

# 극 배치 기법을 활용한 쿼드로터 시스템의 자세 및 호버링 제어

## Attitude and Hovering Control of Quadrotor Systems using Pole Placement Method

박지선\*, 오상영\*, 최호림\*

Ji-Sun Park\*, Sang-Young Oh\*, Ho-Lim Choi\*

### Abstract

In this paper, we propose a control scheme for quadrotor system using a pole placement method. When using a state feedback controller, a lot of trial and error in selection of control gains are often required to improve system performance. In order to relax this complicated process, we analyze the closed-loop system associated with control gains. Then, we present a control gain selection algorithm for control gains using a pole placement method to improve the system performance. The proposed control method is applied to the actual quadrotor system to illustrate the validity of the proposed method.

### 요약

본 논문에서는 극 배치 기법을 활용하여 쿼드로터 시스템의 제어기법을 제안한다. 일반적으로 상태 궤환 제어를 사용하여 제어된 시스템 성능을 개선하기 위해서는 많은 제어 이득 값 선정에서의 시행착오가 필요하다. 이러한 복잡성을 완화시키고, 체계적인 제어 이득 선정을 위해 쿼드로터의 페루프 시스템을 분석한다. 시스템 성능을 개선시키기 위해 극 배치 기법을 활용한 제어 이득 결정 알고리즘을 제안한다. 제안된 제어기법은 실제 시스템인 쿼드로터에 적용하여 유효성을 입증한다.

*Key words* : Quadrotor system, Hovering control, Attitude control, Pole placement method, Gain selection algorithm

### 1. 서론

최근 드론이 개발되면서 고정익, 회전익, 비행선 등 드론의 종류가 다양해졌다. 쿼드로터는 회전익 드론의 한 종류로써 레저용, 정찰용, 촬영용 등 다양한 분야에서 사용되고 있다. 또한 사람이 들어갈 수 없는 공간을 탐사하거나 물건을 옮기는 등 여러

분야에서 연구가 진행되고 있다.

쿼드로터는 호버링과 수직 이·착륙이 가능하여 이·착륙 시의 공간이 많이 필요하지 않다는 장점을 가지고 있다. 그러나 모델링이 복잡하고 비선형 시스템을 가지고 있어 제어하기 어렵다는 단점이 있다. 이에 따라 쿼드로터에 대한 다양한 제어방법들이 연구되었다. 예를 들어 [1]은 PID제어기가 최

\* Dept. of Electrical Engineering, Dong-A University

★ Corresponding author

E-mail : hlchoi@dau.ac.kr, Tel : +82-51-200-7734

※ Acknowledgment

This work was supported by the National Research Foundation of Korea (NRF) grant funded by the Korea government (MSIT) (No. NRF-2019R1F1A1040968).

Manuscript received Mar. 2, 2020; revised Mar. 21, 2020; accepted Mar. 23, 2020.

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

단 시간에 자세제어를 할 수 있는 이득 값을 얻는 알고리즘을 제안하였다. 그러나 [1]에서 제안된 제어기법은 비선형성을 잘 보상하지 못하여 비선형 시스템인 쿼드로터에 적용하면 오차로 인해 안정성이 보장되지 못한다는 단점을 가지고 있다. 이러한 단점을 보완하기 위해 비선형성을 포함하여 제어를 설계하는 방식인 케환 선형화 제어기법이 연구되었다[2], [3]. [4]와 [5]에서는 LQR제어기와 PID제어기의 성능을 비교하기 위해 각도 제어 성능과 궤적추적 성능을 비교하였고, LQR제어기의 성능이 PID제어기의 성능보다 뛰어난 것을 입증하였다.

본 논문에서는 쿼드로터의 높이 및 자세제어를 위하여 상태 케환 제어기를 사용한다. 상태 케환 제어기를 설계 할 때 이득값을 선정하기 위해 페루프 시스템이 안정되는 극점의 범위를 찾는 방법이 많이 사용되고 있다. 그러나 이 방법은 overshoot (오버슈트), ultimate bound(최종 수렴 범위), settling time(정착시간)과 같은 시스템의 특정 성능을 개선하기 어렵다. 따라서 이득 값과 출력간의 관계를 파악하여 이득 값 결정 알고리즘을 제안하고, 실제 쿼드로터에 적용함으로써 제어기법의 유용성을 검증한다. 본 논문은 2장에서 쿼드로터 시스템의 동역학 방정식 및 상태방정식을 유도하고 내부 모델 제어기를 설계한다. 3장에서 쿼드로터의 출력과 제어기 사이의 관계를 분석하여 제어 이득 결정 알고리즘을 제안한다. 4장에서 알고리즘을 쿼드로터에 적용하여 호버링 및 자세제어 실험을 통해 제안된 제어 기법의 유효성을 확인한다.

## II. 쿼드로터 시스템

### 2.1 동역학 모델 및 케환 선형화

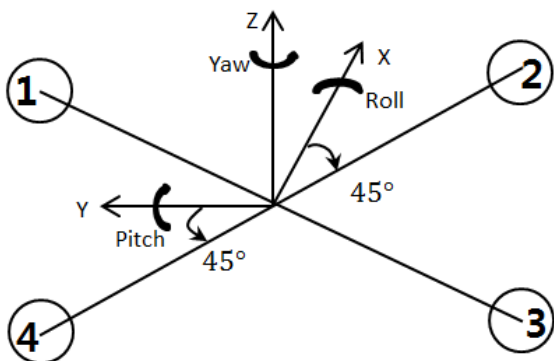


Fig. 1. Structure of quadrotor system [6].  
그림 1. 쿼드로터의 시스템 구조 [6]

그림 1에서 쿼드로터 각 모터의 PWM입력 값을  $u_1, u_2, u_3, u_4$ 로 둔다.  $U_z$ 는 쿼드로터 본체의 상승에 관한 제어입력,  $U_\phi$ 는 roll회전에 관한 제어입력,  $U_\theta$ 는 pitch회전에 관한 제어입력,  $U_\psi$ 는 yaw회전에 관한 제어입력이다. 제어입력  $U=[U_z, U_\phi, U_\theta, U_\psi]$ 를 PWM 입력으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_z &= K_t(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \\ U_\phi &= K_t(-u_1 + u_2 + u_3 - u_4) \\ U_\theta &= K_t(u_1 + u_2 - u_3 - u_4) \\ U_\psi &= k_y(-u_1 + u_2 - u_3 + u_4) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $K_t=0.0162N \cdot s^2$ 와  $K_y=0.0159N \cdot s^2$ 는 공기 밀도, 프로펠러의 형태, 길이, 회전운동 등으로 부터 발생하는 실내 환경에서의 공기역학적 요소를 통합적으로 나타내는 상수이다. (1)을 각 모터의 PWM 입력  $u_1, u_2, u_3, u_4$ 로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\frac{U_z}{k_t} - \frac{U_\phi}{k_t} + \frac{U_\theta}{k_t} - \frac{U_\psi}{k_y}}{4} \\ u_2 &= \frac{\frac{U_z}{k_t} + \frac{U_\phi}{k_t} + \frac{U_\theta}{k_t} + \frac{U_\psi}{k_y}}{4} \\ u_3 &= \frac{\frac{U_z}{k_t} + \frac{U_\phi}{k_t} - \frac{U_\theta}{k_t} - \frac{U_\psi}{k_y}}{4} \\ u_4 &= \frac{\frac{U_z}{k_t} - \frac{U_\phi}{k_t} - \frac{U_\theta}{k_t} + \frac{U_\psi}{k_y}}{4} \end{aligned} \quad (2)$$

쿼드로터의 동역학 방정식은 뉴턴-오일러 방정식을 이용하여 쿼드로터의 높이와 각도에 대해 아래와 같이 구할 수 있다[7], [8].

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= [(\cos\phi\cos\theta)U_z]/m - g + d_z(t) \\ \ddot{\phi} &= [lU_\phi + \dot{\theta}\dot{\psi}(I_y - I_z)]/I_x + d_\phi(t) \\ \ddot{\theta} &= [lU_\theta + \dot{\phi}\dot{\psi}(I_z - I_x)]/I_y + d_\theta(t) \\ \ddot{\psi} &= [U_\psi + \dot{\phi}\dot{\theta}(I_x - I_y)]/I_z + d_\psi(t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $m$ 은 질량,  $g$ 는 중력가속도,  $l$ 은 쿼드로터의 무게중심으로부터 모터까지의 거리를 나타낸다.  $d_z(t), d_\phi(t), d_\theta(t), d_\psi(t)$ 는 외란으로 이 논문에서는  $d_z(t) = \alpha_z \sin\omega_z t$ ,  $d_\phi(t) = \alpha_\phi \sin\omega_\phi t$ ,  $d_\theta(t) = \alpha_\theta \sin\omega_\theta t$ ,  $d_\psi(t) = \alpha_\psi \sin\omega_\psi t$ 이고,  $\alpha_z, \alpha_\phi, \alpha_\theta, \alpha_\psi$ 는 유한한 상수

이다.

상태 변수를  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T = [z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}]^T$ 로 두고 동역학 방정식 (3)을 아래와 같이 상태방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (\cos x_3 \cos x_5) \frac{U_z}{m} - g + d_z(t) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{l U_\phi}{I_x} + x_6 x_8 \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) + d_\phi(t) \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= \frac{l U_\theta}{I_y} + x_4 x_8 \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + d_\theta(t) \\ \dot{x}_7 &= x_8 \\ \dot{x}_8 &= \frac{U_\psi}{I_z} + x_6 x_4 \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + d_\psi(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $x_1$ 는  $z$ 축의 위치,  $x_2$ 은  $z$ 축의 속도,  $x_3$ 은  $x$ 축의 각도인 roll각도  $\phi$ ,  $x_4$ 은  $x$ 축의 각속도  $\dot{\phi}$ ,  $x_5$ 는  $y$ 축의 각도인 pitch각도  $\theta$ ,  $x_6$ 은  $y$ 축의 각속도  $\dot{\theta}$ ,  $x_7$ 은  $z$ 축의 각도인 yaw각도  $\psi$ ,  $x_8$ 는  $z$ 축의 각속도  $\dot{\psi}$ 를 뜻한다.  $I_x$ 는  $x$ 축의 관성모멘트,  $I_y$ 는  $y$ 축의 관성모멘트,  $I_z$ 는  $z$ 축의 관성모멘트를 나타내며 변수 값들은 아래 표 1과 같다.

Table 1. Parameters Table [9].

표 1. 변수 테이블 [9]

Parameters	Value
$I_x$	$22.3 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$
$I_y$	$29.8 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$
$I_z$	$48 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$
$m$	0.429 kg
$l$	0.1785 m
$g$	$9.81 \text{ m/s}^2$

제어기가 원하는 높이와 각도를 추종하기 위해  $\xi_i = x_i - x_{id} (i=1, \dots, 8)$ 를 정의한다. 여기서  $x_{id}$ 는 각 상태가 추종하려는 값이다. 즉,  $x_{1d}$ 는 쿼드로터가 호버링 하려는 높이 값을 의미한다.

$$\xi_1 = x_1 - x_{1d} \quad \xi_2 = x_2 - \dot{x}_{1d}$$

$$\begin{aligned} \xi_3 &= x_3 - x_{3d}, & \xi_4 &= x_4 - \dot{x}_{3d}, \\ \xi_5 &= x_5 - x_{5d}, & \xi_6 &= x_6 - \dot{x}_{5d}, \\ \xi_7 &= x_7 - x_{7d}, & \xi_8 &= x_8 - \dot{x}_{7d}, \end{aligned} \quad (5)$$

(4)-(5)를 이용하여 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다. 자세제어를 위해선 각도가 0이 되어야 한다. 따라서  $x_{3d} = x_{5d} = x_{7d} = 0$ 이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{\cos x_3 \cos x_5}{m} U_z - g - \ddot{x}_{1d} + d_z(t) \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 &= \frac{l U_\phi + x_6 x_8 (I_y - I_z)}{I_x} + d_\phi(t) \\ \dot{\xi}_5 &= \xi_6 \\ \dot{\xi}_6 &= \frac{l U_\theta + x_4 x_8 (I_z - I_x)}{I_y} + d_\theta(t) \\ \dot{\xi}_7 &= \xi_8 \\ \dot{\xi}_8 &= \frac{U_\psi + x_6 x_4 (I_x - I_y)}{I_z} + d_\psi(t) \end{aligned} \quad (6)$$

(6)의 상태들은 비선형성을 포함하고 있다. 이 시스템의 비선형 부분을 식 (7)과 같이 변수  $u_z, u_\phi, u_\theta, u_\psi$ 로 치환하는 궤환 선형화를 이용하여 제어입력을 나타낼 수 있다.

$$U_z = \frac{(u_z + g + \ddot{x}_{1d})m}{\cos x_3 \cos x_5} \quad (7)$$

$$U_\phi = \frac{u_\phi I_x - x_6 x_8 (I_y - I_z)}{l} \quad (8)$$

$$U_\theta = \frac{u_\theta I_y - x_4 x_8 (I_z - I_x)}{l} \quad (9)$$

$$U_\psi = u_\psi I_z - x_4 x_6 (I_x - I_y) \quad (10)$$

## 2.2 내부 모델 제어기 설계

제어기를 설계하기 전에 가제어행렬을 이용하여 제어가 가능함을 확인한다. (7)-(10)을 (6)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$A\xi + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u \quad (11)$$

여기서  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8]^T$ 이고,  $u = [u_z, u_\phi, u_\theta, u_\psi]^T$ 이다. 이때 상태벡터 차원과 가제어행렬  $S = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B \ A^5B \ A^6B \ A^7B]$ 의 계수 (Rank)가 같으면 제어가 가능하다.  $S \in R^{8 \times 32}$ 의 계수(Rank)는 8이고, 상태벡터의 차원( $\xi \in R^{8 \times 1}$ )도 8 차원이다. 따라서 제어가 가능하다.

상태 방정식 (6)을 보면 높이와 각도들은 쿼드로터에서 각각의 상태 값을 받아와서 제어가 된다. 이 때 각 제어기들은 서로 독립적으로 각 상태를 제어하고 있다. 제어기와 쿼드로터의 상태 값들을 계략도로 나타내면 그림 2와 같다.

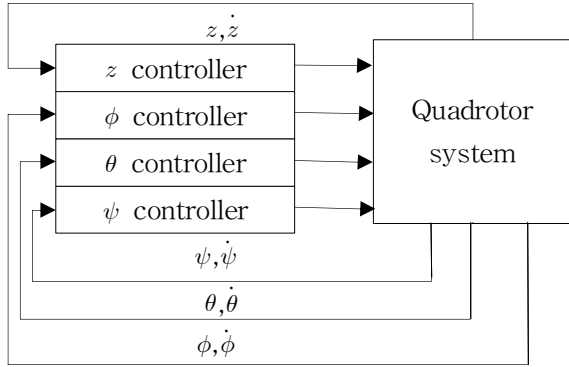


Fig. 2. Control architecture of quadrotor.

그림 2. 쿼드로터의 제어 구조

먼저 쿼드로터를 원하는 높이에 위치하게 하는 높이 제어기를 설계한다.  $z$ 의 값이  $z_d$ 를 추정하기 위하여  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ 이 되어야 한다. (6)의  $\xi_1$ 과  $\xi_2$ 를 사용하여 제어기  $u_z$ 를 설계한다.

$$u_z = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 \quad (12)$$

(12)의 제어기를 (7)에 대입하면 아래와 같이  $z$ 에 대한 제어입력을 구할 수 있다.

$$U_z = \frac{(k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + g + \ddot{x}_{1d})m}{\cos x_3 \cos x_5} \quad (13)$$

위와 같은 방법으로 자세 제어를 위한  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  제어기들도 설계가 가능하다.  $\xi_3$ 와  $\xi_4$ 가 0이 되도록 제어기  $u_\phi$ 를 아래와 같이 설계한다.

$$u_\phi = k_3 \xi_3 + k_4 \xi_4 \quad (14)$$

(14)의 제어기를 (8)에 대입하면 아래와 같이  $\phi$ 에 대한 제어입력을 구할 수 있다.

$$U_\phi = \frac{(k_3 \xi_3 + k_4 \xi_4)I_x - x_6 x_8 (I_y - I_z)}{l} \quad (15)$$

$\xi_5$ 와  $\xi_6$ 이 0이 되도록 제어기  $u_\theta$ 를 설계하고,  $\xi_7$ 과  $\xi_8$ 이 0이 되도록 제어기  $u_\psi$ 를 설계하면 다음과 같다.

$$u_\theta = k_5 \xi_5 + k_6 \xi_6 \quad (16)$$

$$u_\psi = k_7 \xi_7 + k_8 \xi_8 \quad (17)$$

(16), (17)을 (9)와 (10)에 대입하면 다음과 같이  $\theta$ 와  $\psi$ 의 제어입력  $U_\theta$ 와  $U_\psi$ 를 구할 수 있다.

$$U_\theta = \frac{(k_5 \xi_5 + k_6 \xi_6)I_y - x_4 x_8 (I_z - I_x)}{l} \quad (18)$$

$$U_\psi = (k_7 \xi_7 + k_8 \xi_8)I_z - x_4 x_6 (I_x - I_y) \quad (19)$$

위에서 설계한  $U_z$ ,  $U_\phi$ ,  $U_\theta$ ,  $U_\psi$  제어입력을 정리해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_z &= \frac{(k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + g + \ddot{x}_{1d})m}{\cos x_3 \cos x_5} \\ U_\phi &= \frac{(k_3 \xi_3 + k_4 \xi_4)I_x - x_6 x_8 (I_y - I_z)}{l} \\ U_\theta &= \frac{(k_5 \xi_5 + k_6 \xi_6)I_y - x_4 x_8 (I_z - I_x)}{l} \\ U_\psi &= (k_7 \xi_7 + k_8 \xi_8)I_z - x_4 x_6 (I_x - I_y) \end{aligned} \quad (20)$$

(12), (14), (16), (17)에서 설계한 제어기를 (11)에 대입하면 폐루프 시스템인 (21)을 얻을 수 있다.

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & k_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_7 & k_8 \end{bmatrix} \xi = (A+BK)\xi \quad (21)$$

여기서  $K = [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8]$ 이다. (21)에서 행렬  $A+BK$ 가 Hurwitz가 되면 폐루프 시스템이 안정하다. 여기서 주목할 점은  $A+BK$ 행렬을 보면 주 대각 행렬외의 행렬들은 다 영행렬이다. 따라서 이 행렬의 Hurwitz를 판별할 때 주 대각행렬들이 모두 Hurwitz이면 전체  $A+BK$ 행렬도 Hurwitz이다. 주 대각 행렬들의 특성방정식을 구하면 다음과 같다. 이때 행렬들의 모양이 다 같기 때문에  $\lambda_2$ 만 구한다.  $\lambda_\phi, \lambda_\theta, \lambda_\psi$ 는  $\lambda_2$  구하는 방법과 같다.

$$\begin{vmatrix} -\lambda_z & 1 \\ k_1 & k_2 - \lambda_z \end{vmatrix} = \lambda_z^2 - k_2\lambda_z - k_1 = 0 \quad (22)$$

(22)가 Hurwitz polynomial이 되기 위한  $k$ 의 범위를 Routh-Hurwitz 판별법을 이용하여 구할 수 있다[10]. Routh-Hurwitz 판별법은 판별법의 모든 계수가 같은 부호를 가지며, 계수의 어느 하나도 0이 아니면 페루프 시스템이 안정된다. 즉,  $k_1 < 0$ ,  $k_2 < 0$ ,  $k_3 < 0$ ,  $k_4 < 0$ ,  $k_5 < 0$ ,  $k_6 < 0$ ,  $k_7 < 0$ ,  $k_8 < 0$ 이면 된다.

### III. 극 배치 제어 알고리즘

극 배치 기법은 페루프 시스템이 Hurwitz가 되게 하는 식을 얻고 시스템의 특성방정식과 매칭 시켜  $K$ 를 구하는 것이다. 특성방정식 (22)의 근을  $\lambda_z = [-a_z, -b_z]$ 라고 가정하면 특성방정식은 다음과 같다.

$$(\lambda_z + a_z)(\lambda_z + b_z) = \lambda_z^2 + (a_z + b_z)\lambda_z + a_z b_z = 0 \quad (23)$$

이렇게 구한 (23)을 (22)와 비교하면  $k_1$ 의 값이  $-a_z b_z$ 이고,  $k_2$ 의 값이  $-(a_z + b_z)$ 인 것을 알 수 있다. 이와 같은 방법으로 각 제어기의 이득 값을 구할 수 있다. 이때  $\lambda$ 를 극점(Pole)이라고 한다. 극점을 바꾸어 제어기의 이득 값을 조절 할 수 있다. 또한 이득 값이 달라짐에 따라 제어기의 성능도 달라진다.

$A+BK$ 가 Hurwitz가 되는 범위를 계산하여 이득 값을 선정하게 되면 페루프 시스템을 안정화시키는 이득 값을 얻을 수 있다는 장점이 있지만 overshoot (오버슈트)를 더 낮추거나 settling time(정착시간)이나 ultimate bound(최종 수렴 범위)를 줄이는 등 성능 개선을 위한 이득 선정이 어렵다. 그래서 페루프 시스템을 분석하여 이득 값과 제어기의 성능 사이의 관계를 파악하여 시스템 출력을 개선시키고자 한다.

#### 3.1 제어이득 값과 시스템 출력의 관계 분석

높이 및 각 각도의 상태방정식 모양이 같기 때문에 높이 시스템을 분석하면 각 각도 시스템에 동일하게 적용가능하다. (6)으로 부터 높이에 관한 상태 방정식은 (24)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= u_z + d_z(t) \\ y &= \xi_1 \end{aligned} \quad (24)$$

시스템 식의 출력을 분석하기 위해 (24)를 라플라스 변환한다.

$$\begin{aligned} s\xi_1(s) - \xi_1(0) &= \xi_2(s) \\ s\xi_2(s) - \xi_2(0) &= k_1\xi_1(s) + k_2\xi_2(s) + \frac{\alpha_z w}{s^2 + w^2} \end{aligned} \quad (25)$$

(25)를  $\xi_1(s)$ 에 관한 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y(s) &= y_s(s) + y_d(s) = \xi_1(s) \\ &= \frac{(s - k_2)\xi_1(0) + \xi_2(0)}{s^2 - k_2s - k_1} + \frac{\alpha_z w_z}{(s^2 - k_2s - k_1)(s^2 + w^2)} \end{aligned} \quad (26)$$

여기서  $y_s$ 는 시스템의 출력을 라플라스 변환 한 값이고,  $y_d$ 는 외란을 라플라스 변환 한 값이다. (26)을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} y(s) &= y_s(s) + y_d(s) = \xi_1(s) \\ &= \xi_1(0) \frac{s - \frac{k_2}{2}}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)} - \frac{\left(\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)\right)}{\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{\left(-\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)} + \frac{a\left(s - \frac{k_2}{2}\right)}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)} \\ &\quad + \frac{\frac{k_2}{2}a + b}{\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}} \cdot \frac{\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)} \\ &\quad + \frac{cs}{s^2 + w_z^2} + \frac{d}{s^2 + w_z^2} \end{aligned} \quad (27)$$

여기서  $a, b, c, d$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a &= \frac{-k_2\alpha_z w_z}{(w_z^2 + k_1)^2 + k_2^2 w_z^2}, \\ b &= \frac{(w^2 + k_1)\alpha_z w_z + k_2^2\alpha_z w_z}{(w_z^2 + k_1)^2 + k_2^2 w_z^2}, \\ c &= \frac{k_2\alpha_z w_z}{(w_z^2 + k_1)^2 + k_2^2 w_z^2}, \quad d = \frac{-(w^2 + k_1)\alpha_z w_z}{(w_z^2 + k_1)^2 + k_2^2 w_z^2} \end{aligned} \quad (28)$$

(27)에서  $\frac{k_2^2}{4} + k_1$ 의 부호에 따라 역 라플라스 변환의 결과가 달라진다. 따라서 아래와 같이 세 가지 경우로 나누어 시스템 출력  $y(t) = \xi_1(t)$ 를 얻는다.

**Case 1.  $\frac{k_2^2}{4} + k_1 < 0$ 인 경우:**

먼저 시스템 출력 식을 구하기 위해  $y_s(s)$ 를 역 라플라스 변환 한다.

$$y_s(s) = \xi_1(0) \frac{s - \frac{k_2}{2}}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 + \sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}^2} - \frac{\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)}{\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}} \cdot \frac{\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 + \sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}^2} \quad (29)$$

(29)를 역 라플라스 변환 한 결과는 다음과 같다.

$$y_s(t) = \xi_1(0) e^{\frac{k_2}{2}t} \cos\left(\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}t\right) - \left(\frac{\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)}{\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}}\right) e^{\frac{k_2}{2}t} \sin\left(\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}t\right) \quad (30)$$

삼각함수의 합성 공식을 사용하면 (30)을 정리할 수 있다. 정리하면 시스템 출력 식 (31)이 된다.

$$y_s(t) = e^{\frac{k_2}{2}t} \left[ \sqrt{\xi_1(0)^2 + \frac{\left(\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)\right)^2}{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}} \times \sin\left(\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}t + \sigma\right) \right] \quad (31)$$

여기서  $\sigma$ 는 다음과 같다.

$$\sigma = \tan^{-1} \frac{\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)}{\xi_1(0) \sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}} \quad (32)$$

외란에 의한 ultimate bound를 구하기 위해  $y_d(s)$ 를 역 라플라스 변환 한다.

$$y_d(s) = a \frac{s - \frac{k_2}{2}}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 + \sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}^2} + \frac{\frac{k_2}{2}a + b}{\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}} \cdot \frac{\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 + \sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}^2} + \frac{cs}{s^2 + w_z^2} + \frac{d}{s^2 + w_z^2} \quad (33)$$

여기서  $a, b, c, d$ 는 (28)과 같다. (33)을 역 라플라스 변환 한 결과는 다음과 같다.

$$y_d(t) = ae^{\frac{k_2}{2}t} \cos\left(\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}t\right) + \frac{\frac{k_2}{2}a + b}{\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}} e^{\frac{k_2}{2}t} \cdot \sin\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}t + c \cos w_z t + \frac{d}{w} \sin w_z t \quad (34)$$

삼각함수의 합성 공식을 사용하여 정리하면 외란 출력 식 (35)를 얻을 수 있다.

$$y_d(t) = e^{\frac{k_2}{2}t} \sqrt{a^2 + \frac{\left(\frac{k_2}{2}a - b\right)^2}{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}} \cdot \sin\left(\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}t + \beta\right) + \sqrt{c^2 + \frac{d^2}{w^2}} \sin(w_z t + \gamma) \quad (35)$$

여기서  $\beta$ 와  $\gamma$ 는 다음과 같다.

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\frac{k_2}{2}a - b}{a \sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}}, \quad \gamma = \tan^{-1} \frac{d}{aw_z} \quad (36)$$

출력 식  $y(t) = y_s(t) + y_d(t)$ 는 다음과 같다.

$$y(t) = e^{\frac{k_2}{2}t} \sqrt{\xi_1(0)^2 + \frac{\left(\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)\right)^2}{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}} \times \sin\left(\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}t + \beta\right)$$

$$\begin{aligned}
 &+ e^{\frac{k_2}{2}t} \sqrt{a^2 + \frac{\left(\frac{k_2}{2}a - b\right)^2}{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}} \cdot \sin\left(\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}t + \beta\right) \\
 &+ \sqrt{c^2 + \frac{d^2}{w_z^2}} \sin(w_z t + \gamma) \tag{37}
 \end{aligned}$$

**Case 2.  $\frac{k_2^2}{4} + k_1 > 0$  인 경우:**

먼저 시스템 출력 식을 구하기 위해  $y_s(s)$ 를 역 라플라스 변환 한다.

$$\begin{aligned}
 y_s(s) &= \xi_1(0) \frac{s - \frac{k_2}{2}}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)^2}} \\
 &- \left[ \frac{\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right] \frac{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)^2}} \tag{39}
 \end{aligned}$$

(39)를 역 라플라스 변환 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 y_s(t) &= \xi_1(0) e^{\frac{k_2}{2}t} \cosh\left(\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}t\right) \\
 &- \left[ \frac{\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right] e^{\frac{k_2}{2}t} \sinh\left(\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}t\right) \\
 &= e^{\frac{k_2}{2}t} \left\{ \xi_1(0) \frac{e^{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}t} + e^{-\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}t}}{2} \right. \\
 &- \left. \left[ \frac{\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right] \frac{e^{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}t} - e^{-\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}t}}{2} \right\} \tag{40}
 \end{aligned}$$

(40)을 정리하면 시스템 출력 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 y_s(t) &= \frac{\xi_1(0) - \left[ \frac{\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right]}{2} e^{\left(\frac{k_2}{2} + \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}\right)t} \\
 &+ \frac{\xi_1(0) + \left[ \frac{\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right]}{2} e^{\left(\frac{k_2}{2} - \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}\right)t} \tag{41}
 \end{aligned}$$

외란에 의한 출력을 구하기 위해  $y_d(s)$ 를 역 라플라스 변환 한다.

$$\begin{aligned}
 y_d(s) &= a \frac{s - \frac{k_2}{2}}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)^2}} \\
 &+ \frac{\frac{k_2}{2}a + b}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)^2}} \\
 &+ \frac{cs}{s^2 + w_z^2} + \frac{d}{s^2 + w_z^2} \tag{42}
 \end{aligned}$$

여기서 변수  $a, b, c, d$ 는 (28)과 같다. (42)를 역 라플라스 변환 하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 y_d(t) &= \frac{a + \left[ \frac{\frac{k_2}{2}a + b}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right]}{2} e^{\left(\frac{k_2}{2} + \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}\right)t} \\
 &+ \frac{a - \left[ \frac{\frac{k_2}{2}a + b}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right]}{2} e^{\left(\frac{k_2}{2} - \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}\right)t} \\
 &+ \sqrt{c^2 + \frac{d^2}{w_z^2}} \sin(w_z t + \gamma) \tag{43}
 \end{aligned}$$

여기서  $\gamma$ 는 다음과 같다.

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{d}{aw_z} \tag{44}$$

출력 식  $y(t) = y_s(t) + y_d(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{\xi_1(0) - \left[ \frac{\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right]}{2} e^{\left(\frac{k_2}{2} + \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}\right)t} \\
 &+ \frac{\xi_1(0) + \left[ \frac{\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right]}{2} e^{\left(\frac{k_2}{2} - \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}\right)t} \\
 &+ \frac{a + \left[ \frac{\frac{k_2}{2}a + b}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right]}{2} e^{\left(\frac{k_2}{2} + \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}\right)t} \\
 &+ \frac{a - \left[ \frac{\frac{k_2}{2}a + b}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right]}{2} e^{\left(\frac{k_2}{2} - \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}\right)t} \\
 &+ \sqrt{c^2 + \frac{d^2}{w_z^2}} \sin(w_z t + \gamma)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a - \left( \frac{\frac{k_2}{2}a + b}{\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}} \right) e^{\left( \frac{k_2}{2} - \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1} \right) t} \\
& + \frac{\alpha_z}{\sqrt{(w_z^2 + k_1^2)^2 + k_2^2 w_z^2}} \sin(w_z t + \gamma) \quad (45)
\end{aligned}$$

**Case 3.  $\frac{k_2^2}{4} + k_1 = 0$ 인 경우:**

먼저 시스템 출력 식을 구하기 위해  $y_s(s)$ 를 역 라플라스 변환 한다.

$$y_s(s) = \xi_1(s) = \frac{(s - k_2)\xi_1(0) + \xi_2(0)}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2} \quad (46)$$

(46)을 역 라플라스 변환 하여 정리하면 아래와 같다.

$$y_s(t) = e^{\frac{k_2}{2}t} \left( \xi_1(0) + \left( \xi_2(0) - \frac{k_2}{2}\xi_1(0) \right) t \right) \quad (47)$$

외란에 의한 출력 식을 구하기 위해  $y_d(s)$ 를 역 라플라스 변환 한다.

$$y_d(s) = \frac{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)a + \frac{k_2}{2}a + b}{\left(s - \frac{k_2}{2}\right)^2} + \frac{cs}{s^2 + w_z^2} + \frac{d}{s^2 + w_z^2} \quad (48)$$

여기서 변수  $a, b, c, d$ 는 (28)과 같다. (48)을 역 라플라스 변환 하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
y_d(t) &= \left( a + \left( \frac{k_2}{2}a + b \right) t \right) e^{\frac{k_2}{2}t} \\
&+ \sqrt{c^2 + \frac{d^2}{w_z^2}} \sin(w_z t + \gamma) \quad (49)
\end{aligned}$$

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{d}{aw_z} \quad (50)$$

출력 식  $y(t) = y_s(t) + y_d(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{\frac{k_2}{2}t} \left( \xi_1(0) + \left( \xi_2(0) - \frac{k_2}{2}\xi_1(0) \right) t \right) \\
&+ \left( a + \left( \frac{k_2}{2}a + b \right) t \right) e^{\frac{k_2}{2}t} \\
&+ \frac{\alpha_z}{\sqrt{(w_z^2 + k_1^2)^2 + k_2^2 w_z^2}} \sin(w_z t + \gamma) \quad (51)
\end{aligned}$$

### 3.2 제어이득 결정 알고리즘

Case 1의 (37), case 2의 (45), case 3의 (51)에서 보듯이 제어 이득과 출력의 관계가 상이하다. 따라서 제어이득과 출력의 관계를 면밀히 살펴보기 위해 각 case별로 나누어 분석한다.

**Case 1.  $\frac{k_2^2}{4} + k_1 < 0$  일 경우:**

출력 식은 (37)이다. 이 식을 간단하게 표현하면 다음과 같다.

$$y = e^{\bar{a}t} (\bar{b} \sin(\bar{c}) + \alpha) + \bar{d} \sin(w_z t + \beta) \quad (52)$$

여기서  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ 와  $\bar{d}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \frac{k_2}{2}, \\
\bar{b} &= \sqrt{\xi_1(0)^2 + \frac{\left(\frac{k_2}{2}\xi_1(0) - \xi_2(0)\right)^2}{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}} \\
&+ \frac{\alpha_z w_z}{\sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right) \left( (w_z^2 + k_1)^2 + k_2^2 w_z^2 \right)}}, \\
\bar{c} &= \sqrt{-\left(\frac{k_2^2}{4} + k_1\right)}, \\
\bar{d} &= \frac{\alpha_z}{\sqrt{(w_z^2 + k_1)^2 + k_2^2 w_z^2}} \quad (53)
\end{aligned}$$

Overshoot를 줄이기 위해서는 (52)에서  $\bar{b}$ 의 값을 줄여야 한다. 이때  $\xi_1$ 의 값이 1보다 크면  $k_2$ 의 크기를 줄여야  $\bar{b}$ 의 크기가 작아지고  $\xi_1$ 의 값이 1보다 작거나 같으면  $k_2$ 의 크기를 키워야  $\bar{b}$ 의 크기가 작아진다. 또 다른 방법으로  $k_1$ 의 크기를 키워  $\bar{b}$ 의 크기를 줄일 수 있다.

Settling time을 줄이기 위해서는  $e$ 의 지수의 크기인  $|\bar{a}|$ 가 커져야 하고,  $\bar{a}$ 가 음수여야 한다. 앞의 안정성 분석에서  $k_i$ 는 모두 음수를 만족하여야 한다고 했기 때문에  $|k_2|$ 가 커지면 된다.

Ultimate bound는 정상상태일 때의 오차 범위를 나타낸다. 정상상태 출력 식을 구하기 위해 최종치 정리하면 지수함수를 포함한 식은 0으로 수렴하고 (52)의 뒷부분 식만 남게 된다. 이 식을 이용하여 Ultimate bound를 줄여주기 위해서는  $|k_1|$  또는  $|k_2|$ 가 커지면 된다.



### Case 2. $\frac{k_2^2}{4} + k_1 > 0$ 일 경우:

출력 식은 (45)이다. 이 식을 간단하게 표현하면 다음과 같다.

$$y = \bar{a}e^{\bar{b}t} + \bar{c}e^{\bar{d}t} + \bar{f}\sin(w_z t + \beta) \quad (54)$$

여기서  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{d}$ 와  $\bar{f}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{\xi_1(0) - \left( \frac{k_2}{2} \xi_1(0) - \xi_2(0) \right)}{2} \\ &\quad + \frac{-k_2 \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1 + w_z^2 + k_1}}{2 \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1} \left( (w_z^2 + k_1)^2 + k_2^2 w_z^2 \right)}, \\ \bar{b} &= e^{\left( \frac{k_2}{2} + \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1} \right)}, \\ \bar{c} &= \frac{\xi_1(0) + \left( \frac{k_2}{2} \xi_1(0) - \xi_2(0) \right)}{2} \\ &\quad + \frac{-k_2 \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1 - w_z^2 - k_1}}{2 \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1} \left( (w_z^2 + k_1)^2 + k_2^2 w_z^2 \right)}, \\ \bar{d} &= e^{\left( \frac{k_2}{2} - \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1} \right)}, \\ \bar{f} &= \frac{\alpha_z}{\sqrt{(w_z^2 + k_1)^2 + k_2^2 w_z^2}} \quad (55) \end{aligned}$$

Overshoot를 줄이기 위해  $|\bar{a}|$ 와  $|\bar{c}|$ 의 값이 작아야 한다. 이때 수식의 앞부분을 보면  $\xi_1(0)$ 의 값이 1보다 크면  $|k_2|$ 를 줄여야  $\bar{a}$ 와  $\bar{c}$ 의 크기가 작아지고  $\xi_1(0)$ 의 값이 1보다 작거나 같으면  $|k_2|$ 를 키워야  $\bar{a}$ 와  $\bar{c}$ 의 크기가 작아진다. 또한  $\xi_1(0)$ 의 크기와 관계없이  $k_1$ 을 키우면  $\bar{a}$ 와  $\bar{c}$ 의 크기가 줄어든다. 이러한 점을 고려하여  $x_d \leq 1$ 일 때는  $|k_1|$ 또는  $|k_2|$ 를 키우고,  $x_d > 1$ 일 때는  $|k_1|$ 을 키우거나  $|k_2|$ 를 줄이면 된다.

Settling time을 줄이기 위해  $|\bar{b}|$ 와  $|\bar{d}|$ 가 둘 다 커지려면  $|k_2|$ 가 커지고  $\sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}$ 이 0에 가까워지면 된다. 즉  $k_2$ 의 크기를 키우거나,  $k_1$ 을  $-\frac{k_2^2}{4}$ 의 값과

비슷하게 설정하면 된다.

Ultimate bound는 정상상태일 때의 오차 범위를 나타낸다. 정상상태 출력 식을 구하기 위해 최종치 정리하면 지수함수를 포함한 식은 0으로 수렴하고 (54)의 뒷부분 식만 남게 된다. 이 식을 이용하여 ultimate bound를 줄여주기 위해서는  $f$ 가 작아져야 한다. 따라서  $|k_1|$ 또는  $|k_2|$ 가 커지면 된다.

### Case 3. $\frac{k_2^2}{4} + k_1 = 0$ 일 경우:

출력 식은 (51)이다. 이 식을 간단하게 표현하면 다음과 같다.

$$y = \bar{a}e^{\bar{b}t} + \bar{c}\sin(w_z t + \beta) \quad (56)$$

여기서  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ 와  $\bar{c}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \xi_1(0) + \left( \xi_2(0) - \frac{k_2}{2} \xi_1(0) \right) t \\ &\quad + \frac{\alpha_z w_z \left( -k_2 + \left( \frac{k_2^2}{2} + w_z^2 + k_1 \right) t \right)}{(w_z^2 + k_1)^2 + k_2^2 w_z^2}, \\ \bar{b} &= \frac{k_2}{2}, \\ \bar{c} &= \frac{\alpha_z}{\sqrt{(w_z^2 + k_1)^2 + k_2^2 w_z^2}} \quad (57) \end{aligned}$$

Overshoot를 줄이기 위해서 변수  $\bar{a}$ 의 크기가 작아야 한다.  $\bar{a}$ 가 작아지기 위해서  $k_2$ 의 크기가 작아지거나  $k_1$ 의 크기가 커지면 된다. 그러나 이 두 조건이 상반되기 때문에 overshoot에 영향이 더 큰  $k_2$ 의 크기를 줄이면 된다.

Settling time이 줄어들기 위해서는 변수  $\bar{b}$ 의 크기가 커야하고 음수여야 한다. 앞의 안정성 분석에서  $k_2$ 는 모두 음수를 만족하여야 한다고 했기 때문에  $|k_2|$ 를 키우면 settling time이 줄어든다.

Ultimate bound는 정상상태일 때의 오차를 나타낸다. 정상상태 출력 식을 구하기 위해 최종치 정리하면 지수함수를 포함한 식은 0으로 수렴하고 (56)의 뒷부분 식만 남게 된다. 이 식을 이용하여 Ultimate bound를 줄여주기 위해서는  $|\bar{c}|$ 가 작아져야 한다. 따라서  $|k_1|$ 또는  $|k_2|$ 가 커지면 된다.

위의 세 가지 분석을 정리하면 표 2와 같다.

Table 2-1. Adjustment of the control gain for overshoot, settling time and ultimate bound (case 1).

표 2-1. 오버슈트, 정착시간 그리고 최대 수렴 범위를 위한 제어이득 값 조절방법 (경우 1)

Method to reduce \ Case	$\frac{k_2^2}{4} + k_1 < 0$	
Overshoot	$x_d \leq 1$	$x_d > 1$
	$ k_1  \uparrow$ or $ k_2  \uparrow$	$ k_1  \uparrow$ or $ k_2  \downarrow$
Settling time	$ k_2  \uparrow$	
Ultimate bound	$ k_1  \uparrow$ or $ k_2  \uparrow$	

Table 2-2. Adjustment of the control gain for overshoot, settling time and ultimate bound (case 2, case 3).

표 2-2. 오버슈트, 정착시간 그리고 최대 수렴 범위를 위한 제어이득 값 조절방법 (경우 2, 경우 3)

Method to reduce \ Case	$\frac{k_2^2}{4} + k_1 > 0$	$\frac{k_2^2}{4} + k_1 = 0$
Overshoot	$x_d \leq 1$	$x_d > 1$
	$ k_1  \uparrow$ or $ k_2  \uparrow$	$ k_1  \uparrow$
Settling time	$k_1 \cong -\frac{k_2^2}{4}$ or $ k_2  \uparrow$	$ k_2  \uparrow$
Ultimate bound	$ k_1  \uparrow$ or $ k_2  \uparrow$	

위의 표는 시스템 (24)에 제어기 (12)를 결합한 폐루프 시스템의 출력을 분석한 결과로 높이에 관한 출력과 제어이득의 관계를 나타낸다. roll, pitch, yaw에도 같은 방법으로 표 2를 적용 가능하다. 하지만 각도의 추정값  $x_{3d} = x_{5d} = x_{7d} = 0$ 이기 때문에  $x_d \leq 1$ 인 표를 참고하면 된다.

2절에서 제안한 분석을 정리하여 이득 값 결정 방법을 알고리즘으로 나타내면 그림 3과 같다. 알고리즘을 이용하여 이득 값을 결정할 때  $k_2^2/4 + k_1$  식의 부호를 먼저 확인 한 다음에 원하는 스펙에 맞게 이득 값을 조절하면 된다.

**Remark 1** 제어이득이 커지게 되면 시스템의 입력이 커지게 된다. 시스템 입력이 커지게 되면 쿼드 로터의 PWM 입력이 커지게 되는데 실제 쿼드 로터의 PWM은 입력크기 제한이 걸려있다. 따라서 제어이득이 너무 커져 PWM입력이 크기제한보다 커지게 되면 제어가 되지 않는다. 따라서 제어 이득 값은 시스템의 허용범위 내에서 적절히 선택해야 한다.

#### IV. 실험

실험에 사용될 드론은 Parrot사의 AR. Drone이다.

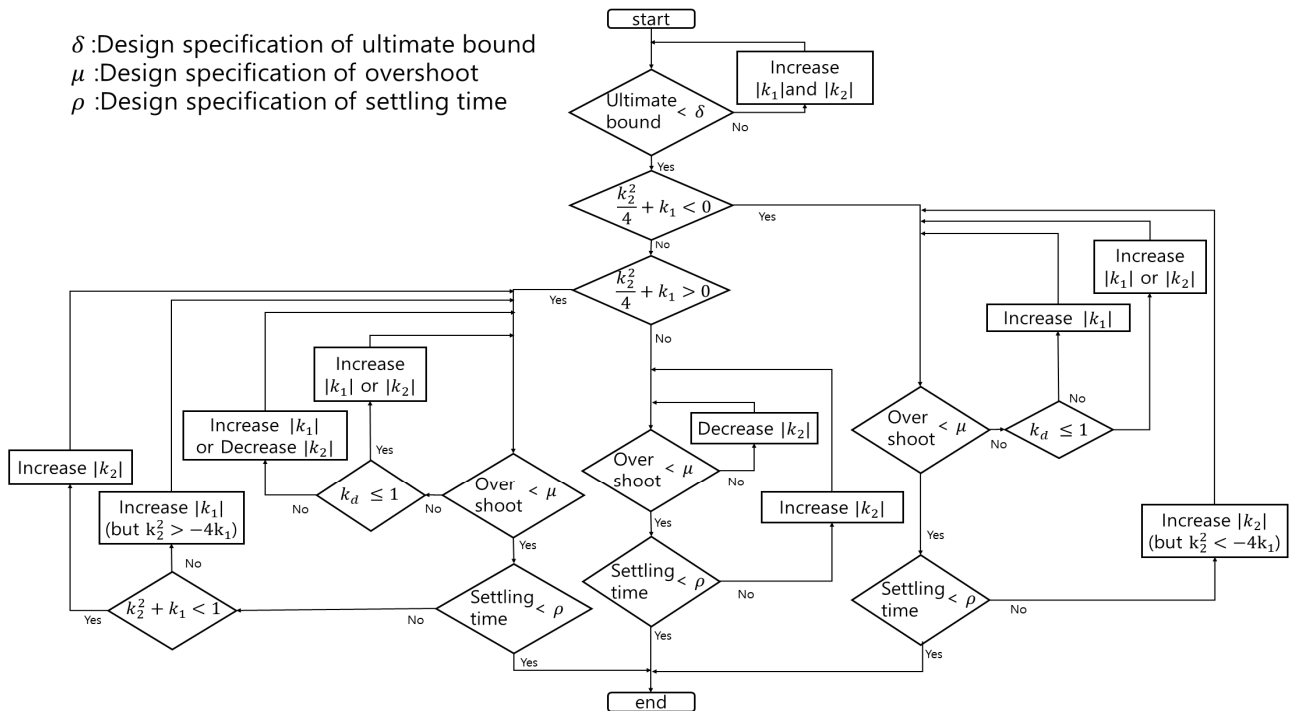


Fig. 3. Gain selection algorithm for control gains.

그림 3. 제어이득 결정 알고리즘

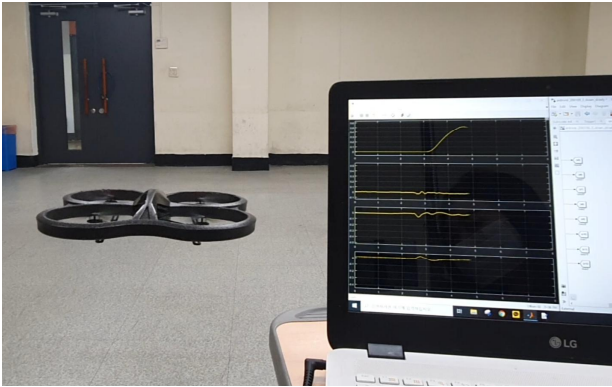


Fig. 4. Quadrotor experiment environment.  
그림 4. 쿼드콥터 실험 환경

제어이득 결정 알고리즘의 유효성을 확인하기 위하여 초기설정 제어기와 알고리즘을 적용한 제어기의 쿼드콥터 높이와 각도를 실험을 통해 비교한다. 먼저 알고리즘을 적용하지 않은 제어기의 출력을 확인하기 위해 (20)의 제어 입력을 이용하여 쿼드콥터를 제어하고, 각 제어기들의 이득 값은 극배치를 이용하여 설정한다. 쿼드콥터의 높이  $x_1$ 이 0.6을 추종하도록  $x_{1d}=0.6$ 으로 두고 호버링 시켰다. 이 때  $U_z$ 의 극점을  $\lambda_z = [-2, -1]$ ,  $U_\phi$ 의 극점을  $\lambda_\phi = [-270, -150]$ ,  $U_\theta$ 의 극점을  $\lambda_\theta = [-215, -110]$ ,  $U_\psi$ 의 극점을  $\lambda_\psi = [-25, -55]$ 로 설정한다. 이 극점들을 이용해 특성방정식을 만들어 계산한 이득 값은  $K = [-2, -3, -40500, -420, -23650, -325, -1375, -80]$  이다. 이득 값을 각 제어기에 대입하여 쿼드콥터에 적용한 실험 결과는 그림 5와 같다. 이때  $\delta = 0.02$ ,  $\mu = 5[\%]$ ,  $\rho = 5[\text{sec}]$ 로 설정한다.

그림 5의 출력 그래프를 보면  $\phi$ 값은 수렴하고 있으나 ultimate bound가  $\delta$ 이상인 것을 확인할 수 있다.  $\theta$ 와  $\psi$ 또한 ultimate bound가  $\delta$ 를 만족하지 못하고 있다.

이를 개선하기 위하여 그림 2의 순서도를 따라 이득 값을 조절해 준다. 먼저  $\phi$ 제어기의 이득 값을 확인해보면  $k_3 = -40500$ 이고,  $k_4 = -420$ 이다.  $k_3^2/4 + k_3 = 3600$ 으로 0보다 크기 때문에 case 2에 해당한다. Ultimate bound를 줄이기 위해서  $|k_3|$ 을 43000으로 늘려주었다.  $\theta$ 제어기의 ultimate bound도 낮추어 주어야 한다.  $k_6^2/4 + k_5 = 2756.3$ 으로 0보다 크기 때문에 case 2에 해당한다. 알고리즘에 따라  $|k_5|$ 를 2500으로 바꾸어 주었다.  $\psi$ 각도의 정상상태 에서도 ultimate bound가 크기 때문에 이를 낮추어 준다.  $\psi$ 제어기의

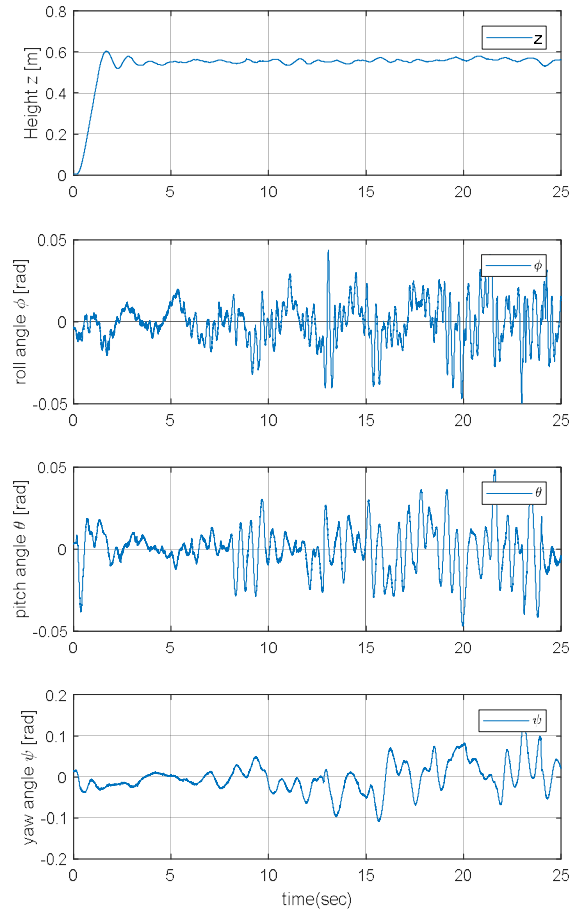


Fig. 5. Height and angle of quadrotor (Initial setup).  
그림 5. 쿼드콥터의 높이와 각도 (초기 설정)

이득 값 또한  $k_8^2/4 + k_7 = 100$ 으로 0보다 크기 때문에 case 2에 해당하고 ultimate bound를 낮춰주기 위해서  $|k_7|$ 을 1500으로 늘려준다. 알고리즘을 적용하여 바꾼 이득 값은  $K = [-2, -3, -43000, -420, -25000, -325, -1500, -80]$ 이다. 바꾼 이득 값을 위의 실험과 같은 제어기에 대입하여 쿼드콥터에 적용한 실험 결과는 그림 6과 같다.

각도 값을 보면 알고리즘을 적용하기 전보다 적용한 후의 차이가 큰 것을 확인할 수 있다. 또한 높이 제어기의 제어이득은 그대로 이지만 각도 값이 안정되면서 높이 제어기도 트래킹 값에 이득 값을 바꾸기 전보다 빠르고 정확하게 수렴하는 모습을 보인다. 보다 정확한 비교를 위하여 제어이득 결정 알고리즘을 적용하기 전과 후의 출력을 오차그래프로 나타내면 그림 7-10과 같다. 그림 7은 높이에 대한 값을 오차그래프로 나타낸 그림이다. 그림 8은  $\phi$ 에 대한 오차그래프, 그림 9는  $\theta$ 에 대한 오차 그래프, 그림 10은  $\psi$ 에 대한 오차 그래프를 나타낸 그림이다.

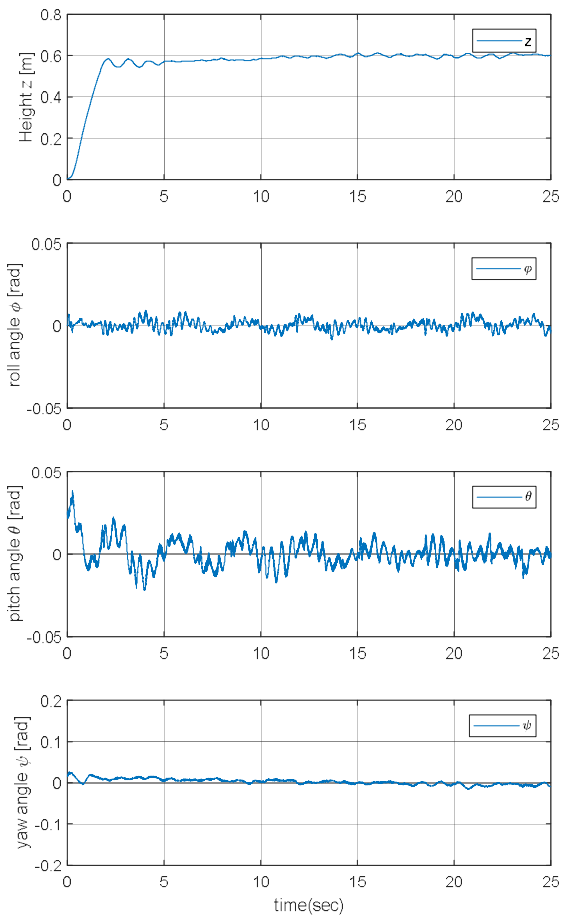


Fig. 6. Height and angle of quadrotor (After algorithm).  
그림 6. 쿼드로터의 높이와 각도 (제어 알고리즘 적용)

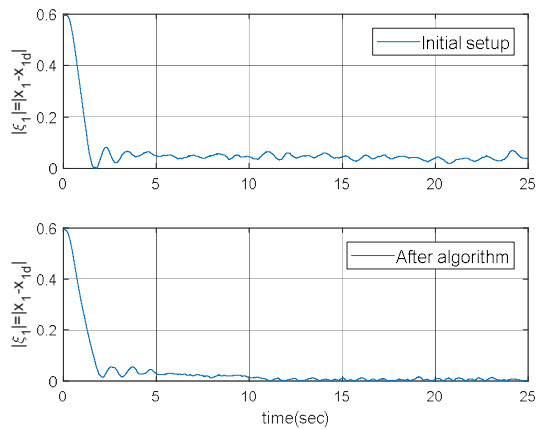


Fig. 7. Height error comparison results.  
그림 7. 높이의 오차 비교 결과

알고리즘을 적용하기 전의 오차 평균값과 알고리즘을 적용한 후의 오차 평균값을 구하면 표 3와 같다. 오차 평균을 구할 때 사용한 식은 다음과 같다.

$$e = \frac{1}{2} \left( \sum_{t=5}^{25} (\xi(t) - \bar{\xi}(t))^2 \right) \quad (57)$$

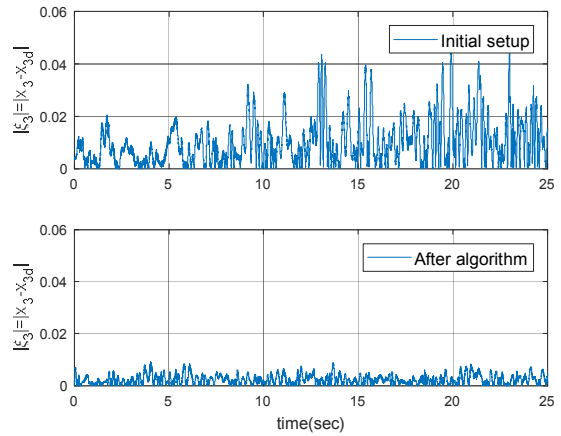


Fig. 8. Roll angle error comparison results.  
그림 8. Roll 각도의 오차 비교 결과

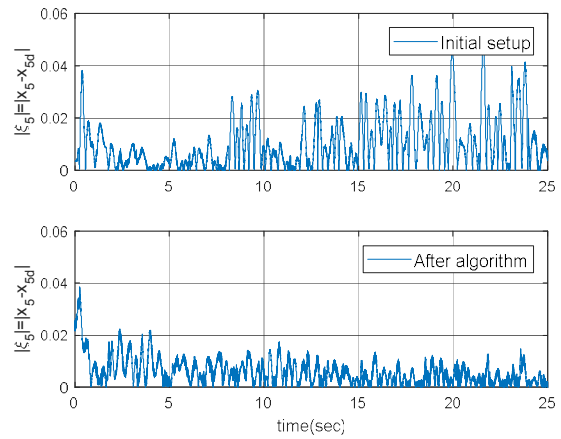


Fig. 9. Pitch angle error comparison results.  
그림 9. Pitch 각도의 오차 비교 결과

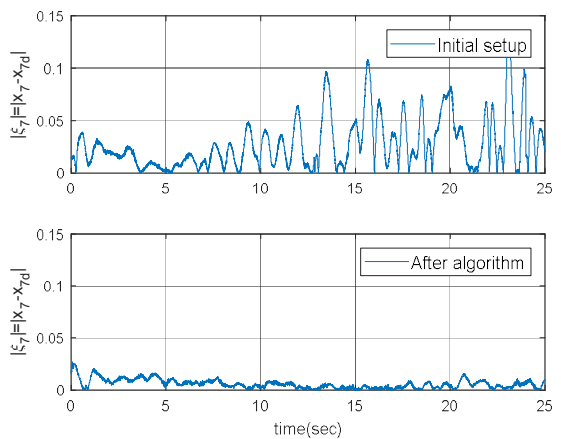


Fig. 10. Yaw angle error comparison results.  
그림 10. Yaw 각도의 오차 비교 결과

여기서  $\xi$ 은 알고리즘을 적용하기 전 오차이고  $\bar{\xi}$ 는 알고리즘을 적용한 이후의 오차이다.  $e_z, e_\phi, e_\theta, e_\psi$ 는 각 출력에 (57)을 적용한 오차 평균값이다. 정상상태의 오차 평균을 구하기 위해 5초부터 계산하였다.

Table 3. Results of a comparison before and after using an algorithm.

표 3. 알고리즘 사용 전과 사용 후의 비교 결과

	$e_z$ [m]	$e_\phi$ [rad]	$e_\theta$ [rad]	$e_\psi$ [rad]
Initial gain selection	19 $\times 10^{-4}$	209.8 $\times 10^{-6}$	22.76 $\times 10^{-5}$	160 $\times 10^{-5}$
After algorithm	1.698 $\times 10^{-4}$	8.664 $\times 10^{-6}$	3.412 $\times 10^{-5}$	2.803 $\times 10^{-5}$

표 3를 보면  $z$ 의 오차 평균은 91.21%,  $\phi$ 의 오차 평균은 95.87%,  $\theta$ 의 오차 평균은 85.01%,  $\psi$ 의 오차 평균은 98.24% 줄어든 것을 확인할 수 있다.

## V. 결론 및 향후계획

본 논문은 쿼드콥터의 호버링 및 자세제어를 위한 제어기를 설계하였고 시스템 출력의 성능을 조절하기 위한 극 배치 기법을 적용한 제어 이득 조절 알고리즘을 제안하였다. 또한 페루프 시스템의 안정성을 Routh-Hurwitz 판별법을 이용하여 분석하였다. 실험을 통해 높이와 각도의 출력 오차를 비교하여 알고리즘의 유효성을 검증하였다. 추후 본 연구를 바탕으로 쿼드콥터에 적용되는 제어기를 출력 궤환 제어 기법으로 확장시켜 쿼드콥터를 제어할 예정이다.

## References

- [1] J. Yoon, J. Lee, "Approximate multi-objective optimization of a quadcopter through proportional-integral-derivative control," *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers A*, Vol.39, No.7, pp.673-679, 2015.  
DOI: 10.3795/KSME-A.2015.39.7.673
- [2] S. A. Al-Hiddabi "Quadrotor control using feedback linearization with dynamic extension," *2009 6th International Symposium on Mechatronics and its Applications*, 2009.  
DOI: 10.1109/ISMA.2009.5164788
- [3] D. W. Lee, H. J. Kim, and S.Sastry, "Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter," *Journal of Control, Automation, and Systems*, Vol.7, No.3, pp.419-428, 2009.

DOI: 10.1007/s12555-009-0311-8

[4] S. Bouabdallah, A. Noth, and R. Siegwart, "PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp.2415-2456, 2004.

DOI: 10.1109/IROS.2004.1389776

[5] C. Liu, J. Pan, and Y. Chang, "PID and LQR trajectory tracking control for an unmanned quadrotor helicopter: experimental studies," *Proceedings of the 35th Chinese Control Conference*, pp.10845-10850, 2016. DOI: 10.1109/ChiCC.2016.7555074

[6] Y. Sun, "Modeling, identification and control of a quad-rotor drone using low-resolution sensing," *Master dissertation, Mechanical Engineering, Champaign University*, 2012.

[7] K. U. Lee, Y. H. Choi, and J. B. Park, "Adaptive backstepping hovering control for a quadrotor with unknown parameters," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, Vol.20, No.10, pp.1002-1007, 2014.

DOI: 10.5302/J.ICROS.2014.14.0029

[8] K. U. Lee, Y. H. Choi, "Inverse optimal based hovering control of a quadrotor," *Institute of Control, Robotics and Systems*, Vol.30, pp.363-364, 2015.

[9] A.-R. Merheb, H. Noura, and F. Bateman, "Emergency control of AR Drone quadrotor UAV suffering a total loss of one rotor," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol.22, No.2, pp. 961-971, 2017. DOI: 10.1109/TMECH.2017.2652399

[10] F. Golnaraghi, B.C. kuo, *Automatic Control Systems 9th edition*, Frist Book, 2010.

## BIOGRAPHY

**Ji-Sun Park** (Member)



2018 : BS degree in Electrical Engineering, Dong-A University.

2018~present : MS degree in Electrical Engineering, Dong-A University.

**Sang-Young Oh** (Member)

2013 : BS degree in Electrical Engineering, Dong-A University.  
2015 : MS degree in Electrical Engineering, Dong-A University.  
2015~present : PhD degree in Dong-A University.

**Ho-Lim Choi** (Member)

1996 : BS degree in Electrical Engineering, Iowa University  
1999, 2004 : MS, Ph.D degree in Electrical Engineering, KAIST, respectively.  
2007~present : Professor in Electrical Engineering, Dong-A University.