

## 시간최적제어 기법을 이용한 계단응답 실험시간 단축 방법

이지태<sup>†</sup>

경북대학교 화학공학과  
41566, 대구광역시 대학로 80  
(2020년 1월 16일 접수, 2020년 3월 9일 수정본 접수, 2020년 3월 16일 채택)

### Experimental Test Time Reduction Method for Step Responses Using the Time-Optimal Control Technique

Jietae Lee<sup>†</sup>

Department of Chemical Engineering, Kyungpook National University, 80, Daehak-ro, Buk-gu, Daegu, 41566, Korea  
(Received 16 January 2020; Received in revised form 9 March 2020; accepted 16 March 2020)

#### 요 약

공정 실험을 통하여 공정 동특성 모델을 얻는 과정은 제어시스템 설계에 있어 시간과 비용이 드는 매우 중요한 과정이다. 이를 위한 계단응답은 공정의 동특성을 이해하고 동특성 모델을 얻는 데 사용되는 오래된 하나의 정형화된 공정응답이다. 계단응답에 근거한 방법에서는 공정입력에 계단 변화를 주었을 때 나타나는 공정출력을 측정하여야 하는데, open-loop 상태로 장시간 운전해야 하는 것이 단점으로 지적된다. 이 단점을 완화하기 위하여 시간최적제어 기법을 이용하는 계단응답을 얻는 시간을 최소화 하는 방법이 제안되어 있다. 이 최적화에는 반복 계산이 필요한데, 여기서는 반복 계산이 필요 없는 방법을 제안한다. 계단응답을 위한 시간이 획기적으로 줄어드는 것을 보여주는 모사 결과들을 얻었으며, 이 방법을 제어기 자동튜닝에 응용하여 이 자동튜닝에 널리 채택되고 있는 relay feedback 자동튜닝과 비교한 모사 결과들을 제시하였다.

**Abstract** – The step to obtain a process dynamic model through process experiments is very important because it needs times and expenditures. Step response method is one of the standard methods to have long been used for understanding process dynamics, obtaining dynamical models and designing control systems. For the step response, it is usually required to measure process output for a step input change in the open-loop manner. Its disadvantage criticized is the long open-loop operation. For this, a method based on the time-optimal control technique to minimize the test time for obtaining the step response has been recently presented. However, the method requires iterative computations for the minimization of test times. Here, a method where iterative computations are not required is proposed. Simulation results are presented to show that test times to obtain step responses are reduced considerably and an autotuning method based on the proposed method is compared with the relay feedback autotuning method accepted widely for the autotuning of controllers.

Key words: Step response, Time-optimal control, Reduced test times, Controller autotuning, Relay feedback autotuning

#### 1. 서 론

공정 동특성 모델을 얻어 공정 동특성을 이해하고 제어시스템을 설계하기 위하여, 실험적으로는 다양한 정형화된 공정입력에 대한 공정응답이 사용된다[1]. 여기에는 계단응답이 가장 오래된 널리 사용되고 있는 것 중 하나이다. 계단응답으로부터 overdamped 공정, underdamped 공정, overshoot 공정, 역응답 공정, 등등의 공정

분류에 관한 정보를 얻을 수 있고, 공정모델 변수인 시간지연, 시간상수, 공정의 정상상태 이득, damping factor, 등등의 값에 관한 정보를 얻을 수 있다. 이들은 바로 비례적분미분(Proportional-Integral-Derivative (PID)) 제어기 같은 제어시스템 설계에 사용될 수 있고[1], 다른 더 진보된 모델확인방법을 위한 변수의 선택 및 초기 값으로 사용될 수 있다[2]. 비례적분미분 제어기뿐만 아니라 모델예측제어기(Model Predictive Controller)의 설계에도 이 계단응답에 근거한 모델이 사용되고 있기도 하다[3-4].

계단응답은 공정입력의 계단변화에 대한 공정출력을 기록하여 얻는다. 간단한 실험이지만 open-loop로 장시간의 실험이 진행되어야 하는 단점이 지적된다[2]. 이 단점을 완화하기 위하여 시간최적 제어 기법[5]에 근거하는 계단응답을 위한 실험 시간을 획기적으로

<sup>†</sup>To whom correspondence should be addressed.

E-mail: jtleee@knu.ac.kr

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

줄일 수 있는 방법이 최근에 제안되어 있다[6]. 제어시스템 설계에서 공정응답을 얻는 과정이 시간과 비용이 들어가기 때문에 이 실험 시간을 줄이는 것은 매우 중요하다[2]. 실험시간을 줄이는 것과 동시에 계단응답 실험이 외부 환경의 변화로 실패하였을 때, 제대로 된 초기의 응답으로부터 전체 계단응답을 복원하는 데도 이용할 수 있다[6]. 그러나 이 방법은 시간 최적화를 위하여 반복 계산이 필요하다. 본 연구는 이 반복 계산이 필요 없는 방법을 제안한다. 계단응답을 얻는 시간을 줄이는 효과를 그대로 유지하면서 계산량을 줄여 빠른 공정에도 응용할 수 있게 하여 준다. 모사 결과는 실험 시간을 획기적으로 줄이는 것을 보여주고 있다.

반복계산이 없는 간단한 계산으로 본 계단응답에 근거한 방법이 제어기 자동튜닝 용도로의 응용이 가능하게 되었다. 제어기 자동튜닝은 제어기를 실제 공정에 적용할 때 매우 유용한데, relay feedback 자동튜닝이 널리 채택되어 사용되어 오고 있다[2,7-8]. 화학공정의 제어에는 강건한 진동이 적은 제어기가 선호되는데, relay feedback 자동튜닝은 공정에 따라 강건하지 않는 진동이 심한 제어기가 얻어지는 것을 볼 수 있다[8]. 이는 공정 모델을 얻는 relay feedback 진동의 진동 주파수가 다소 높아서 그런 것으로, 피할 수 없을 것으로 보인다. 반면에 계단응답에 근거한 모델은 이런 일이 없으며, 넓은 영역의 공정에 대하여 강건한 진동이 적은 제어기 튜닝 결과를 기대할 수 있다[1]. 본 방법을 이용하는 자동튜닝 방법을 relay feedback 자동튜닝 방법과 비교하여 검사 시간과 제어 결과에서의 우수성을 보였다.

2. Motivation

다음의 선형 공정을 고려한다.

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{1}$$

여기서 Y(s)와 U(s)는 각각 공정 출력(y(t))과 입력 변수(u(t))의 Laplace 변환이고, G(s)는 공정 전달함수이다. 공정의 계단응답은 Fig. 1(a)와 같이 공정입력에 계단 입력  $u_s(t)$ 를 넣을 때 나오는 공정의 출력  $y_s(t)$ 를 이른다. 여기서 공정 입력은 단위 계단 입력을 가정한다(크기 M의 입력이면 각 크기를 M을 고려하여 조정하면 된다). 최종 정상상태에 도달하는 데는 긴 시간이 필요하다. 이와는 달리 Fig. 1(b)와 같이 공정입력에  $u_{sw}(t)$ 를 넣으면 공정 출력  $y_{sw}(t)$ 가 처음에는 빠르게 증가하고, 적절한 시간에  $u_{sw}(t)$ 가 1로 switching되면 빠른 시간에 새로운 정상상태에 다다를 수 있다. 새로운 정상상태에 다다랐다는 것이 확인되면 이 시간  $t_{exp}$ 에서 실험을 중지하고 아래에 보인 방법으로 계단응답 전체를 얻어낼 수 있다.

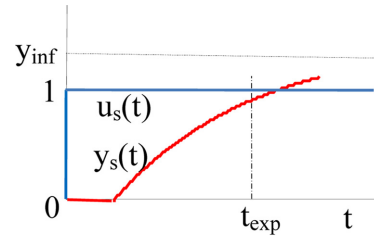
Fig. 1(b)의 입력은

$$u_{sw}(t) = \begin{cases} \alpha_1, & 0 < t < t_a \\ 1, & t_a < t \end{cases} \tag{2}$$

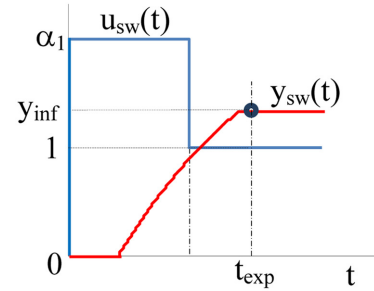
이고, 공정 출력은 다음과 같이 된다.

$$y_{sw}(t) = \begin{cases} \alpha_1 y_s(t), & 0 < t < t_a \\ \alpha_1 y_s(t) - (\alpha_1 - 1)y_s(t - t_a), & t_a < t \end{cases} \tag{3}$$

여기서  $y_s(t)$ 는 단위계단입력  $u_s(t)$ 에 따른 공정 응답이다. 식 (3)으로부터 다음과 같이 계단응답  $y_s(t)$ 를 얻을 수 있다.



(a) Step Test



(b) Switched Step Test (One-time Switching)

Fig. 1. Step input and output responses.

$$y_s(t) = \begin{cases} y_{sw}(t)/\alpha_1, & 0 < t < t_a \\ y_{sw}(t)/\alpha_1 + (1 - 1/\alpha_1)y_s(t - t_a), & t_a < t < t_{exp} \\ y_{inf}/\alpha_1 + (1 - 1/\alpha_1)y_s(t - t_a), & t_{exp} < t \end{cases} \tag{4}$$

시간  $t > t_{exp}$ 에서  $y_{sw}(t)$ 가 새로운 정상상태  $y_{inf}$ 에 유지되는 것을 이용하였다. 실험은  $t_{exp}$ 까지만 하면 된다.

공정입력  $u(t)$ 의 최대값  $a_1$ 이 주어져 있으면, 최소  $t_{exp}$ 를 주는  $t_a$ 가 존재한다. 시간최적제어는 이 최적 switching 시간  $t_a$ 와 제어 끝 시간  $t_{exp}$ 를 계산하는 문제이다. 일차 공정의 경우 한번의 switching으로 최적의  $t_{exp}$ 가 얻어진다. 실제 n차 공정의 경우, n번의 switching이 필요하다. 이 경우 한번의 switching으로는 최적의  $t_{exp}$ 를 얻을 수는 없지만, 대신에 실험시간을 줄이는 효과를 얻을 수 있다. 공정 모델이 있으면  $t_a$ 와  $t_{exp}$ 를 이론적으로 계산할 수 있지만, 공정 모델이 없으면 이들을 실험이 끝나 모델이 얻어지기 전에는 알 수가 없어, 이 시간최적제어 기법 자체로는 계단응답을 얻는 시간을 줄이는 데 사용할 수 없다.

Lee et al. [6]은 Fig. 1(b)의 시간최적제어 실험 대신에, 실험은 Fig. 1(a)의 기본적인 계단응답 실험을 진행하고 식 (3)으로부터  $y_{sw}(t)$ 를 얻어 시간최적제어 계산을 하는 방법을 제안하였다.  $a_1$ 이 주어진 상태에서 switching 시간  $t_a$ 를 반복계산으로 결정하는 방법을 이용하였다. Fig. 1(b)의 응답은 Fig. 1(a)의 계단응답으로부터 계산되어 지는 것이기 때문에 switching 시간  $t_a$ 의 계산에 한계는 없다. 시간최적제어 기법을 이용하여 계단응답을 얻는 실험시간을 획기적으로 줄이는 결과를 얻었다[6]. 여기서는 앞의 방법에서 요구되는 반복계산을 회피하는 방법을 제안하고자 한다.

3. 계단응답의 실험시간을 줄이는 방법

본 연구에서의 실험은 Fig. 2(a)의 일반 계단응답을 얻는 것과 같다. 이로부터 Fig. 2(b)의 세 번의 switching이 있는 계단입력을 고

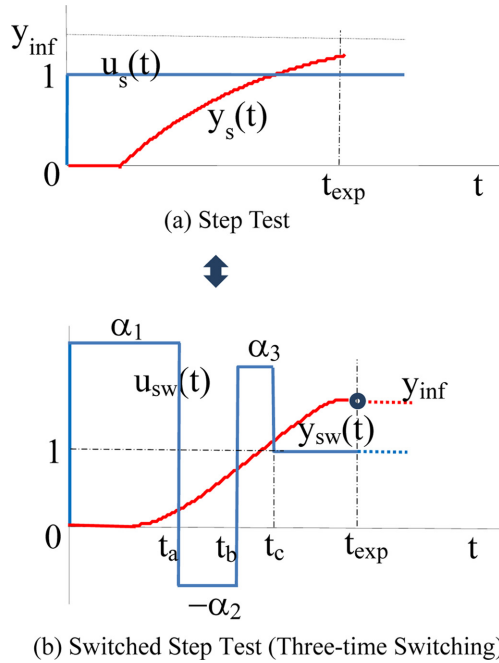


Fig. 2. Proposed input and output responses.

려한다. 즉

$$u_{sw}(t) = \begin{cases} \alpha_1, & 0 < t < t_a \\ -\alpha_2, & t_a < t < t_b \\ \alpha_3, & t_b < t < t_c \\ 1, & t_c < t < t_{exp} \end{cases} \quad (5)$$

그러면,  $t > t_c$ 에서, 공정 출력은

$$\begin{aligned} y_{sw}(t) &= \alpha_1 y_s(t) - (\alpha_1 + \alpha_2) y_s(t - t_a) + (\alpha_2 + \alpha_3) y_s(t - t_b) \\ &\quad - (\alpha_3 - 1) y_s(t - t_c) \\ &= \alpha_1 (y_s(t) - y_s(t - t_a)) + (\alpha_2 + 1) (-y_s(t - t_a) + y_s(t - t_b)) \\ &\quad + (\alpha_3 - 1) (y_s(t - t_b) - y_s(t - t_c)) + y_s(t - t_a) \end{aligned} \quad (6)$$

으로 된다. 이로부터  $t > t_{exp}$ 에서  $y_{sw}(t) = y_{inf}$ 가 되는 조건들을 찾는다. Lee et al.[6]에서는  $a_1$ 이 주어져 있고,  $a_2=0$ 이고  $a_3=1$ (두 번의 switching)인 경우, 최소의  $t_{exp}$ 를 주는  $t_a$ 과  $t_b$ 를 반복 계산을 통하여 찾는 문제를 다루었다. 여기서는 switching 시간을 찾는 대신에  $t_a \sim t_c$ 가 주어진 상태에서 입력의 크기  $a_1 \sim a_2$ 를 찾는 문제를 다루고자 한다. Lee et al.[6]의 문제는 입력의 한계가 주어져 있는 경우의 시간 최적값을 찾는 고전적인 시간최적제어 방법이다[5]. 반면에 본 문제는 입력의 한계가 주어지지 않는 경우로 다른 하나의 시도로 볼 수 있다.

계단 입력이 있을 후 시간이 충분히 흘러  $y_{sw}(t)$ 가  $y_{inf}$ 에 도달하였다면, 식 (6)은

$$\begin{aligned} y_{inf} &= \alpha_1 (y_s(t) - y_s(t - t_a)) - (\alpha_2 + 1) (y_s(t - t_a) - y_s(t - t_b)) \\ &\quad + (\alpha_3 - 1) (y_s(t - t_b) - y_s(t - t_c)) - y_s(t - t_a) \end{aligned} \quad (7)$$

가 되고, 이를 정리하면

$$\begin{aligned} [1, -(y_s(t) - y_s(t - t_a)), (y_s(t - t_a) - y_s(t - t_b)), \\ -(y_s(t - t_b) - y_s(t - t_c))] \cdot \phi = y_s(t - t_a), \end{aligned}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} y_{inf} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 + 1 \\ \alpha_3 - 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

의 선형최소자승 문제가 얻어진다.  $t - k\Delta t$ 와  $t$  시간 구간에서 식 (7)이 만족한다고 가정하면, 다음 식을 통하여  $\phi$ 를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi &= (X^T X)^{-1} X^T Y \\ X &= \begin{pmatrix} 1 & y_s(t_k - t_a) - y_s(t_k) & y_s(t_k - t_a) - y_s(t_k - t_b) & y_s(t_k - t_c) - y_s(t_k - t_b) \\ 1 & y_s(t_{k-1} - t_a) - y_s(t_{k-1}) & y_s(t_{k-1} - t_a) - y_s(t_{k-1} - t_b) & y_s(t_{k-1} - t_c) - y_s(t_{k-1} - t_b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_s(t_0 - t_a) - y_s(t_0) & y_s(t_0 - t_a) - y_s(t_0 - t_b) & y_s(t_0 - t_c) - y_s(t_0 - t_b) \end{pmatrix} \\ Y &= \begin{pmatrix} y_s(t_k - t_a) \\ y_s(t_{k-1} - t_a) \\ \vdots \\ y_s(t_0 - t_a) \end{pmatrix} \\ t_i &= t - i\Delta t \end{aligned} \quad (9)$$

식 (8)과 (9)는 선형 공정 모델을 찾는 문제에서 자주 나타나는 것으로 적응제어를 위하여 계산 량을 줄이는 방법을 포함하여 많은 연구가 되어 있다. 여기서는 이들은 고려하지 않는다.

제안하는 방법을 단계별로 정리한다.

**Step 1:** Fig. 2(a)의 계단응답 실험을 시작한다. 주어진  $\Delta t$  간격으로 공정 출력을 저장한다.

**Step 2:**  $y_s(t)$ 가 주어진 값  $\zeta$ 에 도달하는 시간을  $t_d$ 로 정한다. 이어  $t_b = t_a + t_d/4$ ,  $t_c = t_b + t_d/8$ 로 정한다. 이 비율과  $\zeta$ 는 문제에 따라 조정할 수 있다.

**Step 3:**  $t = 1.5t_a$ 부터 식 (9)의 최소자승법 계산을 시작한다. 여기서 최소자승을 하는 자료 개수  $k$ 는 공정 출력에 포함되어 있는 잡음이 충분히 줄어들도록 잡는다.

**Step 4:** 실험 시간을 늘리면서, 식 (9)을 적용하여 얻는  $y_{inf}$ 를 조사한다. 이 값이 일정한 값으로 수렴하는데, 적절한 수렴조건을 만족하면 실험을 끝낸다.

## 4. 모사 결과

### 4-1. 계단 응답

식 (9)는 입력에 세 번의 switching이 있는 경우의 결과이다. 일차 공정의 경우 한번의 switching이 필요한 데 이 경우에  $a_2=-1$ ,  $a_3=1$ 의 값이 얻어 지기도 하지만, 이는 최소자승법을 적용할 때 나타나는 과도한 매개변수화한 문제로 때에 따라서는 매우 나쁜 결과가 얻어 지기도 한다. 따라서 한번에서 세 번의 switching이 필요한 경우를 각각 계산한다. 이들을 각각  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$ 로 명명하고, 식 (9)의  $X^T X$ 에서  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$  대각 행렬과  $X^T Y$ 에서  $2 \times 1$ ,  $3 \times 1$ ,  $4 \times 1$  요소를 선택하여 계산하면 얻을 수 있다. 이때의 출력  $y_{sw}(t)$ 를 각각  $y_{sw1}(t)$ ,  $y_{sw2}(t)$ ,  $y_{sw3}(t)$ 로 한다.  $y_{sw2}(t)$ 와  $y_{sw3}(t)$ 로부터 계단응답  $y_s(t)$ 를 복원할 때는 FFT(Fast Fourier Transformation)을 이용하는 것이 잡음이 있는 응답에 유리하다[6,9].

**Process 1:** 다음의 일차시간지연 공정을 고려한다.

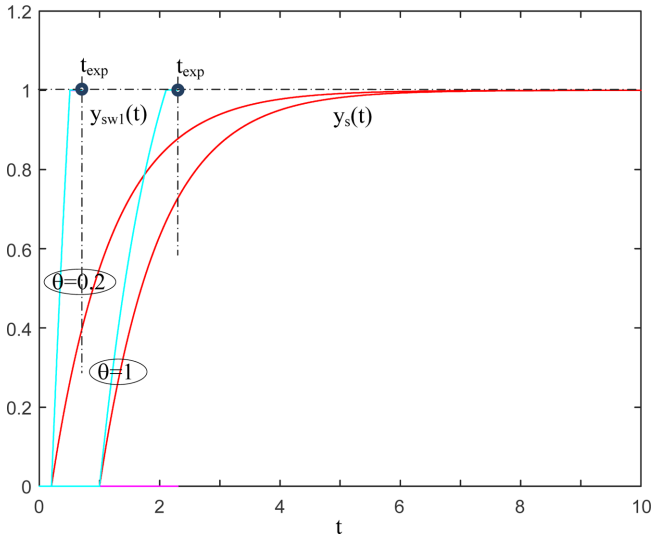


Fig. 3. Responses of  $y_s(t)$  and  $y_{sw1}(t)$  for the processes of  $G(s)=e^{-0.5s}/(s+1)$ .

$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{s+1} \quad (10)$$

모사에서 적분 시간 간격( $\Delta t$ )는 0.001로 하였고, 공정 출력 값이 0.1( $\zeta$ )에 도달하는 시간을  $t_r$ 로 선택하였다. 식 (9)의 선형 최소자승을 위한  $k$ 는 200 ( $k\Delta t=0.2$ )로 하였다. Fig. 3에 계단응답  $y_s(t)$ 와 제안하는  $y_{sw1}(t)$ 를 보였다. Table 1에 계산 결과를 보였다.

시간 지연이  $\theta=0.2$ 인 경우, 제안하는 방법의 실험 시간이 고전적인 계단응답 실험 시간과 비교하여 1/5 이하로 줄어드는 것을 볼 수 있다. 시간지연이 늘어나  $\theta=1$ 로 된 경우, 제안하는 방법의 실험 시

Table 1. Simulation results for the problems of step test time reductions

Process	$t_{exp}$	$y_{inf}$			$t_{98\%}^+$
		$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	
$\frac{e^{-0.5s}}{s+1}$	$\theta=0.2$	0.705	1.004 3.785	1.000 3.782 0.002	4.114
	$\theta=1.0$	2.301	1.001 1.496	0. 0. 1.000	Nan* 4.914
$\frac{(0.5s+1)e^{-0.2s}}{(s+1)^2}$	2.080	-0.191 -0.791	1.000 4.485 11.04	1.000 4.485 11.05 0.000	6.453
$\frac{e^{-0.2s}}{s^2+s+1}$	1.261	-0.425 -0.844	1.000 2.455 2.052	1.000 2.455 2.052 0.000	8.279
$\frac{e^{-0.2s}}{(s+1)^3}$	2.194	-0.129 -0.556	0.092 0.433 2.475	1.000 4.866 20.35 21.60	7.718
	4.294	1.144 2.491	0.980 3.237 4.288	1.000 130.0 1805. 21.60	

+time to reach 98% of new steady state in the step response.

\*Not a valid number.

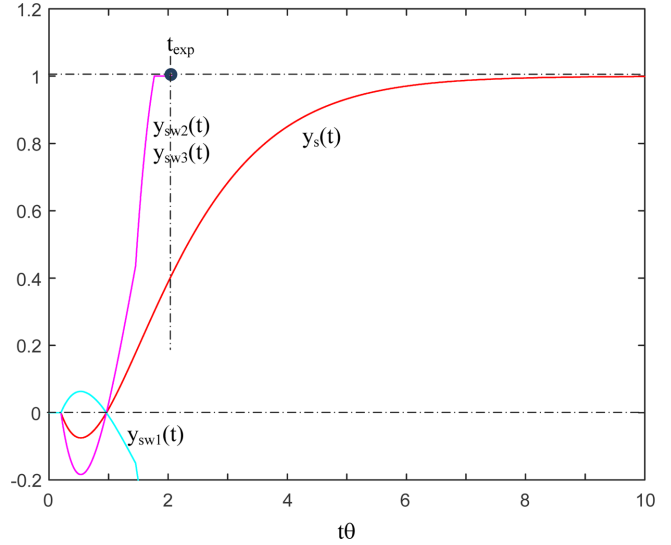


Fig. 4. Responses of  $y_s(t)$  and  $y_{sw1}(t)\sim y_{sw3}(t)$  for the process of  $G(s)=(-0.5s+1)e^{-0.2s}/(s+1)^2$ .

간은 1/2 정도로 되는 것을 볼 수 있다. 시간 지연이 적을수록 본 방법이 주는 실험 시간 줄이는 효과가 늘어나는 것을 알 수 있다.

일차 시스템이므로 한번의 switching으로 충분하다. 즉  $\phi_1$ 의 계산으로 충분하다. 두 번 이상의 switching이 잘못된 계산을 줄 수 있는데,  $\theta=1$ 의 계산이 이를 보여주고 있다. 공정 차수를 모르는 상태에서 실험을 시작하므로  $\phi_1\sim\phi_3$ 의 계산이 필요하다. 이로 인한 계산량의 증가는 크지 않다.

**Process 2:** 다음의 역응답 공정을 고려한다.

$$G(s) = \frac{(-0.5s+1)e^{-0.2s}}{(s+1)^2} \quad (11)$$

모사에서 적분 시간 간격( $\Delta t$ )는 0.001로 하였고, 공정 출력 값이 0.1( $\zeta$ )에 도달하는 시간을  $t_r$ 로 선택하였다. 식 (9)의 선형 최소자승을 위한  $k$ 는 200 ( $k\Delta t=0.2$ )로 하였다. Fig. 4에 계단응답  $y_s(t)$ 와 제안하는  $y_{sw1}(t)\sim y_{sw3}(t)$ 를 보였다. Table 1에 계산 결과를 보였다.

제안하는 방법의 실험 시간이 고전적인 계단응답 실험 시간과 비교하여 1/3이하로 줄어드는 것을 볼 수 있다. 이차 시스템이므로 두 번의 switching이 필요하다. 한번의 switching으로는 시간이 충분히 길지 않으면 좋은 결과를 기대할 수 없다. Fig. 4와 Table 1의 결과가 이를 보여주고 있다.

**Process 3:** 다음의 underdamped 공정을 고려한다.

$$G(s) = \frac{e^{-0.2s}}{s^2+s+1} \quad (12)$$

모사에서 적분 시간 간격( $\Delta t$ )는 0.001로 하였고, 공정 출력 값이 0.1( $\zeta$ )에 도달하는 시간을  $t_r$ 로 선택하였다. 식 (9)의 선형 최소자승을 위한  $k$ 는 200 ( $k\Delta t=0.2$ )로 하였다. Fig. 5에 계단응답  $y_s(t)$ 와 제안하는  $y_{sw2}(t)\sim y_{sw3}(t)$ 를 보였다. Table 1에 계산 결과를 보였다.

제안하는 방법의 실험 시간이 고전적인 계단응답 실험 시간과 비교하여 1/6이하로 줄어드는 것을 볼 수 있다. 한번의 switching으로는 시간이 충분히 길지 않으면 좋은 결과를 기대할 수 없다. Fig. 5와 Table 1의 결과가 이를 보여주고 있다.

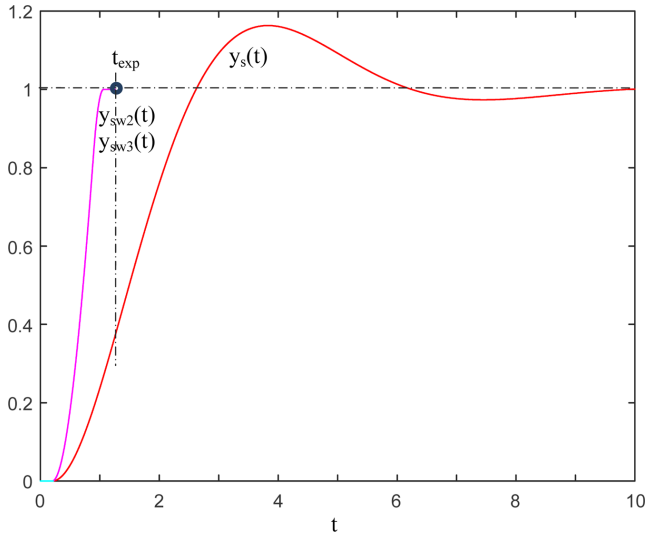


Fig. 5. Responses of  $y_s(t)$  and  $y_{sw2}(t)\sim y_{sw3}(t)$  for the process of  $G(s)=e^{-0.2s}/(s^2+s+1)$ .

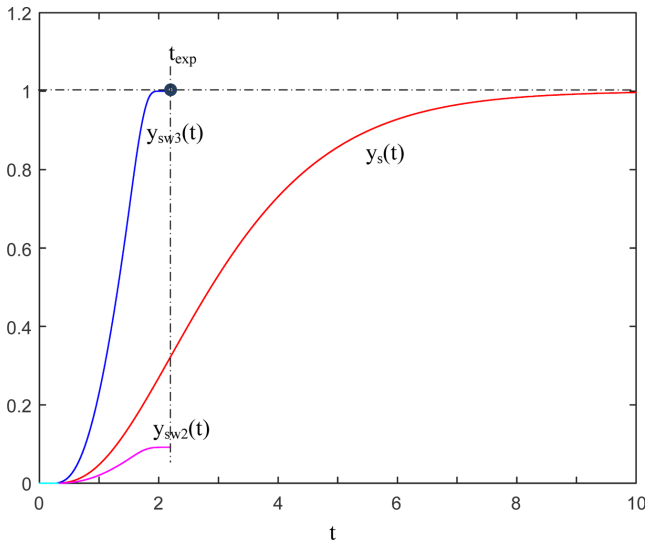


Fig. 6. Responses of  $y_s(t)$  and  $y_{sw2}(t)\sim y_{sw3}(t)$  for the process of  $G(s)=e^{-0.2s}/(s+1)^3$ .

Process 4: 다음의 3차 시간지연 공정을 고려한다.

$$G(s) = \frac{e^{-0.2s}}{(s+1)^3} \quad (13)$$

모사에서 적분 시간 간격( $\Delta t$ )은 0.001로 하였고, 공정 출력 값이 0.1( $\zeta$ )에 도달하는 시간을  $t_a$ 로 선택하였다. 식 (9)의 선형 최소자승을 위한  $k$ 는 200 ( $k\Delta t=0.2$ )로 하였다. Fig. 6에 계단응답  $y_s(t)$ 와 제안하는  $y_{sw2}(t)\sim y_{sw3}(t)$ 를 보였다. Table 1에 계산 결과를 보였다.

제안하는 방법의 실험 시간이 고전적인 계단응답 실험 시간과 비교하여 1/3이하로 줄어드는 것을 볼 수 있다. 3차 시스템이므로 세 번의 switching이 필요하다. 한번이나 두 번의 switching으로는 시간이 충분히 길지 않으면 좋은 결과를 기대할 수 없다. Table 1에 있듯이 실험 시간을 늘리면 한번이나 두 번의 switching으로도 제대로 된 결과를 얻을 수 있다. 이는 실험 시간이 줄어드는 효과가 반감된다는 것을 의미한다.

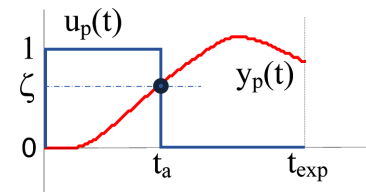


Fig. 7. Pulse response test.

모사결과 검토: 앞의 모사로부터 얻은 결과들을 정리하면 다음을 얻을 수 있다.

- (1) 앞선 Lee et al.[6]의 방법과 대등하게 계단응답을 얻는 실험시간을 반 이상으로 줄일 수 있었다.
- (2) Lee et al.[6]에서 이용한 주어진 입력의 한계에서 시간최적제어를 위한 switching 시간을 찾는 것 대신에, switching 시간을 고정하고 입력 한계의 크기를 찾는 방법으로 바꾸어 반복계산의 필요성을 없앴다. 문제가 선형최소자승법으로 변경되어 계산량이 크게 줄어들었으며, 제어기 자동튜닝에 응용될 수 있다.
- (3) 계산량이 문제가 되지 않는 느린 공정에는 switching 시간과 입력 한계의 크기를 동시에 변경하는 방법을 도입하면 계단응답을 얻는 실험시간을 더 크게 줄일 수 있을 것으로 판단된다.

4-2. Autotuning

제안하는 방법은 계산이 간단하기 때문에 비례적분(Proportional-Integral (PI) 제어기 자동튜닝에 효과적으로 사용할 수 있다. 이를 위하여 앞의 계단응답 대신에 Fig. 7과 같은 펄스응답을 이용한다. 이 펄스응답은 공정 출력이 크게 벗어나는 것을 막아 준다. 다음 식과 같이 먼저 계단응답  $y_s(t)$ 가 계산되어지고 앞에서 제안하는 방법이 적용된다.

$$y_s(t) = y_p(t) + y_p(t-t_a) + y_p(t-2t_a) + \dots \quad (14)$$

계단응답 전체를 복원하는 대신에 얻어지는  $y_{inf}$ 와  $y_s(t_a)$ 와  $y_s(t_{exp})$ 로부터 다음과 같이 FOPTD (First Order Plus Time Delay) 모델을 확인하여 PI제어기 변수를 계산한다.

$$G_m(s) = \frac{k_m e^{-\theta_m s}}{\tau_m s + 1}$$

$$k_m = y_{inf}, \tau_m = \frac{t_{exp} - t_a}{\ln\left(\frac{1 - \frac{y_s(t_a)}{y_{inf}}}{1 - \frac{y_s(t_{exp})}{y_{inf}}}\right)}, \theta_m = t_{exp} + \tau_m \ln\left(1 - \frac{y_s(t_{exp})}{y_{inf}}\right) \quad (15)$$

식 (15)는 FOPTD 모델의 계단응답  $y_m(t) = k_m(1 - e^{-(t-\theta_m)/\tau_m})$ 으로부터 쉽게 얻을 수 있다[1]. 이 FOPTD 모델이 얻어지면 다음 SIMC 튜닝 규칙[1,10]을 적용하여 PI제어기 변수를 결정한다.

$$C(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right)$$

$$k_c = \frac{1}{2k_m \theta_m}, \tau_i = \min(\tau_m, 8\theta_m) \quad (16)$$

PI 제어기 자동튜닝에는 relay feedback 자동튜닝 방법이 가장 널리 사용되고 있는데, 여기서는 이 방법 중 가장 최근에 정리된 relay

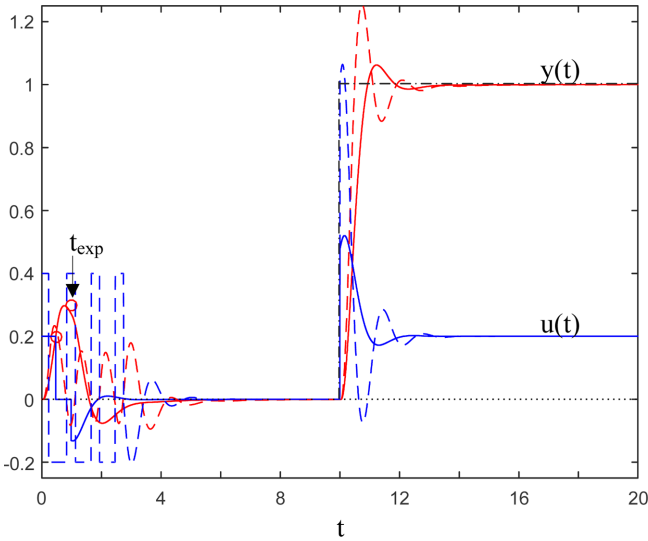


Fig. 8. Responses of the proposed and relay feedback autotuning methods for the process of  $G(s)=5e^{-0.02s}/((s+1)(0.2s+1)(0.04s+1))$  (solid line: proposed, dotted line: relay feedback).

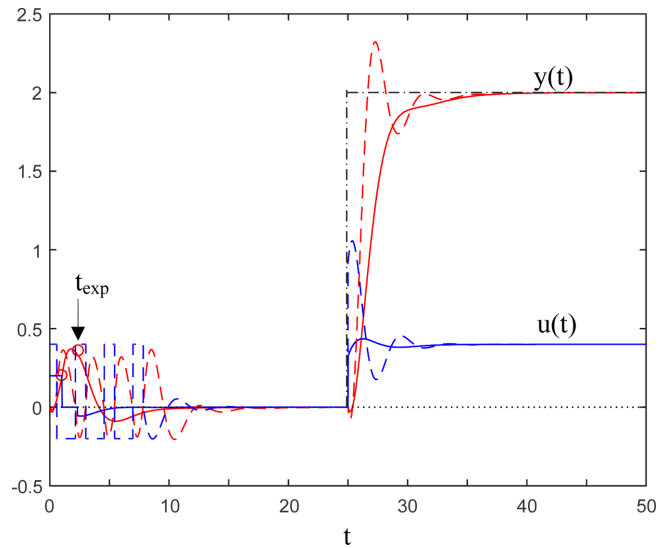


Fig. 9. Responses of the proposed and relay feedback autotuning methods for the process of  $G(s)=5(-0.2s+1)e^{-0.01s}/(s+1)^2$  (solid line: proposed, dotted line: relay feedback).

feedback 자동튜닝 방법[7]과 비교를 하였다.

**Process 5:** 다음의 3차 시간지연 공정을 고려한다.

$$G(s) = \frac{5e^{-0.02s}}{(s+1)(0.2s+1)(0.04s+1)} \quad (17)$$

모사에서 적분 시간 간격( $\Delta t$ )은 0.001로 하였고, 공정 출력 값이 0.2( $\zeta$ )에 도달하는 시간을  $t_a$ 로 선택하였다. 여기서는 두 번의 switching 만을 고려하였다. Fig. 8에 자동튜닝 실험과 펄스 응답을 보였다. Table 2에 몇몇 계산 결과를 보였다. 자동튜닝에 필요한 시간은 1/2.7 정도로 줄어들었고, 튜닝 결과는 더 강건한 진동이 심하지 않는 제어시스템이 얻어지는 것을 볼 수 있다. 강건한 제어기 결과는 계단응답에 근거한 모델이 relay feedback에 근거한 모델보다 낮은 주파수 영역에서 더 잘 맞추기 때문으로 판단된다[8].

**Process 6:** 다음의 역응답 공정을 고려한다.

$$G(s) = \frac{5(-0.2s+1)e^{-0.02s}}{(s+1)^2} \quad (18)$$

모사에서 적분 시간 간격( $\Delta t$ )은 0.001로 하였고, 공정 출력 값이 0.2( $\zeta$ )에 도달하는 시간을  $t_a$ 로 선택하였다. 여기서는 두 번의 switching 만을 고려하였다. Fig. 9에 자동튜닝 실험과 펄스 응답을 보였다.

Table 2에 몇몇 계산 결과를 보였다. 자동튜닝에 필요한 시간은 1/3.3 정도로 줄어들었고, 튜닝 결과는 더 강건한 진동이 없는 제어시스템이 얻어지는 것을 볼 수 있다. 강건한 제어기 결과는 계단응답에 근거한 모델이 relay feedback에 근거한 모델보다 낮은 주파수 영역에서 더 잘 맞추기 때문으로 판단된다[8].

### 5. 결 론

반복 계산이 필요 없는 시간최적제어 기법에 근거한 계단 응답을 빠른 시간에 얻는 방법을 제안하였다. 시간지연이 적은 경우 계단 응답을 얻는 시간을 1/3 보다 더 줄이는 것을 모사를 통하여 보였다. 제어시스템 설계에 있어 시간과 비용이 드는 가장 중요한 과정이 공정 입력에 변화를 주고 공정 출력을 측정하여 공정 모델을 얻는 것임을 고려하면, 이 계단응답을 얻는 시간을 줄이는 방법은 의미가 있다.

본 연구는 반복계산이 필요 없고 계산이 간단하기 때문에 제어기 자동튜닝에도 응용할 수 있다. 제어기 자동튜닝에 가장 널리 이용되는 relay feedback 자동튜닝 방법과 비교하였다. 자동튜닝실험에 요구되는 시간을 1/3 수준으로 줄일 수 있었고, 더 강건한 진동이 적은 제어기 튜닝 결과를 얻을 수 있었다.

Table 2. Results of autotuning methods

Process	Method	Test time	FOPTD model			PI controller		Mp*
			$k_m$	$\tau_m$	$\theta_m$	$k_c$	$\tau_I$	
$\frac{5e^{-0.02s}}{(s+1)(0.2s+1)(0.04s+1)}$	Proposed	0.978	4.8890	1.0973	0.2139	0.4781	1.0973	1.42
	Relay Feedback	2.74	5.0068	1.8255	0.1795	1.0158	1.4357	1.87
$\frac{5(-0.2s+1)e^{-0.01s}}{(s+1)^2}$	Proposed	2.317	5.0034	1.8630	0.6196	0.1613	1.8630	1.31
	Relay Feedback	7.835	4.9992	2.7361	0.5922	0.4621	2.7361	1.87

\*Peak amplitude ratio of the sensitivity function,  $S(s)=(1+G(s)C(s))^{-1}$ .



## 감 사

이 논문은 2018학년도 경북대학교 연구년 교수 연구비에 의하여 연구되었음(This research was supported by Kyungpook National University Research Fund, 2018).

## References

1. Seborg, D. E., Mellichamp, D. A., Edgar, T. F. and Doyle III, F. J., *Process Dynamics and Control*, 4<sup>th</sup> ed. Wiley, New Jersey, 2016.
2. Liu, T., Wang, Q. G. and Huang, H. P., "A Tutorial Review on Process Identification from Step or Relay Feedback Test," *J. Process Control* **23**, 1597-1623(2013).
3. Garcia, C. E., Prett, D. M. and Morari, M., "Model Predictive Control: Theory and Practice – a Survey," *Automatica* **25**, 335-348 (1989).
4. Darby, M. L. and Nikolau, M., "MPC: Current Practice and Challenges," *Control Engineering Practice* **20**, 338-342(2012).
5. Edgar, T. F. and Lapidus, L., "The Computation of Optimal Singular Bang-bang Control I. Linear Systems," *AIChE J.* **18**, 774 (1972).
6. Lee, F. Y., Edgar, T. F., Baldea, M. and Lee, J., "Minimized Test Times for Step and Pulse Responses of Slow Linear Processes," *I&EC Research* **58**, 12116-12123(2019).
7. Brener, J., Hagglund, T. and Astrom, K.J., "Asymmetric Relay Autotuning – Practical Features for Industrial Use," *Control Engineering Practice* **54**, 231-245(2016).
8. Lee, J., Sung, S. W., Lee, F. Y., Baldea, M. and Edgar, T. F., "Full Closed-Loop Tests for the Relay Feedback Autotuning of Stable, Integrating, and Unstable Processes," *ACS Omega* **4**, 18760-18770(2019).
9. Rao, K. R., Kim, D. N. and Hwang, J. J., *Fast Fourier Transform – Algorithms and Applications*, Springer, New York, 2010.
10. Skogestad, S., "Simple Analytic Rules for Model Reduction and PID Controller Tuning," *J. Process Control.*, **13**, 291-309(2003).