

# 고차 스위칭 미분 추정기의 설계 상수 최적화

## Optimizing Design Constants of Higher-Order Switching Differentiator

박 장 현\*★

Jang-Hyun Park\*★

### Abstract

A switching differentiator that can estimate the 1st-order time-derivative of a time-varying signal was proposed, and it is extended later to the higher-order switching differentiator(HOSD) that can observe higher-order time-derivatives of a time-varying signal in previous works. By using HOSD, higher-order time-derivatives can be estimated without peaking or chattering, and it has an asymptotic tracking performance. However, there exist many design constants to be determined in HOSD. In this paper, a method of reducing the number of design constants is proposed to solve the problem. Simulations reveal the effectiveness of the proposed method.

### 요 약

시변 신호의 1차 시간 미분을 추정하기 위해서 [1]에서 접근적 수렴 특성을 갖는 스위칭 미분기(switching differentiator)[1]가 제안되었으며, 그것의 고차 미분 추정으로 확장한 고차 스위칭 미분기(higher-order switching differentiator, HOSD)가 [2]에서 제안되었다. 하지만 HOSD의 경우  $n$ 차 미분까지 추정한다면 결정해야 할 상수들의 개수가  $2n$ 개이므로 HOSD를 설계하는 데 있어서 다수의 설계상수를 결정해야 한다는 어려움이 있다. 본 논문에서는 HOSD의 접근적 추종 성능은 유지하면서 결정해야 할 설계 상수들의 개수를 줄이는 방법과 다양한 모의실험으로 구해진 최적의 설계 상수 값들을 제시한다. 시변 함수들의 시간 도함수를 추정하는 모의실험을 통해서 제시된 방법의 유효성을 보인다.

*Key words : differentiator, higher-order switching differentiator, optimal design constants*

### 1. 서론

미분 추정기(derivative estimator) 혹은 미분기(differentiator)는 주어진 시변 신호의 시간 도함수를 추정하는 알고리즘으로서 제어기를 설계하는 데 있어서 가장 중요한 요소 중 하나이다. 미분 추정기가 사용되는 대표적인 예를 들면 PID제어기[3,

4], 출력 제한 제어기에서의 상태변수 관측기[5]-[7], 능동 잡음 상쇄(active disturbance rejection) [3, 5], 그리고 불확실한 비선형 시스템의 근사기가 불필요한 제어 알고리즘[8]-[11] 등이다.

시변 신호의 1차 미분을 접근으로 추종할 수 있는 스위칭 미분기(switching differentiator)가 [1]에

\* Dept. of Electrical and Control Engineering, Mokpo National University

★ Corresponding author

E-mail : [jhpark72@mokpo.ac.kr](mailto:jhpark72@mokpo.ac.kr) Tel : +81-61-450-2755

※ Acknowledgment

This Research was supported by Research Funds of Mokpo National University in 2018.

Manuscript received Sep. 3, 2020; revised Sep. 30, 2020; accepted Oct. 6, 2020.

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서 제안되었고, 그것을 고차의 경우로 확장한 고차 스위칭 미분기(higher-order switching differentiator, HOSD)가 [2]에서 제안되었다. 특히 [2]에서 제안된 HOSD는 비선형 계통의 출력 제한 제어기에서 널리 사용되는 고이득 관측기(high-gain observer, HGO)[5]와 고차 슬라이딩 모드 미분기(higher-order sliding-mode differentiator, HOSMD)[6]보다 더 좋은 동특성을 보인다는 것이 모의실험으로 확인되었다. HOSD는 점근적 추종 특성을 가지며 피킹(peaking)과 진동(chattering)이 없는 추정 신호를 생성한다[2]. 하지만 HOSD의 경우  $n$ 차 미분까지 추정한다면 결정해야 할 상수들의 개수가  $2n$ 개이므로 최적의 성능을 가지는 HOSD를 설계하는 데 있어서 어려움이 있다.

본 논문에서는 HOSD의 점근적 추종 성능을 유지하는데 요구되는 조건들은 충족시키면서, 설계 상수의 개수를  $2n$ 개에서 단 하나로 줄이는 방법을 제시한다. 또한, 다양한 모의실험을 최적의 설계 상수값들을 결정하고 모의실험 결과를 제시한다.

## II. HOSD 설계 상수 최적화

### 1. HOSD동특성식과 문제점

이후에는 시변신호  $a(t)$ 가  $b(t)$ 에 점근적으로 수렴함( $\lim_{t \rightarrow \infty} (a(t) - b(t)) = 0$ )을 줄여서  $a(t) \rightarrow b(t)$ 로 표기한다. 또한, 시변 함수  $a(t)$ 에 대해서  $a(t) \in \overline{\Omega}_T^L$ 는  $a(t)$ 가 어떤 시열  $T$ 에 대해서 구간 유계(bounded in the piecewise sense)이고 그 최대값이  $L$ 임을 표기한다. [2]에서는 다음과 같은 HOSD가 제안된 바 있다.

정리 1[2] : 어떤 시변 신호  $a(t)$ 가  $j=1,2,\dots,n$ 에 대해서  $a^{(j+1)} \in \overline{\Omega}_T^{L_j}$ 를 만족하고  $a^{(i+2)}$ 도 구간 유계라고 가정한다. 다음 동특성식을 고려하자.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_j &= k_j e_{\alpha_j} + \sigma_j \\ \dot{\sigma}_j &= L_j \operatorname{sgn}(e_{\alpha_j}) \end{aligned} \right\}, j=1,2,\dots,n \quad (1)$$

여기서  $e_{\alpha_j} = \sigma_{j-1} - \alpha_j$  ( $\sigma_0 = a$ )이다. 모든  $j=1,2,\dots,n$ 에 대해서 설계상수가  $k_j > 0$ ,  $L_j > L_j^*$ 를 만족하면  $\sigma_j(t) \rightarrow a^{(j)}$ 이다.

동특성식 (1)에서 알 수 있듯이 만약  $n$ 차 미분까지 추정한다면 동특성식의 차수는  $2n$ 이며, 결정해

야 할 설계상수들은  $k_1 \dots k_n$  그리고  $L_1 \dots L_n$ 으로써 총  $2n$ 개이다. 만약 각각의 설계상수들을 개별적으로 조정한다면 최적의 성능을 내기 위해서 많은 시행착오를 거쳐야 한다.

### 2. 설계상수 최적화

전 절에서 기술한 문제를 개선하기 위해서 다음과 같이 제안한다. 먼저 상수  $L^*$ 를 다음과 같이 정의한 다음

$$L^* = \max_j (L_1^*, L_2^*, \dots, L_n^*) \quad (2)$$

$n$ 개의 설계상수  $L_1 \dots L_n$ 을 개별적으로 서로 다르게 결정하지 않고 다음과 같이 정의되는  $L^*$ 보다 큰 동일한 상수  $L$ 로 설계한다.

$$L_1 = L_2 = \dots = L_n = L > L^* > 0 \quad (3)$$

또한 정리 1에 의하면 설계상수  $k_1 \dots k_n$ 에 부과된 조건은 양수이어야 한다는 것뿐이므로,  $k_j (j=1, \dots, n)$ 을 다음과 같이  $L$ 과 비례하는 상수로 설정한다.

$$k_j = \beta_j L, \quad j=1, \dots, n \quad (4)$$

이렇게 설계해도 정리 1의 설계상수 조건을 모두 만족한다. 따라서, HOSD의 원래 동특성식 (1)을 다음과 같이 재기술할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_j &= \beta_j L e_{\alpha_j} + \sigma_j \\ \dot{\sigma}_j &= L \operatorname{sgn}(e_{\alpha_j}) \end{aligned} \right\}, j=1,2,\dots,n \quad (5)$$

설계 상수  $\beta_j$ 를 결정하기 위해서 다양한 시변 신호에 대한 모의실험을 수행하였다. 모의실험을 통해서 확인된 것은  $j$ 가 커질수록  $\beta_j$ 를 일정 비율로 감소시켜야 초기 진동을 억제할 수 있고, 미분 추종 성능이 일관되게 유지된다는 사실이다. 다양한 신호에 대해서 고차 미분에 수렴하는 시간이 저차 미분의 그것보다 적절하게 늘어나도록 조율하며 최종적으로 결정된  $j=6$ 까지의 값들은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= 10, \beta_2 = 7, \beta_3 = 5.5, \beta_4 = 4.8 \\ \beta_5 &= 4.4, \beta_6 = 4.2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

이렇게  $\beta_j$ 값들을 정하면 대부분의 경우에 미분 추종 성능이 보장되었으며 과도상태 시간이 미분 차수가 올라갈수록 균등하게 증가되었다.

이상을 정리하면, 원래의 HOSD에서는 결정해야 할 상수가  $2n$ 개였지만, 본 부절에서 제시된 방법을 사용하면 오직  $L$  한 개로 줄어든다. 그리고 HOSD의 미분 추종 성능을 높이기 위해서는  $L$ 값만을 증가시키면서 적절한 값을 탐색하면 되므로 원래의  $2n$ 개의 설계상수를 결정해야 하는 경우보다 그 복잡도가 현저히 줄어들었다고 할 수 있다.

### III. 모의실험

본 장에서는 제안된 설계 상수를 사용한 추종 성능을 보이기 위해서 이후의 부절들에서 제시할 예제 시변 신호  $a(t)$ 의 5차 미분까지의( $n=5$ ) 추종 결과를 보인다. HOSD 동특성식 (5)와 상수들 (6)을 이용하여 다음 (7)과 같이 기술되는 10차의 동특성식을 모의실험에서 사용하였다. 식 (7)의  $\sigma_j(j=1, \dots, 5)$ 에 대해서 정리 1에 의해  $\sigma_1 \rightarrow a'(t)$ ,  $\sigma_2 \rightarrow a''(t)$ ,  $\sigma_3 \rightarrow a'''(t)$ ,  $\sigma_4 \rightarrow a^{(4)}(t)$ , 그리고  $\sigma_5 \rightarrow a^{(5)}(t)$ 가 보장된다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_1 &= 10L e_{\alpha_1} + \sigma_1, e_{\alpha_1} \equiv a(t) - \alpha_1 \\
 \dot{\sigma}_1 &= L \operatorname{sgn}(e_{\alpha_1}) \\
 \dot{\alpha}_2 &= 7L e_{\alpha_2} + \sigma_2, e_{\alpha_2} \equiv \sigma_1 - \alpha_2 \\
 \dot{\sigma}_2 &= L \operatorname{sgn}(e_{\alpha_2}) \\
 \dot{\alpha}_3 &= 5.5L e_{\alpha_3} + \sigma_3, e_{\alpha_3} \equiv \sigma_2 - \alpha_3 \\
 \dot{\sigma}_3 &= L \operatorname{sgn}(e_{\alpha_3}) \\
 \dot{\alpha}_4 &= 4.8L e_{\alpha_4} + \sigma_4, e_{\alpha_4} \equiv \sigma_3 - \alpha_4 \\
 \dot{\sigma}_4 &= L \operatorname{sgn}(e_{\alpha_4}) \\
 \dot{\alpha}_5 &= 4.4L e_{\alpha_5} + \sigma_5, e_{\alpha_5} \equiv \sigma_4 - \alpha_5 \\
 \dot{\sigma}_5 &= L \operatorname{sgn}(e_{\alpha_5})
 \end{aligned} \tag{7}$$

전술한 바와 같이 위의 식 (7)에서 보면 결정해야 할 설계상수는 오직  $L$  한 개다. 추종해야 할 시변 신호에 따라서  $L$ 값은 달라지게 된다.

#### 1. 첫 번째 예제

다음과 같은 시변신호를 고려한다.

$$a(t) = 0.5 \sin(0.5t) + 0.5 \cos t \tag{8}$$

그림 1에 HOSD (7)을 이용하여  $L=10$ 인 경우의 시간 미분 추정치들  $\sigma_j(j=1, \dots, 5)$ 을 도시하였다. 시변함수 (8)의 5차 도함수까지 잘 추종함을 알 수 있고 고차 미분의 수렴시간이 저차 미분의 경우와

비교하여 적절하게 증가함을 알 수 있다.

#### 2. 두 번째 예제

다음과 같은 시변 신호를 고려한다.

$$a(t) = 5t + \sin t + 0.1 \cos(2t) \tag{9}$$

이 예제는 첫 번째 것과 다르게 시간이 증가함에 따라서 발산한다는 특성이 있다. 하지만 도함수가 구간 유계여야 한다는 HOSD의 조건을 만족하므로 이 신호의 시간 미분들도 HOSD를 이용하여 추정할 수 있다. 그림 2에 HOSD (7)을 이용하여  $L=40$ 인 경우의 미분 추정값들  $\sigma_j(j=1, \dots, 5)$ 을 도시하

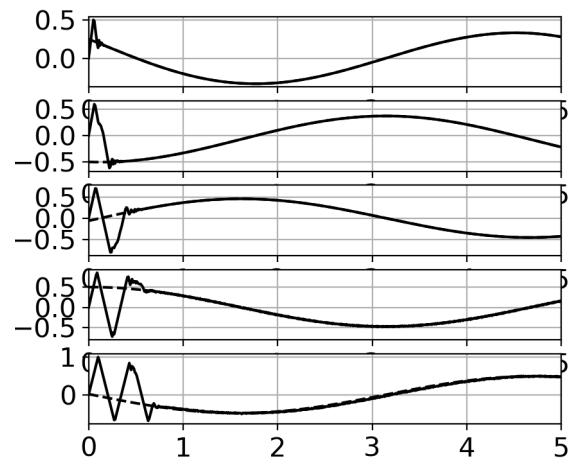


Fig. 1. Time-derivative estimations  $\sigma_j, j=1, \dots, 5$  (lines) in (7) of the time-varying signal (8) (dotted lines)  
그림 1. 시변신호 (8)의 시간 도함수들(점선)과 그 추정값들  $\sigma_j, j=1, \dots, 5$  (실선)

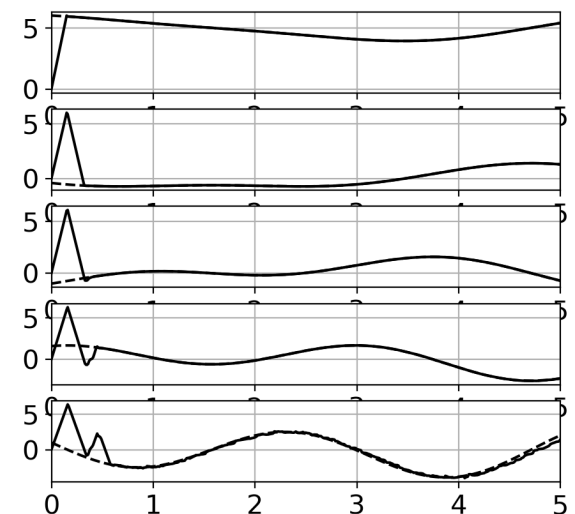


Fig. 2. Time-derivative estimations  $\sigma_j, j=1, \dots, 5$  (lines) in (7) of the time-varying signal (9) (dotted lines)  
그림 2. 시변신호 (9)의 시간도함수들(점선)과 그 추정값들  $\sigma_j, j=1, \dots, 5$  (실선)

였다. 이 예제의 경우에는 시변 함수 (9)가 시간에 따라 발산함에도 불구하고 5차 도함수까지 잘 추정함을 알 수 있다.

#### IV. 결론

본 논문에서는 HOSD의 상수들을 설계하는 데 있어서 다수의 설계상수들을 하나로 줄이고 다양한 모의실험을 통해 구해진 최적화된 설계상수들을 제시하였다. [2]에서 제시된 HOSD를 이용하여  $n$ 차 미분까지 추정하는 경우에 결정해야 할 설계상수의 개수는  $2n$ 개다. 본 논문에서는 설계상수들의 개수를 하나로 줄이고 적절한 상수 계수들을 제시하여 HOSD의 설계 효율을 극대화하였다. 그리고 모의실험을 통해서 HOSD와 제안된 설계 기법을 이용하여 예제로 주어진 시변 신호들의 시간 미분 추정 곡선들을 도시하고 그 성능을 보였다.

#### References

- [1] J.-H. Park, S.-H. Kim, and T.-S. Park, "Asymptotically convergent switching differentiator," *Int J Adapt Control Signal Process*, vol.33, pp. 557566, 2019. DOI: 10.1002/acs.2969
- [2] J.-H. Park, S.-H. Kim, and T.-S. Park, "Asymptotically Convergent Higher-Order Switching Differentiator," *Mathematics*, vol. 8, no.2, pp.185:1-17, 2020. DOI: 10.3390/math8020185
- [3] J. Han, "From PID to Active Disturbance Control," *IEEE Trans. Ind. Electron*, vol.56, pp. 900-906, 2009. DOI: 10.1109/TIE.2008.2011621
- [4] P. R. Belanger, P. Dobrovolny, A. Helmy, and X. Zhang, "Estimation of Angular Velocity and Acceleration from Shaft-Encoder Measurements," *Int. J. Robot. Res.*, vol.17, pp.1225-1233, 1998. DOI: 10.1109/ROBOT.1992.220228
- [5] H. K. Khalil, "High-Gain Observers in Feedback Control: Application to Permanent Magnet Synchronous Motors," *IEEE Control Syst. Mag.*, vol.37, pp.25-41, 2017. DOI: 10.1109/MCS.2017.2674438
- [6] A. Levant, "Non-homogeneous finite-time-convergent differentiator," *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 8399-8404, 2009. DOI: 10.1109/CDC.2009.5400277
- [7] J. F. Carneiro and F. G. D. Almeida, "On the Influence of Velocity and Acceleration Estimators on a Servopneumatic System Behaviour," *IEEE Access*, vol.4, pp.6541-6553, 2016. DOI: 10.1109/ACCESS.2016.2607284
- [8] J.-H. Park, S.-H. Kim, and T.-S. Park, "Output-Feedback Adaptive Neural Controller for Uncertain Pure-Feedback Nonlinear Systems Using a High-Order Sliding Mode Observer," *IEEE Trans. Neural Network and Learning System*, vol.30, no.5, pp.1596-1601, 2019. DOI: 10.1109/TNNLS.2018.2861942
- [9] J.-H. Park, S.-H. Kim, and T.-S. Park, "Approximation-Free State-Feedback Backstepping Controller for Uncertain Pure-Feedback Nonautonomous Nonlinear Systems Based on Time-Derivative Estimator," *IEEE Access*, vol.7, pp.126634-126641, 2019. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2938595
- [10] J.-H. Park, T.-S. Park, and S.-H. Kim, "Approximation-Free Output-Feedback Non-Backstepping Controller for Uncertain SISO Nonautonomous Nonlinear Pure-Feedback Systems," *Mathematics*, vol.7, pp.456:1-11, 2019. DOI: 10.3390/math7050456
- [11] J.-H. Park, S.-H. Kim, and T.-S. Park, "Approximation-Free Output-Feedback Control of Uncertain Nonlinear Systems Using Higher-Order Sliding Mode Observer," *J. Dynamics Systems, Measurement, and Control*, vol.140, no.12, pp.124502:1-5, 2018. DOI: 10.1115/1.4040664

#### BIOGRAPHY

##### Jang-Hyun Park (Member)



1995 : BS degree in Electrical Engineering, Korea University.  
 1997 : MS degree in Electrical Engineering, Korea University.  
 2002 : PhD degree in Electrical Engineering, Korea University.  
 2003~ : Professor, Dept. of Electrical and Control Engineering, Mokpo National University