

## 원통형 이상체에 의한 자력 반응식

임형래<sup>1</sup> · 엄주영<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>부산대학교 지구과학교육과

<sup>2</sup>경북대학교 지구과학교육과

## The Closed-form Expressions of Magnetic Field Due to a Right Cylinder

Hyoungrea Rim<sup>1</sup> and Jooyoung Eom<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Earth Science Education, Pusan National University

<sup>2</sup>Department of Earth Science Education, Kyungpook National University

**요약:** 이 논문에서는 축 방향 대칭성을 가지는 원통형 이상체 대한 자력 반응식을 유도하였다. 일정한 방향으로 자화된 이상체가 생성시키는 자력장은 일정한 밀도를 가지는 이상체에 의한 중력 변화율 텐서로부터 변환 가능한 포아송(Poisson) 관계식을 이용하여 기존에 이미 유도된 원통형에 의한 중력 변화율 텐서로부터 3성분 자력 벡터를 유도하였다. 축 방향 대칭성을 이용하여 중력 변화율 텐서를 원통 좌표계에서 유도하였고 이를 직교 좌표계로 변환한 후 이상체의 자화 방향과 결합하여 3성분 자력 벡터를 유도하였다.

**주요어:** 자력, 중력 변화율 텐서, 포아송 관계식, 원통형 이상체

**Abstract:** Herein, the closed-form expressions of the magnetic field due to an axially symmetric body such as a right cylinder, are derived. The magnetic field due to a right cylinder is converted from the gravity gradient tensor using Poisson's relation; the magnetic field induced by a constant magnetization can be obtained from the gravity gradient tensor with a constant density. Because of the axial symmetry of the cylinder, the expressions of gravity gradient tensor are derived in cylindrical coordinate and then transformed into Cartesian coordinates for the three components of the magnetic field using an arbitrary magnetization direction.

**Keywords:** magnetic, gravity gradient tensor, Poisson's relation, cylinder

## 서론

자력 탐사 자료로부터 화성암 관입체와 같이 원통형으로 근사 가능한 이상체를 해석하기 위해서는 지하 구조를 균질한 직육면체 프리즘으로 분할하여 3차원 역산 해석하는 방법보다는 원통형 이상체의 반지름, 길이 등과 같이 중요한 몇 개의 역산 파라미터만을 추정하는 비선형 역산이 더 효과적인 경우가 있다(Blum, 1945; Sarma *et al.*, 1999). 특히 화성암의 관입은 지표면의 접근이 제한이 있는 산악 지대에 많이 분포하는

데 이런 경우 측정 자료가 제한적으로 주어지는 상황에서는 다수의 직육면체 프리즘들의 대자율을 추정하는 일반적인 자력 3차원 역산은 역산 파라미터 개수에 비해 측정 데이터의 개수가 절대적으로 부족하여 타당성 높은 역산 해를 추정하기 힘든 경우가 있다. 이 경우 원통형 이상체에 대한 벡터 자력의 해석해를 가지고 있다면 곧바로 원통형 관입체의 반지름, 길이, 경사 등 추정할 파라미터 개수를 수개 내외로 줄일 수 있으므로 이상체의 위치와 규모를 효과적으로 해석해 낼 수 있다.

비교적 간단한 모양으로 근사가 가능한 원통형 이상체에 대한 중력 및 자력 반응식은 간편하게 지하 이상체를 원통형으로 근사하여 해석하려는 필요에 의하여 여러 연구자들에 의해 유도되어 왔다(Nettleton, 1942; Nabighian, 1962; Damiata and Lee, 2002; Singh and Sabina, 1978). 대표적인 예로는 원통형 이상체에 의한 중력 및 자력 반응 계산은 무한 급수의 합의 형태로 Nettleton (1942)이 유도하였고, Singh and Sabina (1978)는 푸리에-한켈 변환(Fourier-Hankel transform)을 이용하였다.

이 논문에서는 축 방향 대칭성을 가지는 원통형 이상체의 벡터 자력의 해석해를 유도하고자 한다. Rim and Li (2016)는

Received: 16 January 2020; Revised: 6 February 2020;

Accepted: 11 February 2020

\*Corresponding author

E-mail: eomjy@knu.ac.kr

Address: 80 Daehakro, Bukgu, Daeju 41566, Korea

©2020, Korean Society of Earth and Exploration Geophysicists

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

이미 원통형 이상체에 대한 중력 변화율 텐서의 해석해를 제공하였는데 포아송 관계식을 이용하면 중력 변화율 텐서를 벡터 자력으로 변환 가능하므로 이 성질을 이용하여 중력 변화율 텐서로부터 원통형 이상체의 벡터 자력을 유도한다. Singh and Sabina (1978)는 원통형 이상체에 대한 총자력만을 유도하였는데 이 논문에서는 총자력뿐만 아니라 자력을 3성분 벡터 형태로 유도한다.

### 원통형 이상체의 벡터 중력

일정한 방향으로 자화된 원통형 이상체의 자력 반응을 유도하기 위하여 먼저 반무한 원통형 이상체에 의한 중력 변화율 텐서를 유도한다. Rim and Li (2016)는 이미 원통형 이상체의 중력 변화율 텐서를 유도하였으므로 여기서는 중력 변화율 텐서를 유도하는 과정을 간단히 정리한다. Fig. 1은 반무한 원통형 이상체의 모식도이다. 원통형 이상체의 z-축 방향 대칭성을 이용하여 원통 좌표계에서 축점 (r, θ, z)에서 중력 포텐셜, U(r, θ, z)은 식 (1)과 같다(Singh, 1977). 식 (1)에서 G는 중력상수, σ는 원통형 이상체의 밀도, a는 반지름에 해당한다. 이상체가 축 방향 대칭성을 가지고 있으므로 중력 포텐셜을 구하기 위한 적분은 원통 좌표계를 도입한 푸리에-한켈 변환을 이용한다. 반면 축점에서의 3성분 자력으로 표현하기 위해서는 북쪽이 x, 동쪽이 y, 깊이 방향이 z 방향인 오른손 직교 좌표계를 이용한다. 식 (1)에서 베셀 함수들과 다항식의 곱이 포함된 적분은 립슈츠-한켈(Lipschitz-Hankel) 타입의 적분으로 계산할 수 있고(Eason et al., 1955) 이 논문에서 필요한 립슈츠-한켈 타입 적분 식들은 부록 A에 정리하였다.

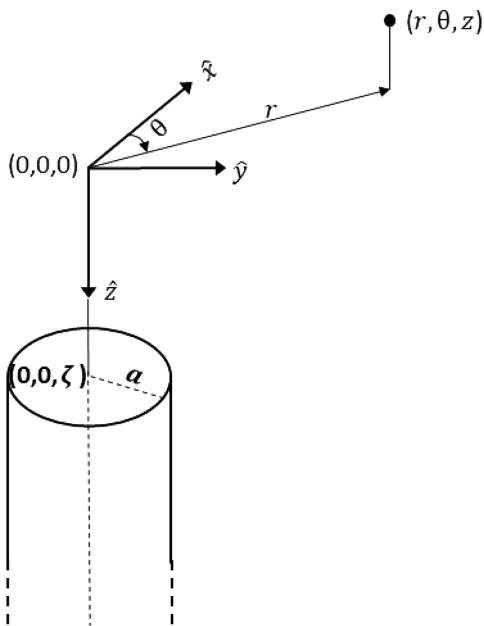


Fig. 1. Geometry of a semi-infinite vertical circular cylinder.

$$U(r, \theta, z) = 2\pi G\sigma a \int_0^\infty J_1(a\eta)J_0(r\eta)e^{-\eta(\zeta-z)}\eta^{-2}d\eta \quad (z \leq \zeta) \quad (1)$$

$$= 2\pi G\sigma a I(1, 0; -2)$$

원통 좌표계에서 벡터 중력은 각 좌표축 방향으로 중력 포텐셜을 미분하여 구한다(Singh, 1977; Damiata and Lee, 2002). 이상체의 모양이 z-축 방향 대칭성을 가지고 있으므로 벡터 중력의 θ 성분은 존재하지 않고 r 성분과 z 성분은 식 (2~3)으로 유도된다.

$$g_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -2\pi G\sigma a \int_0^\infty J_1(a\eta)J_1(r\eta)e^{-\eta(\zeta-z)}\eta^{-1}d\eta \quad (2)$$

$$= -2\pi G\sigma a I(1, 1; -1)$$

$$g_z = \frac{\partial U}{\partial z} = 2\pi G\sigma a \int_0^\infty J_1(a\eta)J_0(r\eta)e^{-\eta(\zeta-z)}\eta^{-1}d\eta \quad (3)$$

$$= 2\pi G\sigma a I(1, 0; -1)$$

벡터 중력의 r 방향 성분을 직교 좌표계에서 두 개의 수평 성분으로 분리하면 식 (4)와 같다.

$$g_x = g_r \cos \theta$$

$$g_y = g_r \sin \theta \quad (4)$$

### 원통형 이상체의 중력 변화율 텐서

원통 좌표계에서 중력 포텐셜을 두 번 미분한 중력 변화율 텐서(Γ<sub>c</sub>)는 식 (5)와 같이 정의되고(Arfken et al., 2012), z-축 대칭 이상체의 중력 포텐셜은 θ 방향으로 일정하여 θ 방향 미분값이 존재하지 않으므로 이를 적용하면 원통형 이상체에 의한 중력 변화율 텐서는 식 (6)과 같이 정리할 수 있다.

$$\Gamma_c = \nabla^T \nabla U = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} & \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} \\ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial z} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\Gamma_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} & 0 & \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} & 0 & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} g_r & 0 & \frac{\partial}{\partial z} g_r \\ 0 & \frac{1}{r} g_r & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} g_z & 0 & \frac{\partial}{\partial z} g_z \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} g_{rr} & 0 & g_{rz} \\ 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ g_{rz} & 0 & g_{zz} \end{pmatrix}$$

원통 좌표계에서 반무한 이상체에 의한 중력 변화율 텐서를 립슈츠-한켈 타입 적분 형태로 정리하면 식 (7) ~ (10)과 같이 유도된다(Rim and Li, 2016).

$$g_{rz} = \frac{\partial}{\partial z} g_r = -2\pi G\sigma a I(1, 1; 0) \quad (7)$$

$$g_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} g_z = 2\pi G\sigma a I(1, 0; 0) \quad (8)$$

$$g_{rr} = \frac{\partial}{\partial r} g_r = -2\pi G\sigma a I(1, 0; 0) + 2\pi G\sigma a \frac{1}{r} I(1, 1; -1) \quad (9)$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{1}{r} g_r = -2\pi G\sigma a \frac{1}{r} I(1, 1; -1) \quad (10)$$

원통 좌표계에서 유도한 중력 변화율 텐서를 직교 좌표계로 변환하기 위해서는 식 (11)과 같은 원통좌표계와 직교 좌표계 사이의 변환 행렬 ( $\mathbf{R}$ )을 정의하고 식 (12)와 같이 텐서의 좌표계 변환식을 적용한다(Rim and Li, 2016).

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

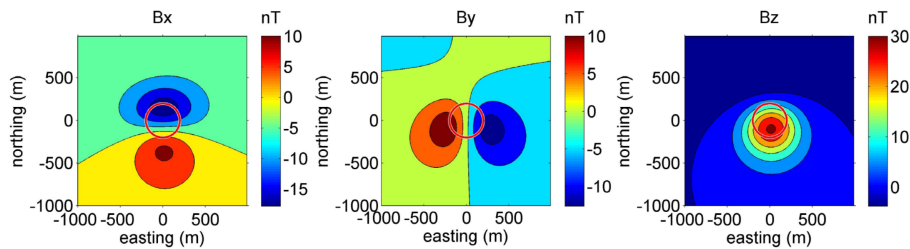
$$\Gamma_r = \mathbf{R}^T \Gamma_c \mathbf{R} \quad (12)$$

식 (12)에서  $\Gamma_c$ 과  $\Gamma_r$ 은 각각 원통 좌표계와 직교 좌표계에서의 반무한 원통형 이상체에 의한 중력 변화율 텐서를 나타낸다. 따라서 직교 좌표계에서의 반무한 원통형 이상체에 의한 중력 변화율 텐서는 식 (13)과 같다.

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{rr} \cos^2\theta + g_{\theta\theta} \sin^2\theta & (g_{rr} - g_{\theta\theta}) \sin\theta \cos\theta & g_{rz} \cos\theta \\ (g_{rr} - g_{\theta\theta}) \sin\theta \cos\theta & g_{rr} \sin^2\theta + g_{\theta\theta} \cos^2\theta & g_{rz} \sin\theta \\ g_{rz} \cos\theta & g_{rz} \sin\theta & g_{zz} \end{pmatrix} \quad (13)$$

## 원통형 이상체의 자력

한 방향으로 자화된 이상체의 경우 중력 변화율 텐서는 포와송(Poisson) 관계식을 이용하면 벡터자력으로 변환할 수 있다(Blackely, 1996).



**Fig. 2.** Magnetic fields due to a cylinder with 200-m radius and 500-m length with the center of its top plane located at the origin in the x-y plane and at 300 m in the z axis (red circle). The magnetic fields are generated only through the induction by external geomagnetic field with a 52,000-nT strength, 50° inclination, and -8° declination. The susceptibility of the cylinder is 0.01 (SI).

$$\mathbf{B} = \frac{1}{G\sigma} \Gamma_r \mathbf{m} = \frac{|\mathbf{m}|}{G\sigma} \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & g_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \quad (14)$$

식 (14)에서  $|\mathbf{m}|$ 는 자화 강도이고  $(m_x, m_y, m_z)$ 은 자화 방향에 해당하는데 자화 방향은 복각과 편각을 이용하여 식 (15)와 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{m} = |\mathbf{m}| \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = |\mathbf{m}| \begin{pmatrix} \cos(\text{incl}) \cos(\text{decl}) \\ \cos(\text{incl}) \sin(\text{decl}) \\ \sin(\text{incl}) \end{pmatrix} \quad (15)$$

원통 좌표계에서의 중력 변화율 텐서(식 13)을 식 (14)에 대입하여 정리하면 벡터 자력이 구해진다.

$$B_x = 2\pi a |\mathbf{m}| \left[ \begin{aligned} & \left\{ -\cos^2\theta I(1, 0; 0) + \frac{1}{r} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) I(1, 1; -1) \right\} m_x \\ & + \left\{ -I(1, 0; 0) + \frac{2}{r} I(1, 1; -1) \right\} \sin\theta \cos\theta m_y \\ & - I(1, 1; 0) \cos\theta m_z \end{aligned} \right] \quad (16)$$

$$B_y = 2\pi a |\mathbf{m}| \left[ \begin{aligned} & \left\{ -I(1, 0; 0) + \frac{2}{r} I(1, 1; -1) \right\} \sin\theta \cos\theta m_x \\ & + \left\{ -\sin^2\theta I(1, 0; 0) - \frac{1}{r} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) I(1, 1; -1) \right\} m_y \\ & - I(1, 1; 0) \sin\theta m_z \end{aligned} \right] \quad (17)$$

$$B_z = 2\pi a |\mathbf{m}| \left[ -I(1, 1; 0) \cos\theta m_x - I(1, 1; 0) \sin\theta m_y + I(1, 0; 0) m_z \right] \quad (18)$$

일정한 길이를 가지는 원통형 이상체의 자력을 구하기 위해서는 반무한 원통형 이상체를 중심 축을 동일하게 두고 윗면을 시작으로 하는 반무한 원통형 이상체의 자력 반응에서 아랫면을 시작으로 하는 원통형 이상체의 자력 반응을 빼서 계산한다.

총자력(total magnetic intensity)은 이상체에서 유도된 벡터 자력을 지자기 방향으로 정사영하여 구하다. Singh and Sabina (1978)는 원통형 이상체의 총자력력 반응식을 유도하였는데 이 논문에서 유도한 3성분 벡터 자력을 지자기 방향으로 내적한 결과와 같고 이를 부록 B에 정리하였다.

### 자력 모델링

반지름이 200 m, 길이가 500 m이고 윗면의 중심이 (0 m, 0 m, 300 m)에 놓여진 원통형 이상체에 대한 벡터 자력 값을 계산하였다. 벡터 자력은 외부 자기장에 의한 유도 자기장만 있는 경우를 상정하였고, 외부 자기장은 우리나라 지자기장의 평균값인 북각 52°, 편각 -8° 총지자기 52,000 nT로 가정하였으며, 이상체의 대자율은 0.01 (SI)로 설정하였다. 북각이 크고 편각이 작아서 벡터 중력과 비슷한 양상을 보이지만 z 성분을 보면 양의 최대값이 이상체의 중심에서 약간 아래쪽에 나타나는 전형적인 벡터 자력 값을 보여준다.

### 결론

한 방향으로 자화된 이상체의 경우 벡터 자력은 중력 변화율 텐서로부터 변환할 수 있다는 포와송(Poisson) 관계식과 기존에 유도한 원통형 이상체의 중력 변화율 텐서를 이용하여 자력 벡터를 유도하였다. 자력 탐사에 총자력계가 주로 사용되어 왔으므로 원통형 이상체에 대한 자력 반응을 해석하기 위해서 Singh and Sabina (1978)는 원통형 이상체에 대한 총자력을 유도한 바 있다. 현재 자력 탐사에서 3성분 자력계가 널리 사용되고 있으므로 3성분 자력 탐사 자료를 해석하기 위해서는 3성분 자력 벡터의 해석해가 필요하다. 이 논문에서 형태인 원통형 이상체에 대한 3성분 벡터 자력의 해석해를 유도하였다. 김벌라이트(Kimberlite)와 같은 관입 화성암의 형태가 원통형으로 근사가 가능한 단순한 모델인 경우 이 논문에서 제시한 원통형 이상체에 의한 벡터 자력 해석해를 이용하면 원통형 이상체의 물리적인 파라미터만을 추정하여 지하 구조를 파악할 수 있으므로 적은 수의 자력 측정으로도 효과적으로 원통형 이상체의 자력 자료를 해석이 가능하다.

### 감사의 글

이 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(2019R1F1A1055093 and 2018R1C1B5086283).

### References

Arfken, G. B., Weber H. J., and Harris, F. E., 2012, *Mathematical methods for physicists 7th ed.*, Elsevier.  
 Blakely, R. J., 1996, *Potential Theory in gravity and magnetic applications*, Cambridge University Press.  
 Blum, V. J., 1945, The magnetic field over igneous pipes, *Geophysics*, **10(3)**, 368-375.  
 Byrd, P. F., and Friedman, M. D., 1971, *Handbook of Elliptic*

*Integrals for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag.  
 Carlson, B. C., 1995, Numerical computation of real and complex elliptic integrals, *Numer. Algorithms.*, **10(1)**, 13-26.  
 Carlson, B. C., and Notis, E. M., 1981, Algorithm 577: Algorithm for incomplete elliptic integrals [S21], *AMC. Trans. Math. Softw.*, **7(3)**, 389-403.  
 Damiata, B. N., and Lee, T. C., 2002, Gravitational attraction of solids of revolution. Part 1: Vertical circular cylinder with radial variation of density, *J. Appl. Geophys.*, **50(3)**, 333-349.  
 Eason, G., Noble, B., and Sneddon, I. N., 1955, On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions, *Proc. R. Soc. Lond. A. Math. Phys. Sci.*, **247(935)**, 529-551.  
 Nabighian, M., 1962, The gravitational attraction of a right vertical circular cylinder at points external to it, *Geofisica pura e applicata*, **53(1)**, 45-51.  
 Nettleton, L. L., 1942, Gravity and magnetic calculations, *Geophysics*, **7(3)**, 293-310.  
 Rim, H., and Li, Y., 2016, Gravity gradient tensor due to a cylinder, *Geophysics*, **81(4)**, G59-G66.  
 Sarma, B. S. P., Verma, B. K., and Satyanarayana, S. V., 1999, Magnetic mapping of Majhgawan diamond pipe of central India, *Geophysics*, **64(6)**, 1735-1739.  
 Singh, S. K., 1977, Gravitational attraction of a vertical right circular cylinder, *Geophys. J. Int.*, **50(1)**, 243-246.  
 Singh, S. K., and Sabina, F. J., 1978, Magnetic anomaly due to a vertical right circular cylinder with arbitrary polarization, *Geophysics*, **43(1)**, 173-178.  
 Singh, S. K., and Sabina, F. J., 1978, To: "Magnetic anomaly due to a vertical right circular cylinder with arbitrary polarization", by S. K. Singh and F. J. Sabina, *Geophysics*, v.43, p.173-178 (February, 1978), *Geophysics*, **43(6)**, 1312p.

### 부록 A.

#### 립슈츠-한켈(Lipschitz-Hankel) 타입 적분들

원통형 이상체는 z-축 대칭성을 가지고 있으므로 원통 좌표계에서 푸리에 변환을 이용하여 계산하는 과정에서 립슈츠-한켈 타입 적분이 이용된다(Eason et al., 1955). 원통형 이상체의 3성분 자력 계산에 필요한 립슈츠-한켈 타입 적분을 여기에 정리하였다.

일반적인 형태의 립슈츠-한켈 타입 적분은 식 (A-1)과 같이 두개의 베셀 함수와 다항식의 곱을 적분하는 형태를 가진다. 여기서 ( $\mu$ ,  $\nu$ )는 베셀 함수의 차수로써 0 또는 1을 가진다.  $\lambda$ 는 다항식의 차수에 해당하고 립슈츠-한켈 타입 적분의 차수에 해당한다.

$$I(\mu, \nu; \lambda) = \int_0^\infty J_\mu(a\eta) J_\nu(r\eta) e^{-\eta(\zeta-z)} \eta^\lambda d\eta \quad (A-1)$$

각 차수 별로 립슈츠-한켈 타입 적분을 식 (A-2) ~ (A-5)에 정리하였다.

$$I(1,1;-1) = \begin{cases} \frac{\zeta-z}{\pi k \sqrt{ar}} E(k) - \frac{k(\zeta-z)}{4\pi ar \sqrt{ar}} (2a^2 + 2r^2 + (\zeta-z)^2) K(k) \\ + \frac{a^2-r^2}{4ar} \Lambda_0(\phi, k) + \frac{r}{2a} & (a > r) \\ \frac{\zeta-z}{\pi ka} E(k) - \frac{k(\zeta-z)}{4\pi a^3} (4a^2 + (\zeta-z)^2) K(k) + \frac{1}{2} & (a = r) \\ \frac{\zeta-z}{\pi k \sqrt{ar}} E(k) - \frac{k(\zeta-z)}{4\pi ar \sqrt{ar}} (4a^2 + 4r^2 + (\zeta-z)^2) K(k) \\ - \frac{a^2-r^2}{4ar} \Lambda_0(\phi, k) + \frac{2a}{r} & (a < r) \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

$$I(1,0;-1) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{ar}}{\pi ka} E(k) + \frac{k(a^2-r^2)}{2\pi a \sqrt{ar}} K(k) + \frac{\zeta-z}{2a} \Lambda_0(\phi, k) - \frac{\zeta-z}{a} & (a > r) \\ \frac{2}{\pi k} E(k) - \frac{\zeta-z}{2a} & (a = r) \\ \frac{2\sqrt{ar}}{\pi ka} E(k) + \frac{k(a^2-r^2)}{2\pi a \sqrt{ar}} K(k) - \frac{\zeta-z}{2a} \Lambda_0(\phi, k) & (a < r) \end{cases} \quad (\text{A-3})$$

$$I(1,1;0) = \frac{1}{\pi k \sqrt{ar}} \left\{ (2-k^2) K(k) - 2E(k) \right\} \quad (\text{A-4})$$

$$I(1,0;0) = \begin{cases} -\frac{k(\zeta-z)}{2\pi a \sqrt{ar}} K(k) - \frac{1}{2a} \Lambda_0(\phi, k) + \frac{1}{a} & (a > r) \\ -\frac{k(\zeta-z)}{2\pi a^2} K(k) + \frac{1}{2a} & (a = r) \\ -\frac{k(\zeta-z)}{2\pi a \sqrt{ar}} K(k) + \frac{1}{2a} \Lambda_0(\phi, k) & (a < r) \end{cases} \quad (\text{A-5})$$

여기서  $K$ 와  $E$ 는 1차와 2차 완전 타원 적분(complete elliptic integral first and second kind)이고,  $\Lambda_0$ 는 Heuman 람다 함수(Heuman's Lambda function)이다(Byrd and Friedman, 1971).

완전 타원 적분은 식 (A-6) ~ (A-7)과 같이 정의되고 여기에 필요한 입력 값은 식 (A-8) ~ (A-9)와 같다.

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{A-6})$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{A-7})$$

$$k = \frac{\sqrt{4ar}}{\sqrt{(a+r)^2 + (\zeta-z)^2}} \quad (\text{A-8})$$

$$\phi = \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{(\zeta-z)^2}}{\sqrt{(a-r)^2 + (\zeta-z)^2}} \right) \quad (\text{A-9})$$

완전 타원 적분의 계산은 Carlson and Notis (1981)과 Carlson (1995) 방법을 이용하였다.

## 부록 B. 총자력 유도

총자력은 식 (B-1)과 같이 이상체에서 기인한 벡터 자기장을 지자기 방향으로 내적하여 구한다.

$$F = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{B}}_e \quad (\text{B-1})$$

여기서  $\mathbf{B}$ 는 이상체에서 기인한 자력 벡터이고  $\hat{\mathbf{B}}_e$ 는 지자기장 방향이다. 지자기장 방향은 식 (B-2)와 같이 방향 코사인 ( $l, m, n$ )로 정의할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{B}}_e = l\hat{\mathbf{x}} + m\hat{\mathbf{y}} + n\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{B-2})$$

원통형 이상체의 자화 방향은 같은 방법으로 방향 코사인( $L, M, N$ )을 이용하여 정의하면 식 (B-3)과 같다.

$$\mathbf{m} = |\mathbf{m}|(m_x\hat{\mathbf{x}} + m_y\hat{\mathbf{y}} + m_z\hat{\mathbf{z}}) = |\mathbf{m}|(L\hat{\mathbf{x}} + M\hat{\mathbf{y}} + N\hat{\mathbf{z}}) \quad (\text{B-3})$$

따라서 총자력값을 구하면 다음과 같다.

$$F = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{B}}_e = 2\pi a |\mathbf{m}| \left[ \begin{aligned} & \left\{ nN - \frac{(IL \cos^2 \theta + (IM + mL) \sin \theta \cos \theta)}{+mM \sin^2 \theta} \right\} I(1,0;0) \\ & + \left\{ (IL - mM) \cos^2 \theta - (IL - mM) \sin^2 \theta \right\} \frac{1}{r} I(1,1;-1) \\ & - \left\{ (IN + nL) \cos \theta + (mN + nM) \sin \theta \right\} I(1,1;0) \end{aligned} \right] \quad (\text{B-4})$$

$$= 2\pi a |\mathbf{m}| \left[ (C - A)I(1,0;0) - (E - A) \frac{1}{r} I(1,1;-1) - BI(1,1;0) \right]$$

여기서 계수 A, B, C, E는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= IL \cos^2 \theta + (IM + mL) \sin \theta \cos \theta + mM \sin^2 \theta \\ B &= (IN + nL) \cos \theta + (mN + nM) \sin \theta \\ C &= nN \\ E &= IL \sin^2 \theta - (IM + mL) \sin \theta \cos \theta + mM \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

계수 A, B, C, E는 Singh and Sabina (1978)의 표현을 따른 것이고 그들이 유도한 총자력과 이 논문에서 유도한 총자력(식 B-4)이 같음을 보여준다. Fig. B-1은 Fig. 2와 같은 원통형 이상체의 총자력 이상 반응을 보여 준다. 자력 z 성분과 비슷한 양상을 보이지만 양의 최대 이상값이 원통형 경계 부분에 나타난다.

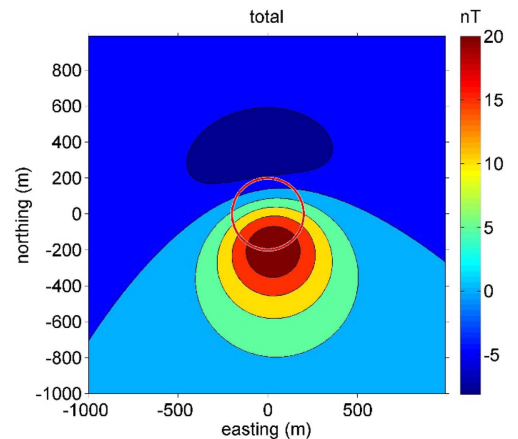


Fig. B-1. The total magnetic intensity due to the cylinder described in Fig. 2.