한국학교수학회논문집 제 23 권, 제 4호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 23, Number 4, 509-521, December 2020
http://doi.org/10.30807/ksms.2020.23.4.005

도수밀도(Frequency density)의 수학적 연결성과 지도방안

김소민[1)]

본 연구는 싱가포르 교과서와 영국의 중등 졸업 자격시험 항목에서 도수밀도(frequency density)라는 개념을 발견하면서 시작되었다. 도수밀도의 수학적 의미를 파악하기 위해 도수밀도 개념의 수학적 연결성을 수학 내적 연결성과 수학 외적 연결성 측면에서 고찰하고, 이에 관한 지도 방안을 소개하고자 하였다. 수학 내적 연결성 측면에서는 고등학교 연속확률분포 단원의 연속확률변수와 확률밀도함수와의 연계성을 탐구하였고, 수학 외적 연결성 측면에서는 중학교 과학 교과의 밀도 개념과의 연계성을 탐구하였다. 연구 결과, 수학적 연결성을 바탕으로 도수밀도 개념의 도입 필요성을 제시했다. 도수밀도의 도입과 지도 방안에 대해서는 싱가포르의 중등 2학년 수학 교과서를 소개하였다. 싱가포르 교과서에서는 비균등 구간의 자료를 히스토그램으로 올바르게 표현하고 정확하게 해석하기 위한 방법으로 도수밀도를 도입하고 있다. 따라서 우리나라도 도수밀도를 도입함으로써 확률밀도함수와 상대도수밀도, 그리고 도수밀도 사이의 수학 내적 연결성을 강조하여 일관성 있게 지도하고, 도수밀도의 과학 교과와의 외적 연결성을 고려하며, 도수밀도 도입 방법으로 싱가포르의 지도 방안을 고려해 볼 수 있겠다.

주요용어 : 밀도, 도수밀도, 상대도수밀도, 확률밀도함수, 통계교육, 싱가포르 수학 교과서

Ⅰ. 서론

수학과 교육과정이나 수학 교과서에 대한 국제 비교 연구를 시행할 때, 연구 대상에 자주 포함되는 국가가 있다면 그것은 바로 싱가포르이다. PISA 또는 TIMSS 등의 국제 학업 성취도 평가의 수학 과목에서 인지적 영역과 정의적 영역 모두 상위권에 머무른다는 점(김소민, 2019)에서 싱가포르의 수학과 교육과정이나 수학 교과서는 흥미로운 연구 대상이 아닐 수 없다. 그 중 본 연구자는 싱가포르의 중학교 수학 교과서의 통계 영역에서 우리나라에서는 다루지 않는 “도수밀도(frequency density)”라는 새로운 개념을 발견하였다. 도수밀도란 $\dfrac{\text{도수}}{\text{계급의 크기}}$로 나타내는 비(ratio)를 말하는데, 우리나라 중학교 2학년에 해당하는 싱가포르의 중등 2학년 수학 교과서의 자료 분석 단원의 소단원 히스토그램에서 처음 도입되는 개념이다(Keung, 2017). 또한 이 도수밀도는 영국의 10-11학년 학생들이 의무교육 말에 치르는 성취도 평가 개념의 국가자격시험인 General Certificate of Secondary Education(GCSE)의 통계 영역 시험 내용에도 포함되어 있는 것(Office of Qualifications and Examinations Regulation, 2016)으로 보아 영국에서도 수학 수업시간에 다루는 개념으로 보인다. 우리나라 2015 개정 수학과 교육과정에 도수밀도라는 용어는 제시되어 있지 않으며, 수학 교과서에서도 다루지 않는다. 따라서 본

---

* MSC2010분류 : 97B70, 97K70

1) 인하대학교 강사 (thals8410@gmail.com)

연구에서는 우리에게는 생소한 이 도수밀도가 어떠한 수학적 의미가 있는지 살펴보고자 한다. 도수밀도가 무엇이고, 어떤 상황과 맥락에서 사용되는 개념인지, 다른 수학적 내용과 혹은 타교과의 내용과 어떻게 연계되어 있는지 알아보기 위해, 수학적 연결성 관점에서 분석하였다.

Ⅱ. 수학적 연결성(Mathematical connection)

1. 수학 내적 연결성과 수학 외적 연결성

수학적 연결성(mathematical connection)은 일반적으로 수학에 관한 내용이나 개념들이 서로 간에 수학적 지식의 계층 사이에서 내적으로 연결되어 있는 수학 내적 연결성과 타 학문의 내용과 수학과의 외적 연결 또는 외부인 현실 세계의 상황 및 맥락과 수학이 외적으로 연결되어 있는 수학 외적 연결성으로 구분할 수 있다.

수학 학습에 있어서의 수학적 연결성의 중요성은 미국 수학교사협의회인 National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]의 여러 출판물들(1989, 2000)에서 제시되어 왔다. 먼저 1989년에 NCTM이 발표한 Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics에서는 4가지 규준인 문제해결(problem solving), 의사소통(communication), 추론(reasoning), 수학적 연결성(mathematical connection) 중에서 수학적 연결성을 통해, 학교수학에서의 중요한 목표는 수학 교과 내 연결, 수학과 타 교과와의 연결, 수학과 일상생활과의 연결이라고 주장하였다(양성현, 이환철, 2012). 각 학년의 수학적 연결성 규준의 목표를 살펴보면 다음과 같이 크게 두 가지로 요약 할 수 있다.

첫째, 수학 내 다른 개념과 내용들 사이의 관계를 인식하고, 다양한 표상을 서로 관련지을 수 있으며, 수학을 통합된 전체로 볼 수 있어야 한다.

둘째, 다른 교과의 교육과정 영역이나 일상생활에서 수학을 사용할 수 있고, 타 학문 분야의 문제를 해결하기 위해 수학적 사고와 모델을 적용 할 수 있어야 한다(NCTM, 1989).

따라서 각 학년에서 수학 내적 연결성과 수학 외적 연결성 모두를 중시하며, 학생들에게 수학적 연결성을 경험할 수 있는 기회를 제공하는 것이 중요하다는 것을 강조하고 있음을 알 수 있다.

NCTM(2000)의 Principles and Standards for School Mathematics에서도 5가지의 과정규준인 문제해결(problem solving), 추론과 증명(reasoning and proof), 의사소통(communication), 연결성(connections), 표현(representation) 중에서 연결성을 통해 수학 학습에서의 수학적 연결성의 중요성을 언급하였다. NCTM(2000)에서 제시한 연결성 규준은 다음과 같다.

첫째, 수학적 아이디어 사이의 연결성을 인식하고 활용할 수 있다.

둘째, 수학적 아이디어들이 어떻게 상호 연결되고 서로를 기반으로 구축되어 일관성 있는 전체를 만들어내는지 이해할 수 있다.

셋째, 수학 이외의 문맥에서 수학을 인식하고 적용할 수 있다(p. 64).

NCTM(2000)에 따르면, 학생들은 수학적 주제 또는 내용 간의 풍부한 상호작용 속에서, 수학을 다른 교과에 관련짓는 맥락에서, 그리고 그들 자신의 흥미와 경험 안에서 수학적 연결성을 이해할 수 있다. 이렇게 학생들이 수학적 사고 또는 아이디어를 연결할 수 있을 때, 그들의 이해는 더 깊어지고 더 오래 지속되며, 수학의 유용성에 대해서도 배울 수 있다(p. 64). 이처럼 수학적 연결성은 학생들의 수학 학습에 있어서 중요한 목표이자 수학에 대한 깊은 이해를 도와주는 수단이 되기도 한다.

그렇다면 우리나라 수학과 교육과정에서 수학적 연결성은 어떻게 나타나 있는지 살펴보자. 2015 개

정 수학과 교육과정의 목적은 학생들이 학습한 수학이 고등 수학뿐만 아니라 타교과 학습의 기초가 되며, 더 나아가 창의적인 융합 역량을 갖춘 인재로 성장할 수 있는 기반을 제공하는 것이다(교육부, 2015, p. 3). 이를 위해 학생들은 수학의 지식과 기능의 습득 이외에 문제 해결, 추론, 창의·융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천이라는 6가지 수학 교과 역량을 길러야 한다. 이 중에서 창의·융합 역량은 “수학의 지식과 기능을 토대로 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출하고 정교화하며, 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 수학과 연결·융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하는 능력”(교육부, 2015, p. 4)을 말하는데, 이는 바로 수학 내적 그리고 외적 연결성과 연계된다. 따라서 수학적 연결성은 학생들이 반드시 길러야하는 필수 역량과 밀접한 관계가 있다는 것을 알 수 있다.

다음 장에서는 도수밀도 개념을 수학적 연결성 측면에서 수학 내적 연결성과 수학 외적 연결성으로 나누어 분석하여 수학 내용 학습에 대한 시사점을 찾아보고자 한다.

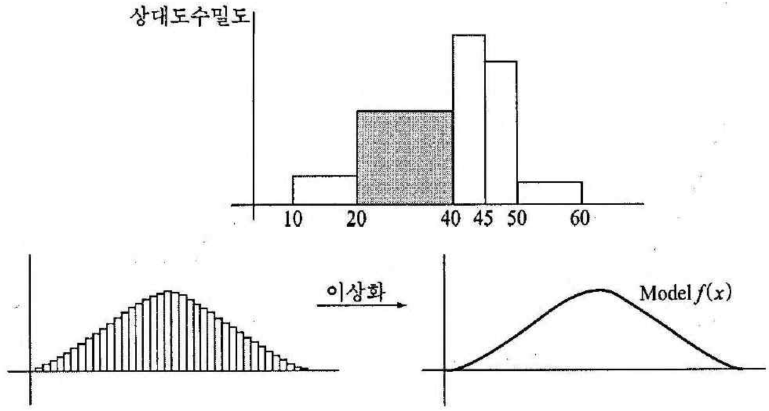
Ⅲ. 도수밀도(Frequency density)의 수학적 연결성

1. 도수밀도의 수학 내적 연결성

확률적 모델링은 수학적 확률과 통계적 확률을 기본으로 한 확률밀도함수를 이용하여 각종 현상에 대한 최적의 모델을 착상하고 새로운 관점과 시선으로 자연현상과 실세계 또는 가상공간의 자료를 분석하여 이해하고자 하는 노력의 한 일환으로 통계학의 핵심 내용이다. 그러나 연속확률변수, 확률밀도함수, 정규분포 등의 중요한 개념을 포함한 고등학교 확률과 통계 영역의 확률분포 단원은 학생들(박영희, 2002; 윤용식, 이광상, 2019; 황석근, 윤정호, 2011) 뿐만 아니라 예비 수학교사들도 어려워하며, 제대로 이해하지 못하고 오개념을 가지고 있는 경우가 있다(윤용식, 이광상, 2019; 최지선, 윤용식, 황혜정, 2014; 허남구, 강향임, 2015). 이러한 개념 이해의 어려움을 극복하기 위해 연속확률변수와 확률밀도 함수의 도입 방법 또는 지도 방안 개선을 위한 연구들이 많은데(박영희, 2002; 이영하, 남주현, 2005; 황석근, 윤정호, 2011; 허남구, 2019), 이 연구들을 바탕으로 연속확률분포 또는 확률밀도함수의 도입 방법을 다음과 같이 크게 3가지로 정리할 수 있다. 상대도수 히스토그램의 점근적인 의미로 도입하기, 밀도곡선을 이용해 도입하기, 마지막으로 상대도수밀도(밀도도수) 히스토그램을 이용해 도입하기다.

여기서 우리는 도수밀도와 상당히 비슷한 개념을 발견할 수 있는데, 바로 상대도수밀도(relative frequency density)이다. 상대도수밀도 또는 밀도도수라고도 부르는 이 개념은 $\frac{\text{상대도수}}{\text{계급의 크기}}$로 나타내며, 도수밀도와 다르게 계급의 크기로 도수(frequency) 대신 상대도수(relative frequency)를 나눈 것이다. 김응환과 이석훈(2015)의 ‘통계와 확률교육’을 살펴보면, 상대도수밀도를 이용해 확률밀도함수를 도입하는 절차는 다음과 같다([그림 Ⅲ-1]).

첫째, 연속형 자료를 도수분포표로 작성하고, 각 계급의 도수, 상대도수, 그리고 상대도수밀도를 구한다. 둘째, 상대도수밀도를 y축으로 하는 히스토그램인 상대도수밀도 히스토그램으로 확률분포를 나타낸다. 셋째, 자료의 관찰도수를 충분히 증가시키고 히스토그램의 계급의 폭을 아주 잘게 쪼개면, 상대도수밀도 히스토그램을 근사적으로 이상화시킨 부드러운 곡선의 형태가 나타나며, 이는 확률밀도함수의 그래프로 표현된다.



[그림 Ⅲ-1] 히스토그램을 추상화한 모델링(김응환, 이석훈, 2015, p. 131)

상대도수밀도를 이용한 확률밀도함수의 도입이 가지는 수학적 의미는 상대도수밀도 히스토그램의 y축이 상대도수가 아닌 상대도수밀도이므로 히스토그램에서 직사각형의 면적은 다음과 같이 상대도수가 된다는 것이다.

$$직사각형의\ 면적 = 상대도수밀도(높이) \times 계급의\ 크기(밑변) = 상대도수(확률)$$

이 때, 상대도수는 곧 확률이 되며 상대도수밀도 히스토그램에서 직사각형 면적의 전체 합은 1이 된다. 계급의 폭이 한없이 작아지면 계급의 크기가 0으로 수렴하고, 직사각형 모양은 매끄러운 곡선의 형태가 된다. 이 곡선 아래의 면적은 여전히 1이며 이 곡선을 나타내는 함수가 확률밀도함수이다. 따라서 상대도수밀도는 확률밀도함수 또는 연속확률분포 개념과 강한 수학 내적 연결성을 지닌다. 이를 이용해 확률밀도함수를 도입한다면,

> 연속확률변수의 확률밀도함수가 현실적인 히스토그램을 근사적으로 추상화한 모델로부터 탄생하였기에, 확률밀도함수로부터 확률을 구하려면 X 값에 대한 Y 값의 대응으로 확률을 얻는 것이 아니라, X 값의 구간에 대한 적분을 통하여 곡선 아래의 면적을 구하는 것이 확률을 구하는 자연스런 방법임을 깨닫게 된다. 그리고 상대도수의 합이 1이므로 확률밀도함수 곡선의 아래 면적의 합이 1이 되어야 함의 이유를 알 수가 있다. (김응환, 이석훈, 2015, p.132)

수학과 교육과정이나 수학 교과서에서 상대도수밀도라는 용어를 사용하지는 않지만 상대도수밀도 히스토그램을 이용한 확률밀도함수 또는 연속확률분포의 도입은 실제 2015 개정 교육과정을 반영한 교과서에도 확인할 수 있다(허남구, 2019). 그러나 중학교에서 히스토그램을 배우고 고등학교에서 확률밀도함수를 배우기 전까지 두 개념을 이어줄 중간단계가 없으며, 따라서 이영하와 남주현(2005)은 확률밀도함수 또는 연속확률분포를 배우기 위한 준비과정으로 히스토그램을 다룰 때 상대도수밀도 히스토그램도 가르쳐야 한다고 주장한다.

원래 상대도수는 표준화를 통하여 두 그룹을 비교하는데 사용된다. 그런데 한 그룹의 상대도수밀도

를 보는 것은 확률밀도함수를 유도하기 위한 전 단계로써 확률밀도함수의 아래 면적의 합이 1이 됨을 설명하기 위함이다. 따라서 확률밀도함수를 도입하기 위한 용도 이외에 상대도수밀도를 왜 배워야하는지, 어디에 쓰이는지, 학생들이 이해하도록 그 필요성을 제시하기는 쉽지 않다. 이에 본 연구자는 $도수밀도 = \dfrac{도수}{계급의 크기}$ 또한 확률밀도함수의 도입에 중요한 개념이 될 수 있으며, 도수에서 상대도수밀도로 생각과 관점을 확장하기 위한 전 단계로써 도수밀도의 도입이 필요하다고 생각한다.

이제 도수밀도의 도입이 필요한 경우에 대해 살펴보자. 우리는 지금까지 항상 계급 구간이 균등하게 나눠진 도수분포표를 바탕으로 히스토그램을 그려왔다. 하지만 실생활 중심의 통계 내용을 중시하는 최근 통계교육 흐름에 따라 계산하기 쉬운 인위적인 자료를 벗어나면 다양한 자료를 접할 수 있는데, 이 때 계급의 범위가 매우 넓어 균등 구간(등구간)으로 나타내기엔 무리인 자료가 많이 있다. 예를 들어 한국의 주식시장에 상장된 회사의 종목이 2000여종이 있다. 이들 주식의 한 주당 가격을 균등 구간으로 나눌 때 도수분포표를 만들어 x축에 놓을 경우, 500원부터 100만원까지 계급 구간도 매우 많아야 하고, 가격 차이가 많이 날 수 있기 때문에 하나의 히스토그램 안에 표현하기에는 균등한 계급 구간이 적절하지 않을 수 있다. 이러한 자료는 각 계급의 크기가 다른 비균등 구간(이구간)의 히스토그램으로 표현하면 편리하다. 그렇다면 그다음으로 우리는 이 비균등 구간의 히스토그램을 어떻게 해석해야 할까?

다음과 같은 예를 생각해 볼 수 있다. <표 Ⅲ-1>은 학생 30명의 등교 소요 시간에 대한 도수분포표이다. 이를 히스토그램으로 나타낸 [그림 Ⅲ-2]에서 볼 수 있듯이 도수가 0인 60분 이상 70분 미만 구간을 옆의 70분 이상 80분 미만 구간과 합쳐 하나의 넓은 구간으로 잡으면 그 넓은 구간의 도수가 다른 작은 구간인 50분 이상 60분 미만 구간의 도수보다 높아진다. 만약 이런 경우 일반적인 히스토그램을 해석하듯 비균등 구간의 히스토그램을 해석한다면 계급의 크기는 고려하지 않고 넓은 구간의 도수가 높다고 해석하게 되거나 정보의 누락으로 인해 자료를 왜곡해 해석할 가능성이 있다.

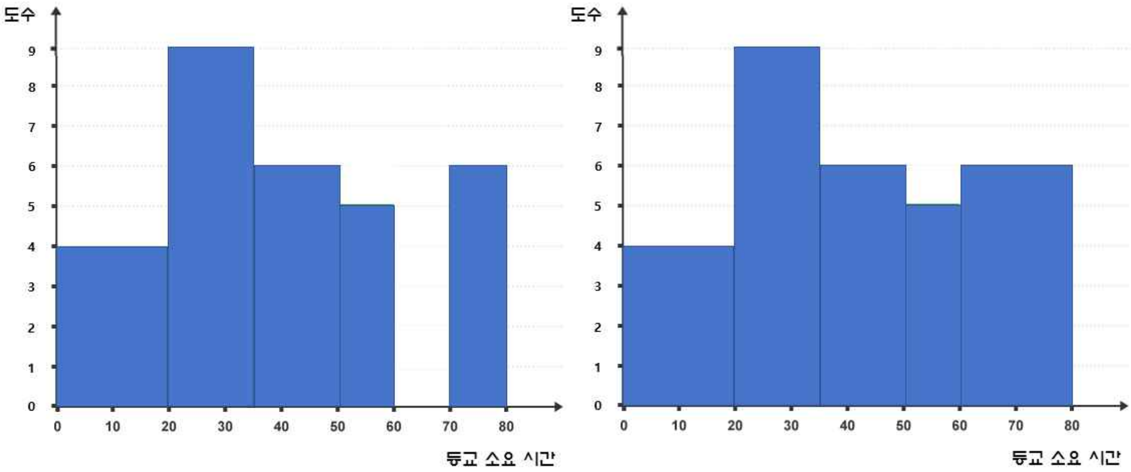
<표 Ⅲ-1> 등교 소요 시간의 도수분포표

등교 소요 시간	도수
20분 미만	4
20이상 35분 미만	9
35분 이상 50분 미만	6
50분 이상 60분 미만	5
60분 이상 70분 미만	0
70분 이상 80분 미만	6

이 때, <표 Ⅲ-2>에서처럼 $도수밀도 = \dfrac{도수}{계급의 크기}$ 를 구하여 [그림 Ⅲ-3]과 같이 도수밀도를 y축으로 하는 도수밀도 히스토그램을 그려 보면 y 축의 값이 구간당 도수를 나타내므로 자료 해석에 있어서 오류를 피할 수 있다.

일반적인 히스토그램은 균등구간이므로 비교할 때 직사각형의 높이로 비교 가능했는데, 비균등 구간의 히스토그램인 경우는 계급의 폭이 다르기 때문에 높이만으로 직접 비교가 어렵다. 즉, 계급의 구간이 다를 때에, 일반 히스토그램에서는 직사각형의 높이가 의미가 없고, 도수밀도 히스토그램을 사용할 경우에는 도수에 대한 비인 도수밀도가 그 자료의 맥락을 잘 설명하게 됨을 학생들이 느낄 수 있게 된다. 이와 같은 이유에서 확률밀도함수를 도입하기 위한 도구인 상대도수밀도를 배우기 전, 도수

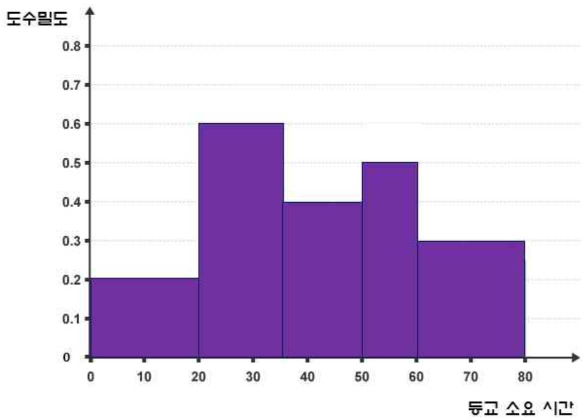
밀도를 먼저 도입하는 것이 자연스럽다고 할 수 있다.



[그림 Ⅲ-2] 비균등 구간 히스토그램

<표 Ⅲ-2> 도수밀도를 포함한 등교 소요 시간의 도수분포표

등교 소요 시간	도수	계급의 크기	도수밀도
20분 미만	4	20	0.2
20이상 35분 미만	9	15	0.6
35분 이상 50분 미만	6	15	0.4
50분 이상 60분 미만	5	10	0.5
60분 이상 80분 미만	6	20	0.3



[그림 Ⅲ-3] 도수밀도 히스토그램

앞서 언급한 바와 같이, 도수밀도와 유사한 용어인 상대도수밀도는 몇몇 고등학교 수학 교과서에서 확률밀도함수를 도입하기 위해 상대도수밀도를 이용한 히스토그램을 통해 제시한다. 하지만 이 경우

에도 상대도수밀도를 용어로 정의한 후 사용하지 않고 y축이 $\dfrac{\text{상대도수}}{\text{계급의 크기}}$인 히스토그램을 제시한다. 상대도수밀도에 관한 선행 연구는 크게 두 가지로 나뉘는데, 연속확률분포 또는 확률밀도함수를 도입하는 방법으로써 상대도수밀도 히스토그램을 제시하는 연구(김원경, 문소영, 변지영, 2006; 황석근, 윤정호, 2011; 허남구, 2019)와 중학교 통계 단원에서 상대도수밀도 히스토그램 도입을 제안하는 연구다(이영하, 남주현, 2005; 이영하, 최지안, 2008). 그러나 도수밀도는 우리나라에서 다루지 않는 개념이기 때문인지 도수밀도와 관련된 선행 연구는 찾을 수 없었다.

2. 도수밀도의 수학 외적 연결성

수학 내적 연결성 측면에서 확률밀도함수, 그리고 상대도수밀도와 밀접한 연계성을 가지는 도수밀도의 구체적인 도입 시기에 대해서 생각해보자. 상대도수밀도의 도입을 주장하는 연구의 경우, 상대도수밀도의 도입 시기는 히스토그램과 상대도수를 다루는 중학교 시기가 적절하다고 제안한다(이영하, 남주현, 2005). 그렇다면 상대도수밀도 이전에 도입하는 것이 자연스러운 도수밀도 역시 히스토그램을 지도할 때 같이 지도하는 것이 적절할까?

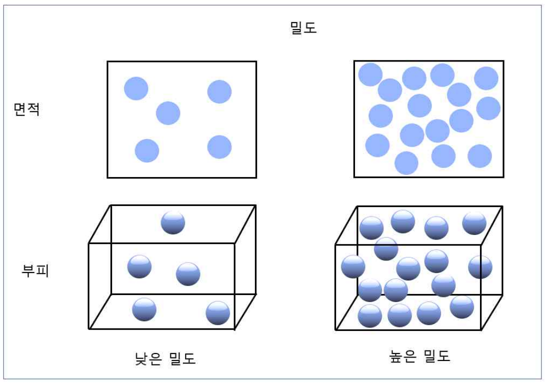
본 연구는 도수밀도 도입 시기에 있어서 타 교과와의 수학 외적 연결성에 주목했다. 도수밀도라는 용어는 도수(frequency)와 밀도(density)의 합성어이다. 우리나라 2015 개정 수학과 교육과정에 의하면 도수라는 용어는 중학교 1학년 확률과 통계 영역의 자료의 정리와 해석 단원에서 히스토그램, 상대도수와 함께 배운다. 그렇다면 밀도는 언제 배울까?

2015 개정 과학과 교육과정에 의하면 밀도라는 용어는 중학교 2학년 물질의 특성 단원에서 배운다(교육부, 2015). 밀도(density)란 어떤 물질의 질량을 부피로 나눈 값, 즉 단위부피당 질량으로 물질의 특성을 나타내는 양이며, 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$\text{밀도} = \frac{\text{질량}}{\text{부피}}$$

두 물질이 부피가 같은 경우 밀도가 큰 물질일수록 질량이 큰데, 예를 들면 은보다 밀도가 큰 금은 같은 부피의 은보다 질량이 크다. 따라서 학생들은 실험을 통해 일상적인 생활에서의 다양한 물질의 밀도를 구해보고, 물질마다 고유한 밀도를 갖는다는 속성을 배우며, 물질을 구별하기 위해 밀도를 사용하는 법을 익히게 된다.

또한 밀도는 어떤 물질에 대한 두 측정치인 질량과 부피 사이의 비라고 할 수 있다. 과학 이외의 일상생활에서 밀도라는 용어의 사용을 흔히 볼 수 있는데, 인구밀도(population density)가 그 예이다. 인구밀도는 단위면적당 인구의 조밀한 상태 정도를 말해주는 지표로써 면적과 인구수 사이의 비라고 할 수 있다. 이처럼 질량과 부피 사이의 관계가 아닌 면적과 인구수 사이의 관계에 밀도라는 용어를 사용하는 것은 두 측정치 사이의 비라는 측면에서 비롯된 것으로 보인다([그림 Ⅲ-4]). 따라서 도수밀도의 경우도 도수와 계급의 크기 사이의 비 또는 히스토그램의 직사각형의 폭과 높이(도수) 사이의 비라는 측면에서 단위계급당 도수로 과학의 밀도 용어와 수학 외적 연결성을 고려해 볼 수 있다.

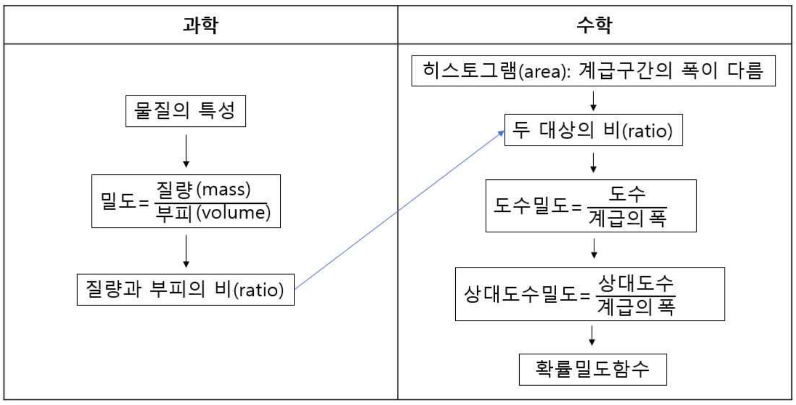


[그림 Ⅲ-4] 밀도의 차이

과학 교과에서 배운 밀도라는 개념은 자료를 비균등 구간 히스토그램으로 나타낼 때 정확한 표현과 해석을 하려면 어떻게 해야 하는가에 대한 아이디어를 얻게 해준다. 계급 구간이 동일하지 않는 경우는 단순한 도수의 크기로는 비교할 수 없다. 이때, 서로를 비교하기 위해서 과학 시간에 물질을 구별할 때 사용한 질량과 부피의 비로써의 밀도를 상기시키면서 수치적 자료에서도 밀도를 생각해보고 어떻게 밀도를 구할 것인지 구상해보는 경험을 하도록 한다. 이를 통해 학생들에게 확장된 밀도의 개념인 도수밀도라는 비를 도입하고, 단위계급당 도수로 나타내므로 비균등 구간이어도 일관적인 해석이 가능함을 배움으로써, 도수밀도라는 새로운 용어의 필요성을 느끼게 된다. 즉, 도수밀도의 도입은 수치적 자료를 처리하고 분석하는 경우에도 직사각형 막대에 비의 개념을 사용하여 비교를 할 수 있도록 새로운 안목과 아이디어를 제공하는 것이다.

과학에서의 밀도 개념과 도수밀도 개념의 연계된 학습에서의 주의할 점은 밀도에 대한 학생들의 오개념 발생이다. 학생들이 처음 밀도를 배울 때 밀도에 대한 다양한 오개념을 가지거나, 다른 관련 개념과 혼동을 일으킬 수 있기 때문에(곽상원, 최병순, 2012), 밀도를 처음 배우는 시기 보다는 밀도에 대한 충분한 학습을 한 후에 도수밀도와 연계하는 것이 바람직해 보인다.

마지막으로 앞서 살펴본 도수밀도의 확률밀도함수, 상대도수밀도와의 수학 내적 연결성과 과학의 밀도와의 수학 외적 연결성을 정리해보면 다음과 같은 [그림 Ⅲ-5]로 요약할 수 있다.



[그림 Ⅲ-5] 도수밀도의 수학적 연결성 개념도

Ⅳ. 도수밀도(Frequency density)의 지도 방안

지금까지 우리에게 생소했던 도수밀도라는 개념을 수학 내적 연결성과 수학 외적 연결성으로 구분하여 탐구하며 도수밀도의 도입 필요성을 제안했다. 본 장에서는 이를 지도하기 위한 방법으로 싱가포르의 수학 교과서에 제시된 도수밀도 개념의 도입을 소개하고자 한다.

2020년부터 시행되는 싱가포르의 새로운 수학과 교육과정이 최근 공표되었다(Curriculum Planning and Development Division, 2019). 본 연구에서 참고한 싱가포르 수학 교과서는 2013년부터 시행된 기존의 수학과 교육과정을 반영한 교과서이나, 히스토그램 내용이 포함된 Statistics and Probability 영역의 단원명의 변화(Data analysis에서 Data handling and analysis로 변화) 이외에 기존의 교육과정과 새로 개정된 교육과정 사이에 내용적 차이가 없어, 연구 자료로 참고하기에 무리가 없다고 판단하였다.

싱가포르의 중등 2학년 수학 교과서 Discovering Mathematics 2B에서의 도수밀도는 Data analysis 단원의 소단원 Histogram의 Class activity를 통해 소개되는데, 이는 다음 [그림 Ⅳ-1]에서 확인할 수 있다(Keung, 2017, p. 91-92). 이 교과서 내용을 번역해 설명하면 다음과 같다.

이 수업 활동의 목적은 비균등 구간의 히스토그램을 구성하는 것으로, 먼저 학생 40명의 과제를 완성하는데 걸리는 시간 자료를 균등 구간의 도수분포표로 제시하고 이를 히스토그램A로 나타냈다. 이때 학생 Siming이 히스토그램A에서 60-70 계급 구간과 80-90 계급 구간에 직사각형 막대가 없어 두 개의 빈 공간이 남는 것을 보고 마지막 4개 구간을 합쳐 새로운 히스토그램B를 그렸다.

그 다음 각 계급에 대한 직사각형의 넓이가 계급의 도수에 정비례한다는 것을 상기시키면서 다음과 같은 2개의 질문을 제시한다.

첫째, 히스토그램B를 관찰했을 때, $60 < t \leq 100$ 계급의 도수는 얼마인가?

둘째, 이 히스토그램은 이전 페이지의 도수분포표에 제시된 자료를 정확하게 반영했는가? 이 히스토그램은 무엇이 잘못되었다고 생각하는가?

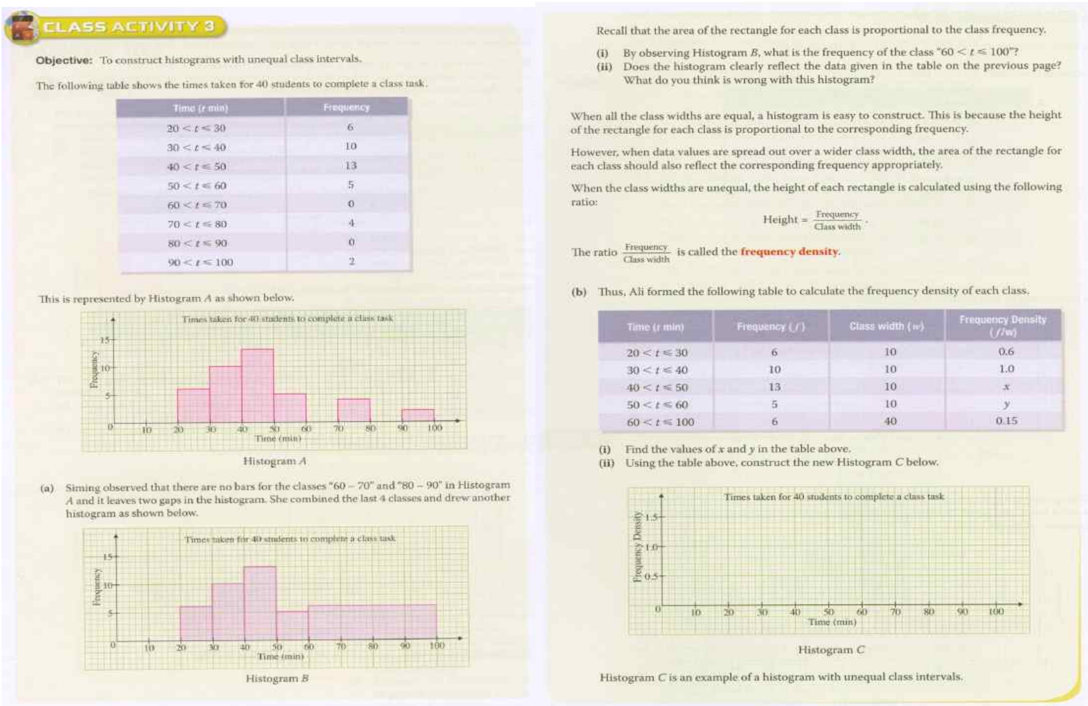
모든 계급의 폭(너비)이 같을 때 히스토그램을 구성하기 쉬운 이유는 각 계급에 대한 직사각형의 높이가 그에 대응하는 도수에 정비례하기 때문이라고 설명한다. 그러나 자료 값이 더 넓은 구간 폭에 걸쳐 퍼져있을 때, 각 계급에 대한 직사각형의 넓이 또한 그에 대응하는 도수를 적절하게 반영해야 한다고 설명한다.

계급의 폭들이 균등하지 않을 때, 각 직사각형의 높이를 다음 비를 이용해 계산하는 방법을 제시하며 도수밀도를 도입한다.

$$Height(\text{높이}) = \frac{Frequency(\text{도수})}{Class\,width(\text{계급의 크기})}$$

이 비(ratio) $\frac{Frequency(\text{도수})}{Class\,width(\text{계급의 크기})}$ 를 frequency density(도수밀도)라고 부른다.

그 다음 각 계급의 도수밀도를 계산하기 위해서 학생 Ali가 만든 표를 제시하며 특정 계급의 도수밀도를 구하는 문제를 제시하고, 표를 이용해 y축이 도수밀도인 새로운 히스토그램C를 구성하도록 한다. 히스토그램C가 비균등 계급을 가진 히스토그램의 하나의 예임을 언급하면서 활동은 마무리된다.



CLASS ACTIVITY 3

Objective: To construct histograms with unequal class intervals.

The following table shows the times taken for 40 students to complete a class task.

Time (t min)	Frequency
$20 < t \le 30$	6
$30 < t \le 40$	10
$40 < t \le 50$	13
$50 < t \le 60$	5
$60 < t \le 70$	0
$70 < t \le 80$	4
$80 < t \le 90$	0
$90 < t \le 100$	2

This is represented by Histogram *A* as shown below.

Histogram *A*

(a) Siming observed that there are no bars for the classes "60 – 70" and "80 – 90" in Histogram *A* and it leaves two gaps in the histogram. She combined the last 4 classes and drew another histogram as shown below.

Histogram *B*

Recall that the area of the rectangle for each class is proportional to the class frequency.

(i) By observing Histogram *B*, what is the frequency of the class "$60 < t \le 100$"?
(ii) Does the histogram clearly reflect the data given in the table on the previous page? What do you think is wrong with this histogram?

When all the class widths are equal, a histogram is easy to construct. This is because the height of the rectangle for each class is proportional to the corresponding frequency.

However, when data values are spread out over a wider class width, the area of the rectangle for each class should also reflect the corresponding frequency appropriately.

When the class widths are unequal, the height of each rectangle is calculated using the following ratio:

$$\text{Height} = \frac{\text{Frequency}}{\text{Class width}}.$$

The ratio $\frac{\text{Frequency}}{\text{Class width}}$ is called the **frequency density**.

(b) Thus, Ali formed the following table to calculate the frequency density of each class.

Time (t min)	Frequency (f)	Class width (w)	Frequency Density (f/w)
$20 < t \le 30$	6	10	0.6
$30 < t \le 40$	10	10	1.0
$40 < t \le 50$	13	10	x
$50 < t \le 60$	5	10	y
$60 < t \le 100$	6	40	0.15

(i) Find the values of x and y in the table above.
(ii) Using the table above, construct the new Histogram C below.

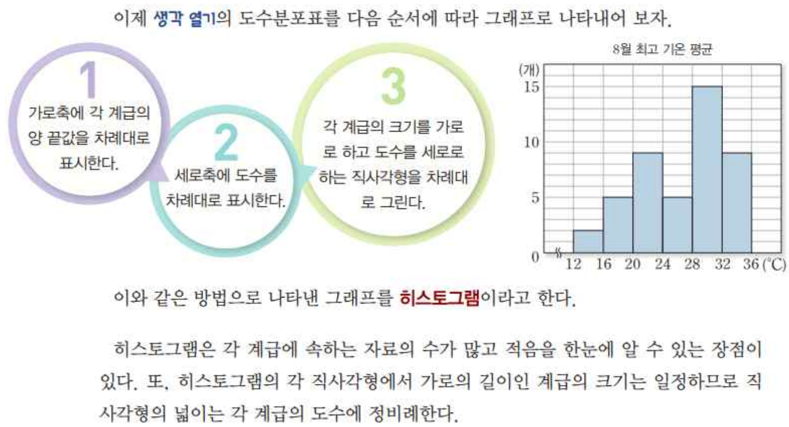
Histogram *C*

Histogram *C* is an example of a histogram with unequal class intervals.

[그림 Ⅳ-1] 싱가포르 중등 2학년 수학 교과서에 제시된 도수밀도(Keung, 2017, p. 91-92)

위에서 살펴본 바와 같이, 싱가포르 교과서에서는 히스토그램의 직사각형 막대의 넓이가 대응되는 계급의 도수에 정비례하는 것을 배우는데, 비균등 구간의 히스토그램에서도 이러한 성질의 일관성을 유지하기 위해 도수밀도를 도입한 것으로 보인다.

우리나라의 교과서에서도 히스토그램의 면적에 대한 언급을 찾을 수 있었는데, 천재교육 교과서에서 다음 [그림 Ⅳ-2]와 같이 제시하고 있다. 따라서 우리나라에서도 싱가포르 교과서의 도수밀도 도입 방법을 시도해 보는 것도 고려해 볼 만 하다.



이제 생각 열기의 도수분포표를 다음 순서에 따라 그래프로 나타내어 보자.

이와 같은 방법으로 나타낸 그래프를 **히스토그램**이라고 한다.

히스토그램은 각 계급에 속하는 자료의 수가 많고 적음을 한눈에 알 수 있는 장점이 있다. 또, 히스토그램의 각 직사각형에서 가로의 길이인 계급의 크기는 일정하므로 직사각형의 넓이는 각 계급의 도수에 정비례한다.

[그림 Ⅳ-2] 중1 수학 교과서의 히스토그램과 관련된 넓이 내용(천재교육, 2017, p. 252)

V. 결론

우리에겐 생소한 도수밀도라는 개념을 싱가포르 교과서와 영국의 중등 졸업 자격시험 항목에서 발견하면서 이 연구가 시작되었다. 본 연구를 통해 도수밀도의 수학적 연결성을 탐구하여 이 개념이 어떤 수학적 의미가 있는지 파악하고, 이를 도입할 지도 방안을 소개하고자 하였다.

도수밀도의 수학적 연결성을 수학 내적 연결성과 수학 외적 연결성으로 나누어 살펴본 결과, 먼저 수학 내적으로는 연속확률분포 단원의 연속확률변수, 확률밀도함수, 상대도수밀도와 연결되어 있었다. 도수밀도는 도수를 계급의 크기로 나눈 값이기 때문에 상대도수를 계급의 크기로 나눈 상대도수밀도와 밀접한 관련이 있다. 상대도수밀도를 이용한 상대도수밀도 히스토그램의 추상화 모델로부터 확률밀도함수가 탄생한 만큼, 도수밀도 또한 궁극적으로 확률밀도함수 개념의 도입에 징검다리 역할을 한다는 것을 알 수 있다. 또한 넓은 구간에 걸쳐 자료가 펼쳐져 있어, 균등 구간으로 나타내기에는 너무 많은 계급의 개수가 필요한 상황이나 맥락의 경우, 비균등 구간의 히스토그램으로 자료를 나타내는데, 이를 바르게 표현하고 해석하기 위해서 도수밀도가 필요함을 제시함으로써 상대도수밀도 보다 도수밀도의 도입이 선행되는 것이 더 자연스러운 것임을 알 수 있었다.

수학 외적으로는 과학 교과의 밀도 개념이 두 측정치인 질량과 부피 사이의 비라는 측면에서 도수와 계급의 크기 사이의 비인 도수밀도와 밀접한 관련이 있다는 것을 발견할 수 있었다. 도수밀도라는 생소한 용어의 도입 시, 도수밀도가 도수와 밀도의 합성어인 만큼, 과학 교과에서 배운 밀도라는 개념은 비균등 구간의 자료를 히스토그램으로 나타낼 때 정확한 표현과 해석을 하려면 어떻게 해야 하는가에 대한 아이디어를 얻게 해준다. 따라서 수학 내적으로는 히스토그램에서 도수밀도, 도수밀도에서 상대도수밀도, 상대도수밀도에서 확률밀도함수까지 일관성 있게 연계되는 개념 학습을 위해 도수밀도의 도입이 필요하며, 수학 외적으로는 과학의 밀도 개념과의 연계를 통해 도수밀도 개념의 도입을 고려해야 한다.

도수밀도의 도입 방법으로는 싱가포르의 중등 2학년 수학 교과서에 제시된 지도 내용을 소개하였다. 싱가포르 교과서에서는 균등 구간 히스토그램의 직사각형 면적이 각 대응하는 계급의 도수에 정비례한다는 성질을 이용하여 비균등 구간 히스토그램에서도 이 성질이 성립하도록 하기 위해서는 도수밀도의 도입이 필요함을 보였다. 우리나라 교과서에서도 히스토그램의 직사각형의 면적과 계급의 도수 사이의 정비례관계에 대해 언급하고 있어, 싱가포르 교과서의 지도 방안을 도입하는 것도 가능해 보인다.

본 연구를 진행하면서 예비교사들 역시 도수밀도에 대한 인식이 전무하다는 것을 알 수 있었다. 확률밀도함수와 함께 상대도수밀도 또는 상대도수밀도 히스토그램을 배웠음에도, 이와 상당히 유사한 도수밀도가 무엇일지 유추하지 못했다. 학생들에게 연속확률변수, 확률밀도함수 등과 같은 개념을 가르쳐야 하는 예비 수학교사의 전문성 향상을 위해서도 확률밀도함수의 이해에 필수적인 상대도수밀도의 전 단계인 도수밀도 개념에 대한 교육이 필요해 보인다. 따라서 본 연구는 도수밀도라는 개념을 소개하고, 도수밀도의 수학 내적, 외적 연결성을 탐구함으로써 도수밀도 도입의 필요성을 논한 논문으로써 의미가 있다.

참고 문헌

교육부. (2015). **2015 개정 과학과 교육과정**. 제2015-74호 [별책 9].

교육부. (2015). **2015 개정 수학과 교육과정**. 제2015-71호 [별책 8].

곽상원, 최병순. (2012). 중등학교 과학 교사의 밀도에 관한 내용교수지식 수준과 그에 따른 내용 표상의 구성 요소별 특징. **대한화학회지, 56**(1), 128-136.

김소민. (2019). 중학교 통계영역의 교육과정 개선을 위한 외국 교육과정의 탐색: 한국, 미국, 싱가포르, 일본의 학습 요소 중심으로. **한국학교수학회 논문집, 22**(4), 501-520.

김원경, 문소영, 변지영. (2006). 수학교사의 확률과 통계에 대한 지식과 신념. **수학교육, 45**(4), 381-406.

김응환, 이석훈. (2015). **통계와 확률 교육**. 서울: 경문사.

박영희. (2002). 연속확률변수 개념의 직관적 이해에 관한 고찰. **학교수학, 4**(4), 675-686.

양성현, 이환철. (2012). 수학 내적 연결성에 관한 형식적 측면 연구. **한국학교수학회 논문집, 15**(3), 395-410.

윤용식, 이광상. (2019). 함수의 연속과 연속확률변수 개념에 대한 교수·학습적 고찰. **한국수학사학회지, 32**(3), 135-155.

이영하, 남주현. (2005). 통계적 개념 발달에 관한 인식론적 고찰. **수학교육, 44**(3), 457-475.

이영하, 최지안. (2008). 중학교 1학년 통계단원에 나타난 분포개념에 관한 분석. **수학교육학연구, 18**(3), 407-434.

이준열, 최부림, 김동재, 이정례, 김상미, 원유미, 강해기, 김성철, 강순구. (2017). **중학교 수학 1 교과서**. 서울: 천재교육.

최지선, 윤용식, 황혜정. (2014). 확률변수 개념에 대한 예비교사의 이해. **학교수학, 16**(1), 19-37.

허남구. (2019). 연속확률분포의 정의와 도입 방법에 대한 2009개정 교육과정과 2015개정 교육과정의 비교 분석 연구. **수학교육, 58**(4), 531-543.

허남구, 강향임. (2015). 몬테카를로 시뮬레이션의 난수 생성에 관한 교사들의 이해에 관한 연구. **학교수학, 17**(2). 241-255.

황석근, 윤정호. (2011). 수학적 연결성을 고려한 연속확률분포단원의 지도방안 연구. **학교수학, 13**(3), 423-446.

Curriculum Planning and Development Division. (2019). *Mathematics syllabus secondary one to four, express course, normal (academic) course.* Ministry of Education, Singapore.

Keung, C. W. (2017). Discovering mathematics 2B (2nd Edition). Star Publishing Pte Ltd. Singapore.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA.: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, VA.: NCTM.

Office of Qualifications and Examinations Regulation. (2016). *GCSE Subject Level Conditions and Requirements for Statistics*. Department for Education, England.

Mathematical Connection and Teaching Methods of Frequency Density

Kim, Somin[1)]

Abstract

This study began with the discovery of the concept of frequency density in Singapore textbooks and in a set of subject contents of the UK's General Certificate of Secondary Education. To understand the mathematical meaning of frequency density, the mathematical connection of frequency density was considered in terms of mathematics internal connections and mathematics external connections. In addition, the teaching method of frequency density was introduced. In terms of mathematical internal connections, the connections among the probability density function, relative frequency density, and frequency density in high school statistics were examined. Regarding mathematical external connections, the connection with the density concept in middle school science was analyzed. Based on the mathematical connection, the study suggested the need to introduce the frequency density concept. For the teaching method of frequency density, the Singapore secondary mathematics textbook was introduced. The Singapore textbook introduces frequency density to correctly represent and accurately interpret data in histograms with unequal class intervals. Therefore, by introducing frequency density, Korea can consistently teach probability density function, relative frequency density, and frequency density, emphasizing the mathematical internal connections among them and considering the external connections with the science subject. Furthermore, as a teaching method of frequency density, we can consider the method provided in the Singapore textbook.

Key Words : Density, Frequency density, Relative frequency density, Probability density function, Statistics education, Singapore mathematics textbook

Received December 04, 2020
Revised December 12, 2020
Accepted December 14, 2020

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97B70, 97K70

1) Inha University (thals8410@gmail.com)