $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_{S^2}$로 설정하는 것은 서론에서

언급한 바와 같이 연구자가 공정 평균과 산포의 변화에 대한 관심이 유사하거나 다른 특별한 정보가 없는 경우에 해당될 것이다. 이와 같은 설정하에서 $\bar{X}$ 관리도와 S^2 관리도의 오경보율은 식 (2.3)으로부터 다음과 같이 됨을 알 수 있다.

$$\alpha_{\bar{X}} = \alpha_{S^2} = 1 - \sqrt{1-\alpha}. \tag{2.4}$$

식 (2.4)의 오경보율을 만족하도록 식 (2.1)과 식 (2.2)의 관리한계에서 k와 l을 설정할 경우, 두 관리도를 병행하는 $\bar{X}$-S^2 관리도의 오경보율은 주어진 α를 만족하게 되는 것이다.

$\bar{X}$-S^2 관리도의 관리상태와 이상상태일 때의 평균런길이는 각각 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\text{ICARL} = \frac{1}{\alpha}, \qquad \text{OCARL} = \frac{1}{1-\beta}.$$

2.3. $\bar{X}$-S^2 관리도에서 각 관리도의 오경보율을 동일하지 않게 설정하는 경우

공정의 특성에 따라 공정 평균의 변화에 더 관심이 많은 경우가 있고 또는 그 반대의 경우가 있을 수 있다. 따라서 이 논문에서는 $\bar{X}$ 관리도의 오경보율 $\alpha_{\bar{X}}$와 S^2 관리도의 오경보율 α_{S^2}을 동일하게 설정하는 것 이외에 다음과 같이 일반적으로 설정하는 것으로 고려하고자 한다.

$$\alpha_{\bar{X}} = \gamma\alpha_{S^2}, \tag{2.5}$$

여기서 γ는 양수만 고려한다. 만일 $\gamma > 1$로 설정하는 경우에는 $\alpha_{\bar{X}} > \alpha_{S^2}$가 되기 때문에 동일하게 설정하는 경우에 비해 $\bar{X}$ 관리도의 오경보율은 더 커지지만 관리한계의 폭은 더 줄어들게 된다. 따라서 평균의 변화를 좀 더 민감하게 탐지할 수 있게 된다. 반대로 $0 < \gamma < 1$로 설정하는 경우에는 S^2 관리도의 관리한계의 폭이 상대적으로 더 줄어들게 되어, 산포의 변화를 좀 더 민감하게 탐지할 수 있게 되는 것이다.

오경보율이 α인 $\bar{X}$-S^2 관리도의 관리한계를 설정하기 위해 식 (2.3)에서 각 관리도의 오경보율 $\alpha_{\bar{X}}$와 α_{S^2}을 설정해야 한다. 식 (2.5)를 식 (2.3)에 대입하여 먼저 α_{S^2}을 계산하고 식 (2.5)에 의해 $\alpha_{\bar{X}}$를 계산하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\alpha_{\bar{X}} = \frac{(\gamma+1) - \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4\alpha\gamma}}{2}, \qquad \alpha_{S^2} = \frac{(\gamma+1) - \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma}. \tag{2.6}$$

식 (2.6)의 오경보율을 만족하도록 식 (2.1)과 식 (2.2)의 관리한계에서 k와 l을 설정할 경우, 각 관리도의 오경보율은 식 (2.5)를 만족하면서 두 관리도를 병행하는 $\bar{X}$-S^2 관리도의 오경보율은 주어진 α를 만족하게 되는 것이다.

3. 각 관리도의 오경보율 설정에 따른 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능

여기에서는 γ값의 변화에 따른 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능을 비교하고, γ값 설정의 영향을 평가하고자 한다.

일반적으로 관리도의 성능은 사전에 정한 오경보율을 만족하면서 공정이 이상상태일 때 이상신호를 얼마나 빨리 발생시키는가에 따라 결정된다. 따라서 이상상태에서의 평균런길이인 OCARL이 작을수록 관리도의 성능이 더 좋다고 평가할 수 있다. $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능을 살펴보기 위하여 공정 평균과 산포의 다양한 변화를 고려하였다. 모든 변화에 대한 전반적인 성능을 평가하기 위해 다음과 같이 정의되는 relative mean index (RMI)라는 측도를 함께 이용하였다.

$$\text{RMI}(j) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{\text{ARL}_{\delta_i}(j) - \text{MARL}_{\delta_i}}{\text{MARL}_{\delta_i}}. \tag{3.1}$$

Table 3.1. k and l values in control limits with $\alpha = 0.0027$ and $n = 5$

	γ						
	0.2	0.5	0.667	1	1.5	2	5
k	3.509	3.320	3.269	3.205	3.152	3.121	3.055
l	16.659	17.158	17.393	17.799	18.295	18.699	20.228

Table 3.2. OCARL and RMI values with $\alpha = 0.0027$ and $n = 5$ when $\delta(\sigma)$=1

$\delta(\mu)$	γ						
	0.2	0.5	0.667	1	1.5	2	5
0.25	259.02	211.40	198.10	181.75	168.51	160.97	**145.38**
0.50	93.98	64.03	57.62	50.55	45.37	42.61	**37.27**
0.75	28.03	19.26	17.46	15.50	14.06	13.30	**11.83**
1.00	9.65	7.10	6.57	5.97	5.53	5.30	**4.84**
1.50	2.27	1.94	1.87	1.79	1.72	1.69	**1.62**
2.00	1.20	1.14	1.13	1.11	1.10	1.10	**1.08**
2.50	1.02	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	**1.01**
3.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	**1.00**
4.00	1.00	1.00	1.00	**1.00**	**1.00**	**1.00**	**1.00**
5.00	**1.00**	**1.00**	**1.00**	**1.00**	**1.00**	**1.00**	**1.00**
RMI	0.519	0.253	0.194	0.128	0.079	0.053	**0.000**

OCARL = the out-of-control ARL (average run length); RMI = relative mean index.

a개의 관리도 성능을 비교한다고 가정할 때, m은 고려하는 변화량의 수, $\text{ARL}_{\delta_i}(j)$는 공정 모수의 변화량이 δ_i인 경우 관리도 j ($j = 1, 2, \ldots, a$)의 OCARL값, 그리고 MARL_{δ_i}는 주어진 δ_i에서 비교하는 a개 관리도들의 $\text{ARL}_{\delta_i}(j)$값들 중 가장 작은 값을 나타낸다. 따라서 RMI(j)는 관리도 j가 각 변화량에 대해 성능이 가장 좋은 관리도와의 상대적 편차들의 평균을 의미하며, 이 값이 작을수록 모든 변화에 대해 전반적으로 성능이 좋은 관리도라고 할 수 있다. Zhang 등 (2016)도 RMI 측도를 이용하여 관리도의 성능을 비교하였다.

이 논문에서는 OCARL과 RMI를 이용하여 관리도의 성능을 평가하고, γ값 설정에 따른 영향 및 합리적인 γ값 설정 방법을 제시하고자 한다. γ값에 따른 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능을 비교하기 위해 오경보율은 $\alpha = 0.005$, 0.0027, 0.002 (이 경우 관리상태에서의 평균런길이는 각각 ICARL = 200, 370.4, 500), 표본의 크기는 $n = 3$, 5, 10을 사용하였다. α와 n이 다른 경우에도 OCARL값의 경향이 전반적으로 유사하기 때문에, $\alpha = 0.0027$ (ICARL = 370.4)과 $n = 5$인 경우를 중심으로 살펴보고자 한다. 이 경우 γ값에 따른 식 (2.1)과 식 (2.2)의 k와 l을 계산하여 Table 3.1에 제시하였다. 이 값들은 $\alpha = 0.0027$인 경우 식 (2.6)을 이용하여 $\alpha_{\bar{X}}$와 α_{S^2}를 계산한 후, $k = z_{(\alpha_{\bar{X}}/2)}$와 $n = 5$일 때 $l = \chi^2_{(n-1;\alpha_{S^2})}$이라는 식을 이용하여 계산한 수치이다.

Table 3.2부터 Table 3.4는 $\gamma = 0.2$, 0.5, 0.667, 1, 1.5, 2, 5인 경우 $\bar{X}$-S^2 관리도의 OCARL과 RMI를 계산한 결과이다. 이를 통해 공정 평균과 산포의 변화에 대한 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능을 γ값에 따라 확인할 수 있다. 표에서 굵은 고딕체로 표시된 수치는 주어진 변화량 또는 전체 변화량에 대해 OCARL 또는 RMI값이 최소인 경우를 나타내며 (반올림 이전의 수치를 비교하여 표시함), 이 경우에서 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능이 가장 좋다고 할 수 있다.

Table 3.2는 공정 산포의 변화는 고려하지 않고 평균의 변화만 고려했을 때 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능에 대한 결과이다. 공정 평균의 변화가 아주 큰 경우 ($\delta(\mu) \geq 3$) γ값에 따른 영향은 거의 없는 것으로 나타났

Table 3.3. OCARL and RMI values with $\alpha = 0.0027$ and $n = 5$ when $\delta(\mu) = 0$

$\delta(\sigma)$	γ						
	0.2	0.5	0.667	1	1.5	2	5
1.25	**28.18**	29.01	29.56	30.66	32.15	33.44	38.61
1.50	**7.51**	7.67	7.79	8.04	8.37	8.68	9.95
1.75	**3.58**	3.63	3.67	3.75	3.87	3.97	4.42
2.00	**2.31**	2.33	2.35	2.38	2.44	2.48	2.68
2.50	**1.48**	1.48	1.49	1.50	1.52	1.53	1.60
3.00	**1.22**	1.22	1.22	1.23	1.24	1.24	1.27
3.50	**1.11**	1.11	1.12	1.12	1.12	1.13	1.14
4.00	**1.06**	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08
5.00	**1.02**	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03
RMI	**0.000**	0.078	0.141	0.268	0.446	0.603	1.262

OCARL = the out-of-control ARL (average run length); RMI = relative mean index.

Table 3.4. OCARL and RMI values with $\alpha = 0.0027$ and $n = 5$ when $\delta(\mu) = 1.5$

$\delta(\mu)$	$\delta(\sigma)$	γ						
		0.2	0.5	0.667	1	1.5	2	5
1.5	1.25	2.14	1.91	1.85	1.79	1.75	1.72	**1.67**
1.5	1.50	1.92	1.78	1.75	1.71	1.69	1.67	**1.65**
1.5	1.75	1.68	1.61	1.59	1.58	1.57	**1.57**	1.57
1.5	2.00	1.49	1.45	1.45	1.44	**1.44**	1.44	1.46
1.5	2.50	1.25	1.24	**1.24**	1.24	1.25	1.25	1.27
1.5	3.00	1.14	**1.14**	1.14	1.14	1.14	1.14	1.16
1.5	3.50	1.08	**1.08**	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09
1.5	4.00	1.05	**1.05**	1.05	1.05	1.05	1.05	1.06
1.5	5.00	**1.02**	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02
RMI		0.061	0.029	0.021	0.014	0.010	**0.008**	0.010

OCARL = the out-of-control ARL (average run length); RMI = relative mean index.

다. 평균의 변화가 아주 작은 $\delta(\mu) = 0.25$인 경우를 살펴보면 OCARL값은 $\gamma = 5$일 때 145.38이고 이때 가장 작은 값을 갖는다. 이것은 공정 평균에 $0.25\sigma_0$만큼의 변화가 발생한 경우 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능은 $\gamma = 5$일 때가 가장 좋다는 것을 의미한다. 다른 공정 평균의 변화에 대해서도 $\gamma = 5$일 때가 가장 작은 OCARL값을 가지며, 따라서 전반적인 성능을 나타내는 RMI도 $\gamma = 5$일 때 가장 작은 값을 갖는다. 따라서 공정 산포의 변화는 없고 평균의 변화만 발생하는 경우 γ값이 클수록 좋은 성능을 갖는다는 것을 알 수 있는데, 이것은 앞에서 언급했던 바와 같이 γ가 클수록 $\bar{X}$ 관리도의 관리한계의 폭이 상대적으로 작아지기 때문에 충분히 예상했던 결과이다.

Table 3.3은 공정 평균의 변화는 고려하지 않고 산포의 변화만 고려했을 때 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능에 대한 결과이다. γ가 작을수록 공정 산포의 변화를 더 민감하게 탐지할 수 있기 때문에 산포의 변화만 발생한 경우 $\gamma = 0.2$일 때 성능이 가장 좋을 것이라고 예상했고, 실제 $\bar{X}$-S^2 관리도의 OCARL과 RMI는 $\gamma = 0.2$일 때 최소값을 갖는다고 나타났다.

Table 3.4는 공정 평균에 대한 변화량이 $\delta(\mu) = 1.5$일 때, 산포의 변화에 대한 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능을 비교한 결과이다. 산포의 변화가 상대적으로 작은 경우 ($\delta(\sigma) \leq 1.5$) $\gamma = 5$일 때 성능이 가장 좋았고, 산포의 변화가 점점 커질수록 관리도의 성능이 가장 좋은 γ값은 점점 작아지는 것을 알 수 있다. 산포의

Table 3.5. RMI values with $\alpha = 0.0027$ and $n = 5$

$\delta(\mu)$	$\delta(\sigma)$	γ						
		0.2	0.5	0.667	1	1.5	2	5
All	1	0.519	0.253	0.194	0.128	0.079	0.053	**0.000**
0.00	All	**0.000**	0.078	0.141	0.268	0.446	0.603	1.262
0.25	All	**0.002**	0.003	0.006	0.016	0.030	0.043	0.098
0.50	All	0.032	0.012	**0.010**	0.011	0.016	0.023	0.056
0.75	All	0.066	0.029	0.022	0.016	**0.015**	0.017	0.035
1.00	All	0.077	0.034	0.026	0.017	0.013	**0.013**	0.022
1.50	All	0.061	0.029	0.021	0.014	0.010	**0.008**	0.010
2.00	All	0.033	0.015	0.012	0.008	0.005	**0.004**	0.005
2.50	All	0.013	0.006	0.004	0.003	0.002	**0.002**	0.003
3.00	All	0.005	0.002	0.001	0.001	**0.001**	0.001	0.002
4.00	All	0.001	0.000	0.000	**0.000**	0.000	0.000	0.000
5.00	All	0.000	0.000	0.000	**0.000**	0.000	0.000	0.000
Total		0.072	0.035	0.028	0.021	**0.019**	0.019	0.031

RMI = relative mean index.

Table 3.6. RMI values with all combinations

α	n	γ						
		0.2	0.5	0.667	1	1.5	2	5
0.0050	3	0.089	0.041	0.031	0.021	0.016	**0.015**	0.023
	5	0.064	0.031	0.025	0.019	**0.017**	0.018	0.029
	10	0.044	0.023	0.019	0.016	**0.015**	0.016	0.026
0.0027	3	0.099	0.045	0.034	0.024	0.018	**0.016**	0.023
	5	0.072	0.035	0.028	0.021	**0.019**	0.019	0.031
	10	0.049	0.025	0.021	0.017	**0.017**	0.018	0.028
0.0020	3	0.103	0.048	0.036	0.025	0.018	**0.017**	0.024
	5	0.075	0.036	0.029	0.022	**0.020**	0.020	0.031
	10	0.051	0.026	0.022	0.018	**0.017**	0.018	0.029
Total		0.072	0.034	0.027	0.020	**0.017**	0.018	0.027

RMI = relative mean index.

변화가 큰 경우 S^2 관리도의 역할이 더 중요하기 때문에 이와 같은 결과가 나왔다고 판단된다. 모든 변화에 대한 전반적이 성능을 나타내는 RMI값을 살펴보면 $\gamma = 2$일 때 최소값을 갖기 때문에 $\gamma = 2$로 설정하는 것이 $\bar{X}$-S^2 관리도의 전반적인 성능을 가장 좋게 한다고 볼 수 있다. Table 3.4는 $\delta(\mu) = 1.5$로 고정한 경우에 대한 결과인데, $\delta(\mu)$를 다른 값으로 설정한 경우에 대해서는 Table 3.5에서 그 전반적인 결과를 확인할 수 있다.

Table 3.5는 $\alpha = 0.0027$이고 $n = 5$인 경우 다양한 공정 평균과 산포의 변화에 대해 RMI를 계산한 결과이다. 공정 평균의 변화는 $\delta(\mu) = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5$를 고려했고, 산포의 변화는 $\delta(\sigma) = 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5$를 고려했다. $\delta(\mu)$와 $\delta(\sigma)$의 값에서 'All'로 표시된 것은 모든 변화량을 다 고려한 경우를 나타낸다. 즉, 1번째 행의 $\delta(\mu) = $ All과 $\delta(\sigma) = 1$인 경우는 공정 산포에는 변화가 없고 평균에만 변화가 있는 경우로서 Table 3.2의 RMI값이 되고, 2번째 행의 $\delta(\mu) = 0$과 $\delta(\sigma) = $ All인 경우는 공정 평균에는 변화가 없고 산포에만 변화가 있는 경우로서 Table 3.3의 RMI값이 된다. 또한 7번째 행의 $\delta(\mu) = 1.5$와 $\delta(\sigma) = $ All인 경우는 Table 3.4의 RMI값이 된다.

Table 3.5의 결과를 살펴보면, 공정 평균의 변화량이 아주 작거나 크지 않은 경우 ($0.75 \leq \delta(\mu) \leq 3$) $\gamma = 1.5$ 또는 2인 경우 성능이 가장 좋게 나타났다. 공정 평균과 산포의 변화를 모두 고려했을 때, $\gamma = 1.5$인 경우가 관리도의 성능이 가장 좋았으며 $\gamma = 2$인 경우도 거의 유사하게 성능이 좋게 나타났다.

마지막으로 Table 3.6은 $\alpha = 0.005, 0.0027, 0.002$ (ICARL = 200, 370.4, 500)이고 $n = 3, 5, 10$인 경우 공정 평균과 산포의 모든 변화량에 대한 $\bar{X}$-S^2 관리도의 RMI를 계산한 결과이다. 이 결과를 살펴보면 $\gamma = 1.5$일 때 최소값 0.017을 가졌으며, $\gamma = 2$일 때 거의 유사한 값인 0.018을 갖는 것을 알 수 있다. 따라서 공정 평균과 산포의 변화에 대한 특별한 정보가 없는 경우, 전통적으로 사용해 왔던 $\gamma = 1$ 대신 $\gamma = 1.5$ 또는 2로 설정하는 것이 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능을 더 좋게 한다는 결론을 얻게 되었다.

4. 결론

$\bar{X}$-S^2 관리도를 이용하여 공정 평균과 산포의 변화를 동시에 탐지하는 경우, 일반적인 관리도의 설계 방법은 $\bar{X}$ 관리도의 오경보율과 S^2 관리도의 오경보율을 동일하게 하면서 병행하는 관리도의 오경보율은 주어진 값을 만족하도록 관리한계를 설정하는 것이다. 그러나 공정의 특성에 따라 개별 관리도의 오경보율의 중요도가 유사하지 않은 경우도 발생할 수 있다.

이 논문에서는 $\bar{X}$ 관리도의 오경보율 $\alpha_{\bar{X}}$와 S^2 관리도의 오경보율 α_{S^2}이 $\alpha_{\bar{X}} = \gamma\alpha_{S^2}$의 관계를 만족하도록 $\bar{X}$-S^2 관리도의 관리한계를 설정하고, 7개의 γ값과 여러 가지 평균 및 산포의 변화량에 대하여 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능을 비교하였다. 관리도의 성능은 특정한 변화량에 대해서는 이상상태에서의 평균런 길이인 OCARL, 다양한 변화량에 대한 전반적인 성능에 대해서는 relative mean index (RMI)를 사용하였다.

위의 측도를 사용하여 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능을 비교한 결과 공정 평균의 변화가 상대적으로 큰 경우에는 γ가 큰 경우 성능이 좋았으며, 공정 산포의 변화가 상대적으로 큰 경우에는 γ가 작은 경우 성능이 좋게 나타났다. 그리고 이 논문에서 고려한 모든 변화에 대해서는 $\gamma = 1.5$ 또는 2로 설정했을 때 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능이 전반적으로 가장 좋음을 확인하였다. 따라서 일반적으로 사용하는 $\gamma = 1$ 대신 $\gamma = 1.5$ 또는 2로 설정하여 $\bar{X}$-S^2 관리도를 운영하는 것을 제안한다.

두 개 이상의 관리도를 병행하여 사용하는 관리도의 설계에서 각 관리도의 오경보율 설정에 관한 문제는 항상 존재한다. 이 논문은 $\bar{X}$-S^2 관리도의 설계 방법에 대해 연구하였는데, 추후 병행하여 사용하는 다른 관리도에 대해서도 이와 같은 연구를 진행할 예정이다. 병행하는 관리도로는 공정 평균과 산포의 변화를 동시에 탐지하는 관리도 이외에 서로 다른 형태의 관리도인 Shewhart 관리도, cumulative sum (CUSUM) 관리도, 또는 exponentially weighted moving average (EWMA) 관리도를 병행하는 관리도 또한 고려할 수 있을 것이다.

References

Faraz, A., Saniga, E., and Montgomery, D. (2019). Percentile-based control chart design with an application to Shewhart $\bar{X}$ and S^2 control charts, *Quality and Reliability Engineering International*, **35**, 116–126.

McCracken, A. K. and Chakraborti, S. (2013). Control charts for joint monitoring of mean and variance: an overview, *Quality Technology and Quantitative Management*, **10**, 17–36.

McCracken, A. K., Chakraborti, S., and Mukherjee, A. (2013). Control charts for simultaneous monitoring of unknown mean and variance of normally distributed processes, *Journal of Quality Technology*, **45**, 360–376.

McWilliams, T. , Saniga, E., and Davis, D. (2001). Economic-statistical design of $\bar{X}$ and R or $\bar{X}$ and S charts, *Journal of Quality Technology*, **33**, 234–241.

Montgomery, D. C. (2013). *Statistical Quality Control: A Modern Introduction* (7th ed.), John Wiley & Sons, Singapore.

Quinino, R. C., Cruz, F. R. B., and Ho, L. L. (2020). Attribute inspection control charts for the joint monitoring of mean and variance, *Computers & Industrial Engineering*, **139**, 106131.

Saniga, E. (1991). Joint statistical design of $\bar{X}$ and R control charts, *Journal of Quality Technology*, **23**, 156–162.

Sanusi, R. A., Mukherjee, A., and Xie, M. (2019). A comparative study of some EWMA schemes for simultaneous monitoring of mean and variance of a Gaussian process, *Computers & Industrial Engineering*, **135**, 426–439.

Zhang, C, Tsung, F., and Xiang, D. (2016). Monitoring censored lifetime data with a weighted-likelihood scheme, *Naval Research Logistics*, **63**, 631–646.

관리한계 설정에 따른 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능

홍휘주[a] · 이재헌[a,1]

[a]중앙대학교 응용통계학과

(2020년 2월 4일 접수, 2020년 2월 26일 수정, 2020년 2월 28일 채택)

요 약

$\bar{X}$-S^2 관리도는 공정 평균과 산포의 변화를 동시에 탐지하는 전통적인 관리도들 중 하나이다. 일반적으로 사용하는 $\bar{X}$-S^2 관리도의 설계 방법은 병행하는 관리도의 오경보율은 주어진 값을 만족하면서 각 관리도는 동일한 개별적인 오경보율을 갖도록 설정하는 것이다. 이 논문에서는 각 관리도의 개별 오경보율을 다르게 설정하고 이것이 $\bar{X}$-S^2 관리도의 성능에 어떠한 영향을 주는지 살펴보았다. 이를 위해 $\bar{X}$ 관리도의 오경보율을 S^2 관리도의 오경보율에 γ배한 경우를 고려하였고, γ값에 따른 $\bar{X}$-S^2 관리도 성능을 비교하였다. 관리도의 성능을 평가하는 측도로는 특정한 변화에 대한 성능을 판단하는 경우 이상상태에서의 평균런길이를 사용하였고, 전반적인 성능을 판단하는 경우 RMI(relative mean index)를 사용하였다.

주요용어: 관리도, 관리한계, 오경보율, 평균런길이, $\bar{X}$-S^2 관리도

이 논문은 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No. 2017R1D1A1B03029035).

[1]교신저자: (06974) 서울특별시 동작구 흑석로 84, 중앙대학교 응용통계학과. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr