한국학교수학회논문집 제 23 권, 제 4호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 23, Number 4, 523-556, December 2020
http://doi.org/10.30807/ksms.2020.23.4.006

이공계열 대학 신입생들의 함수의 극한과 연속 개념 이해에 관한 연구[1)]

서종진[2)] · 박진한[3)] · 윤민[4)] · 강점란[5)]

이공계열 대학 신입생들이 함수의 극한, 함수의 연속과 관련된 기초 개념을 어느 정도 이해하고 있는지 조사·분석하였다. 조사 결과, 개념들을 연결하여 이해한 대학생들에 비해 그렇지 못한 대학생들이 많이 나타났다. 그러므로 대학 교양 수학을 지도하기 위해 대학 신입생들이 기초수학 개념을 어느 정도 연결하여 이해하고 있는지 조사·분석하여 대학생 개개인에게 적합한 교수·학습법을 적용할 필요성이 있다.

주요용어 : 극한, 연속, 개념

Ⅰ. 서론

고대 그리스 시대에서 19세기에 이르기까지 극한 개념과 미분 개념의 역사적 발달을 고려할 때, 극한은 암묵적 개념으로부터 직관으로 설명되어오면서 오랜 세월을 거쳐 형식적인 정의를 통해 설명되어왔다. 오랜 세월을 거쳐 체계화된 형식적인 정의는 극한 개념에 대한 수학 교수 · 학습 방법을 제기시킨다.

함수의 극한은 현대 수학의 핵심적인 개념으로써 한없이 가까워지는 현상을 수학적으로 표현하는 도구이며, 함수의 극한과 연속을 통해 함수와 그 그래프의 성질을 심도 있게 분석할 수 있고, 이는 미분과 적분의 원리를 이해하는 기초가 되므로(교육부 고시 제2015-74호[별책 8]) 수학에서 매우 중요한 역할을 하고 있으며, 수학이 필요한 학생들에게 필수 불가결하게 그 개념을 형성할 수 있도록 지도할 필요성이 있다. 극한 개념은 초등학교에서 학생 자신도 모르는 채 은연히 학습되어 오면서 고등학교에 이르러 직관적으로, 대학 수학에서 형식적인 정의를 학습하게 된다. 직관적으로 극한 개념을 학습할 때에는 많은 어려움 없이 수학 학습이 이루어지면서 점차 형식적인 정의를 도입하게 됨으로써 수학 학습에 어려움을 가지게 된다. 학교수학에서 극한 개념을 완전히 이해하도록 지도한다는 것은 매우 어려운 일이며, 또한 고등학생들이 극한 개념을 완전히 이해하기는 어려울 것이다. 함수의 극한 개념에 대한 관계적 이해가 이루어지지 않을 경우, 함수의 연속이나 함수의 미분 개념을 이해하는 데

---

* MSC2010분류 : 97C70, 97D60
1) 이 논문은 2020학년도 부경대학교 국립대학육성사업 지원비에 의하여 연구되었음.
2) 부경대학교 교수 (seo2011@pknu..ac.kr), 제1저자 / 교신저자
3) 부경대학교 교수 (jihpark@pknu..ac.kr)
4) 부경대학교 교수 (myoon@pknu..ac.kr)
5) 부경대학교 교수 (jrkang@pknu..ac.kr)

어려움이 있을 것이다. 그러므로 학생들이 함수의 좌 극한값과 우 극한값이 같을 때 극한이 존재함을 직관을 통한 이해가 이루어지도록 하고 실제 계산을 해봄으로써 좌 극한값과 우 극한값이 같음을 확인할 수 있는 기회를 제공한 후 함수의 극한 개념에 대한 관계적 이해가 이루어질 수 있도록 이공계열 대학생들의 수학 학습상황에 적합한 교수·학습 방법을 선택하여 지도할 필요성이 있다. 어떤 학생들이 연속인 다항함수(일차함수, 이차함수, 삼차함수)의 한 점에서의 극한값을 구할 수 있다고 해서 불연속인 다항함수(일차함수, 이차함수, 삼차함수)에 대해서도 함수의 극한값을 올바르게 구할 수 있다고 단정하기에 어려움이 있다. 학생들이 우극한과 좌 극한이 동일할 때 극한값이 존재한다는 개념을 명확히 이해하고 있을 경우에는 다항함수(일차함수, 이차함수, 삼차함수)의 한 점에서의 극한값을 구할 수 있지만 그렇지 않은 경우는 혼란을 겪을 수 있다. 이러한 혼란을 겪는 학생은 연속함수 정의를 이해하는데 많은 어려움을 겪을 것이다. 또한, 이러한 학생들은 연속함수와 불연속 함수의 미분가능성에 대한 개념을 도구적으로 이해하게 될 것이다. 이러한 것을 고려하여, 본 연구에서는 함수의 그래프, 정의역, 치역, 최댓값, 최솟값, 극한값, 연속성, 평균변화율, 미분계수, 미분가능, 극값과 관련된 문항을 구성하여 전공을 수행하기 위해서 수학이 필요한 이공계열 대학 신입생들을 대상으로 고등학교에서 학습한 극한과 미분의 개념을 어느 정도 알고 있는지 조사 · 분석하고, 극한과 미분 개념에 대한 기초가 부족한 이공계열 대학 신입생들을 지도하기 위한 방안을 모색하고자 한다.

Ⅱ. 선행연구

전공을 수행하기 위해 수학을 필요로 하는 대학생들이 고등학교에서 학습한 수학 내용을 어느 정도 알고 있는가에 따라 대학 1학년 과정의 교양수학 교과목의 성공적인 학습에 많은 영향을 미칠 것이며, 대학 교양수학에서의 학습 부진 현상은 수학을 필요로 하는 각 전공을 수행하는데 많은 지장을 초래 한다. 그러므로 각 대학에서 기초 학력이 부족한 학생들이나 대학생들을 대상으로 수학 학습 상황이나 수학 학습지도 등 다양한 방면에서 연구를 하여 왔다. 기초 학력이 부족한 대학생들의 전공학업 수행에 대한 어려움을 해결하기 위해 수학을 필요로 하는 대학 신입생들의 기초 학력 부족으로 인한 문제점이나 이러한 것을 개선하기 위한 교양수학 개선 방안과 관련된 연구와 기초 수학 학력 평가를 실시를 주장하는 연구, 대학생들의 기초 학력 향상을 위한 다양한 프로그램을 통한 수학 성취도 향상을 주장하는 연구(김 태수·김병수, 2008; 전재복, 2008; 표용수·박준식, 2009; 표 용수·박준식, 2010; 함승연, 2009), 대학 수학교육에서 교과 내용 구성이나 사회과학 전공을 하는 대학생들의 교육내용과 교수법 고찰을 통한 개선 방법에 관한 연구(김성옥, 2005; 김 혜영 2009; 전명진·조민식, 2005) 등 다양한 연구가 이루어져 왔다. 공과대학 신입생들을 대상으로 (이정례 외 3인, 2011; 이정례 2015) 한 연구에서는 대학에서 수학을 지도하기 위해서는 수학 기초학력 향상에 초점을 두고 문제를 해결하는 학습태도 길러야함을 제언하고 있으며, 수준별로 나누어 여러 가지 다양한 교수·학습 방법(탐구 수업, 프로젝트 수업, 멘토링 등)으로 대학 수학교육의 인식의 개선이 필요함을 강조하고 있다. 그리고 Hadar와 Zaslavaky(1987)의 오류분석 모델을 재구성하여 미분 문제를 해결하는 과정에서 범하는 오류를 찾기 위한 연구에서는 미분 문제를 해결하는 과정에서의 오류 유형을 수학 교사가 수업 전에 미리 준비하면 학생들이 범하는 오류를 줄일 수 있다는 것이다(전영배외 6인, 2009). 컴퓨터나 프로그램을 활용한 연구에서는, 대학 교양수학 수업에서 강의식 집단과 Maple을 활용한 강의식 집단으로 분류하여 실험에서 지필로만 해결하는 문항에 대해서는 수학 성취도에 차이가 없었지만, 사후검사에서 지필과 Maple을 함께 활용하여 문제를 해결한 집단이 그렇지 않은 집단에 비하여 수학 성취도가 높게

나타났다(서종진외 2인, 2006). 이외에도 Maple이나 Mathematica를 활용한 연구(곽성은, 1997; 김병무, 2002; 김향숙, 2003; 박용범외 4인, 2001; 정상권・추상목, 1999; 한동승・유홍상, 2001; 허혜자, 1998 등)가 있었으며, 많은 연구에서 그래프 이해에 대한 연구가 이루어져 왔고, 학생들이 그래프를 해석하는 기술이 부족하며, 하위 그룹의 학생들은 함수의 그래프 개념을 어려워 한다는 것이다, 또한 307명 대학생을 대상으로 한 연구에서, 약8%의 대학생들 만이 그래프 표현을 언급하였다(Dreyfus 와 Eisenberg, 1982; Knuth, 2000; Vinner와 Dreyfus, 1989).

초·중등학교의 저학년에서는 수학 태도의 개발이 중요하므로 수학 태도와 관련된 많은 연구들이 진행되어 왔으며, 수학 성취도와 수학 태도와의 관련성에 대한 여러 주장들이 있어왔다. 1970년에서 1975년 사이의 연구에서는 수학 태도와 학생들의 능력 간에는 관련성이 있으며, 수학 성취와 태도 사이에 유의미한 관계가 없는 것으로도 나타나고 있다. 또한, 성별에 따라 수학을 좋아하는 차이는 있지만, 태도 요인에 따라 약간의 차이가 나타나고 있다(Aiken, 1970; Aiken, 1976; Fennema과 Sherman, 1977; Schofield, 1981). Johnson(2000)에 따르면, 대학 기초 대수 과정 수강 학생들을 대상으로 한 연구에서는 성별에 따른 태도의 유의한 차이가 없는 것으로 나타났다. 그리고 수학을 필요로 하는 학생들 또한 유의미한 차이가 나타나지 않았다. 수학 성취도, 수학 태도 등, 인지적·정의적 영역에 관한 연구가 이루어지면서 교수·학습 방법에 따라 어떠한 효과가 있는지 보이고자 하는 많은 연구가 진행되었다. 수학 성취도, 수학 태도 등의 향상을 할 수 있는 변화를 모색하고 협동학습 모형들이 개발되어 그 효과의 긍정적 변화를 보여주고 있다. 1970년에서 1992년까지의 수학 성취도와 수학 태도에 관련된 논문을 대상으로 메타분석 결과에서는 전통적인 학습보다 협동학습이 수학 태도에 효과가 있는 것으로 조사되었다. 이러한 교수·학습 방법은 지역이나 학제에 따라서는 약간의 차이를 보이고 있는데, 도시 지역은 협동학습이 전통학습에 비해 효과적이지만, 시골 지역은 이질적이라는 것이다. 대체적으로, 중등학교에서는 전통학습에 비해 협동학습이 수학 성취도와 수학 태도에 효과가 있음을 보여주고 있다(Othman Norhayati, 1996; Slavin 과 Karweit ,1981; Slavin 과 Karweit, 1984; Slavin과 Leavey 그리고 Madden, 1984). 국내에서도 수학 성취도와 수학 태도에 관한 연구가 많이 이루어져 왔다. 긍정적인 수학 태도를 가진 학생과 부정적인 수학 태도를 가진 학생들 간에는 수학 성취도에서 유의미한 차이가 있지만 수학 성취도가 높은 학생이 긍정적인 수학 태도를 가진다고 볼 수 없다. 부정적인 수학 태도를 보이는 학생들 중 수학 성취도가 높은 학생들이 존재한다는 것이다(김문옥, 이준승, 2000; 정준영, 1999; 조창연, 1999). 전반적으로 볼 때, 수학 성취도가 높은 학생들이 수학에 긍정적이라는 것이다. 살펴 본바와 같이, 교수·학습 방법에 따라 수학 성취도, 수학 태도 등을 기대할 수 있으므로 대학 교양 수학에서 여러 가지 방법을 사용하여 노력해 왔지만, 대학 수학 교수·학습 방법에 관한 연구는 미미한 상황이다. 이러한 교수법을 개발하기 위해서는 기초적인 작업을 필요로 한다. 대학에서 전공을 수행하기 위해 수학이 필요한 대학생들 중 수학 기초 개념이 부족한 대학생들을 지도하기 위해, 대학생 개개인이 수학 개념들을 어떻게 연결하고 있는지 분석이 선행되어야 할 것이다. 또한, 대학 교양수학을 지도하기 위해 고등학교에서 학습한 미적분과 관련된 내용을 어느 정도 관련시켜 이해하고 있는지 평가를 통한 대학생 개개인의 수학 학습 상황을 분석할 필요성이 있을 것이다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상

대학 교양 수학을 수강하는 이공계열 대학 신입생들이 고등학교에서 학습한 기초적인 수학 내용을 어느 정도 알고 있는지 조사하기 위하여 B 광역시와 D 광역시에 소재한 대학의 이공계열 대학 신입생 963명을 대상으로 하였다.

2. 연구 도구 및 용어 정의

1) 수학 성취도 문제

전공을 수행하기 위해서 수학이 필요한 이공계열 대학 신입생들이 고등학교에서 학습한 수학 기초 내용을 어느 정도 알고 있는지 조사하기 위하여 함수의 그래프, 정의역, 치역, 최댓값, 최솟값, 극한값, 연속성, 평균변화율, 미분계수, 미분가능, 극값을 구하는 15문항을 수학 전문가 2인과 검토 후 구성하였다. 문항 구성에서는 함수의 극한 개념과 연속 개념의 이해 정도를 알아보기 위해 문항들 간에 서로 관련성이 있는 문제들로 구성하였다.

<표 Ⅲ-1> 고등학교에서 학습한 수학 문제

문제 번호	문제 내용	문제
1	이차함수 그래프 개형 그리기	$f(x)=x^2-x-2$, 구간 [-3, 3]
2	이차함수의 최댓값과 최솟값 구하기	$f(x)=x^2-x-2$, 구간 [-3, 3]
3	함수$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \le 1) \\ x-2 & (x>1) \end{cases}$의 그래프 개형과 극한값 구하기	(문제3-1) 함수의 그래프 개형 그리기, (문제3-2) $x=1$에서 우극한값 구하기, (문제3-3) $x=1$에서 좌극한값 구하기, (문제3-4) $x=1$에서 극한값 구하기
4	함수의 극한값이 성립하기 위한 미지수 a, b값 구하기	$\operatorname{Lim}_{x\to1} \frac{2x^2+ax+b}{x-1}=3$
5	함수의 연속 정의	함수 $f(x)$가 $x=a$에서의 연속일 세 가지 조건
6	함수의 연속성 구하기	(6-1)$f(x)=x^2-x$가 $x=1$에서 연속인가 불연속인가 이유 설명하기, (6-2)$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}(x\neq1)$가 에서$x=1$ 연속인가 불연속인가 이유 설명하기
7	유리함수 $f(x)=\frac{1}{x-1}\ (x\neq1)$	(7-1) 그래프 개형 그리기, (7-2) 정의역, 치역 구하기 (7-3) 점근선 구하기, (7-4)$\operatorname{Lim}_{x\to1} f(x)$ 구하기, (7-5)$\operatorname{Lim}_{x\to1} f(x)$ 구하기
8	함수의 연속 구간 구하기	(8-1) $f(x)=x^2+2x+1$, (8-2) $f(x)=\begin{cases} x & (x<3) \\ x-1 & (x \ge 3) \end{cases}$,(8-3) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-1}(x\neq1)$
9	연속함수가 되기 위한 미지수 a, b 구하기	$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+ax}{x-1} & (x \neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$

10	평균변화율과 미분계수 정의	평균변화율, 미분계수 정의 기술하기
11	미분계수 구하기	(11-1) $f(x)=x^2+1$의 $x=1$에서의 미분계수 (11-2) 함수 $f(x)=x^2+1$의 $x=1$에서의 미분계수
12	평균변화율이 성립하기 위한 미지수 구하기	$f(x)=x^2-3x\,(a \le x \le a+2)$에 대하여 평균변화율이 0일 때, 상수 a의 값 구하기
13	미분계수가 주어졌을 때 극한값 구하기	(13-1) $f'(1)=5$일 때 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}$ 구하기 (13-2) $f'(1)=5$일 때 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$ 구하기
14	함수가 미분가능 하기 위한 미지수 구하기	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1)\\ a & (x=1)\end{cases}$가 $x=1$에서미분가능 하기 위한 상수 a의 값 구하기.
15	함수의 극값 구하기	$f(x)=x^3-3x^2-9x+12$

2) 수학 성취도

수학 성취도는 함수의 그래프, 정의역, 치역, 최댓값, 최솟값, 극한값, 연속성, 평균변화율, 미분계수, 미분가능, 극값과 관련된 기본적인 문제(<표 Ⅲ-1>) 15문항에 대하여 평가한 결과의 취득한 점수를 의미한다. 수학 성취도는 이공계열 대학생들의 수학에 대한 태도와의 관계를 알아보기 위하여 100점 만점으로 하여 평가하였다.

3) 수학에 대한 태도 설문지

서종진은 2016년 Johnson(2000)이 제작한 측정 도구를 번안하여 설문지를 구성하여 수학교육 전문가 2인의 검토 후, B광역시, D광역시, Ch시에 소재한 5개 대학교의 학생 1623명을 대상으로 자료를 수집하여 신뢰도(Cronbach $\alpha=.945$)를 구성하였다. 설문지는 긍정적인 문항이 13문항, 부정적인 문항이 13문항으로 총 26문항으로 5지 척도로 구성되어있다(서종진・조승희, 2018). 본 연구에서는 이 설문지를 사용하였다.

4) 수학에 대한 태도

수학에 대한 태도는 수학에 대한 태도 설문지 반응에 대한 긍정적인 반응과 부정적인 반응에 따라 수학에 대한 긍정적인 태도와 수학에 대한 부정적인 태도의 두 가지로 분류한 것을 의미한다.

3. 자료수집 및 분석

이공계열 대학 신입생들이 고등학교 수학의 기초 내용을 어느 정도 알고 있는지 조사하기 위해 구성한 수학 문제와 수학에 대한 태도 설문지를 각 대학교에 배포하여 수집하였다. 그리고 이공계열 대학 신입생들이 고등학교에서 학습한 함수의 그래프, 정의역, 치역, 최댓값, 최솟값, 극한값, 연속성, 평균변화율, 미분계수, 미분가능, 극값과 관련된 기본적인 문제를 어느 정도 해결할 수 있는지 분석하였다. 또한, 분석한 자료를 바탕으로 각 문항 간에 아주 밀접한 관련성이 있는 문항을 선택하여, 이공계

열 대학 신입생들이 극한 개념과 관련된 문항 간 그리고 미분 개념과 관련된 문항 간에 어느 정도 관련시켜 알고 있는지를 알아보기 위하여 문항 간의 관련성을 분석하였다. 그리고 이공계열 대학 신입생들의 수학 성취도와 수학에 대한 태도와의 관계를 알아보기 위하여 T-검증을 하였다. 이러한 분석하기 위하여 수집된 자료 중 무의미한 반응을 제외하고 SPSS 26.0을 사용하여 분석하였다.

Ⅳ. 연구결과

이공계열 대학 신입생들이 고등학교에서 학습한 함수의 극한, 함수의 연속, 평균변화율, 미분계수, 극값과 관련된 기초 내용을 어느 정도 알고 있는지 분석하기 위하여 수능 등급에 따라 어느 정도 문제를 해결하는지, 필요한 경우 수능 유형과 수능 등급에 따른 분석을 하였다. 이후부터 “이공계열 대학 신입생”이라는 용어는 “학생”으로 사용을 할 것이다.

1. 이차함수 그래프 개형 그리기(문제1)

구간 $[-3,3]$에서 $f(x)=x^2-x-2$의 그래프 개형을 그리는 문제는 학생들이 주어진 구간 안에서 그래프 개형을 정확하게 구하는지 알아보기 위해 구성한 것이다. 분석 결과, 함수의 그래프 개형을 정확하게 그리지 못한 학생들은 수능 가형과 나형이 각각 28%(192명), 46.8%(130명)로 나타났다. 이들 학생들 중 대부분은 함수의 그래프 개형을 올바르게 그렸지만 주어진 구간($[-3,3]$) 이외 구간에서도 그래프를 그린 학생들이 대부분이었다. 이차함수의 그래프 개형 그리기에서 틀린 학생들 중 많은 학생들이 주어진 구간 내에서 함수의 그래프 개형을 그리지 않고 구간 $(-\infty,\infty)$에서 그래프 개형을 그린 것으로 나타났다(<표 Ⅳ-1>).

<표 Ⅳ-1> 이차함수($f(x)=x^2-x-2$)의 최댓값 최솟값 구하기(문제2)에 대한 반응

문제	수능	반응	수능 등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제1	가형	0		2	4	32	50	51	39	9	5	192(28.0)
		1		1	4	134	234	92	24	3	1	493(72.0)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685(100)
	나형	0	6	16	17	31	28	19	8	5		130(46.8)
		1	16	18	54	38	17	4	0	1		148(53.2)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

* 0:함수의 그래프 개형을 정확히 그리지 못하였거나 틀림, 1:함수의 그래프 개형이 맞은 경우

2. 이차함수의 최댓값과 최솟값 구하기

이차함수의 최댓값과 최솟값을 모두 구한 경우는 수능 가형이 63.9%(438명), 나형이 4.06%(113명)이었다. 그리고 최댓값과 최솟값을 모두 오답인 경우는 수능 가형이 6.9%(47명), 수능 나형이 17.3%(48명)이었다. 최댓값과 최솟값 중 하나만 올바르게 구한 경우는 수능 가형이 29.2%(200명), 나형이 42.1%(117명)로 나타났다. 함수의 그래프 개형을 올바르게 그리고 최댓값과 최솟값을 모두 구한 학생이 441명, 함수의 그래프 개형을 올바르게 그리고 최댓값과 최솟값 중 하나만 맞은 학생이 175명, 함

수의 그래프 개형은 올바르게 그리지 못하였지만 최댓값과 최솟값을 중 하나만 맞은 학생이 142명, 함수의 그래프 개형은 올바르게 그렸지만 최댓값과 최솟값 모두 오답인 학생은 25명, 함수의 그래프 개형은 올바르게 그리지 못하였지만 최댓값과 최솟값을 모두 구한 학생은 110명, 함수의 그래프 개형과 최댓값과 최솟값 모두 오답인 학생은 70명이었다(<표 Ⅳ-2>).

<표 Ⅳ-2>이차함수 최댓값 최솟값 구하기(문제2)에 대한 반응

문제	수능	반응	수능 등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제2	가형	0		0	1	7	13	13	10	2	1	47(6.9)
		1		3	7	132	190	85	16	4	1	438(63.9)
		2		0	0	27	81	45	37	6	4	200(29.2)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685
	나형	0	0	3	10	7	11	7	5	5		48(17.3)
		1	15	19	42	29	8	0	0	0		113(40.6)
		2	7	12	19	33	26	16	3	1		117(42.1)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278

* 0:함수의 최댓값과 최솟값을 모두 오답인 경우, 1:함수의 최댓값과 최솟값을 모두 맞은 경우, 함수의 최댓값과 최솟값 중 하나만 맞은 경우

3. 함수의 그래프 개형과 극한값 구하기

1) 함수의 그래프 개형 그리기

$x=1$에서 불연속인 함수($f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\le 1)\\ x-2 & (x>1)\end{cases}$)의 그래프 개형을 올바르게 그린 학생은 수능 가형이 545명, 수능 나형이 162명으로 전체 963명 중 707명(73.4%)이었다. 연속함수$f(x)=x^2-x-2$와 $x=1$에서 불연속인 함수$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\le 1)\\ x-2 & (x>1)\end{cases}$의 그래프 개형을 올바르게 그린 학생들은 521명, 연속함수의 그래프 개형은 맞고 불연속 함수의 그래프 개형은 틀린 경우는 120명이었다(<표 Ⅳ-1>). 이러한 결과는 함수($f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\le 1)\\ x-2 & (x>1)\end{cases}$)의 그래프 개형을 올바르게 그린 186명의 학생들 모두가 연속함수$f(x)=x^2-x-2$의 그래프 개형을 그리지 못한다는 것을 의미하는 것은 아니다. 단지, 이러한 186명의 학생들 중 많은 학생들이 연속함수의 그래프 개형을 그릴 때 주어진 구간 내에서 그리지 않고 구간을 벗어나서 그린 경우가 있음을 의미한다. 이러한 결과들은 문제의 조건이 주어진 경우 조건을 명확하게 인식하고 조건에 맞도록 문제를 해결 할 수 있도록 지도할 필요성이 있음을 시사한다.

<표 Ⅳ-3-1> 함수$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\le 1)\\ x-2 & (x>1)\end{cases}$의 그래프 개형 그리기(문제3-1)에 대한 반응

문제	수능	반응	수능 등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 3-1	가형	0		0	1	13	43	38	34	6	5	140(20.4)
		1		3	7	153	241	105	29	6	1	545(79.6)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685(100)
	나형	0	6	5	12	28	30	22	8	5		116(41.7)
		1	16	29	59	41	15	1	0	1		162(58.3)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

* 0:함수의 그래프 개형을 정확히 그리지 못하였거나 틀림, 1:함수의 그래프 개형이 맞은 경우

연속인 이차함수($f(x)=x^2-x-2$: 문제1)의 그래프 개형을 주어진 구간 내에서 올바르게 그린 학생은 66.6%(641명)으로 나타났으며, 이들 중 최댓값과 최솟값을 모두 구한 학생들은 441명으로 나타났다. 그리고 문제1의 연속인 이차함수($f(x)=x^2-x-2$)의 그래프 개형을 올바르게 그린 학생이 641명이었다. 이들 학생을 대상으로 연속인 이차함수($f(x)=x^2-x-2$)의 최댓값과 최솟값 그리고 불연속 함수($f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \le 1) \\ x-2 & (x>1) \end{cases}$:문제3-1) 그래프 개형을 어느 정도 해결하였는지 분석한 결과, 연속 함수와 불연속 함수의 의 그래프 개형과 최댓값과 최솟값 모두 맞은 학생은 376명, 연속함수와 불연속 함수 그래프 개형을 올바르게 그리고 연속함수의 최댓값과 최솟값 중 하나만 맞은 학생은 127명, 연속함수의 그래프 개형과 최댓값과 최솟값은 잘 구하였으나 불연속함수 그래프 개형이 틀린 학생은 65명으로 나타났다(<표 Ⅳ-3-1-1>).

<표 Ⅳ-3-1-1> 연속함수 $f(x)=x^2-x-2$와 $x=1$에서 불연속인 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \le 1) \\ x-2 & (x>1) \end{cases}$에 대한 반응

유형	내 용	빈도
A	연속함수의 그래프 개형과 최댓값과 최솟값 맞고 불연속함수 그래프 개형 맞은 경우	376
B	연속함수와 불연속함수 그래프 개형 맞고 연속함수의 최댓값과 최솟값 중 하나만 맞은 경우	127
C	연속함수의 그래프 개형과 최댓값과 최솟값 맞고 불연속함수 그래프 개형 틀린 경우	65
D	연속함수의 그래프 개형은 맞았으나 불연속 함수 그래프 개형은 틀리고 연속함수의 최댓값과 최솟값 중 하나만 맞은 경우	48
E	연속함수와 불연속함수 그래프 개형 맞고 연속함수의 최댓값과 최솟값은 오답인 경우	18
F	연속함수의 그래프 개형은 맞았으나 연속함수의 최댓값과 최솟값과 불연속 함수의 그래프 개형이 틀린 경우	7
합계		641

2) 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \le 1) \\ x-2 & (x>1) \end{cases}$의 우극한 구하기

함수의 우 극한값을 잘 구한 학생은 963명중 770명(80%)이었다. 수능 가형은 전체 685명 우극한 값을 맞은 학생은 565명(82.5%), 틀린 학생은 120명(17.5%)으로 나타났다. 전체 278명의 수능 나형에서 205명(73.7%)이 우 극한값을 올바르게 구였으며, 73명(26.3%)이 우 극한값을 틀리게 구하였다(<표 Ⅳ-3-2>).

<표 Ⅳ-3-2> 함수의 우 극한값 구하기(문제3-2)에 대한 반응

문제	수능	반응	수능 등급 1	2	3	4	5	6	7	8	9	빈도(%)
문제 3-2	가형	0		0	1	15	35	29	30	5	5	120(17.5)
		1		3	7	151	249	114	33	7	1	565(82.5)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685
	나형	0	5	2	8	9	19	18	7	5		73(26.3)
		1	17	32	63	60	26	5	1	1		205(73.7)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

* 0:함수의 우 극한값이 틀린 경우, 1:함수의 우 극한값이 맞은 경우

3) 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \le 1) \\ x-2 & (x>1) \end{cases}$의 좌 극한값 구하기

전체 학생 963명 중 함수의 좌 극한값을 올바르게 구한 학생은789명(81.9%)이었다. 전체가 685명인 수능 가형의 학생들 중 좌 극한값을 정확하게 구한 학생은 579명(84.5%), 틀린 학생은 106명(15.5%)으

로 나타났다. 수능 나형(전체 278명)에서는 210명(75.5%)이 좌 극한값을 맞게 구였으며, 68명(24.5%)이 좌 극한값을 틀리게 구한 것으로 나타났다. 수능 가형 2등급과 3등급 11명 모두는 우극한 값을 잘 구하였으나 수능 나형 1등급에서 3등급까지 127명의 학생들 중 9명의 학생들이 좌 극한값을 틀리게 구한 것으로 나타났다(<표 Ⅳ-3-3>, <표 Ⅳ-3-5>).

<표 Ⅳ-3-3> 함수의 좌 극한값 구하기(문제3-3)에 대한 반응

문제	수능	반응	수능 등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 3-3	가형	0		0	0	14	34	23	24	7	4	106(15.5)
		1		3	8	152	250	120	39	5	2	579(84.5)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685(100)
	나형	0	4	2	5	10	17	17	7	6		68(24.5)
		1	18	32	66	59	28	6	1	0		210(75.5)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

* 0:함수의 좌 극한값이 틀린 경우, 1:함수의 좌 극한값이 맞은 경우

4) 함수 $f(x) = \begin{cases} -x+1 & (x \le 1) \\ x-2 & (x > 1) \end{cases}$의 극한 구하기

수능 가형의 학생(685)들 중 극한값을 구한 학생은 270명(39.4%), 틀린 학생은 414명(60.6%)으로 나타났다. 전체 278명인 수능 나형에서는 65명(23.4%)이 극한값을 구였으며, 213명(76.6%)이 극한값을 틀리게 구한 것으로 나타났다. 수능 가형 2등급과 3등급 11명 3명이 극한값을 틀리게 구하였으며, 수능 나형 1등급에서 3등급까지 127명 중 학생들 중 83명이극한값을 틀리게 구하였다. 그리고 함수의 극한값을 틀리게 구한 학생들 중에는 우 극한값과 좌 극한값을 모두 올바르게 구한 학생이 많이 나타났다(<표 Ⅳ-3-4>).

<표 Ⅳ-3-4> 함수의 극한값 구하기(문제3-4)에 대한 반응

문제	수능	반응	수능 등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 3-4	가형	0		1	2	77	157	105	58	9	6	415(60.6)
		1		2	6	89	127	38	5	3	0	270(39.4)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685(100)
	나형	0	11	20	52	54	39	23	8	6		213(76.6)
		1	11	14	19	15	6	0	0	0		65(23.4)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

* 0:함수의 극한값이 틀린 경우, 1:함수의 극한값이 맞은 경우

<표 Ⅳ-3-5> 함수의 좌 극한값, 우 극한값, 극한값 구하기에 대한 반응

유형	내 용	빈도(%)
A	함수의 우 극한값, 좌 극한값, 극한값을 올바르게 구한 경우	319(33.1%)
B	함수의 우 극한값과 좌 극한값을 올바르게 구하였으나 극한값이 틀린 경우	434(45.1%)
C	함수의 우 극한값과 극한값은 맞았으나 좌 극한값이 틀린 경우	4(0.4%)
D	함수의 우 극한값과, 좌 극한값은 틀렸으나 극한값이 맞은 경우	11(1.2%)
E	함수의 우 극한값은 틀렸으나 좌 극한값과 극한값이 맞은 경우	1(0.1%)
F	함수의 우 극한값과 극한값은 틀렸으나 우 극한값이 맞은 경우	35(3.7%)
G	함수의 우 극한값은 맞았으나 좌 극한값과 극한값이 오답인 경우	13(1.3%)
H	함수의 우 극한값, 좌 극한값, 극한값이 모두 틀린 경우	146(15.1%)
합 계		817(100%)

함수의 좌 극한값, 우 극한값, 극한값 구하기(문제3-2, 문제3-3, 문제3-4)에 대한 반응을 조사한 결과, 함수의 우 극한값과 좌 극한값 그리고 극한값을 모두 맞은 학생(유형 A)은 319명(33.1%), 함수의 좌 · 우 극한값과 함수의 극한값 모두 틀린 학생(유형 H)은 146명(15.1%)으로 나타났다. 그리고 함수의 우 극한값과 좌 극한값은 맞았지만 극한값이 틀린 학생(유형 B)은 434명(45.1%), 함수의 우 극한값만 맞은 학생(유형 F)은 35명(3.7%), 함수의 우 극한값만 맞은 학생(유형 G)은 13명(1.3%), 함수의 우 극한값과 좌 극한값은 오답이었으나 극한값을 맞게 구한 학생(유형 D)은 경우11명(1.2%), 함수의 우 극한값과 극한값은 올바르게 구하였으나 좌 극한값을 틀리게 구한 학생(유형 C)은 4명(0.4%), 함수의 좌 극한값과 극한값이 맞았으나 우 극한값을 틀리게 구한 학생(유형 E)은 1명(0.1%)으로 나타났다. 조사 결과, 학생들이 함수의 우극한과 좌 극한값이 같을 경우 함수의 극한이 존재함을 이해하지 못하고 있는 것으로 고려될 수 있다(<표 Ⅳ-3-5>).

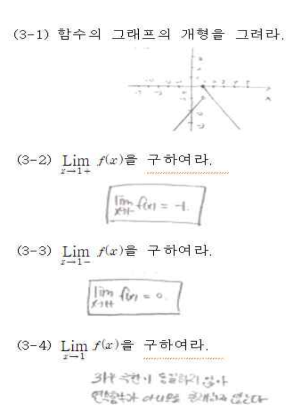
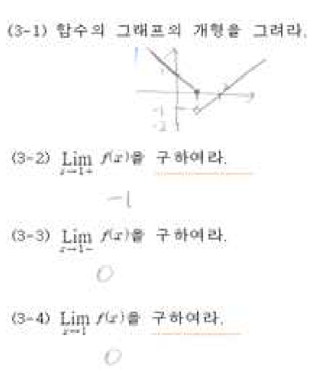
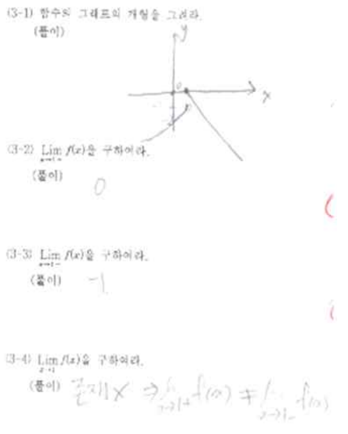
5) 함수$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \le 1) \\ x-2 & (x>1) \end{cases}$의 그래프 개형과 극한값 구하기

대부분의 대학 신입생들은 함수가 연속인 문제에서 극한값을 잘 해결 할 수 있지만, 한 점에서 불연속인 경우, 즉, $f(x)$가 $x \le 1$인 경우 $-x+1$이고 $x<1$인 경우 $x-2$인 함수에 대하여, 함수의 그래프 개형과 함수의 좌 극한값, 우 극한값, 주어진 함수의 극한값의 존재성에 대한 문제를 구성하였다. 학생들의 반응을 분석한 결과, 함수의 그래프 개형 그리기와 극한값 구하기에 대한 반응은 14가지 유형(A형에서 N형까지)으로 나타났다. 함수의 그래프 개형과 우 극한값, 좌 극한값, 함수의 극한값을 올바르게 구한 학생(유형 A)은 30.9% (298명), 함수의 그래프 개형과 우 극한값, 좌 극한값, 함수의 극한값을 모두 틀린 학생(유형 N)은 12.3%(118명)으로 나타났다. 함수의 그래프 개형과 함수의 우극한 및 좌 극한값을 올바르게 구하였으나 함수의 극한값이 틀린 학생(유형 B)은 2.1%(21명), 함수의 그래프 개형과 함수의 우극한 및 좌 극한값을 올바르게 구하였으나 함수의 극한값이 틀린 학생(유형 C)은 37.3%(359명), 함수의 그래프 개형과 극한값은 틀렸지만 우 극한값, 좌 극한값은 맞은 학생(유형D)은 7.8%(75명), 함수의 그래프 개형과 좌 극한값은 오답이고 우 극한값과 극한값을 올바르게 구한 학생(유형M)은 12.3%(118명)로 나타났다(<표 Ⅳ-3-6>).

<표 Ⅳ-3-6> 함수의 그래프 개형과 극한값 구하기에 대한 유형

유형	내 용	빈도(%)
A	함수의 그래프 개형과 함수의 극한값을 올바르게 구한 경우	298(30.9)
B	함수의 그래프 개형은 틀렸지만 함수의 좌 극한값과, 우 극한값 및 극한값을 올바르게 구한 경우	21(2.2)
C	함수의 그래프 개형과 함수의 우극한 및 좌 극한값을 올바르게 구하였으나 함수의 극한값이 틀린 경우	359(37.3)
D	함수의 그래프 개형 틀림, 우극한, 좌 극한값을 올바르게 구하였으나 함수의 극한값이 틀린 경우	75(7.8)
E	함수의 그래프 개형과 좌 극한값을 올바르게 구하였으나 우극한 및 함수의 극한값이 틀린 경우	11(1.1)
F	함수의 그래프 개형과 우 극한값을 올바르게 구하였으나 좌 극한 및 함수의 극한값이 틀린 경우	9(0.9)
G	좌 극한값만 맞은 경우	22(2.3)
H	우 극한값만 맞은 경우	9(0.9)
I	함수의 그래프 개형만 맞은 경우	29(3.0)
J	함수의 그래프 개형과 우 극한값, 좌 극한값은 틀렸지만 함수의 극한값이 맞은 경우	9(0.9)
K	함수의 그래프 개형과 극한값은 맞았지만 우 극한값과 좌 극한값이 오답인 경우	2(0.2)
L	함수의 그래프 개형과 좌 극한값 및 극한값을 올바르게 구하였으나 우 극한값이 틀린 경우	1(1)
M	함수의 그래프 개형과 좌 극한값은 틀렸으나 우 극한값과 극한값이 맞은 경우	118(12.3)
N	모두 틀린 경우	963(100)

<그림 Ⅳ-3-1>에서 유형B는 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \le 1) \\ x-2 & (x>1) \end{cases}$의 그래프를 반대 방향으로 그렸지만 함수의 좌 극한값과 우 극한값 및 극한값을 올바르게 구한 예 이고, 유형C 는 함수의 그래프 개형 및 함수의 우극한 및 좌 극한값을 잘 구하였으나 함수의 극한값을 좌 극한값으로 하여 오류가 발생한 경우이다. 그리고 유형J는 함수의 그래프 개형과 우 · 좌 극한값을 잘못 구하였음에도 불구하고 함수의 극한값이 존재하지 않다고 반응한 예이다.

유형B	유형C	유형J
		

<그림 Ⅳ-3-1> 함수의 그래프와 극한값 구하기 유형에 대한 예

4. 함수의 극한값이 성립하기 위한 미지수 구하기

이차함수의 최댓값과 최솟값을 모두 구한 경우는 수능 가형이 63.9%(438명), 수능 나형이 4.06%(113명)이었다. 그리고 최댓값과 최솟값을 모두 오답인 경우는 수능 가형이 47명, 수능 나형이 48명이었다. 최댓값과 최솟값 중 하나만 올바르게 구한 경우는 29.2%(200명), 수능 나형이 42.1%(117명)로 나타났다.

<표 Ⅳ-4> 함숫값이 성립하기 위한 미지수 a,b값 구하기(문제4)에 대한 반응

문제	수능	반응	등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제4	가형	A		2	1	30	67	44	37	8	4	193(28.2)
		B		0	3	99	188	80	22	3	1	396(57.8)
		C		0	0	0	1	3	1	0	0	5(0.7)
		D		0	0	16	17	3	1	0	0	37(5.4)
		E		1	4	21	11	13	2	1	1	54(7.9)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685(100)
	나형	A	2	2	13	15	27	14	8	6		87(31.3)
		B	19	28	49	44	15	4	0	0		159(57.2)
		C	0	1	3	1	0	0	0	0		5(1.8)
		D	0	2	4	1	1	1	0	0		9(3.2)
		E	1	1	2	8	2	4	0	0		18(6.5)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

함수의 극한값($\lim_{x \to 1} \frac{2x^2+ax+b}{x-1}=3$)이 성립하기 위한 상수 a와 b값을 구하는 문제의 반응에 대하여 5가지 유형으로 분류하였다. 첫째, 풀이 과정과 상수 a와 b의 값을 모두 맞은 경우(유형 A), 둘째, 풀이 과정이 맞았으나 상수 a와 b의 값이 중 하나라도 틀린 경우(유형 B), 셋째, 풀이 과정은 맞았으나 상수 a와 b의 값이 모두 틀린 경우(유형C), 넷째, 상수 a를 구하는 풀이 과정과 b의 값을 구하는 풀이 과정이 하나만 맞고 답이 하나만 맞은 경우(유형 D), 다섯째, 상a을 구하는 풀이 과정과 b의 값을 구하는 풀이 과정이 하나만 맞고 답이 모두 틀린 경우(유형 E)로 분류하였다. 조사 결과 유형A가 29.1%, 유형 B가 57.6%, 유형 C가 1%, 유형 D가 4.8%, 유형E가 7.5%로 나타났다(<표 Ⅳ-4-1>).

<표 Ⅳ-4-1> 함수의 좌 극한값, 우 극한값, 극한값 구하기에 대한 반응

유형	내 용	빈도(%)
A	함수의 우 극한값, 좌 극한값, 극한값을 올바르게 구한 경우	319(33.1%)
B	함수의 우 극한값과 좌 극한값을 올바르게 구하였으나 극한값이 틀린 경우	434(45.1%)
C	함수의 우 극한값과 극한값은 맞았으나 좌 극한값이 틀린 경우	4(0.4%)
D	함수의 우 극한값과, 좌 극한값은 틀렸으나 극한값이 맞은 경우	11(1.2%)
E	함수의 우 극한값은 틀렸으나 좌 극한값과 극한값이 맞은 경우	1(0.1%)
F	함수의 우 극한값과 극한값은 틀렸으나 우 극한값이 맞은 경우	35(3.7%)
G	함수의 우 극한값은 맞았으나 좌 극한값과 극한값이 오답인 경우	13(1.3%)
H	함수의 우 극한값, 좌 극한값, 극한값이 모두 틀린 경우	146(15.1%)
합 계		963(100%)

문제3에서 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x \le 1) \\ x-2 & (x>1) \end{cases}$의 $x=1$에서 우 극한값, 좌 극한값, 극한값을 올바르게 구한 경우인 유형A(<표 Ⅳ-3-6>)인 학생들이 함수의 극한값($\lim_{x \to 1} \frac{2x^2+ax+b}{x-1}=3$)이 성립하기 위한 상수 a와 b값을 구하는 문제4을 어느 정도 해결하였는지 조사한 결과, 함수의 그래프 개형과 극한값을 맞게 구한(문제3의 유형A) 학생들 중 함수의 극한값($\lim_{x \to 1} \frac{2x^2+ax+b}{x-1}=3$)이 성립하기 위한 상수 a와 b값을 구하는 풀이과정과 상수 a와 b값을 정확하게 구한 학생들은 209명으로 나타났다(유형AA). 그리고 함수의 그래프 개형과 극한값을 맞게 구한(문제3의 유형A) 학생들 중 함수의 극한값($\lim_{x \to 1} \frac{2x^2+ax+b}{x-1}=3$)이 성립하기 위한 상수 a와 b값을 구하는 풀이 과정이 맞았으나 상수 a와 b의 값이 중 하나라도 틀린 학생(유형 B) 은 6명으로 나타났다(유형 AB). 또한, 문제3의 유형 A 학생들 중 문제4의 유형 C인 학생들(유형 AC)은 19명, 문제3의 유형 A 학생들 중 문제4의 유형 D인 학생들(유형 AD)은 21명, 문제3의 유형 A 학생들 중 문제4의 유형E인 학생들(유형 AE)은 43명으로 나타났다(<표 Ⅳ-3-1>에서 <표 Ⅳ-3-6>, <표 Ⅳ-4-2>).

<표 Ⅳ-4-2> 함수의 그래프와 극한값구하기(문제3)과 함수의 극한이 성립하기 위한 a, b구하기(문제4)에 대한 반응

유형	문제4의 유형					합계(명)
	유형 A	유형 B	유형 C	유형 D	유형 E	
문제3의 유형 A	209	6	19	21	43	298
문제3과 문제4의 유형	유형 AA	유형 AB	유형 AC	유형 AD	유형 AE	

함수의 극한값($\underset{x\to 1}{\mathrm{Lim}}\dfrac{2x^2+ax+b}{x-1}=3$)이 성립하기 위한 상수 a와 b값을 구하는 문제4에서 풀이과정과 상수 a와 b값을 정확하게 구한 경우인 유형A(<표 Ⅳ-4>)의 학생들이 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x\le 1) \\ x-2 & (x>1)\end{cases}$ 의 그래프 개형 그리기와 $x=1$에서 우 극한값, 좌 극한값, 극한값 구하는 문제3을 어느 정도 해결하였는지 조사한 결과, 함수의 그래프 개형과 함수의 극한값을 올바르게 구한(유형 AA) 학생들은 209명, 함수의 그래프 개형만 틀리고 함수의 좌ㆍ우 극한값 및 극한값을 올바르게 구한(유형 AB) 학생들은 13명, 함수의 그래프 개형과 함수의 좌ㆍ우 극한값을 맞게 구하였으나 함수의 극한값이 틀린(유형 AC) 학생은 207명, 함수의 우극한, 좌 극한값을 올바르게 구하였으나 함수의 그래프 개형과 극한값이 오답인 학생은(유형 AD), 33명으로 나타났다. 그리고 문제4의 유형 A인 학생들 중 문제3의 유형E인 학생들(유형 AE)은 5명, 문제4의 유형 A 학생들 중 문제3의 유형F인 학생들(유형 AF)은 9명, 문제4의 유형 A인 학생들 중 문제3의 유형 G인 학생들(유형 AG)은 7명, 문제4의 유형A 학생들 중 문제3의 유형F인 학생들(유형 AH)은 4명, 문제4의 유형 A인 학생들 중 문제3의 유형 I인 학생들(유형 AI)은 11명, 문제4의 유형 A 학생들 중 문제3의 유형 J인 학생들(유형 AJ)은7명, 문제4의 유형 A 학생들 중 문제3의 유형 K인 학생들(유형 AK)은 2명, 문제4의 유형 A 학생들 중 문제3의 유형 L인 학생들(유형 AL)은 1명, 문제4의 유형 A 학생들 중 문제3의 유형 M인 학생들(유형 AM)은 46명으로 나타났다(<표 Ⅳ-3-1>에서 <표 Ⅳ-3-6>, <표 Ⅳ-4-1>, <표 Ⅳ-4-3>).

<표 Ⅳ-4-3> 함수의 그래프와 극한값 구하기(문제3)과 함수의 극한이 성립하기 위한 a, b구하기(문제4)에 대한 반응

유형	문제4의 유형(반응 수)													합계
	유형 A	유형 B	유형 C	유형 D	유형 E	유형 F	유형 G	유형 H	유형 I	유형 J	유형 K	유형 L	유형 M	
문제4의 유형 A	209	13	207	33	5	6	7	4	11	7	2	1	46	551명
문제4와 문제3의 유형	유형 AA	유형 AB	유형 AC	유형 AD	유형 AE	유형 AF	유형 AG	유형 AH	유형 AI	유형 AJ	유형 AK	유형 AL	유형 AM	

5. 함수 $f(x)$의 연속 정의

<표 Ⅳ-5> 함수의 연속 세 가지 조건 구하기(문제5)에 대한 반응

문제	수능	반응	수능 등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제5	가형	0		0	0	32	75	51	44	7	3	212(30.9)
		1		2	2	41	76	19	3	1	1	145(21.2)
		2		0	2	49	80	36	5	3	1	176(25.7)
		3		1	4	44	53	37	11	1	1	152(22.2)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685(100)
	나형	0	5	9	25	23	29	18	8	6		123(44.2)
		1	4	7	21	16	4	3	0	0		55(19.8)
		2	7	13	17	14	5	0	0	0		56(20.1)
		3	6	5	8	16	7	2	0	0		44(15.8)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

*0: 세 가지 조건 모두 틀린 경우, 1: 세 가지 조건 모두 맞은 경우, 2:세 가지 조건 중 두 가지 맞음, 3:세 가지 조건 중 한 가지만 맞은 경우

전체 963명 중, 함수가 $x=a$에서 연속되기 위한 세 가지 조건을 기술하는 5번 문제에서, 세 가지 모두 올바르게 제시한 학생들은 20.8%(200명)로 나타났다. 그리고 34.8%(335명)의 학생들은 세 가지 조건을 모두 틀린 것으로 나타났다. 세 가지 조건 중 두 가지 맞음 학생은 24.1%(232명), 세 가지 조건 중 한 가지만 맞은 학생은 20.4%(196명)로 나타났다. 수능 가형 685명 중 연속 함수의 정의를 올바르게 제시한 학생은 21.2%(145명), 세 가지 조건을 다 틀린 학생은 30.9%(212명), 두 가지 조건만 맞음 학생은 25.7%(176명), 한 가지 조건만 맞춘 학생은 22.2%(152명)로 나타났다. 수능 나형 278명 중 연속 함수의 정의를 맞게 기술한 학생은 19.8%(55명), 조건 모두 틀린 학생은 44.2%(123명), 조건 두 가지만 맞음 학생은 20.1%(56명), 한 가지 조건만 맞춘 학생은 15.8%(44명)로 나타났다(<표 Ⅳ-5>).

6. 함수의 연속성 구하기

1) 함수 $f(x)=x^2-x$의 $x=1$에서 연속성

문제6은 함수 $f(x)=x^2-x$가 $x=1$에서 연속성을 구분하고 그 이유를 제시하는 문항이다. 이 문제에 대한 반응은, 전체 963명 중 30.6%(295명)가 이유를 올바르게 제시하였다. 나머지 69.4%(668)는 연속인지 아닌지 구분하는 문제6-1은 맞았지만 그 이유를 제시하지 못한 학생이45.3%(436명), 연속인지 아닌지 구분하는 문제6-1과 이유를 제시하는 문제6-2가 모두 틀린 학생은 24.1%(232명)로 나타났다. 수능 가형(685명)에서 함수 $x=1$에서의 연속성 구분과 이유 설명을 올바르게 제시한 학생 31.8% (218명), 함수 $x=1$에서의 연속성을 구분을 못하고 이유 설명에 오류가 있는 학생 19.7%%(135명),연속성 구분만 맞은 학생은 48.5%(332명)로 나타났다. 그리고 수능 나형(278명)에서는, 연속성 구분과 이유 설명을 맞은 학생이 27.7%(77명),연속성을 구분 및 이유 설명이 틀린 학생 34.9%%(97명), 함수가 연속인지 아닌지 구분만 맞은 학생은 37.4%%(104명)로 나타났다(<표 Ⅳ-6-1>).

<표 Ⅳ-6-1> 함수 $f(x)=x^2-x$에 대하여 $x=1$에서 연속성 구하고 설명하기(문제6-1)에 대한 반응

문제	수능	반응	등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 6-1	가형	0		0	0	13	38	37	38	6	3	135(19.7)
		1		1	6	68	106	32	2	2	1	218(31.8)
		2		2	2	85	140	74	23	4	2	332(48.5)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685(100)
	나형	0	0	4	20	24	24	14	7	4		97(34.9)
		1	13	16	27	17	3	1	0	0		77(27.7)
		2	9	14	24	28	18	8	1	2		104(37.4)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

*0: 연속성 구분을 못하고 이유 설명 틀림, 1:연속성 구분을 잘하고 이유 설명 맞음, 2:연속성 구분 맞고 이유 설명 틀림

2) 함수 $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}\,(x\neq1)$의 $x=1$에서 연속성

문제6-2는 $x=1$에서 함수 $f(x)=x^2-x$가 연속인지, 불연속인지 구분하고 그 이유를 제시하는 문항이다. 이 문제에서 전체 963명 중 33.1%(319명)가 이유를 올바르게 제시하였다. 나머지 학생 35.0%(337명)는 $x=1$에서 불연속 구분을 하였지만 그 이유를 제시하지 못하였고, 31.9%(307명)는 모

두 틀린 것으로 나타났다. 그리고 수능 가형(685명)의 반응에서, 함수 $x=1$에서 함수의 불연속 구분과 이유를 바르게 제시한 학생은 37.7%(258명), $x=1$에서 불연속이라는 구분을 하였지만 이유 설명이 틀린 학생 36.2%(248명), 연속성 구분과 이유 설명에 오류가 있는 학생은 26.1%(179명)로 나타났다. 또한, 수능 나형(278명)에서는, 모두 맞은 학생 21.9%(61명), 불연속임을 잘 구분하였지만 이유 설명이 틀린 학생은 32.0%(89명), 함수가 $x=1$에서 불연속인가를 구분하지 못하고 그 이유를 제시하지 못한 학생은 46.0%(128명)로 나타났다(<표 Ⅳ-6-2>).

<표 Ⅳ-6-2> 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}\,(x\neq1)$에 대하여 $x=1$에서 연속성 구하고 설명하기(문제6-2)에 대한 반응

문제	수능	반응	등급 1	2	3	4	5	6	7	8	9	빈도(%)
문제 6-2	가형	0		0	1	23	58	47	39	7	4	179(26.1)
		1		1	5	83	118	45	2	3	1	258(37.7)
		2		2	2	60	108	51	22	2	1	248(36.2)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685(100)
	나형	0	6	8	30	27	29	17	8	3		128(46.0)
		1	9	10	24	13	4	1	0	0		61(21.9)
		2	7	16	17	29	12	5	0	3		89(32.0)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

*0: 연속성 구분을 못하고 이유 설명 틀림, 1:연속성 구분을 잘하고 이유 설명 맞음, 2:연속성 구분 맞고 이유 설명 틀림

함수 $f(x)=x^2-x$가 $x=1$에서 연속임을 구분하고 그 이유를 잘 제시를 하였으며, 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}\,(x\neq1)$의 $x=1$에서 불연속임을 구분하고 불연속인 이유를 잘 설명한 경우(유형 AA)는 19.6%(189)명으로 나타났다. 함수 $f(x)=x^2-x$의 $x=1$에서 연속임을 구분 못하고 그 이유를 제시하지 못하였으며, 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}\,(x\neq1)$의 $x=1$에서 불연속임을 구분 못하고 그 이유가 오답인 경우(유형 CC)는 20.3% (195)명으로 나타났다. 함수 $f(x)=x^2-x$의 $x=1$에서 연속성을 구분하고 그 이유를 제시하지 못하거나 제시한 이유가 틀렸으나 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}\,(x\neq1)$가 $x=1$에서 불연속이라고 잘 구분하고 그 이유도 잘 설명한 경우(유형 BA)는 12.3%(118)명으로 나타났다(<표 Ⅳ-6-3>, <표 Ⅳ-6-4>).

<표 Ⅳ-6-3> 함수의 연속성 구하는 문제(문제6-1, 문제6-2)에 대한 반응

유형	문제6-1 풀이 내 용	유형	문제6-2 풀이 내 용
A	연속성 구분을 올바르게고 이유를 잘 제시한 경우	A	$x=1$에서 불연속을 구분하고 이유를 올바르게 제시한 경우
B	연속성 구분은 잘 하였지만 이유 설명이 틀린 경우	B	$x=1$에서 불연속 구분을 하였으나 이유 설명이 틀린 경우
C	연속성 구분 및 이유 설명을 틀리게 제시한 경우	C	$x=1$에서 연속성 구분을 못하고 이유 설명 틀린 경우

함수 $f(x)$의 연속의 정의를 정확히 제시하였고(문제5의 유형 AA) 함수 $f(x)=x^2-x$가 $x=1$에서 연속성 구분과 이유를 정확히 제시하였으며(문제6-1의 유형 AA), $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}(x\neq 1)$의 $x=1$에서 연속성을 구분하고 이유를 올바르게 설명한 경우(문제6-2의 유형 AA)의 학생은 105명으로 나타났다(유형 AAA). 그리고 함수 $f(x)$의 연속의 정의가 틀렸으며(문제5의 유형 D) $f(x)=x^2-x$의 $x=1$에서 연속임을 구분하지 못하고 그 이유를 제시하지 못하였으며(문제6-1의 유형 CC), 함수 $(f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}(x\neq 1))$가 $x=1$에서 불연속임을 구분하지 못하고 그 이유도 제시하지 못한 경우(문제 6-2 유형 CC)의 학생은 149명으로 나타났다(유형 DCC). 함수 $f(x)$의 연속의 정의를 잘 제시하였지만(문제5의 유형AA) 문제6-1 또는 문제6-2를 하나라도 틀린 학생은 86명으로 나타났다(유형 APP)(<표 Ⅳ-6-4>).

<표 Ⅳ-6-4> 함수의 연속성 구하는 문제(문제6-1, 문제6-2)에 대한 반응

유형	문제6-1과 문제6-2의 유형									합계
	유형 AA	유형 AB	유형 AC	유형 CA	유형 BA	유형 BB	유형 BC	유형 CB	유형 CC	
반응 수(명)	189	72	34	12	118	240	78	25	195	963
빈도(%)	19.6	7.5	3.5	1.2	12.3	24.9	8.1	2.6	20.3	100

<표 Ⅳ-6-5> 함수의 연속 정의와 연속성 구하는 문제(문제5, 문제6-1, 문제6-2)에 대한 반응

유형	문제5번과 문제6-1 및 문제6-2의 유형									합계
	유형 AAA	유형 AAB	유형 AAC	유형 ACC	유형 ACA	유형 ABA	유형 ACB	유형 ABB	유형 DCC	
반응 수(명)	105	21	13	6	2	22	5	17	149	340
		86								

*문제5번의 유형-D: 세 가지 조건 모두 틀린 경우, A: 세 가지 조건 모두 맞은 경우, B:세 가지 조건 중 두 가지 맞음, C:세 가지 조건 중 한 가지만 맞은 경우, DCC: 문제5의 연속의 정의 세 가지 조건 중 하나도 제시하지 못하면서 문제6-1과 문제6-2를 모두 틀린 경우, 문제5의 유형D: 연속함수의 정의 세 가지 모두 틀린 경우

문제5의 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 연속의 정의를 기술하는데 오류가 있으면서 함수 $f(x)=x^2-x$가 $x=1$에서 연속임을 구분하고 그 이유를 잘 제시하고(문제6-1의 유형 AA) 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}(x\neq 1)$의 $x=1$에서 불연속임을 구분하고 불연속인 이유를 잘 설명한 경우(문제6-2유형 AA)의 학생은 84명으로 나타났다(유형 BAA:64명, 유형 CAA:15명, 유형 CAA:5명). 그리고 문제5의 함수 $f(x)$의 연속 정의를 올바르게 제시하지 못하면서 $x=1$에서 함수 $f(x)=x^2-x$의 연속성을 구분하고 그 이유를 올바르게 제시(문제6-1의 유형AA) 하였거나, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}(x\neq 1)$가 $x=1$에서 불연속임을 구분하고 그 이유를 올바르게 설명한 경우(문제6-2의 유형AA)의 학생은 256명으로 나타났다(<표 Ⅳ-6-6>).

<표 Ⅳ-6-6> 함수의 연속 정의와 연속성 구하는 문제(문제5, 문제6-1, 문제6-2)에 대한 반응

유형	문제5번과 문제6-1 및 문제6-2의 유형				합계
	유형 BAA	유형 CAA	유형 CAA	유형 CAA, 유형 CAB, 유형 CAC, 유형 CBA, 유형 CBC,, 유형 CCA, 유형 CRR	
반응 수(명)	64	15	5	256	963

* 유형 CRR: 문제5번 틀렸지만 문제6-1 또는 문제6-2번 중 한 문항이라도 맞은 경우

7. 유리함수의 그래프 개형과 극한값 구하기

1) 유리함수 $f(x)=\frac{-1}{x-1}(x\neq1)$의 그래프 개형 표현

수능 가형에서 유리함수의 그래프 개형을 올바르게 표현한 학생은 71.4%(489명), 수능 나형에서 유리함수의 그래프 개형을 맞게 표현한 학생은 57.2%(278명)로 나타났다. 그리고 수능 가형에서 유리함수의 그래프 개형을 틀리게 그린 학생은 28.6%(196명), 수능 나형에서 유리함수의 그래프 개형을 틀리게 그린 학생은 42.8%(119명)로 나타났다. 유리함수의 그래프를 맞게 표현한 학생은 수능 가형이 나형보다 13.2% 많이 나타났다(<표 Ⅳ-7-1>).

<표 Ⅳ-7-1> 유리함수 $f(x)=\frac{-1}{x-1}(x\neq1)$의 그래프 개형 그리기(문제7-1)에 대한 반응

문제	수능	반응	등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 7-1	가형	0		0	1	22	56	52	49	11	5	196(28.6)
		1		3	7	144	228	91	14	1	1	489(71.4)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685
	나형	0	0	4	13	33	33	22	8	6		119(42.8)
		1	22	30	58	36	12	1	0	0		159(57.2)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

*0:그래프 개형 틀린 경우, 1:그래프 개형 맞은 경우

2) 유리함수 $f(x)=\frac{-1}{x-1}(x\neq1)$의 점근선 구하기

전체 학생(963명)들 중 점근선을 맞게 구한 학생은 38.9.9%(375명), 틀리게 구하였거나 무반응인 학생은 66.1%(588명)로 나타났다. 수능 가형의 학생들 중 유리함수의 점근선을 잘 구한 학생은 40.9%(280명), 수능 나형의 학생들 중에서 유리함수의 점근선을 잘 구한 학생은 34.2%(95명)로 나타났다. 그리고 수능 가형에서 유리함수의 점근선이 틀린 학생은 59.1%(405명), 수능 나형에서 점근선이 틀린 학생은 65.8%(183명)이었다. 유리함수의 점근선을 구하는 문제에서 수능 유형에 따라 6.5% 차이를 보였다(<표 Ⅳ-7-2>).

<표 Ⅳ-7-2> 유리함수 $f(x)=\dfrac{-1}{x-1}\,(x\neq1)$의 점근선 구하기(문제7-2)에 대한 반응

문제	수능	반응	수능 등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 7-2	가형	0		3	3	78	163	91	49	12	6	405(59.1)
		1		0	5	88	121	52	14	0	0	280(40.9)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685
	나형	0	11	19	36	43	38	22	8	6		183(65.8)
		1	11	15	35	26	7	1	0	0		95(34.2)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

*0:점근선 틀린 경우, 1:점근선 맞은 경우

3) 유리함수 $f(x)=\dfrac{-1}{x-1}\,(x\neq1)$의 정의역과 치역 구하기

구간이 주어졌을 때 주어진 그 구간 안에서 함수의 그래프 개형을 어느 정도 올바르게 표현하는지 알아보기 위한 문제1(구간 $[-3,3]$에서 함수 $f(x)=x^2-x-2$의 그래프 개형 그리기)에서 함수의 그래프 개형이 틀린 학생은, 수능 가형에서 28%(192명), 수능 나형에서 46.8%(130명)로 나타났다. 이러한 학생들 주어진 구간($[-3,3]$)을 벗어난 구간에서 그래프를 표현한 학생이 대부분이었다(<표Ⅲ-1>). 문제7-2에서 정의역, 치역을 잘못 구한 학생은, 수능 가형에서 55.2%(373명), 수능 나형에서 65.8% (183명)로 나타나 수능 나형보다 수능 가형의 10.6%의 학생들이 더 많이 해결한 것으로 나타났다. 전체 학생 936명중 58.3%(561명)이 정의역과 치역을 올바르게 구하지 못한 것으로 나타났다(<표 Ⅳ-7-3>). 이는 유리함수 $f(x)=\dfrac{-1}{x-1}$가 $x=1$에서 정의되어있지 않다는 의미를 이해하지 못한 학생들이 많이 있다는 것을 의미하는 것으로 대학 교양수학에서 유리함수의 정의를 정확히 이해하도록 지도해야함을 시사한다.

<표 Ⅳ-7-3> 유리함수 $f(x)=\dfrac{-1}{x-1}\,(x\neq1)$의 정의역과 치역 구하기(문제7-3)에 대한 반응

문제	수능	반응	수능 등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 7-3	가형	0		0	3	58	143	98	59	11	6	378(55.2)
		1		3	5	108	141	45	4	1	0	307(44.8)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685
	나형	0	6	13	38	50	39	23	8	6		183(65.8)
		1	16	21	33	19	6	0	0	0		95(34.2)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

*0:정의역 치역 틀린 경우, 1:정의역 치역 맞게 구한 경우

4) 유리함수 $f(x)=\dfrac{-1}{x-1}\,(x\neq 1)$의 $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ 구하기

<표 Ⅳ-7-4> 유리함수의 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$구하기(문제7-4)에 대한 반응

문제	수능	반응	등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 7-4	가형	0		0	3	60	148	99	61	11	6	388(56.6)
		1		3	5	106	136	44	2	1	0	297(43.4)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685
	나형	0	6	16	40	52	40	23	8	6		191(68.7)
		1	16	18	31	17	5	0	0	0		87(31.3)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(1200)

* 0:함수의 극한값이 틀린 경우, 1:함수의 극한값이 맞은 경우

전체 대상 963명 중 유리함수의 극한값을 틀리게 구한 학생은60.1%(579명)이었다. 수능 가형 685명중 56.6%(388명), 수능 나형 278명중 68.7%(191명)으로 나타났다. 수능 가형 2등급과 3등급 11명 모두는 우극한 값을 잘 구하였으나 수능 나형 1등급에서 3등급까지 127명의 학생들 중 9명의 학생들이 좌 극한값을 틀리게 구한 것으로 나타났다(<표 Ⅳ-3-3>, <표 Ⅳ-3-5>). 전체 대상 963명으로 하였을 때 각 등급에서 틀린 학생들은, 1등급 22명 중 0.6%(6명), 2등급 37명 중 1.7%(16명), 3등급 79명 중 4.5%(43명), 4등급 235명 중 11.6%(112명), 5등급 329명 중 19.5%(188명), 6등급 166명 중 12.7%(122명), 6등급 71명 중 7.2%(69명), 8등급 18명 중 1.8%(17명), 9등급 6명 중 0.6%(6명)로 나타났다(<표 Ⅳ-7-4>).

5) 유리함수 $f(x)=\dfrac{-1}{x-1}\,(x\neq 1)$의 $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$ 구하기

유리함수 $f(x)=\dfrac{-1}{x-1}\,(x\neq 1)$는 $x=2$에서 연속임에도 불구하고 전체 936명 학생들 중 29%(279명)의 학생들이 틀리게 구한 것으로 나타났다. 수능 가형 685명 중에서 26.9%(184명)가 극한값을 잘못 구한 것으로 나타났다. 틀린 학생 184명중 4등급 학생이 14.7%(26명), 5등급 학생이 34.8%(64명), 6등급 학생이 21.2%(39명), 7등급 학생이 21.7%(40명)이었다. 그리고 수능 나형 278명 중에서 34.2%(95명)의 학생들이 극한값을 틀리게 구하였다. 잘못 구한 95명 중에서 2등급이 13.7%(13명), 3등급이 26.3%(25명), 4등급이 26.3%(25명), 5등급이 22.1%(21명)로 나타났다(<표 Ⅳ-7-5>).

<표 Ⅳ-7-5> 유리함수의 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$구하기(문제7-4)에 대한 반응

문제	수능	반응	등급									빈도(%)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 7-5	가형	0		2	2	27	64	39	40	8	2	184(26.9)
		1		1	6	139	220	104	23	4	4	501(73.1)
		전체		3	8	166	284	143	63	12	6	685
	나형	0	2	7	13	25	21	17	7	3		95(34.2)
		1	20	27	58	44	24	6	1	3		183(65.8)
		전체	22	34	71	69	45	23	8	6		278(100)

*0:점근선 틀린 경우, 1:점근선 맞은 경우

함수의 연속 정의를 기술하는 문제5와 함수 $f(x)=x^2-x$의 $x=1$에서의 연속성 구별과 그 이유를 제시하는 문제(문제6-1), 함수 $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$의 $x=1$에서의 연속성의 구별과 그 이유를 기술하는 문제(문제6-2), 함수 $f(x)=\frac{1}{x-1}$의 $\lim_{x\to 1} f(x)$을 구하는 문제(문제 7-4)에 대한 반응 유형은 <표 Ⅳ-7-6>와 같이 나타났다. 네 문제 모두 맞은 학생(유형 A)은 6.9%(66명), 모두 틀린 학생(유형F)은 39.1%(376명), 연속 함수의 정의를 올바르게 제시하였지만 함수 $f(x)=x^2-x$와 $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$의 $x=1$에서 연속성의 구별 및 그 이유를 제시하지 못하고 함수의 극한값($\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$)구하기에 오류가 있는 학생은 2.2%(21명)로 나타났다. 유리함수의 극한만 맞은 학생(유형 B)가 13.1%(126명), 연속 함수의 정의를 기술하는 문제5는 틀렸지만 함수의 연속성의 구별과 이유를 제시하는 문제(문제6-1, 문제6-2)와 유리함수의 극한값($\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$)은 모두 맞은 학생(유형 D)이 5.2%(50명)로 나타났다. 이외 유형 C가 5.8%(56명), 유형 E가 5.2%(50명), 유형 G가 4.2%(40명), 유형 H가 3.7%(36명), 유형 I가 3.5%(34명), 유형 J가 3.3%(32명), 유형 K가 2.2%(21명), 유형 L이 2.2%(21명), 유형 M이 1.7%(16명), 유형 N이 1.5%(155명), 유형 O가 1.3%(13명), 유형 P가 0.9%(9명), 유형 Q가 0.2%(2명)로 나타났다(<표 Ⅳ-7-6>). 이러한 결과는 학생들의 문제 해결 정도를 분석한 여러 유형(<표 Ⅳ-7-6>)을 고려하여 대학 교양수학 지도가 이루어져야함을 시사한다.

<표 Ⅳ-7-6> 함수의 연속 정의와 연속성 및 극한 구하는 문제(문제5, 문제6-1, 문제6-2, 7-4)에 대한 반응

유형	문제					
	5번	문제6-1	문제6-2	문제7-4	합계	
					인원 수	%
F	0	0	0	0	376	39.1
A	1	1	1	1	66	6.9
B	0	0	0	1	126	13.1
C	0	0	1	1	56	5.8
D	0	1	1	1	50	5.2
E	0	0	1	0	50	5.2
G	1	1	1	0	40	4.2
H	0	1	0	1	36	3.7
I	0	1	0	0	34	3.5
J	0	1	1	0	32	3.3
K	1	1	0	0	21	2.2
L	1	0	0	0	21	2.2
M	1	0	0	1	16	1.7
N	1	0	1	1	15	1.5
O	1	1	0	1	13	1.3
P	1	0	1	0	9	0.9
Q	1	1	0	1	2	0.2
합 계					963	100

*<표 Ⅳ-7-6>의 0와 1이 의미는 <표 Ⅳ-7-7>에 제시하였음

<표 Ⅳ-7-7> 위 의 표<표 Ⅳ-7-6>의 0와 1이 의미하는 내용 제시

문제	문제 풀이	
	1(맞음)	0(틀림)
문제5	$f(x)$가 $x=a$에서 연속되기 위한 세 가지 조건을 모두 맞은 경우	$f(x)$가 $x=a$에서 연속되기 위한 세 가지 조건 중 한 가지라도 틀린 경우
문제6-1	함수 $f(x)=x^2-x$가 $x=1$에서 연속 구분하고연속인 이유를 맞게 제시한 경우	$f(x)=x^2-x$가 $x=1$에서 연속성 구분하지 못한 경우 또는 연속성 구분하였으나 이유를 제시하지 못한 경우
문제6-2	함수$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$가 $x=1$에서 불연속 구분하고 불연속인 이유를 맞게 제시한 경우	함수$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$가 $x=1$에서 불연속성 구분하지 못한 경우 또는 불연속 구분하였으나 이유 설명하지 못한 경우
문제7-4	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}$값이 맞은 경우	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}$값이 틀린 경우

8. 함수의 연속 구간 구하기

1) 함수 $f(x)=x^2+2x+1$의 연속 구간

이 문제는 이차함수의 정의역을 어느 정도 학생들이 알고 있는지 알아보기 위해 구성한 문제이다. 이 문제에서 주어진 함수의 연속 구간을 틀리게 구한 학생이 37.9%(365명)나 나타났다. 각 등급에 따라 문제를 해결하지 못한 학생들은, 2등급이 29.8%(11명), 3등급이 43.6%(24명), 4등급이 41.5%, 5등급이 37.4%(123명), 6등급이 42.8%(71명), 7등급이 66.2%(24명)로 나타났다.

<표 Ⅳ-8-1>연속 함수의 구간 구하기(문제8-1)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제8-1	0	4	11	24	69	123	71	47	11	5	365(37.9)
	1	18	26	55	166	206	95	24	7	1	598(62.1)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963(100)

*0:함수의 연속이 되는 구간을 구한 것에 오류가 있는 경우, 0: 함수의 연속 구간이 정답인 경우

2) 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x<3) \\ x-1 & (x\geq3) \end{cases}$의 연속 구간 구하기

이 문제는 불연속 점이 있는 함수의 정의역을 어느 정도 알고 있는지를 알아보기 위해서 구성한문제로, 주어진 함수의 연속 구간을 올바르게 구한 학생이 48.7%(469명)로 나타났다.

<표 Ⅳ-8-2>연속 함수의 구간 구하기(문제8-2)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제8-2	0	9	17	33	107	165	89	55	14	5	494(51.3)
	1	13	20	46	128	164	77	16	4	1	469(48.7)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963(1200)

*0:연속 구간 잘못 구한 경우, 1: 연속 구간 잘 구한 경우

3) 함수 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-1}(x\neq 1, x\neq -1)$의 연속 구간 구하기

이 문제는 유리함수의 정의역을 구하는 문제로, 함수가 연속이 되는 구간을 맞게 구한 학생이 428.9%(278명), 틀리게 구한 학생이 71.1%(685명)로(<표 Ⅳ-8-3>) 나타나 유리함수의 정의를 이해하지 못하는 학생이 많이 있는 것으로 나타났다.

<표 Ⅳ-8-3>연속 함수의 구간 구하기(문제8-3)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 8-3	0	10	27	44	153	234	130	67	15	5	685(71.1)
	1	12	10	35	82	95	36	4	3	1	278(28.9)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963

*0:함수가 연속이 되는 구간을 잘못 구한 경우, 1: 함수가 연속이 되는 구간을 잘 구한 경우

9. 연속함수가 되기 위한 미지수 구하기

$x=1$에서 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax}{x-1} & (x\neq 1)\\ b & (x=1)\end{cases}$가 연속이기 위한 상수값 a, b를 구하는 문제에서는, 유형 A가 45.6%(439명), 유형 B가 39.5%(380명), 유형 C가 1.3%(13명), 유형 D가 5.5%(53명), 유형 E가 4.4%(42명), 유형 F가 3.7%(36명)로 타나났다. 유형F 36명 중 4등급에서 7등급까지가 86.1%(31명)로 나타난 것은 연구대상 대학 중 한 대학에서 2월 달에 진단평가를 실시함으로 학생들이 이와 유사한 문제를 2월 달에 풀어본 경험이 더 있기 때문이라고 추정된다.

<표 Ⅳ-9>연속함수가 되기 위한 미지수 구하기(문제9)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제9	A	4	14	26	111	131	79	52	16	6	439(45.6)
	B	16	17	43	77	150	66	10	1	0	380(39.5)
	C	0	0	1	6	6	0	0	0	0	13(1.3)
	D	1	5	2	19	20	2	4	0	0	53(5.5)
	E	0	0	4	16	10	10	1	1	0	42(4.4)
	F	1	1	3	6	12	9	4	0	0	36(3.7)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963(100)

<표 Ⅳ-9-1> 연속함수가 되기 위한 미지수 구하기(문제9)의 유형

유형	내 용
유형 A	풀이 과정과 답이 모두 틀린 경우
유형 B	풀이 과정이 하나만 맞고 답이 모두 틀린 경우
유형 C	풀이 과정이 하나만 맞고 답이 하나만 맞은 경우
유형 D	풀이 과정이 맞았으나 답(a의 값, b의 값)이 모두 틀린 경우
유형 E	풀이 과정이 맞았으나 답(a의 값, b의 값)이 하나라도 틀린 경우
유형 F	풀이 과정과 답이 모두 맞은 경우

10. 평균변화율과 미분계수 정의

1) 평균변화율 정의

<표 Ⅳ-10-1>평균변화율과 미분계수 정의 기술(문제10-1)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 10-1	0	9	21	43	107	169	125	65	17	6	562(58.4)
	1	13	16	36	128	160	41	6	1	0	401(41.6)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963(100)

*0: 평균변화율을 제시하지 못한 경우, 1:평균변화율을 제시한 경우

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율을 제시하는 문제10-1에서, 평균변화율을 올바르게 제시하지 못한 학생들은 58.4%(562명), 평균변화율을 올바르게 제시한 학생은 41.6%(401명)로 나타났다.

2) 미분계수

함수$f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 세 가지 유형 기술하는 문제10-2에서, 유형A의 학생들은 69.4%(668명), 유형B의 학생들은 9.6%(92명), 유형C의 학생들은 9.7%(93명), 유형D의 학생들은 11.4%(110명)로 나타났다.

<표 Ⅳ-10-2> 평균변화율과 미분계수 정의 구하기(문제10-1)에 대한 반응

문제	유형	문제									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제10-2	A	16	26	59	135	218	124	67	18	5	668(69.4)
	B	1	3	2	34	44	7	0	0	1	92(9.6)
	C	1	4	13	32	28	15	0	0	0	93(9.7)
	D	4	4	5	34	39	20	4	0	0	110(11.4)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963(100)

<표 Ⅳ-10-3>는 <표 Ⅳ-10-2>의 유형에 대한 설명이다.

<표 Ⅳ-10-3> 미분계수 정의 기술하기(문제10-2)의 유형

유형	내용
유형 A	미분계수 정의를 모두 제시하지 못한 경우
유형 B	$f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 이러한 유형의 3가지 모두 제시한 경우
유형 C	미분계수 정의를 2가지로 표현한 경우
유형 D	미분계수 정의를 1가지로 표현한 경우

11. 미분계수 구하기

학생들이 미분계수를 공식처럼 기억하여 구하는 것인지 미분계수의 정의를 알고 구하는 것인지 알아보기 위하여 미분계수를 단순히 구하는 문제(문제11-1)와 미분계수의 정의에 따라 구하는 문제(문제11-2)로 구성하였다.

1) $f(x)=x^2+1$의 $x=1$에서의 미분계수 구하기

<표 Ⅳ-11-1> 미분계수 구하기(문제11-1)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 11-1	0	1	2	21	19	36	26	31	10	3	149(15.5)
	1	21	35	58	216	293	140	40	8	3	814(84.5)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963(100)

*0:미분계수 값이 틀린 경우, 1:미분계수 값이 맞은 경우

미분계수를 구하는 문제11-2에서, 미분계수를 잘 구한 학생은 84.5%(814명), 미분계수를 틀리게 구한 학생은 15.5%(149명)로 나타났다.

2) 함수 $f(x)=x^2+1$의 $x=1$에서 미분계수 정의에 따라 구하기

미분계수의 정의에 따라 미분계수를 구하는 문제11-2에서, 미분계수를 구하는 과정과 답이 틀린 학생은 78.4%(755명), 미분계수를 정의에 따라 구하는 과정과 미분계수 값을 올바르게 구한 학생은 18.9%(182명), 미분계수를 구하는 풀이 과정은 맞았지만 미분계수 값이 틀린 학생이 2.7%(26명)로 나타났다(<표 Ⅳ-11-2>). 미분계수 정의를 올바르게 제시한 학생은 9.6%(92명), 미분계수 값을 잘 구한 학생은 84.5%(814명), 미분계수를 정의에 따라 잘 구한 학생은 18.9%(182명)로 나타나 미분계수를 계산에 의해 구하는 문제를 잘 해결하지만 미분계수의 정의나 미분계수의 정의에 따라 계산하는 풀이과정에 어려움을 겪고 있는 것으로 예측된다(<표 Ⅳ-10-2>, <표 Ⅳ-11-1>, <표 Ⅳ-11-2>).

<표 Ⅳ-11-2> 미분계수를 정의에 따라 미분계수 구하기(문제11-2)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 11-2	0	17	28	62	171	237	146	70	18	6	755(78.4)
	1	5	8	16	54	78	20	1	0	0	182(18.9)
	2	0	1	1	10	14	0	0	0	0	26(2.7)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963(100)

*0:풀이과정과 답이 모두 틀린 경우, 1:풀이과정이 맞고 답이 맞은 경우, 2:풀이과정이 맞고 답이 틀린 경우

미분계수정의, 미분계수 값 구하기, 미분계수 정의에 따라 구하기(문제10-2, 문제11-1, 문제11-2)의 해결 정도에 따라 각 유형으로 분류하였다(<표 Ⅳ-11-3>). <표 Ⅳ-11-3>에서, 예를 들어 유형 DBC,

첫 번의 D는 문제10-2의 유형(유형 A, 유형 B, 유형 C, 유형 D)중 하나를 의미하고, 두 번째의 B는 문제11-1의 유형(유형 A, 유형 B)중 하나를 의미하고, 세 번째의 C는 문제11-2의 유형(유형 A, 유형 B, 유형 C)중 하나를 의미한다. 그리고 <표 Ⅳ-11-3>는 문제(문제10-2, 문제11-1, 문제11-2)를 해결한 정도에 따른 문제(문제10-2, 문제11-1, 문제11-2)들의 유형이다.

<표 Ⅳ-11-3> 미분계수 정의, 미분계수 구하기(문제10-2, 문제[11-1, 문제11-2)에 대한 유형

문제	유형	내 용
문제10-2	유형 A	미분계수 정의를 3가지로 표현한 경우
	유형 B	미분계수 정의를 2가지로 표현한 경우
	유형 C	미분계수 정의를 1가지로 표현한 경우
	유형 D	미분계수 정의를 모두 제시하지 못한 경우
문제11-1	유형 A	미분계수 값이 맞은 경우
	유형 B	미분계수 값이 틀린 경우
문제11-2	유형 A	풀이 과정이 맞고 답이 맞은 경우
	유형 B	풀이 과정이 맞고 답이 틀린 경우
	유형 C	풀이 과정과 답이 모두 틀린 경우

미분계수 정의를 3가지로 모두 표현(문제10-2)하고 미분계수 값을 잘 구하고(문제11-1), 미분계수를 정의에 따라 올바르게 해결(문제11-2)한 경우(유형 AAA)는 전체 963명 중 7%(66명)로 나타났다. 그리고 미분계수 정의(문제10-2)가 틀리고 미분계수 값(문제11-1)도 틀렸으며, 미분계수를 정의(문제11-2)에 따라 구하지 못한 경우(유형 DBC)는 전체 963명 중 14.7%(141명)로 나타났다. 분석 결과 인원이 제일 많이 나타난 유형은 미분계수의 정의를 제시하지 못하였지만 미분계수는 구하였으며 미분계수 정의에 따라서는 미분계수를 구하지 못한 유형(유형 DAC)가 50.7% (489명)로 나타났다. 유형 CAC가 6.5%(62명), 유형 BAA가 4.3%(41명), 유형 CAA가 4%(39명), 유형 BAC가 3.4%(33명), 유형 AAC가 1.5%(14명), 이외 유형들은1% 미만으로 나타났다. 미분계수의 정의는 제시를 하지 못하였지만 미분계수는 잘 구하였으며, 미분계수 정의에 따라서는 미분계수를 구하는 과정이 틀린 학생이 약 50.7%로 나타나 대학 교양수학에서 미분계수의 정의를 올바르게 이해하고 문제를 해결할 수 있도록 지도하여야할 필요성이 제기된다.

<표 Ⅳ-11-4> 미분계수 정의, 미분계수 구하기(문제10-2, 문제[11-1, 문제11-2)에 대한 반응 유형

유형	합계		유형	합계	
	인원수	%		인원	%
유형 AAA	67	7	유형 CAC	62	6.5
유형 BAA	41	4.3	유형 DAB	2	0.2
유형 DAC	489	50.7	유형 ABB	1	0.1
유형 CAA	39	4	유형 ABC	1	0.1
유형 AAB	9	0.9	유형 BBC	1	0.1
유형 AAC	14	1.5	유형 CBC	2	0.2
유형 BAB	6	0.6	유형 DBA	2	0.2
유형 CAB	7	0.7	유형 DBB	1	0.1
유형 BAC	45	4.7	유형 DBC	141	14.7
유형 DAA	33	3.4			
합계	963(100%)				

12. 평균변화율이 성립하기 위한 미지수 구하기

<표 Ⅳ-12-1> 평균변화율이 성립하기 위한 미지수 구하기(문제12)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제12	0	8	26	48	125	188	129	68	17	6	615(63.9)
	1	13	10	29	99	120	33	2	1	0	307(31.9)
	2	1	1	2	11	21	4	1	0	0	41(4.3)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963

*0: 풀이 과정과 답이 모두 틀린 경우, 1: 풀이 과정이 맞고 답이 맞은 경우, 2:풀이 과정이 맞고 답이 틀린 경우

함수 $f(x)=x^2-3x\ (a \le x \le a+2)$에서 평균변화율이 0일 때, 상수 a의 값을 구하는 문제12에서 문제를 해결하는 과정과 구한 답이 오답인 경우가 63.9%(615명), 문제해결 과정과 답이 모두 틀린 경우는 9%(307명), 문제를 해결하는 과정이 맞았으나 답이 틀린 경우는 4.3%(41명)로 나타났다. 풀이 과정과 구한 답이 정확하지 않은 경우, 2등급 37명 중 26명(70.3%), 4등급 235명 중 125명(53.2%), 5등급이 329명 중 188명(57.1%), 6등급 166명 중 129명(77.7%) 로 나타났다. 전체 963명 중 655명(68%)이 풀이 과정이 틀리거나 답이 틀린 학생들로 평균변화율에 대한 이해가 부족한 것으로 나타났다(<표 Ⅳ-12-1>). 23.2%(223명)가 평균변화율 정의와 평균변화율 값 및 해결 과정이 모두 맞았으며(유형 AA), 평균변화율 정의와 평균변화율 구하는 풀이 과정 및 평균변화율 모두 틀린 학생(유형 BC)은 48.4%(466명)로 나타났다. 학생들이 평균변화율 개념을 이해하지 못하고 있는 것으로 보인다. 정의는 알고 있지만, 평균변화율을 구하지 못한 학생(유형 AC)은 15.4%(149)로 나타났으며, 유형 AB는 3%(29명), 유형 BA는 8.7%(84명), 유형 BB는 1.3%(12명)로 나타났다(<표 Ⅳ-10-1>, <표 Ⅳ-12-1>, <표 Ⅳ-12-2>).

<표 Ⅳ-12-2> 평균변화율 정의와 값을 구하기(문제10-2, 문제12)의 유형

유형	내용	인원수	%
유형 AA	평균변화율의 정의와 평균변화율 풀이 과정 및 값 모두 맞은 경우	223	23.2
유형 AB	평균변화율의 정의를 올바르게 제시하고 평균변화율의 풀이 과정은 올바르지만, 구한 값이 틀린 경우	29	3
유형 AC	평균변화율의 정의를 올바르게 제시하였으나, 평균변화율 구하는 과정 및 값이 모두 틀린 경우	149	15.4
유형 BA	평균변화율의 정의는 틀렸지만, 평균변화율 구하는 해결 과정과 값이 맞은 경우	84	8.7
유형 BB	평균변화율의 정의와 평균변화율 값은 틀렸지만, 평균변화율 구하는 해결 과정은 맞은 경우	12	1.3
유형 BC	평균변화율의 정의와 평균변화율 구하는 풀이 과정과 값이 모두 틀린 경우	466	48.4
합계		963	100

13. 미분계수가 주어졌을 때 극한값 구하기

1) $f'(1)=5$일 때, $\operatorname*{Lim}_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}$ 구하기

미분계수를 적용하는 문제 풀이 과정 및 답이 맞는 경우 67.2%(647명)이었다. 풀이 과정이 올바르고 오답인 경우는 4등급에서 6등급까지의 학생(730명)들로 2.3%(22명)이었다. 그리고 풀이 과정 및 답이 틀린 경우는 30.5%(294명)로 나타났다(<표 Ⅳ-13-1>).

<표 Ⅳ-13-1> 미분계수 적용 문제(문제13-1)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 13-1	0	7	13	21	55	84	52	46	13	3	294(30.5)
	1	15	24	58	162	243	112	25	5	3	647(67.2)
	2	0	0	0	18	2	2	0	0	0	22(2.3)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963

*0:풀이과정 및 답이 모두 틀린 경우, 1:풀이 과정이 맞고 정답인 경우, 2:풀이 과정만 맞고 답이 틀린 경우

2) $f'(1)=5$일 때, $\operatorname*{Lim}_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$ 구하기

미분계수를 적용하는 문제에서 풀이 과정과 답이 올바른 경우는 64.4%(620명)이었다. 풀이 과정은 올바르지만, 오답인 경우는 1등급이 1명, 4등급과 5등급 그리고 6등급이 21명으로 2.3%(22명)이었고 오답인 경우는 33.3%(321명)로 나타났다(<표 Ⅳ-13-1>). 문제3-1과 유사한 문제로 계산과정이 약간의 차이가 있는 문제를 학생들이 어느 정도 해결하는지 알아보기 위해 구성한 문제로 거의 차이가 없는 것으로 나타났다. 1등급에서 3등급 까지 그리고 미분계수를 적용하는 문제(문제3-1, 문제3-2)에서는 7등급에서 9등급까지는 풀이 과정이 맞으면서 오답인 경우는 1명이었다(<표 Ⅳ-13-2>). 주로 4등급에서 6등급까지의 학생들이 답을 구할 때 오류가 있는 것으로 나타났다(<표 Ⅳ-13-1>, <표 Ⅳ-13-2>).

<표 Ⅳ-13-2> 미분계수 적용 문제(문제13-2)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제 13-2	0	5	15	22	64	92	55	50	15	3	321(33.3)
	1	16	22	57	153	236	109	21	3	3	620(64.4)
	2	1	0	0	18	1		0	0	0	22(2.3)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963(100)

*0:풀이 과정과 답이 모두 틀린 경우, 1:풀이 과정이 맞고 답이 맞은 경우, 2:풀이 과정이 맞고 답이 틀린 경우

14. 미분가능 하기 위한 미지수 구하기

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1)\\ a & (x=1)\end{cases}$ 가 $x=1$에서 미분가능 하기 위한 상수 a 값을 구하는 문제에서, 풀이 과정과 상수 a 값을 올바르게 구한 학생은 45.9% (442명)이었다. 풀이 과정이 맞고 답이 틀린 경

우는 52명으로 나타났으며, 이 중에서, 4등급과 5등급 이 41명이었다. 그리고 풀이 과정과 답이 모두 틀린 학생 469명 중 1등급에서 3등급까지의 학생 138명 중 50명, 4등급에서 6등급까지 730명 중 339명으로 나타났다(<표 Ⅳ-14>). 미분계수를 적용하는 문제에서 문제해결 과정과 답을 정확하게 구한 학생들은, 문제13-1은 67.2%(647명), 문제13-2는 64.4%(620명)이었으며, 미분가능 하기 위한 상수 a 값을 구하는 문제(문제14)에서 풀이 과정 및 정답을 제시한 학생은 45.9%(442명)로 나타나(<표 Ⅳ-3-1, <표 Ⅳ-3-2>, <표 Ⅳ-14>) 미분가능에 대한 개념을 적용하는 문제에 약간의 어려움을 겪는 것으로 볼 수 있다.

<표 Ⅳ-14> 미분 가능하기 위한 상수 값 구하기(문제14)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제14	0	5	18	27	121	140	78	59	16	5	469(48.7)
	1	16	18	49	90	172	82	12	2	1	442(45.9)
	2	1	1	3	24	17	6	0	0	0	52(5.4)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963(100)

*0:풀이과정 및 답이 모두 틀린 경우, 1:풀이 과정과 답이 정확한 경우, 2:풀이 과정만 맞고 답이 틀린 경우

15. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+12$의 극값 구하기

함수의 극값을 구하는 문제에서 극값을 모두 올바르게 구한 학생은 51%(491명), 극값이 모두 틀린 학생이 33.9%(375명), 최댓값과 최솟값 중 하나만 맞은 학생은 10.1%(97명)로 나타났다. 그리고 극값 모두 오답인 경우, 1등급에서 3등급까지의 학생들은 1.56%(28명), 4등급은 6.0%(58명), 5등급은 12.0%(116명), 6등급이 8.3%(80명), 7등급이 6.5%(63명), 8등급과 9등급이 5.3%(20)로 나타났다. 그리고 4등급과 5등급의 학생 7%(57명)가 최댓값과 최솟값 중 하나만 맞은 것으로 조사되었다. 극값을 모두 틀린 학생과 극값 중 하나만 맞은 학생은 4등급 235명중 99명, 5등급 329명 중에서 142명, 6등급이 166명 중 80명으로 나타났다(<표 Ⅳ-15>).

<표 Ⅳ-15> 극값 구하기(문제15)에 대한 반응

문제	반응	등급									빈도(%)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
문제15	0	6	7	25	58	116	80	63	17	3	375(38.9)
	1	16	25	46	136	187	71	8	0	2	491(51.0)
	2	0	5	8	41	26	15	0	1	1	97(10.1)
전체		22	37	79	235	329	166	71	18	6	963(100)

*0:풀이과정과 답 모두 틀린 경우, 1:풀이과정 맞고 답도 맞은 경우, 2:풀이과정 맞았으나 답이 틀린 경우

16. 수학 성취도와 수학에 대한 태도와의 관계

수학에 대한 긍정적인 태도가 600명(62.3%), 부정적인 태도가 363명(37.7%)으로 조사되었다. 그리고 수학에 대한 태도와 수학 성취도와의 관계에서 긍정적인 태도를 가진 학생들이 부정적인 태도를 가진 학생들보다 평균이 유의하게 높은 것으로 나타났다(<표 Ⅳ-16-1>).

<표 Ⅳ-16-1> 수학에 대한 태도와 수학 성취도

수학에 대한 태도	인원수	평균	표준화 편차	표준오차 평균
긍정적	600	56.39	20.701	.845
부정적	363	41.87	25.765	1.352

T 검증	F	유의확률	t	자유도	유의확률 (양측)
등분산 가정	34.916	.000	9.605	961	.000

*p<0.01

수능 유형에 따른 수학 성취도의 차이에서는 가형이 평균 54.87점, 나형이 41.17점으로 나형보다 평균 약 13.6점 유의하게 높게 나타났다(<표 Ⅳ-16-2>).

<표 Ⅳ-16-2> 수능 유형과 수학 성취도

수능유형	인원수	평균	표준화 편차	표준오차 평균
가	685	54.87	22.155	.846
나	278	41.17	24.910	1.494

T 검증	F	유의확률	t	자유도	유의확률 (양측)
등분산 가정	10.843	.001	8.380	961	.000

*p<0.01

성별에 따른 수학 성취도의 차이에서는 남학생 그룹이 여학생 그룹보다 평균 약 0.28점 높게 나타났지만 유의한 차이는 없었다(<표 Ⅳ-16-3>).

<표 Ⅳ-16-3> 성별과 수학 성취도

성별	인원수	평균	표준화 편차	표준오차 평균
남	574	51.05	24.382	1.018
여	389	50.72	22.934	1.163

T 검증	F	유의확률	t	자유도	유의확률 (양측)
등분산 가정	.668	.414	.209	961	.834

p<0.01

Ⅴ. 요약 및 제언

본 연구는, 이공계열 대학 신입생을 대상으로 함수의 극한과 함수의 연속과 관련된 기초 개념을 어느 정도 알고 있는지 그리고 어느 정도 개념들을 연결하여 기억하고 있는지 조사하였다. 조사한 내용을 분석한 결과와 제언은 다음과 같다.

첫째, 함수의 그래프가 내포하고 있는 정보를 분석하는 일은 수학 학습에서 매우 중요하다. 주어진 구간 내에서 이차함수의 그래프 개형을 어느 정도 그릴 수 있는지 조사한 결과, 주어진 구간 내에 이차함수의 그래프 개형을 맞게 그린 학생들은 66.6%로 나타났다. 이들 중, 441명이 최댓값과 최솟값을 모두 잘 구하였으며, 175명은 최댓값과 최솟값 중 하나만 올바르게 구하였다. 나머지 25명은 최솟값과 최댓값을 모두 오답인 것으로 나타났다. 그리고 주어진 구간에서 이차함수의 그래프 개형을 올바르게 그린 학생이 66.6%, 이외 대부분은 함수의 그래프 개형을 맞게 그렸지만 주어진 구간 이외의 구간에서도 그래프를 그렸으며, 다른 나머지 학생들은 꼭지점의 위치가 틀리거나 그래프 자체가 틀린 것으로 조사되었다. 그러므로 함수의 그래프에 내재한 정보가 무엇인지 찾아내고 분석할 수 있도록 기하

적인 직관성이 형성될 수 있도록 하고 그래프에 담겨진 정의역과 치역 공역, 최댓값과 최솟값 등을 찾아내고, 함수의 그래프를 그리기위해 필요한 문제해결력을 기를 수 있도록 하여야 할 필요성이 있다.

둘째, $x=1$에서 불연속인 함수의 극한값을 잘 구하였으나, 좌 극한값 또는 우 극한값을 구하지 못하는 학생들이 있는 것으로 조사되었으며, 또한, 우 극한값과 좌 극한값이 서로 다른 값인 경우에도 불구하고 $x=1$일 때 y의 값이 0이므로 이 값을 극한값으로 생각하는 학생들도 나타났다. 그리고 주어진 $x=1$에서 불연속인 함수의 좌 · 우 극한값을 잘 구하였으나, 극한값이 틀린 학생은 434명(45.1%)으로 나타났다. 그리고 유리함수의 정의를 정확히 이해하지 못하여 함수 $f(x)=\frac{-1}{x-1}(x\neq 1)$가 $x=2$에서 연속임에도 불구하고 극한값을 구하지 못한 학생들이 있었다. 즉, 연속인 함수에 대한 극한값은 쉽게 구할 수 있지만, 한 점에서 불연속 함수의 극한값을 구하는 데 어려움을 겪는다는 것이다. 입학 후 학기 초에 실시한 평가 결과이지만, 학생들이 극한 개념을 잊어버린 것으로 단정하기에는 무리가 따른다고 할 수 있다. 좌 극한값과 우 극한값이 같은 경우 함수의 극한이 존재한다는 극한의 개념을 고등학교 과정에서 학습하면서 이해를 하지 못해서 일어나는 현상이라고 할 수 있다. 함수의 극한 개념 이해에 대한 어려움을 겪는 학생은 대학 교양 수학을 학습하면서 학습 내용을 도구적으로 이해할 가능성이 있으므로 대학 교양 수학에서 함수의 극한 개념을 지도하기 전에 함수의 극한에 대한 개념을 어느 정도 알고 있는지 평가하여 단계적인 교수 · 학습이 이루어져야 할 필요성이 제기된다. 교양수학에서 기초학력이 부족한 이공계열 대학생을 지도하기 위해서는 먼저, 기본 함수의 그래프 개형을 그릴 수 있도록 지도하고, 연속 함수와 불연속 함수에 내재한 정보를 분석할 수 있는 능력을 가질 수 있도록 하여야 할 것이다. 이 후에, 함수의 그래프 위의 한 점을 임의로 선택하여 좌측 방향과 우측 방향에서 접근 하였을 때 어느 값으로 접근 하는지 학생 스스로가 직관적으로 느낄 수 있는 기회를 제공하여 좌 극한값과 우 극한값이 동일한가, 그렇지 않은가 판단할 수 있도록 기초부터 지도하여야 할 것이다. 이러한 지도가 이루어진 후, 형식적인 극한의 정의를 학습할 수 있도록 지도할 필요성이 있다. 형식적인 정의를 도입할 때에 간단한 일차함수(예, $f(x)=x+5$)의 그래프를 그리고 한 점에 가까이 접근할 때의 좌 극한값과 우 극한값을 비교하면서 $\delta(>0)$의 의미와 $\varepsilon(>0)$의 의미를 학생 스스로가 찾아갈 수 있도록 지도한 후, 엄밀한 형식적 정의를 도입할 필요성이 있다.

셋째, 연구대상 963명 중, 함수가 $x=a$에서 연속일 세 가지 조건을 모두 올바르게 제시한 학생들은 20.8%(200명)로 나타났으며, 이들 중 함수 $f(x)=x^2-x$가 $x=1$에서 연속인 이유를 올바르게 제시하고 함수$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}(x\neq 1)$의 $x=1$에서 불연속인 이유를 잘 제시한 학생(유형 AAA)은 105명으로 나타났다. 함수의 연속 정의를 맞게 제시하고 함수 $f(x)=x^2-x$가 $x=1$에서 연속인 이유를 올바르게 제시하였으며 함수 $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$가 $x=1$에서의 불연속인 이유를 맞게 제시하고 극한값 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$을 올바르게 구한 학생(유형A)은 66명이었고, 연속함수의 정의는 잘 모르고 있지만 한 점에서 연속이 되는 또는 불연속이 되는 이유를 제시한 학생들도 있었으며, 또한, 함수의 극한값을 잘 구한 학생들도 있었다. 즉, 연속 함수 정의를 잘 제시하면서 함수가 한 점에서 연속인지 불연속인지 그 이유를 제시하는 데 어려움을 겪는 학생들이 9%(86명)이었으며, 연속 함수의 정의를 제시하지 못하거나 부정확하게 제시하면서 주어진 함수의 연속성을 구별하지 못하는 학생이 약 15.5%(149)로 나타났다. 연속 함수의 정의를 올바르게 제시하지는 못하였지만 한 점에서의 연속성에 대해 어려움을 겪는 것으로 나타났다. 이러한 학생들을 지도하기 위해서 형식적인 연속의 정의를 도입하기 전에 한 점에서 함수의 연속성을 구별할 수 있도록 함수의 그래프를 그리고 분석을 통하여 한 점에서 연속 함수의 직관적 정의

를 학생 스스로 이끌어 낼 수 있도록 기회를 제공하여야 할 것이다. 이 후에 예제를 통한 형식적 정의를 학생들이 이끌어 낼 수 있도록 교수·학습이 이루어져야 할 것이다.

넷째, 평균 변화율 정의와 평균 변화율의 값을 구하는 문제에 대한 반응에서, 평균 변화율의 정의 및 평균 변화율을 구하는 풀이과정과 그 값을 모두 잘 구한 학생(유형 AA)는 23.2%(223명)로 나타났다. 그리고 평균 변화율 정의와 풀이과정 및 그 값을 구하는 것에 오답을 제시한 학생(유형 BC)은 48.4%(466명)로 조사되었다. 또한, 평균 변화율 구하는 과정과 그 값이 오답인 경우(유형 AC)는 15.4%(149명)로 나타났다. 미분계수 정의 표현을 세 가지로 모두 잘 표현하고 계산에 의한 미분계수 값을 올바르게 구하였으며, 미분계수 정의에 따라 미분계수를 잘 구한 학생(유형 AAA)은 연구대상 963명 중 66명(7%)로 나타났다. 그리고 미분계수 정의를 올바르게 기술하지 못하고 계산에 의한 미분계수를 구하지 못하였으며, 미분계수 정의에 따라 미분계수를 구하지 못한 학생(유형 DBC)은 전체 963명 중 141명(14.7%)로 나타났다. 미분계수의 정의를 부정확하게 제시하였지만 미분계수를 구하는 문제에서는 정답을 제시하였고, 미분계수의 정의에 따라 미분계수를 구하는 문제는 해결하지 못한 학생(유형 DAC)은 50.9%(489명)로 나타났다. 극한 개념에 대한 이해가 부족하거나 함수의 연속성 구별을 잘 못할 경우에는 직관적인 미분계수 정의를 이해하는 데 어려움이 있다. 조사 결과, 미분계수의 정의를 이해하고 미분계수를 구할 수 있는 학생이 아주 적은 것으로 나타나 대학 교양 수학에서 미분계수의 정의를 형식적으로 도입하기 전에 고등학교에서 학습한 기초 내용부터 지도해야 할 필요성이 있음을 시사한다. 또한, 교양수학에서 극한 개념을 지도한 후 극한 개념과 고등학교에서 학습한 직관적인 미분 개념간의 이해정도를 평가하여 그 결과에 따라 교수·학습이 이루어져야 할 필요성 있다.

다섯째, 수학에 대한 긍정적인 태도를 가진 학생이 부정적인 태도를 가진 학생들에 비해 수학 성취도가 유의하게 높게 나타났다. 본 연구에서는 개념 위주의 문제에 대한 수학 성취도이므로 문제해결력 위주의 문제를 구성하여 측정할 필요성이 있다. 그러므로 단편적으로 긍정적인 태도를 가진 학생들이 부정적인 태도를 가진 학생들 보다 수학 성취도가 높다고 단정 짓기에는 약간의 어려움이 따른다.

여섯째, 각 대학에서 수학 기초학력이 부족한 대학생들을 대상으로 노력을 하고 있지만, 대학생 개개인이 어떠한 개념들을 연결하지 못하고 있는가에 대한 평가가 잘 이루어지지 않은 채 교수 · 학습이 주로 이루어지고 있다. 대학 교양 수학에서 기초가 부족한 대학생을 대상으로 대학생 개개인이 어떠한 수학 학습상황에 있는지 조사하기 위하여 고등학교에서 학습한 기본적인 개념에 대한 문제를 구성하여 평가하고, 대학생 개개인이 수학 개념을 어떻게 연결을 짓고 있는지 분석하여 대학생 개개인의 수학 개념 이해 정도를 판단하고 교수·학습 방법의 근거를 마련할 필요성이 제기된다. 그리고 대학생 개개인이 수학 개념을 어떻게 연결하여 이해하고 있는지 파악하여 과제를 제시하여 해결하도록 하거나, 기초가 부족한 대학생들을 대상으로 몇 개의 그룹으로 분류하여 기존의 협동학습 변형하여 각 대학에 적합한 모형을 개발하여 지도할 필요성이 있을 것으로 보인다.

참고 문헌

곽성은. (1997). 컴퓨터 그래픽을 통한 수학교육의 향상. **한국수학교육학회지 시리즈A(수학교육), 36**(2), 107-117.

교육부 고시 제2015-74호[별책 8]. 수학과 교육과정.

김문옥. (2000). **이질적 집단에서 수준별 학습의 효과에 관한 연구; 중학교 1학년 수학을 중심으로**, 전주대학교 석사학위논문.

김병무. (2002). 대학수학에서 급수의 합에 대한 다양한 접근. **한국수학교육학회지 시리즈E(수학교육), 41**(1), 91-100.

김성옥. (2005). 사회과학 전공을 위한 대학 수학 교육. **수학교육논문집 한국수학교육학회지 시리즈 E, 19**(4) 통권24호, 587-597.

김태수·김병수. (2008). 대학수학의 수준별 수업에 따른 학업성취도 분석. **한국수학교육학회 <E-수학교육논문집>, 22**(3), 369-382.

김향숙. (2003). Teaching and learning Models for Mathematics using Mahtematica(Ⅱ). **한국수학교육학회시리즈D(수학교육연구), 7**(2), 101-123.

김혜영. (2009). **대학생의 미적분학 성취도와 수학적 자기 효능감의 차이와 관계 연구**. 아주대학교육대학원 석사학위논문.

박용범외 4인. (2001). **수학교육에서 Maple의 활용방안. 한국수학교육학회지 시리즈A(수학교육), 41**(1), 91-100.

서종진 · 유천성 · 최은미. (2006). 대학수학교육에서 Maple 활용에 관한 연구. **한국학교수학회논문집 9**(4), 557-573.

서종진 · 조승희. (2018). 개별지도가 대학수학 기초학력 부진 학생들의 수학 학업성취도와 수학 태도에 미치는 영향. **한국학교수학회논문집 21**(3), 287-301.

이정례·이성진·권혁홍·이경희. (2011). 수학 기초학력 향상프로그램이 학업성취도와 학습동기에 미치는 영향: D대학교 공과대학 신입생을 중심으로. **한국수학교육학회<E-수학교육논문집>, 25**(1) (2011), 167-184.

이정례. (2015). 공과대학 신입생들의 수학에 대한 인식변화에 따른 대학수학 교육방향 연구. **한국수학교육학회지 시리즈E<수학교육 논문집>, 29**(3) 통권63호, 513-532.

이준승. (2000). **소집단 협동 학습을 통한 문제해결 전략 지도가 수학적 힘의 육성에 미치는 영향**, 대구교육대학교 석사학위논문.

전명진 · 조민식. (2005). 대학수학교육에서 기하학의 응용과 교과내용의 구성방안. **수학교육논문집 한국수학교육학회시리즈E,. 19**(4) 통권24호. 621-631

전영배 · 노은환 · 최정숙 · 김대의 · 정의창 · 정찬식 · 김창수. (2009). 미분 문제해결 과정에서의 오류분석, **한국학교수학회논문집, 12**(4), 545-562.

전재복. (2008). 바람직한 대학 기초 수학 교육 과정 운영 방안. **한국 수학교육 학회<E-수학교육논문집>, 22**(4). 399-416.

정상권 · 추상목. (1999). 수학교육에서의 Maple 활용방안. **대한수학교육학회지(학교수학), 1**(1), 157 -185.

정준영. (1999). **수학과 수준별 교육과정을 위한 협동 학습 적용의 효과성 연구**, 경희대학교 석사학위논문.

조창연. (1999). **동료교수를 통한 협동 학습이 수학적 학업성취 및 학습태도에 미치는 효과**, 인하대

학교 석사학위논문.

표용수·박준식. (2009). 대학과목선이수제 교과목의 효율적 운영 방안. **한국수학교육학회<E-수학교육논문집>,** 23(2), 279-296 .

표용수·박준식. (2010). 대학수학 기초학력 부진학생을 위한 기초수학 지도방안. **한국수학교육학회<E-수학교육논문집>,** 24(3) , 525-541.

한동승 · 유홍상. (2001). Maple을 이용한 삼각함수의 이해. **한국학교수학회논문지,** 4(2), 1-9.

함승연. (2009). 공대 졸업생들의 공학기초능력 수준과 교육 요구 분석. **대한공업교육학회 <대한공업교육학회지>,** 34(1), 196-209.

허혜자. (1998). Mathematica를 활용한 수학지도. **대한수학교육학회 논문집,** 8(2), 541-551.

Aiken, L. R. (1970). Attitudes toward mathematics. *Review of Educational Research, 40*, 551-596.

Aiken, L. R. (1976). Update on attitudes and other affective variable in learning mathematics. *Review of Educational Research, 46*, 293-303.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baselilng study on intuitions. *Jouornal for Reaearch in Mathematics Education, 13(5)*, 360-380.

Fennema, E., & Sherman, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors. *American Educational Research Journal, 14*, 51-71.

Hadar. N. M., & Zaslavsky. O. (1987). Error analysis in mathematics education, *Journal of Research in Mathematics Education 10*, 163-172.

Johnson, B. (2000). *Investigation of the factors affecting attitudes toward mathematics of students in different college mathematics course.* Bell & Howell Information and Earning Company. 1-10.

Knuth, E. J. (2000). Understanding the connections between equation and graphs. *Mathematics Teacher, 93*(1), pp. 48-53.

Othman Norhayati. (1996). *The Effects of Cooperative Learning and Traditional Mathematics Instruction in Grade K-12 : A Meta-Analysis of Findings*, West Virginia university, E.D.

Schofield, H. L. (1981). Teacher effects on cognitive and affective pupil outcomes in elementary school mathematics. *Journal of Educational psychology, 73*, 462-471

Slavin, R. E., & Karweit, N. L (1981). Cognitive and affective outcomes of an intensive student team learning experience. *Journal of Experimental Education, 50*, 29-35.

Slavin, R. E., & Karweit, N. L (1984). Mastery learning and student teams: A factorial experiment in urban general mathematics classes. *American Educational Research Journal, 21*(4), 725-736.

Slavin, R. E., & Leavey, M. B & Madden, N. A. (1984). Combing cooperative learning and individualized instruction: Effects on student mathematics achievement, attitudes, and behaviors. *The Elementary School Journal, 84*, 409-422.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Image and Definitions for the Concepts of Function. *Jouornal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

A Study on the Understanding of Limit and Continuous Concepts of Function of Freshmen in Science and Engineering College

Seo Jong Jin[2)] · Park Jin Han[3)] · Yoon Min[4)] · Kang Jm Ran[5)]

Abstract

In this paper, we investigated and analyzed how freshmen in science and engineering colleges understand the limit and the continuous concept of function. The survey found that there were more college students who did not do so than those who understood each concept by linking the concepts together. Therefore, in order to teach college general mathematics, It is necessary to analyze how college students are connecting mathematical concepts. And it is necessary to apply teaching-learning methods suitable for individuals.

Key Words : Limit, Continuous, Concepts

Received December 14, 2020
Revised December 25, 2020
Accepted December 26, 2020

---

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97C70, 97D60

2) Pukyong National University (seo2011@pknu..ac.kr), Corresponding Author
3) Pukyong National University (jihpark@pknu..ac.kr)
4) Pukyong National University (myoon@pknu..ac.kr)
5) Pukyong National University (jrkang@pknu..ac.kr)