韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2020.34.4.587
제 34집 제 4호, 2020. 12. 587-603

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 34, No. 4, Dec. 2020. 587-603

# 수학체험교구 개발 모형 및 이를 적용한 최대공약수 교구 개발 연구

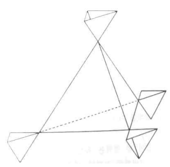
서 보 억 (충남대학교, 교수)

본 연구는 수학교육에서 중요한 수단이자 교육적 도구인 수학체험교구를 체계적으로 개발하기 위한 기초연구이다. 최근 활동이론(action theory)에 근거한 수학교육이 강조되면서 다양한 수학체험교구가 개발되고 교육현장에서 다양한 비교과활동을 통해 활용되고 있지만, 실제 수학수업에서 개념을 설명하기 위한 도구로 수학체험교구가 개발되어 활용되는 사례는 부족한 실정이다. 특히, 수학과 교육과정에 부합되고, 수학적 근거가 명확한 체험교구는 체계적으로 개발되지 못하고 있다. 이에 본 연구에서는 수학체험교구를 개발하기 위한 체계적인 방법으로 체험교구 개발 모형을 제안한다. 또한 제안한 개발 모형에 따라 최대공약수 체험교구를 개발하였다. 본 연구를 통해 제안된 모형과 실제 구현된 체험교구를 통해 다양한 수학체험교구의 개발이 실제적으로 실행되고, 수학적 기초에 근거한 수학체험교구가 다양하게 개발될 것으로 기대된다.

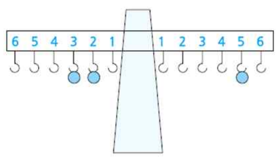
## Ⅰ. 서론

Polya(1954)는 개연추론을 강조하면서 유추를 강조하였다. Polya는 입체기하에서 유추 및 귀납적 사고의 구체적 사례로 '일반적 위치에 있는 다섯 평면은 공간을 몇 개의 부분으로 분할하는가?'와 같은 문제를 제기하였다. 이 문제를 해결하기 위해 Polya는 '네 평면은 공간을 몇 부분으로 분할하는가?'라는 간단한 문제를 제기하면서, 유추적 사고의 사용을 권고하고 있다. 그런데, 여기서 유추적 사고의 출발점으로 '공간에서의 네 평면'이라는 문제를 '평면에서 세 직선'으로 대체하였고, 대체된 문제 해결을 위해 시각적 수학체험교구를 사용하고 있다.

또한 Dienes(1964)는 'building up mathematics'를 기반으로 한 이론에서 개념형성을 위한 수학학습에서 수학교구의 활용을 강조하였다. 특히 수학적 구조를 내포한 학습장면에서 다양한 교구를 활용한 놀이로 조직된 수학학습을 강조하고 있는데, 실제적 예로 분배법칙의 이해를 위한 구조적인 활동을 위해 [그림 Ⅰ-2]와 같은 '수 지렛대'를 사용하였다.



[그림 Ⅰ-1] 교구1




[그림 Ⅰ-2] 교구2

Bruner(1960)는 수학의 구조를 강조한 '교육의 과정'이라는 책의 맨 마지막 단원에서 수업교구의 활용을 언급하고 있는데, 학습에서 적절한 교구를 사용하면 학습의 효과를 극대화시킬 수 있다고 주장한다. 실제로 Bruner

* 접수일(2020년 11월 25일), 심사(수정)일(2020년 12월 22일), 게재확정일(2020년 12월 22일)
* ZDM분류 : U63
* MSC2000분류 : 97U60
* 주제어 : 수학 교구, 수학체험교구, 최대공약수, 교구 개발 모형

는 교구 자체의 사용이 목적이 될 수 없다는 것을 강조하며, 교구의 사용이 수학적 구조를 제시하는 목적으로 사용될 때 그 가치를 인정받을 수 있다고 생각하였다. 그리고 수학수업에 타당한 교구는 일정한 조건이 구비되어야 하며, 특히 이 교구를 사용하는 교사가 교구에 포함된 구조를 정확하게 인식하고 있느냐가 매우 중요한 요소가 됨을 강조하였다. 또한, van Hiele(1999)는 '놀이로 배우는 기하수업'에서 모자이크와 같은 교구를 시각적 측면에서 활용하는 것은 배경지식과 다양한 도형을 포함해 그것들의 성질을 표현하는 사고를 풍부하게 해 준다고 판단하였다. 같은 맥락에서 van Hiele은 기하를 배울 때 놀이로 시작한다는 사실을 회상하였고, 교구를 통한 놀이나 활동과 같은 게임에 참여시키기를 권장하고 있다. 이를 통해 수학에서 성공적인 학습 성과를 기대하고 있다.

이처럼 다양한 배경의 수학교육자와 수학자는 수학학습에서 교구의 활용을 중요한 가치로 여기고 있다. 이러한 이유는 다양하겠지만, 교구의 사용 그 자체만으로 수학학습에 학생들의 흥미를 높일 수 있을 뿐 아니라, 수학적 구조에 대한 본질적 이해가 가능하기 때문일 것이다. 이러한 이유로 인공지능 및 컴퓨터 공학이 발달하는 이 시점에서도 점진적으로 교구를 활용한 학습의 중요성이 점점 확대되고 있다(Saidu & Bunyamin, 2016).

하지만 교구 활용의 중요성에 비해서 실제로 수학 수업시간에 활용 가능한 교구의 종류는 부족하고, 실제로 수업시간에 활용하는 것에는 다소 소극적인 것이 현실이다. 실제로 교구의 중요성을 언급한 많은 연구가 있음에도 불구하고, 수학수업에서 교구의 활용은 적극적이지 못하다고 지적한다(이경화, 정혜윤, 강완, 안병곤, 백도현, 2017). 그 원인은 다양하지만, 세 가지 측면이 제기될 수 있다. 하나는 교구가 실제 수업에 사용될 수 있기 위해서는 학교수학과의 연결성이 강해야하지만 현재 소개된 많은 교구들이 그렇지 못하다는 점이다. 두 번째는 흥미 중심 혹은 만들기 활동에 초점을 둔 나머지 수학적 구조를 설명할 수 있는 논리적 근거가 충분하지 못하거나 지나치게 어려워 이해하지 못하고 있다는 점이다. 마지막으로 수학교구를 개발하기 위한 절차나 과정이 명확하게 설정되어져 있지 않다는 점이다. 이로 인해 수학교구의 정체성이 모호한 상황이 발생하고 있다.

이에 본 연구에서는 이러한 문제점을 해결할 수 있는 구체적인 체험교구의 개발 방법과 실제적 적용을 연구의 목적으로 한다. 이러한 연구목적을 달성하기 위해 다음과 같은 연구내용을 설정하였다. 첫째, 수학체험교구 개발 과정에 대한 구체적인 절차를 담은 개발 모형을 도출한다. 둘째, 모형에 제시한 절차에 따라 구체적인 체험교구를 수학적 근거에 따라 학교수학과 연계하여 개발한다.

일반적으로 표준국어대사전을 보면, 교구(教具)는 '학습을 구체화·직관화하고 효과적으로 지도하기 위하여 사용하는 도구'(국립국어원, 2020)라고 정의하며 구체적 사례로 칠판, 괘도, 표본, 모형 따위를 제시하고 있다. 사전적 정의를 통해 볼 때, 교구는 매우 광의의 개념이다. 하지만 본 연구에서 다루는 교구는 수학적 구조가 내재되어 있고, 손으로 직접 조작할 수 있는 물리적 실체를 가진 것으로 제한하였다는 측면에서 약간의 차이가 있으므로, 광의의 교구와 구분하기 위해 필요에 따라서는 체험교구라는 용어를 사용하기로 한다.

## Ⅱ. 연구의 배경

### 1. 수학과 교육과정에서 교구

교육부는 2015년 '제2차 수학교육종합계획'을 발표하면서, 수학교구를 이용한 수학수업의 중요성을 언급하였고, 이에 대한 지원의 필요성을 중요한 추진 과제로 제시하였다. 또한 이러한 사업의 일환으로 전국적으로 수학문화관 및 수학박물관이 다양하게 설립되고 있다.

그 뿐 아니라, 수학과 교육과정을 통해서도 이러한 교구의 중요성을 몇 가지 측면에서 엿볼 수 있다. 첫째, 6차 교육과정에서 제시한 내용이다. 6차 교육과정에서는 교구라는 언급은 없지만, 처음으로 교육기자재로 계산기

와 컴퓨터를 언급하고 있다. 실제로 교수·학습 방법에서 '수학과 교수・학습 과정에서 복잡한 계산이나 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기나 컴퓨터를 활용할 수도 있다.'라고 구체적으로 제시하고 있다(교육부, 1992). 둘째, 7차 교육과정에서 제시한 내용이다. 7차 교육과정에서는 처음으로 교육기자재, 구체적 조작물을 언급하면서 교구에 대해 명시하고 있다. 실제로 교수·학습 방법에서 도형 지도의 유의할 점 중의 하나로 '직관에 의한 관찰이나 여러 가지 구체적 조작물 및 적절한 컴퓨터 프로그램을 활용하여 도형의 기초적인 성질을 알고 도형의 아름다움을 찾아볼 수 있도록 배려하며, 추론은 간단한 소재로부터 복합적인 소재로 발전시켜 연역적 추론이 통합적으로 완성되도록 유의한다.'라고 제시하였고, 또한 '국민 공통 기본 교육 기간의 수학 교수・학습 과정에서 교육기자재의 활용은 다음 사항에 유의한다.'고 제시하면서 '교수・학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육기자재를 활용하여 학습의 효과를 높이도록 한다. 교수•학습 과정에서 계산 능력 배양이 목표인 영역을 제외하고는 복잡한 계산이나 수학적 개념・원리・법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용하도록 한다.'를 구체적으로 제시하고 있다(교육부, 1997). 셋째, 2007개정 교육과정에서 제시한 내용이다. 처음으로 교구라는 용어를 교육과정에서 사용하고 있다. 구체적으로 교수·학습방법에서 '계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학적 개념・원리・법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 확보하여 활용할 수 있다.'라고 하였고, 평가에서는 '수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.'를 구체적으로 제시하고 있다(교육인적자원부, 2006). 넷째, 현재 교육과정인 2015개정 교육과정(교육부, 2015)에서 제시한 내용이다. 6대 역량 중의 하나로 정보처리 역량을 언급하고 있다. 여기서 6대 역량은 문제 해결, 추론, 창의·융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천 역량인데, 정보 처리 역량은 '다양한 자료와 정보를 수집, 정리, 분석, 활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택, 이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력이다.'을 의미한다. 더불어 교구와 관련된 내용으로 교수학습방법 및 유의사항으로 '공학적 도구나 다양한 교구를 이용하여 합동과 닮음의 의미를 이해하게 한다.', '공학적 도구나 다양한 교구를 이용하여 도형을 그리거나 만들어보는 활동을 통해 도형의 성질을 추론하고 토론할 수 있게 한다.'가 있고, 교수·학습방법으로 '매체 및 도구 활용 학습은 학생의 수준과 학습 내용에 적합한 매체와 도구를 활용하여 흥미를 유발하고 학습의 효율성과 다양성을 도모하는 교수·학습 방법으로, 시청각 자료, 멀티미디어나 인터넷 등의 컴퓨터 활용 매체와 교구, 계산기, 교육용 소프트웨어 등의 도구를 이용한다.', 와 '교수·학습 과정에서 적절한 교구를 활용한 조작 및 탐구 활동을 통해 수학의 개념과 원리를 이해하도록 한다.'가 있으며, 평가방법으로 '평가 내용이나 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있게 한다.'를 구체적으로 제시하고 있다.

이처럼, 교육과정이 점차 변천함에 따라 교육기자재, 교구활용의 필요성과 활용의 구체성에 관한 진술이 점차 명확해지고 강조되고 있음을 알 수 있다. 이는 수학수업에서 교구가 활발하게 이용되어야 하는 것을 시사하는 것과 더불어, 교구가 학교 수학교육의 중요한 지향점 중의 하나임을 확인할 수 있다.

### 2. 선행 연구를 통해 본 개발 모형

김기원, 도혜경(2010)의 금강비 측정 교구 개발 및 체험수학활동에 대한 연구에서 교구 개발의 절차를 추출하면 다음 과정으로 요약할 수 있다. 첫째, 금강 직사각형 작도하기를 통한 수학적 탐색, 둘째, 금강자 제작하기를 통한 제작활동, 셋째, 증명하기를 통한 수학적 탐색과 교구와의 수학적 연결고리 맺기, 넷째, 금강비 측정하기 체험활동을 통한 실제 적용과 그 결과 분석이다. 이를 그림으로 표현하면 [그림 Ⅱ-1]과 같다.

교구개발과 관련된 개발과정을 구체적으로 제시한 표준화된 연구가 존재하지 않기 때문에 유사한 개발 방법론에 대한 연구를 고찰하였다. 대표적으로 프로토타입 개발 방법과 관련된 연구(Tripp, Bichelmeyer, 1990)가 있

다. 이 연구는 수업을 위한 인쇄된 최종 결과물의 형태를 개발하기 위해 수행된 연구인데, 기존 개발 체제가 분석, 설계, 개발, 실행, 평가의 단계를 개선하여 보완하였다. 구체적인 절차로는 요구 및 내용에 대한 분석, 목표에 대한 설정, 프로토타입의 설계, 프로토타입의 활용, 설치 및 유지 단계를 제시하였다. 또한 유사한 맥락에서 프로토타입의 개발과 수정 및 보완이 선형적으로 일어나지 않고, 비선형적으로 동시에 중첩되어 발생한다는 입장을 제안한 연구가 있다(Jones, Richey, 2000)

| 수학적 탐색 | 교구제작 | 교구와 수학의 연결 | 적용 |
|---|---|---|---|

[그림 II-1] 교구 개발 절차 예시

이러한 프로토타입 개발 방법론을 보다 발전시킨 연구로 임철일, 김민강, 김윤정(2005)의 연구가 있는데, 이 연구에서 프로토타입 교수학적 자료에 대한 개발 절차를 구체적으로 제안하고 있다. 개발 절차를 보면, 분석, 설계, 프로토타입 개발, 개발, 실행 및 평가 다섯 단계로 구분한다([그림 II-2] 참조). 각 단계는 다음과 같이 정리할 수 있다. 첫째, 분석 단계이다. 이 단계에서는 학습자의 요구분석, 과제분석, 학습자분석이 실시된다. 물론 분석 단계에서 시작된 자료의 수집 및 정리, 분석 활동은 이후 전체 과정에서 지속적으로 진행될 수 있다. 둘째, 설계 단계이다. 전 단계에서 분석 활동과 동시에 개발하고자 하는 자료의 설계를 시작하는 단계이다. 셋째, 프로토타입의 개발 및 평가 단계이다. 구조에 대한 기본적인 설계가 완성된 후, 구체적인 자료의 개발 범위를 결정하고, 이를 기반으로 개발될 자료의 타당성을 검토할 수 있도록 전형적인 자료를 제작한다. 동시에 개발된 프로토타입의 평가 등을 통해 수정을 진행한다. 넷째, 개발 단계이다. 프로토타입의 개발 단계부터 부분적으로 시작되면 최종적인 결과물을 제작한다. 다섯째, 실행 및 평가 단계이다. 개발이 완료된 자료가 학습자에게 적절한지 적용하고 평가를 실시한다.

| 분석 | 설계 | 프로토타입 개발 | 개발 | 실행 및 평가 |
|---|---|---|---|---|

[그림 II-2] 학습자료 개발 모형

### 3. 교구의 교수학적 원리

수학 교구를 개발하기 위해 중요한 것 중의 하나는 수학수업에서 어떤 목적으로 사용되느냐이다. 이에 대한 연구의 결과로 교구의 교수학적 원리가 있다. 수학교구의 교수학적 원리에 대해 이경화, 정혜윤, 강완, 안병곤, 백도현(2017)은 ‘활동의 원리’, ‘도구의 원리’, ‘학습의 원리’를 제시하였다. 첫째, 활동의 원리이다. 수학의 효과적인 학습을 위해서는 학습자에게 추상적이고 기호적인 것에 앞서 구체적이고 물리적 활동의 기회가 선행되어야 한다는 원리이다. 그런데 물리적 활동의 기회가 주어지기 위해서는 이러한 활동을 진행할 수 있는 실제적인 맥락이 필요한데, 이 실제적인 맥락의 수단이 체험교구이다. 둘째, 교구의 원리이다. 수업에서 체험교구가 사용되었다고 해서 학생들이 활동에 참여한 것이라고 할 수는 없다. 왜냐하면, 어떤 다양한 구체물이 제시되더라도 그것을 받아들이는 교사, 학생의 태도에 의해 그 결과가 완전히 달라질 수 있기 때문이다. 즉, 체험교구가 그 목적에 맞게 효율적으로 사용되어질 때, 비로소 그 교육적 효과를 드러낼 수 있다. 따라서 실제 수업상황에서 학습자가 체험교구의 필요성을 깨닫고, 체험교구를 사용하여 학습을 실제적으로 진행하여 수학의 이해라는 목적을 달성하는 것, 수학학습의 목적을 달성하기 위해 체험교구가 수단으로 명확히 사용되어야 한다는 원리이다. 체험교구가 수학학습에 효과적으로 사용되었는지를 결정하는 것은 체험교구의 질이 아니라, 그 체험교구를 사용하는 교사와 학생의 활동인 것이다. 셋째, 학습의 원리이다. 수학학습의 과정을 두 단계로 나눈다면, 하나는 구체적 상황에 대

한 경험으로써의 활동이고, 다음은 활동의 결과에 대한 인지적 활동으로 볼 수 있다. 따라서 학습의 원리는 체험교구를 통한 물리적 경험이 각 개인에게 내면화된 다음, 반성을 통해 실제적인 수학학습이 일어나야한다는 원리이다. 사실 구체물에 대한 직접적인 경험과 활동만으로는 수학적 지식이 구성될 수는 없다. 체험교구를 사용한 활동이 수학의 추상성과 기호적 표현과 연결되지 않는다면, 신체적 활동 그 자체로 마무리될 수 있다는 점이다. 체험교구가 궁극적으로는 자신의 체험활동을 반성함으로써 수학적 개념이 확고하게 형성되어야 한다.

## Ⅲ. 연구 결과 및 논의

### 1. 수학적 체험교구의 개발 모형

김기원, 도혜경(2010)의 연구에서 추출한 개발 절차와 임철일, 김민강, 김윤정(2005)이 제시한 개발 절차를 통해 기본으로 하여 수학교과와 수학체험교구 개발에 적합하도록 다음과 같은 $MD^2A$ 모형을 개발하였다.

| 수학적 분석(M) | 체험교구 설계(D) | 체험교구 제작(M) | 수학수업 설계(D) | 실행 및 평가(A) |
|---|---|---|---|---|

[그림 Ⅲ-1] 체험교구 개발 모형

첫째, 수학적 분석 단계(Mathematical analysis stage)이다. 수학적 분석단계에서는 수학체험교구가 필요한 학습 상황에 대한 요구분석, 개발하고자 하는 수학체험교구의 수학적 개념에 대한 과제분석이 실시된다. 요구분석은 학교수학의 시각에서 접근하는 것이라면, 수학적 개념에 대한 과제분석은 학문수학의 견지에서의 접근이다. 본 단계를 통해 체험교구 개발자들은 개발하고자 하는 체험교구의 수학적 개념에서 발생하는 문제점이나 한계를 찾고, 해당 개념을 설명하기 위해 더 효율적인 방법이 존재하는지 분석한다. 또한, 해당 개념의 학습 이후 또 다른 방법으로 개념에 도달할 수 있는 방법에 대한 분석활동도 병행하여 진행한다. 필요에 따라서는 해당 수학적 개념의 위계를 분석하고, 현재 교육과정에서 다룰 수 있는 범위를 설정하고 더 높은 수준의 학문수학과의 관련성을 분석하게 된다. 체험교구의 개발을 위한 설계에 도움을 제공하기 위해 중요한 수학적 개념들 사이의 위계도 혹은 계통도를 작성할 수도 있다. 수학적 체험교구는 철저하게 인공물이기 때문에 학습의 매개체로 효과적으로 사용되기 위해서는 철저한 수학적 분석이 절대적으로 필요하다. 또한 Drijvers와 Gravemeijer(2005)가 말한 인공물과 학습자 사이의 유의미한 관계를 형성하기 위해서 수학적 분석이 선행되어야 한다.

수학적 분석 단계를 토대로 하여 체험교수 개발자들은 체험교구의 개발목표, 개발범위, 개발기간 등을 수립할 수 있고, 구체적인 설계에 대한 도움을 제공한다. Tripp와 Bichelmeyer(1990)가 언급한 것처럼 수학적 분석은 분석 단계를 시작점으로 하여 개발 전 과정에서 지속적으로 진행할 필요가 있다. 체험교구는 수학적 구조 및 수학적 개념이 핵심이므로 수학적 분석은 끊임없이 진행될 필요가 있다.

둘째, 체험교구 설계 단계(Design of experiential teaching tools stage)이다. 수학적 분석과 동시에 개발할 수학체험교구의 전체구조에 대한 기본적인 설계하기 시작한다(Jones, Richey, 2000). 여기서 전체구조에 해당하는 것은 제작 방법에 대한 매뉴얼, 재질 및 재료, 크기, 필요 물품이나 공구의 목록 등이다. 설계는 수학적 분석을 토대로 하며 수학적 개념이 고스란히 담겨져 있어야 한다. 이와 같은 관점에서 설계 단계에서 고려해야할 부분이 다양하다. 실제로 체험교구는 구체적 환경과 추상적 수학 구조 사이의 간격을 이을 수 있도록 배려를 해야하고(정동권, 2001; Boggan, Harper, & Whitmire, 2010), 수학체험교구가 인간의 활동은 근간으로 한다는 이념이 구현되도록 고려해야 한다(김남희, 1999).

또한 체험교구 개발자는 필요에 따라서는 전문 디자이너나 전문 제작 업체와의 긴밀한 협조를 얻을 수 있고,

다양한 공작기계를 활용하여 제작할 수 있는 아이디어들을 정리하게 된다. 개발자는 설계를 기획할 때, 개인적인 수준에 머물러 있지 않고, 다양한 이해 당사자 즉, 학생, 수학교사, 수학교육전문가, 교구제작 전문가들과 협업할 수 있는 환경을 구축할 필요가 있다. 이러한 협업을 통해 상호소통하고 상호작용하는 방식으로 설계를 진행한다(임철일, 2000; Dorsey, 1997).

셋째, 체험교구 제작 단계(Making an experience teaching tool stage)이다. 보통 체험교구에 대한 설계가 완성된 후, 개발자는 설계에 근간하여 개발의 범주를 결정한다(Tripp, Bichelmeyer, 1990). 개발은 크게 두 가지 측면을 고려할 수 있다. 하나는 학습자가 제작의 과정에 직접 참여하면서 수학적 원리를 이해하도록 하는 반제품 형태로 개발하는 것이고, 다른 하나는 완성된 체험교구를 직접 조작하고 활동하면서 수학적 활동과 학습에 참여하면 수학적 원리를 파악하도록 하는 완제품 형태로 개발하는 것이다. 수학적 분석에 따른 개발 목적, 개발 범위 및 체험교구의 성격에 따라 판단할 수 있다. 제작 단계에서는 우선적으로는 프로토타입의 개발로 부분적으로 시작되며, 프로토타입이 최종 결정된 다음에 본격적으로 체험교구를 완성한다. 교구에 대한 개발이 모두 끝난 다음에는 파일럿 검사를 시행하고, 전문가의 검토를 받아 최종본으로 수정을 완료한다(임철일, 김민강, 김윤정, 2005).

체험교구는 궁극적으로는 도구적 성격을 지닐 수밖에 없다. 따라서 제작 단계에서는 다음과 같은 측면에 대한 고려가 필요하다. NCTM(2000)에서는 학교수학을 위한 원리 중 '기술공학의 원리'를 제시하였는데, 여기서 체험교구의 효율적인 사용을 강조하였다. 따라서 체험교구의 제작은 사용의 효율에 초점을 맞출 필요가 있다. 또한 체험교구는 수학적 개념의 매체물이므로, 체험교구가 수학적 개념의 이해라는 본래의 목적에 부합되도록 교구가 제작되어야 한다. 이를 위해서는 체험교구의 활용이 간단하여야 하고, 사용방법도 간결해야 하며, 기능적 측면에서도 단순하게 제작되어야 한다(Artigue, 2001).

넷째, 수학수업 설계 단계(Design of utilization stage)이다. 체험교구는 수학학습능력을 향상시킬 수 있는 기회를 제공하기 위한 목적으로 개발되기 때문에 어떻게 활용할 것인가는 매우 중요한 문제이다. 고상숙, 정인철, 박만구(2009)는 체험교구를 학습목표에 적합하도록 적절한 선택과 활용을 강조하였다. 이처럼 수학수업 설계 단계에서는 어떻게 교구를 활용할 것인지에 대한 활동지를 개발하고, 수업에 활용할 수 있는 방안을 설계하는 단계이다. 체험교구에 대한 수학수업 설계는 체험교구를 사용하는 교사 등이 체험교구가 가지고 있는 효과성과 한계성을 완전히 인지하고, 이를 수학학습 주제와 구체적으로 연결할 수 있도록 설계되어야 한다(Haspekian, 2005). 또한 실제로 최창우(2014)는 동일한 교구라 할지라도 수학수업 설계를 어떻게 하느냐에 따라 그 결과가 상이하다고 밝히고 있다는 점을 고려하면, 수학수업 설계의 중요성을 뒷받침하기에 충분하다.

다섯째, 실행 및 평가 단계(Application and evaluation stage)이다. 제작된 체험교구 및 수학수업을 위한 설계에 따른 결과물을 직접 학습상황에 적용하고, 그 결과를 분석하는 단계이다. 실행에서는 교구의 사용의 목적에 맞게 최적화된 환경에서 실행하고, 그 결과를 활동지나 면담 등을 통해 수집 정리한다.

### 2. 개발 모형의 적용을 통한 최대공약수 체험교구의 개발

본 연구에서는 개발한 체험교구 개발 $MD^2A$ 모형에 따라 최대공약수 체험교구를 개발하였다. 모형에 따른 결과는 다음과 같다.

#### 가. 수학적 분석

먼저 최대공약수를 학습하는 상황을 고찰해 보자. 최대공약수는 초등학교와 중학교에서 각각 다루어지는 학습요소이다. 2015개정 수학과 교육과정을 기준으로 보면, 수학 5-1 교과서와 중학교 수학 1학년에서 다루고 있다. 초등학교에서 다루는 최대공약수를 구하는 방법은 크게 두 가지로 제시되어 있다([그림 Ⅲ-2] 참조). 첫째는

두 수의 곱으로 나타내어 구하는 방법이다. 이 방법은 소인수분해는 아니지만, 두 수의 곱으로 분해한 다음, 공통적인 곱으로 표현되는 가장 큰 수로 최대공약수를 다루고 있다. 둘째는 두 수를 동시에 나누어 구하는 방법이다. 이 방법은 두 수를 공통으로 나누어지게 하는 수를 구한 다음, 공통으로 나누는 수들을 곱하여 구하고 있다. 중학교에서 다루는 최대공약수를 구하는 학습내용은 초등학교와 차별화하여 소인수분해를 이용하여 최대공약수를 구하는 방법을 다루고 있다.


[그림 III-2] 초등학교에서 최대공약수

초등학교와 중학교에서 다루는 최대공약수 학습내용을 보면 한 가지 측면에서 분명한 한계를 지니고 있다. 그것은 초등학교의 경우 큰 수, 예를 들어 100이상의 수에 대해서는 다루지 않는다는 점이다. 이 부분은 중학교에서도 크게 다르지 않다. 중학교에서 다루는 수는 소인수분해 하였을 때, 소인수가 2, 3, 5, 7을 넘지 않고 있다는 점이다. 결국 초, 중학교에서 다루는 최대공약수의 경우, 그 수의 크기만 매우 제한적이어서 큰 수에 대한 최대공약수를 구하는데 매우 불편하다는 점을 분석결과로 얻을 수 있다. 그렇다면 큰 수에 대한 최대공약수를 어떻게 구할 수 있는가에 대한 요구들이 발견할 수 있다.

다음으로는 학문수학의 견지에서 최대공약수에 대해 분석해 보자. 대학수학에서 최대공약수를 다루는 과목은 정수론(Number theory)이다. 정수론 교재에서 최대공약수는 비교적 초반 부분에서 다루어지고 있다. 다루어지는 내용을 소개하면 다음과 같다.

<정의1> $a=db$를 만족시키는 정수 $d$가 존재할 때, $b$는 $a$의 약수(또는 $a$는 $b$의 배수)라 하고, 기호 $b \mid a$로 나타낸다.

<정리1> $d \mid a$이고 $d \mid b$이면, $d \mid (a+b)$이다.

<정리2> $d \mid a$이면, 임의의 정수 $k$에 대하여 $d \mid ka$이다.

<정의2> $d$가 다음의 두 조건을 모두 만족할 때, $d$를 $a$와 $b$의 최대공약수라 하고, 기호 $(a,b)$로 나타낸다.

<정리3> $(a,b)=d$이면 $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$이다.

<정의3> $(a,b)=1$일 때, $a$와 $b$는 서로소라고 한다.

<정리4: 나눗셈의 알고리즘>

양의 정수 $a$, $b$(단, $b \neq 0$)에 대하여 $a=bq+r$, $0 \leqq r < b$인 정수 $q$, $r$이 오직 하나 존재한다.

<정리5> $a=bq+r$이면 $(a,b)=(b,r)$이다.

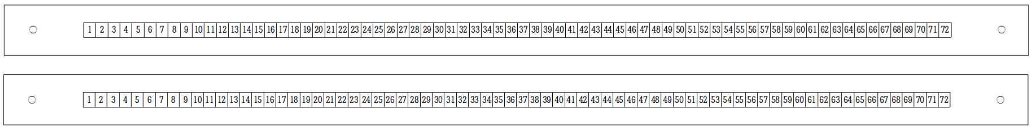
<정리6> 두 양수 $a,b$에 대해서 $a>b$이면 $(a,b)=(a-b,b)$이다.

학교수학에서 다루는 최대공약수의 한계를 극복할 수 있는 내용으로 <정리5>와 <정리6>이 사용가능한 것으로 판단된다. <정리5>는 유클리드호제법으로 불리는 것으로 유클리드의 원론에 제시된 방법이다. 그런데 이 방법에 대한 타당성을 확보하고 정당화하기 위해서는 중학교 1학년 수준에서는 다소 한계가 있었다. 반면 <정리6>은 두 수를 빼는 활동으로 이 활동의 정당성을 직관적으로 명확히 확보할 수 있다는 장점이 있었다.

위와 같은 수학적 분석을 토대로 하여 체험교구의 개발목표, 개발범위, 개발기간 등을 다음과 같이 설정하였다. 먼저 개발목표는 현재 학교수학에서 다루어지는 최대공약수 구하는 방법의 한계를 극복하고, 구체적인 활동을 통해 최대공약수를 직관적으로 간단히 구할 수 있는 체험교구를 개발하는 것으로 설정하였다. 다음으로 개발범위는 학문수학의 정수론에 제시된 '두 양수 $a,b$에 대해서 $a>b$이면 $(a,b)=(a-b,b)$이다.'라는 사실을 적용한 체험교구를 개발하는 것으로 설정하였다. 개발기간은 2018년 4월부터 개발을 시작하여 시제품, 수정의 과정을 거쳐 1년간에 걸쳐 최종 체험교구를 개발하는 것으로 하였다.

### 나. 체험교구 설계

제작 방법에 대한 매뉴얼, 재질 및 재료, 크기, 필요 물품 등을 결정하는 단계이다. 본 연구에서 개발한 최대공약수이다. 최대공약수는 수와 관련된 개념이어서 활동교구로 만들기 위해서는 새로운 접근 방법이 필요하다. 본 연구에서 접근한 방법은 고대 그리스 시대의 수의 표현 방법과 관련지었다. 그것은 유클리드의 원론에 제시된 선분을 이용하는 방법을 적용한 것이다. 즉, 최대공약수를 구하기 위한 수를 기호적 수가 아니라, 양적 개념이 포함된 선분의 길이로 수를 표현하는 것이다. [그림 Ⅲ-3]에 제시된 아래 위의 두 띠가 최대공약수를 구하고자 하는 두 수 $a$, $b$를 나타내기로 설계를 하였다. 이러한 방식의 수의 표현 방법은 수를 양적 개념으로 시각화하였다는 측면에서 수의 수학적 개념이 고스란히 담겨져 있다고 판단할 수 있다. 또한 수를 선분형태의 띠(숫자판)로 표현한 것은 구체적 환경과 추상적 수학 구조 사이의 간격을 이을 수 있다고 판단된다.



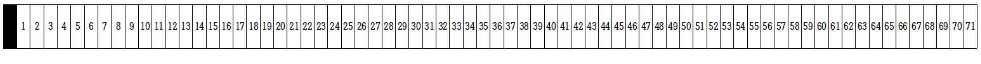
[그림 Ⅲ-3] 수를 선분(띠)로 표현(숫자판)

수를 선분으로 표현하였다면 특정한 수를 지칭하여야할 필요가 있다. 이를 해결하기 위해서 펀칭을 이용하여 해당 수를 부각되도록 하는 방법을 채택하였다. [그림 Ⅲ-4]는 25, 39와 같은 특정한 수를 표현하고 있고, 좌우로 이동 가능한 펀칭된 색종이 띠를 만들어 활용하였다. 다음으로는 아래 위의 띠를 연결하기 위한 방안을 모색하였다. 그 방법으로 [그림 Ⅲ-6]과 같이 아일렛을 이용하여 연결고리를 만드는 것으로 계획을 수립하였다.


[그림 Ⅲ-4] 특정한 수의 지정

[그림 Ⅲ-5] 연결고리

또한 두 수의 차를 구하기 위해 측정자의 필요성이 부각되었다. 이에 아래 위에 있는 두 수의 차를 구하기 위한 도구를 [그림 Ⅲ-6]과 같이 제작하기로 설계하였다.

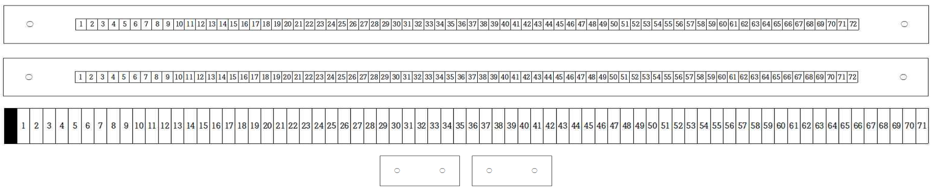


[그림 Ⅲ-6] 두 수의 차를 구하는 측정자

교구를 만들기 위한 재질은 하드보드와 같은 두꺼운 종이로 선택을 하였고, 크기는 50cm 정도의 폭이 될 수 있도록 계획을 수립하였다. 더불어 수는 무한하지만 양을 표현하는 종이는 유한하다는 한계 때문에 수는 1부터 72까지의 수로 제한하는 것으로 결정하였다. 비록 수는 제한되지만 활동을 통해 발견한 수학적 속성을 통해 궁극적으로 교구없이 최대공약수를 구할 수 있는 능력을 기를 수 있도록 제작하는 것으로 설계를 하였다. 마지막으로, 본 연구 개발에 참여한 ○○대학교 사범대학 2학년 학생들의 의견을 수렴하여 체험교구의 이름을 '갑최띠'로 결정하였다. 그 이유는 띠를 통해 갑자기 최대공약수를 구하게 되었다는 의미로 명명하였다.

### 다. 체험교구 제작

체험교구 설계에 따라 실제로 체험교구를 제작하였다. 제작을 위한 반제품은 아래 그림과 같다.



[그림 III-7] 제작을 위한 반제품

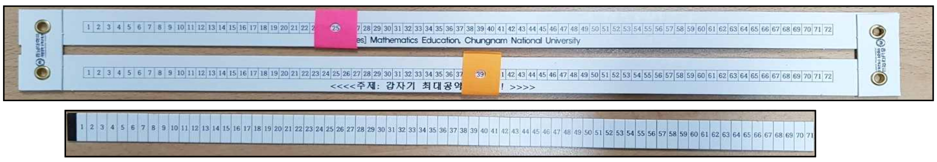
위 재료를 이용하여 다음과 같은 순서로 제작할 수 있다.

[1단계] 숫자판 좌측부분에 아일렛 심 2개로 펀치를 이용하여 숫자판 종이 2개와 연결고리가 정확히 수직이 되도록 고정한다.

[2단계] 색도화지를 적당한 크기로 자르고, 펀치를 이용해서 한 가운데 구멍을 뚫어서 색종이 띠를 만든다.

[3단계] 자른 색종이 띠를 그림과 같이 감고, 테이프를 이용해서 색종이띠 가 계속 숫자판을 감고 있도록 고정시킨다(단, 색도화지를 꽉 감지 않도록 주의한다.).

[4단계] 1단계에서 했던 것처럼 아일렛 심 2개를 이용하여 오른쪽 부분을 고정한다.




[그림 III-8] 최대공약수 체험교구 완성품

### 라. 수학수업 설계

체험교구를 어떻게 활용할 것이지 결정하기 위해 계획 및 실제 개발을 하였다. 본 체험교구는 중학교 1학년 학생이 최대공약수를 모두 학습한 다음, 추가적인 심화학습 혹은 또 다른 방법으로 최대공약수를 학습하는 상황에서 사용하도록 설계하였다. 실제로 개발한 활동지는 부록과 같고, 활동지에 나타난 구체적인 수학수업 활용방안은 다음과 같다.

첫째, 기존의 학습 방법(교육과정의 방법)으로 최대공약수를1 구하는 상황을 제시한다.

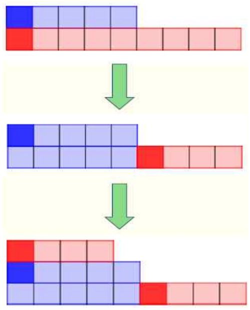
둘째, 체험교구를 제작하여 교구를 활용하여 최대공약수를 구하고, 두 방법으로 비교하는 활동을 제시한다.

셋째, 자신이 생각한 두 수를 적고, 이를 이용하여 최대공약수를 구하는 활동을 제시한다. 이를 바탕으로 최종적으로는 1과 72사이의 수가 아닌 수 즉, 교구 없이 최대공약수를 구하는 활동을 제시한다.

넷째, 이제 다소 큰 수 혹은 기존의 방법으로는 최대공약수를 구하는 것이 불편한 상황을 경험시킨다. 이러한 경험을 바탕으로 새로운 방법과 기존의 방법의 장, 단점을 탐색하도록 한다.

다섯째, 새로운 방법의 수학적 의미가 무엇인지 사고하도록 한다. 또한, 자신의 활동을 반성하여 새로운 방법에 대한 수학적 정당화에 대한 문제를 제기한다.

최종적인 활동은 수학적인 활동으로 이에 대한 구체적인 지도방안이 모색되어져 있어야 한다. 본 연구에서 개발한 체험교구는 직관적인 방법과 논리적 방법에 의해 정당화 될 수 있다.



[그림 III-9] 직관적 정당화

첫째, 직관적인 방법에 의한 정당화이다([그림 Ⅲ-9] 참조). [그림 Ⅲ-9]에서 맨 위 그림의 하단의 9칸은 숫자 $a$, 상단의 5칸은 숫자 $b$를 의미한다고 생각하자. 그리고 최대공약수를 $g$라고 하자. 당연히 $a$, $b$는 $g$의 배수가 되므로 맨 위 그림과 같이 표현할 수 있다. 이제 $a-b$를 구해보자. 그러면 [그림 Ⅲ-9]의 맨 아래 그림처럼 뺀 결과에 해당하는 것이 상단의 위쪽의 4칸으로 생성되고, 하단부 9칸은 없어졌다고 생각할 수 있다. 이러한 과정을 반복하면 최대공약수가 구해짐을 확인할 수 있다.

둘째, 논리적인 방법에 의한 정당화이다. 이 방법을 아래와 같이 엄밀하게 증명되어질 수 있다.

(명제) $a,b$의 최대공약수를 $G(a,b)$라고 하면, $a,b$ $(b \neq 0, a > b)$에 대하여 $G(a,b) = G(a-b,b)$이다.

(증명)

단계1. $a$와 $b$가 서로소이면, $a$와 $a-b$도 서로 소이다.

$a$와 $a-b$가 서로소가 아니라고 가정하면 $a$와 $a-b$의 공약수 $k > 1$가 존재하고 다음이 성립한다. $a = kc$, $a-b = kd$이다. 따라서 $b = a - kd = kc - kd = k(c-d)$, 즉 $k$는 $a$와 $b$의 공배수가 된다. 이것은 $a$와 $b$는 서로소라는 조건에 모순이므로 $a$와 $a-b$는 서로소이다.

단계2. $a$, $b$의 최대공약수는 $a$와 $a-b(b-a)$의 최대공약수와 같다.

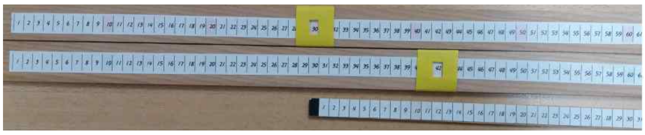
$a$와 $b$의 최대공약수를 $g$라고 하면, $a = ga'$, $b = gb'$, $(a', b'$은 서로소$)$이다. 그러면, $a-b = g(a'-b')$이고, (단계1)에 의해서 $a'$과 $a'-b'$의 최대공약수는 $a'$과 $b'$의 최대공약수와 같다. 즉, $a'$와 $a'-b'$은 서로소이다. 라서, $g = \gcd(a,\ a-b)$이다. 또한 $\gcd(a, b-a) = \gcd(a, a-b) = g$이다.■

**마. 실행 및 평가**

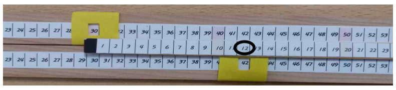
본 연구에서 개발한 최대공약수 체험교구는 D광역시 ○○중학교 1학년 학생 30명을 대상으로 직접 적용하였다. 참여한 학생은 중학교 1학년 30명의 학생이었고, 학업성취수준은 상위권이었다. 본 적용을 위해 ○○대학교 사범대학 수학교육과 학생 2명이 체험도우미로 활동하였다. 체험활동에 사용한 활동지는 부록과 같다.

먼저, 교구를 이용하여 최대공약수 구하는 방법에 대해 학생들에게 자세히 설명하는 과정을 거쳤다. 학생들에게 체험교구가 1부터 $n$까지 적혀있는 두 막대를 상하로 고정하였고, 선택한 수가 무엇인지 알 수 있도록 두 막대에 띠를 만들어 이동할 수 있도록 제작하였다고 안내하였으며, 또한 선택한 두 수의 차가 얼마인지 구하기 위한 측정자 막대가 있다고 안내하였다. 그리고 이 교구를 활용하여 최대공약수를 구하는 방법을 다음과 같이 구체적으로 설명하였다.

[1단계] 최대공약수를 구하고 싶은 두 수를 선택한다. 예를 들어, 여기에서는 30과 42를 선택하였다고 가정한다. 다음 그림에서 윗 막대는 30에 띠가 있고, 가운데 막대는 42에 띠가 있다.

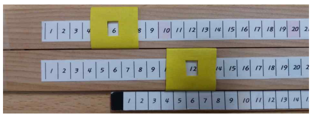


[2단계] 선택한 두 수 사이의 차를 구한다. 예를 들어, 여기에서는 30과 42의 차를 막대를 이용해 구하면 12를 얻을 수 있다.

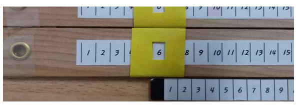


[3단계] 선택한 두 수 중에서 큰 수를 [2단계]에서 구한 차에 해당하는 수로 띠를 이동한다. 예를 들어, 여기에서는 큰 수 42에 해당하는 띠를 12로 이동한다.

[4단계] 앞의 [2단계], [3단계]를 지속적으로 진행한다. 예를 들어, 여기에서는 18과 12의 차 6을 구하고, 18의 띠를 6으로 이동한다.



[5단계] 두 막대에 있는 띠의 수가 같아질 때까지 계속 진행을 한다. 예를 들어, 여기에서는 6과 6이 될 때까지 진행한다. 이때 마지막에 남은 수가 최대공약수라고 설명한다.



다음으로 학생에게 실제로 적용한 결과를 살펴보자. 본 적용은 중학교 정규수업시간에 수학체험활동 프로그램의 일환으로 진행되었다. 학생들의 결과를 분석하면 다음과 같다.

첫째, 학생이 이미 학습한 최대공약수를 구하는 두 가지 방법에 대한 이해 정도를 확인하는 활동이다. 소인수

분해는 중학교 1학년, 나눗셈 방법은 초등학교 5학년에서 학습하였음에도 불구하고, 소인수분해를 이용하여 최대공약수를 구하지 못한 학생의 비율 훨씬 높게 나타났다. 대부분의 학생이 최대공약수를 구하는 것에는 성공하였지만 그 방법은 초등학교에서 학습한 방법이었다.

<표 Ⅲ-1> 최대공약수 구하기 이해 정도

| 구분 | 인원(%) |
|---|---|
| 소인수분해 및 최대공약수를 정확히 구한 경우 | 19 (63.3) |
| 나눗셈 및 최대공약수를 정확하게 구한 경우 | 28 (93.3) |
| 소인수분해는 했지만 최대공약수를 구하지 못한 경우 | 6 (20.0) |
| 나눗셈은 했지만 최대공약수를 구하지 못한 경우 | 1 (3.3) |
| 소인수분해를 못한 경우 | 5 (16.7) |
| 나눗셈을 못한 경우 | 1 (3.3) |

둘째, 체험교구를 제작하고 교구를 활용하여 최대공약수를 구하는 활동이다. 28명의 학생은 교구를 제작하여 다양한 문제의 최대고약수를 정확히 구했으나, 2명의 학생은 부분적으로 실패한 것으로 나타났다.

<표 Ⅲ-2> 체험교구를 이용하여 최대공약수 구하기 이해 정도

| 구분 | 인원(%) |
|---|---|
| 최대공약수를 정확히 구한 경우 | 28 (93.3) |
| 최대공약수를 구하지 못한 경우 | 2 (6.7) |

셋째, 체험교구를 사용하는 새로운 방법과 기존의 방법의 장, 단점을 탐색하는 활동이다. 학생들의 반응을 기록하면 <표 Ⅲ-3>과 같다. 학생들은 체험교구의 좋은 점 중에서 시사점이 있는 부분을 제시하면, '대수적인 식을 사용하지 않아서 좋다', '구하는 방법이 신기하다.', '큰 수에 대해서 사용하면 쉽다.', '실수하지 않는다.' 등이 있다. 대수적 식을 사용하지 않아서 좋다는 의견은 체험교구가 구성적 측면이 부각되어 잘 개발되었음을 시사하는 것으로 Dienes가 제시한 구성의 원리에 충실하게 개발되었음을 알 수 있다. 구하는 방법이 신기하다는 의견을 통해 학생들의 흥미유발에 유의하였음을 알 수 있다. 또한 큰 수에 대해서 사용하면 쉽다는 것을 통해 체험교구의 구성적이고 직관적인 측면을 넘어, 체험교구에 내재된 수학적 구조를 완벽하게 이해하고 있음을 간접적으로 확인할 수 있었다. 또한 학생들은 체험교구의 불편한 점에 대해서 '서로 소이면 시간이 걸린다.', '교구가 없으면 구할 수 없다.' 등의 의견을 제시하고 있다. 시간이 걸린다는 것은 단순한 행동을 지속적으로 계속 수행하는 것의 단조로움에 의해 생긴 것으로 보이므로, 적절한 시간의 안배를 통해 활동의 량을 조정할 필요가 있음을 시사해 준다. 교구가 없으면 구할 수 없다는 의견을 통해 볼 때, 개발된 수학체험교구의 수학적 구조에 대한 정확한 이해의 부족이 있음을 확인할 수 있었다.

<표 Ⅲ-3> 체험교구의 좋은 점과 불편한 점

| 좋은 점 | 불편한 점 |
|---|---|
| ◈ 식을 쓰지 않아서 좋다.<br>◈ 이해하기 쉽다.<br>◈ 편하게 구할 수 있다.<br>◈ 구하는 방법이 신기해서 좋았다.<br>◈ 복잡한 계산을 할 필요가 없다.<br>◈ 소인수분해가 힘든 수도 쉽게 구할 수 있다.<br>◈ 큰 수에 대해서 이 방법을 사용하면 쉽다.<br>◈ 실수하지 않고 구할 수 있다. | ◈ 서로 소이면 시간이 좀 걸린다.<br>◈ 귀찮다.<br>◈ 빼는 것을 반복하는 것이 번거롭다.<br>◈ 두 수가 서로 소이면 한 칸씩 움직인다.<br>◈ 수에 따라 불편하다.<br>◈ 교구가 없으면 구할 수 없다. |

## Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 수학교육에서 중요한 교육적 가치를 가지고 있는 도구인 수학체험교구를 체계적으로 개발하기 위한 기초연구이다. 최근 활동이론에 근거한 수학교육이 강조되면서 다양한 수학체험교구가 개발되고, 교육현장에서 활용되고 있지만, 실제로 수학교실에서 활용가능한 다양한 체험교구의 개발은 부족한 실정이다. 특히, 수학과 교육과정과 부합된 수학체험교구는 체계적으로 개발되지 못하는 상황이다. 이에 본 연구에서는 수학체험교구를 체계적으로 개발하기 위한 수학체험교구 개발 모형을 제안하고, 제안된 개발 모형에 따라 최대공약수 체험교구 개발을 연구내용으로 연구가 수행되었다.

수학과의 교육목표, 교육내용, 교육방법, 평가방법 등을 담고 있는 수학과 교육과정에서는 교육기자재, 구체적 조작물을 언급하면서 교구의 명시적 사용을 7차 교육과정에서 권고한 이래 지속적으로 수학체험교구의 활용을 강조하고 있다. 특히 2007개정 수학 교육과정에서는 평가에서도 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회 제공을 권고하고 있다. 현재 적용중인 2015개정 수학과 교육과정에서는 6대 역량 중의 하나로 정보처리역량을 제시하였는데, 정보처리역량의 핵심 중의 하나가 수학체험교구를 개념, 원리, 법칙의 이해와 문제해결력 신장을 위해 사용하는 것이다. 이처럼 수학체험교육의 중요성은 지속적으로 강조되고 있고 향후 이러한 경향은 더욱 심화될 것으로 예상된다. 이러한 관점에서 진행된 본 연구의 결과는 다음과 같다.

먼저, 본 연구에서는 수학체험교구 개발 모형을 제안하였다. 수학체험교구 개발을 위한 $MD^2A$모형은 김기원, 도혜경(2010)의 연구결과의 분석 및 Tripp와 Bichelmeyer(1990)의 연구결과를 기반으로 하며, 구체적인 절차는 5단계로 제시할 수 있다. 1단계는 수학적 분석 단계(Mathematical analysis stage), 2단계는 체험교구 설계 단계(Design of experiential teaching tools stage), 3단계는 체험교구 제작 단계(Making an experience teaching tool stage), 4단계는 수학수업 설계 단계(Design of utilization stage), 5단계는 실행 및 평가 단계(Application and evaluation stage)이다.

이러한 단계에 따른 체계적인 수학체험교구의 제작을 통해 수학과 교육과정에 부합되고, 학문수학에서 그 수학적 배경을 찾을 수 있는 의미있는 수학체험교구가 개발될 것으로 기대된다. 또한 단순한 흥미를 위한 수학체험교구가 아니라, 실제적으로 학교수학교실에 사용가능하고 수학개념의 이해에 유의미한 수학체험교구가 개발될 것으로 기대된다.

다음으로, 개발된 $MD^2A$모형을 적용하여 중학교 1학년 교실수업을 위한 최대공약수 체험교구를 개발하였다. 본 연구에서 수행한 최대공약수 체험교구의 개발을 통해 $MD^2A$모형이 실제로 적용될 수 있음을 확인하였을 뿐 아니라, 실제 학교현장에 적용함으로써 수학체험교구의 교육적 활용가능성을 검증할 수 있었다. 이것을 구체적 단계별로 살펴보면, 첫째, 수학적 분석에서는 초등학교와 중학교 수준의 최대공약수의 내용요소, 대학교 정수론 수준의 최대공약수의 내용요소를 분석하였다. 이를 통해 학교수학에서 제시된 최대공약수의 한계점을 분석하고 이를 극복할 수 있는 새로운 대안을 도출할 수 있었다. 이 새로운 대안이 새로운 체험교구 개발을 위한 기초로 설정하였다. 둘째, 체험교구 설계에서는 ‘갑최띠’ 체험교구 개발을 위한 기본적인 방향을 설정하였다. 수를 량으로 표현하기 위한 숫자판 사용, 두 수에 대응하는 두 개의 숫자판 띠, 특정한 수를 지칭하는 색종이 띠, 두 수를 고정하는 아일렛, 두 수의 차를 구하는 측정자 등에 대한 아이디어를 구체화하였다. 구체화된 아이디어는 ‘갑최띠’ 제작을 위한 기본설계에 반영되었다. 셋째, 체험교구 제작이다. 체험교구는 설계에 따라 반제품 형태로 제작되었다. 넷째, 수학수업 설계이다. 수학체험교구 설계와 더불어 가장 중요한 과정으로, 체험교구를 어떻게 활용할 것이지 결정하기 위한 계획을 수립하고, 수립한 계획에 따라 자료와 수업자료를 개발하였다. 다섯째, 실행 및 평가에서는 실제 개발한 최대공약수 체험교구는 학교현장에 적용하고, 그 결과를 분석하였다. 이러한 과정을 통해 최종적으로 체험교구를 수정하여 최종 체험교구를 완성할 수 있었다.

마지막으로 본 연구를 통해 제안된 모형과 실제 구현된 체험교구를 통해 다양한 수학체험교구의 개발이 수학적인 기초에 근거하여 개발될 것으로 기대된다.

# 참 고 문 헌


교육부 (1992). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제1992-19호.

Ministry of Education (1992). 6th *Revised National Curriculum of Mathematics*, Ministry of Education Notice 1992-19.

교육부 (1997). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제1997-15호.

Ministry of Education (1997). 7th *Revised National Curriculum of Mathematics*, Ministry of Education Notice 1997-15.

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호.

Ministry of Education (2015). *2015 Revised National Curriculum of Mathematics*, Ministry of Education Notice 2015-74

교육인적자원부 (2006). 수학과 교육과정. 교육인적자원부 고시 제2006-75호.

Ministry Of Education & Human Resources Development (2006). *2007 Revised National Curriculum*, Ministry of Education Notice 2006-75.

김기원·도혜경 (2010). 금강비 측정 교구 개발 및 체험수학활동, East Asian Mathematical Journal, 26(2), 281-299.

Kim, K. W., Do. H. K. (2010). Development of mathematical tools for measuring the Geumgang Ratio, *East Asian Mathematical Journal, 26*(2), 281-299.

김남희(2008). 예비교사와 현직교사를 위한 학교수학과 교구. 서울: 경문사.

Kim, N. H. (2008). *School mathematics and teaching tools for pre-service teachers and teachers*, Seoul: KyungMoonSa.

이경화·정혜윤·강완·안병곤·백도현 (2017). 수학교구 활용을 위한 교수학적 원리의 제안 및 적용. 수학교육논문집, 31(2), 203-221.

Lee, K. H., Jung, H. Y., Kang, W., Ahn, W., & Back, D. H. (2017). Suggestion and application of didactical principles for using mathematical teaching aids, *Communications of Mathematical Education, 31*(2), 203-221.

임철일 (2000). 대학의 사이버 강좌 개발을 위한 사태 중심 교수설계 전략의 효과에 관한 연구. 교육공학연구, 16(4), 156-173.

Lim, C. I. (2000). Effects of event-oriented instructional design strategies for cyber course development, *Journal of Educational Technology, 16*(4), 156-173.

임철일·김민강·김윤정 (2005). 웹 기반 수업 개발을 위한 인쇄물 기반의 래피드 프로토타입 개발 방법론에 관한 연구. 교육공학연구, 21(1), 3-28.

Lim, C. I., Kim, M. K., & Kim, Y. J. (2005). A developmental study on the paper-based rapid prototyping methodology for Web-based instruction, *Journal of Educational Technology, 21*(1), 3-28.

정동권(2001). 수학교실에서 기하판의 활용 의의와 활용 사례 분석. 학교수학, 3(2), 447-473.

Jung, D. K. (2001). Significance and analyzing episode on using geoboards in mathematics classroom, *School Mathematics, 3*(2), 447-473.

최창우(2014). 수학교육과 교구. 서울: 경문사.

Choi, C. W. (2014). *Math education and educational tools*, Seoul: KyungMoonSa.

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level?. *In The teaching and learning of mathematics at university level*(207-220). Springer Netherlands.

Boggan, M., Harper, S., & Whitmire, A. (2010). Using Manipulatives to Teach Elementary Mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies, 3*, 1-6.

Bruner, J. (1960). *The Process of Education*. Harvard Univ. Press.

Dienes, Z. P. (1964). *Building up Mathematics*(2nd ed.). Hutchinson Educational Ltd..

Dorsey, L. T., Goodrum, D. A, & Schwen, T. M. (1997) *Rapid collaborative prototyping as an instructional development paradigm*. In Dills, C. & Romiszowski, A. J. (Ed.), Instructional development paradigms. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.

Haspekian, M. (2005). An “instrumental approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International journal of computers for mathematical learning, 10*(2), 109-141.

Jones, T. S., & Richey, R. C. (2000). Rapid prototyping methodology in action: A developmental study. *Educational Technology Research and Development, 48*(2), 63-80.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: vol. I. induction and analogy in mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Saidu, S., & Bunyamin, S. (2016). Effects of Geoboard and Geographical Globe on Senior Secondary School Students' Performance in Mathematics in Kaduna State. *Journal of Science, Technology & Education, 4*(1), 140-148.

Tripp, S. D., & Bichelmeyer, B.(1990). Rapid prototyping: An alternative instructional design strategy. *Educational Technology Research and Development, 38*(1), 31-44.

van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities that Begin with Play. *Teaching Children Mathematics, 6*(1), 310-316.

# A Study on the Model for the Development of Tools for Math Activities & it's Application

**Suh, Bo Euk**
Department of Mathematics Education,
Chungnam National University
E-mail : eukeuk@cnu.ac.kr

This study is a basic study to effectively develop a mathematics experience object, an important tool and educational tool in mathematics education. Recently, as mathematics education based on action theory is emphasized, various mathematics experience objects are being developed. It is also used through various after-school activities in the school. However, there are insufficient cases in which a mathematics experience teaching tools is developed and used as a tool for explaining mathematics concepts in mathematics classrooms. Also, the mathematical background of the mathematics experience teaching tools used by students is unclear. For this reason, the mathematical understanding of the toolst for mathematics experience is also very insufficient.

Therefore, in this study, a development model is proposed as a systematic method for developing a mathematics experience teaching tools. Also, in this study, we developed 'the Great Common Divisor' mathematics experience teaching tool according to the development model. Through the model proposed through this study and the actual mathematics experience teaching tool, the development of various tools for mathematical experience will be practically implemented. In addition, it is expected that various tools for experiencing mathematics based on mathematical foundations will be developed.

* ZDM Classification : U63
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U60
* Key words : mathematics educational tools, experience teaching tools, greatest common divisor, educational teaching tools development model

## <부록. 활동지>

1. 다음과 같은 방법으로, 56과 40의 최대공약수를 구해보자.

① 소인수분해를 이용해 보자

$56 = (\ )^{(\ )} \times (\ )^{(\ )}7$

$40 = (\ )^{(\ )} \times (\ )^{(\ )}$

∴ 최대공약수 :

② 나눗셈을 이용해보자

| | 56 | 40 |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

∴ 최대공약수 :

2. 또 다른 방법은 없을까?
(1) 직접 만든 교구로 56과 40의 최대공약수를 구해보자.

| 초기 값 | | (식) | 결과 값 | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | | 큰 수 | 작은 수 |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

최대공약수 :

(2) 위와 같은 방법으로, 56과 32의 최대공약수를 구해보자. 또, 교구를 이용해서 다시 한 번 구해보자.

| 초기 값 | | (식) | 결과 값 | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | | 큰 수 | 작은 수 |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

최대공약수 :

(3) 자신이 생각한 두 수를 적고, 갑.최.띠 교구로 최대공약수를 구해보자. 내가 생각한 두 수 ( ), ( )

(4) 이제 교구없이 369와 164의 최대공약수를 구해보자.

| 초기 값 | | (식) | 결과 값 | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | | 큰 수 | 작은 수 |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

※ 369와 164를 소인수분해로 최대공약수를 구해보자.

$369 = (\ )^{(\ )} \times (\ )^{(\ )}$

$164 = (\ )^{(\ )} \times (\ )^{(\ )}$

∴ 최대공약수 :

(5) 교구를 이용하는 방법은 소인수분해 방법 및 직접 나누는 방법과 비교해서 어떤 점이 좋고, 불편한가?

| 좋은 점 | 불편한 점 |
|---|---|
| | |

3. 두 정수 $a, b$의 최대공약수와 $a-b$와 $b$의 최대공약수는 같다. 즉, 56과 40최대공약수는 56-40=16과 40의 최대공약수와 같다. 이유가 뭘까요? 자신의 생각을 기록해 봅시다.